MATHEMATIQUE APPLIQUEE 1
B. LE BAILLY

Bachelier en Informatique et Systèmes

Année Académique 2023-2024

A. Opérations élémentaires sur les nombres réels

1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Dans ce cours, nous travaillerons avec quatre types de nombres que nous rappelons brièvement.

- Les **entiers naturels** 0, 1, 2, 3, … L'ensemble de ces nombres se désigne par la lettre $\mathbb{N}$.

- Les **entiers rationnels** (ou entiers relatifs) : ce sont les nombres …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … L'ensemble de ces nombres se désigne par la lettre $\mathbb{Z}$[1].

- Les **nombres rationnels** : ce sont les quotients $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers rationnels avec q≠0. L'ensemble des nombres rationnels se désigne par la lettre $\mathbb{Q}$[2].

- Les **nombres réels** : nous définirons un tel nombre comme un nombre ayant un développement décimal illimité, précédé d'un signe + (que l'on n'écrit pas) ou d'un signe – (que l'on mentionnera explicitement). L'ensemble des nombres réels se désigne par la lettre $\mathbb{R}$.

Les nombres rationnels sont des nombres réels particuliers. Leur développement décimal est périodique, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, un bloc de chiffres s'y reproduit indéfiniment. Par exemple, $\frac{1}{3} = 0{,}33333333333\ldots$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ ou encore $\frac{767}{210} = 3{,}65238095238095238095\ldots$ Les nombres réels non rationnels sont dits **irrationnels** comme par exemple $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$, $e = 2{,}718281828459045\ldots$ ou encore $-\pi = -3{,}141592653589793\ldots$ Le développement décimal des nombres irrationnels n'est jamais périodique. Nous avons donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il nous sera parfois nécessaire de considérer chacun de ces ensembles privé du nombre 0. A cette fin, nous définissons :

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$,$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, 2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$,$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$,$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Notons que pour retirer un ou plusieurs autres nombres que le zéro de ces différents ensembles, il faut alors utiliser la notation de différence entre deux ensembles. Ainsi, $\mathbb{R}_0 \setminus \{1,2\}$ représente l'ensemble de tous les nombres réels non nuls sauf les naturels 1 et 2. $\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \{\dots, -3, 2, 0, 2, 3, \dots\}$, etc

[1] Initiale du mot allemand « Zahl » signifiant nombre
[2] Initiale du mot « Quotient »

2. Opérations sur les fractions

Toute fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient de deux nombres réels a et b, a est appelé le **numérateur** et b le **dénominateur** ($\neq 0$). Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad ,b,d \neq 0$ Exemple : $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{15}$
- $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad ,b,d \neq 0$ Exemple : $\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$
- $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \quad ,b,c,d \neq 0$ Exemple : $\frac{1}{3}:\frac{2}{5}=\frac{5}{6}$
- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad ,b,d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ad=bc$ Exemple : $\frac{1}{3}=\frac{x}{6} \Rightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$

3. Produits remarquables

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- a^2+b^2 ne se factorise pas
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

4. Exposants et radicaux

4.1 Puissances à exposants entiers

De manière générale, les propriétés suivantes sont satisfaites pour $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $a^0=1$ Exemple : $10^0=2^0=(-8)^0=1$
- $a^1=a$ Exemple : $12^1=12$
- $a^n=a.a.a. \quad ... \quad .a$ (n fois, $n \in \mathbb{N}_0$) Exemple : $3^4=3.3.3.3=81$, $\pi^2=\pi.\pi$
- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$ Exemple : $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$
- $0^n=0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ Exemple : $0^3=0^{100}=0$

Les puissances entières vérifient les propriétés suivantes ($a, b \in \mathbb{R}_0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$) :

- $(a.b)^m = a^m. b^m$ Exemple : $(2.3)^3 = 2^3.3^3 = 216$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ Exemple : $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$ Exemple : $(10^2)^3 = 10^6$
- $a^m.a^n = a^{m+n}$ Exemple : $2^3.2^2 = 2^5 = 32$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^m.a^{-n} = a^{m-n}$ Exemple : $\frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

4.2 Racines *n*-ième d'un nombre réel

La racine *n*-ième ($n \in \mathbb{N}_0$) d'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est le réel *b* dont la *n*-ième puissance est *a* :

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

- Si n est pair et $a \geq 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe. Exemple : $\sqrt[4]{16} = 2$ puisque $2^4 = 16$
- Si n est pair et $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Exemple : $\sqrt{-2} \nexists$
- Si n est impair et $a \geq 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ puisque $2^3 = 8$
- Si n est impair et $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe et est notée $-\sqrt[n]{-a}$.

  Exemple : $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -8$

Les racines *n*-ièmes vérifient les propriétés suivantes ($a, b \in \mathbb{R}^+$ et $m, n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$) :

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ Exemple : $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{3} = 2\,.\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$ Exemple : $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ Exemple : $\sqrt[3]{49} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^2$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ Exemple : $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$

La propriété suivante n'est cependant pas satisfaite ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$ et $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$) :

- $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ Exemple : $\sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$

Nous prenons la convention de ne pas laisser de radicaux au dénominateur d'une fraction. Pour rendre rationnel le dénominateur en question, il faudra alors se rappeler que

$$\sqrt{a}\,.\sqrt{a} = a \quad , \quad \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,\right) = a - b.$$

Si le dénominateur de la fraction est de la forme $a\sqrt{b}$, on multiplie alors numérateur et dénominateur de la fraction par $\sqrt{b}$. Ainsi, $\frac{1+\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{8}).\sqrt{2}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+4}{6}$.

Si le dénominateur de la fraction est de la forme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, on multiplie alors numérateur et dénominateur de la fraction par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, qu'on appelle **binôme conjugué** du binôme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}).(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{-3} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$.

4.3 Puissances à exposants rationnels

Par définition, nous posons pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $m, n \in \mathbb{N}_0$ ($n \neq 1$) :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{et } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \ .$$

Ainsi, $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$ et $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$.

Les propriétés énoncées au paragraphe 4.1 pour des puissances à exposants entiers restent valables pour des exposants rationnels, à savoir ($a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in \mathbb{Q}$) :

- $(a.b)^p = a^p.\, b^p$
- $(a^p)^q = a^{p.q}$
- $a^p.a^q = a^{p+q}$

Ainsi, ces différentes propriétés permettent de simplifier l'expression $\frac{x^{\frac{7}{3}}\ y^{-\frac{3}{2}}\ \sqrt{y}}{x^2}$ en $\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$.

5. Exercices

Soient $a, b, c \in I\!R_0^+$, $n \in I\!N$, $\alpha \in \mathbb{Z}_0$.

1. Calculer $10^4 \cdot 10^{-2}$, $(10^3)^{-4}$, $(-5)^0$
2. Écrire les expressions suivantes avec des exposants positifs
$$a^2 \cdot a^{-4} , \qquad \frac{a^{-5}}{b^{-5}} , \qquad (0.1)^{-5} , \qquad 5^{-4} , \qquad 10^{-6}$$
3. Simplifier les expressions suivantes :
$$\left(\frac{a^2b^3c^{-2}}{a^3b^2c}\right)^{-1} , \qquad \frac{a^{-2\alpha}}{a^{3\alpha}} , \qquad 2^{\alpha} \cdot 2^{1-\alpha}$$
4. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt[n]{\frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}}} , \qquad \sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{2n}b^{3n}}}$$
5. Calculer
$$\sqrt[8]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a} , \qquad \frac{\sqrt[4]{4a^4}}{\sqrt[3]{2a}}$$
6. Calculer
$$9^{-1/2} , \qquad \left(\frac{25}{16}\right)^{1/4} , \qquad 36^{5/2}$$
7. Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :
$$\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{10} - 1}{\sqrt{5}} , \qquad \frac{\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2}}$$
8. Simplifier les expressions suivantes :
(a) $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$ (b) $\left(\sqrt{a\sqrt[5]{a^8}}\right)^4$
9. Effectuer les opérations suivantes :
$$\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$$

6. Solutions

1. 10^2 ; 10^{-12} ; 1 .
2. $\frac{1}{a^2}$; $\frac{b^5}{a^5}$; 10^5 ; $\frac{1}{5^4}$; $\frac{1}{10^6}$.
3. $\frac{ac^3}{b}$; $\frac{1}{a^{5\alpha}}$; 2 .
4. $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $b \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
5. $a \cdot \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
6. $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 6^5 .
7. $\frac{10 - 10\sqrt{2} - \sqrt{5}}{5}$; $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$;
8. (a) $\frac{1}{4}$; (b) $a^5 \cdot \sqrt[5]{a}$;
9. $9\sqrt[3]{7}$;

B. Relations/Fonctions

1. Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux ensembles *A* et *B* est l'ensemble des **couples** dont le premier élément est dans *A* et le second dans *B*. On le note $\boldsymbol{A \times B}$ et on lit « produit cartésien de *A* par *B* ». Autrement dit, $\boldsymbol{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}}$. Dans un couple, l'ordre des éléments a de l'importance, ce qui n'est pas le cas dans une paire qui est un ensemble formé de 2 éléments.

Exemples :

- Si *A* = {1,2} et *B* = {a,b,c}, alors $\boldsymbol{A \times B}$ = { (1,a) , (1,b) , (1,c) , (2,a) , (2,b) , (2,c) } alors que $\boldsymbol{B \times A}$ = { (a,1) , (a,2) , (b,1) , (b,2) , (c,1) , (c,2) }
- $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$

2. Relations binaires

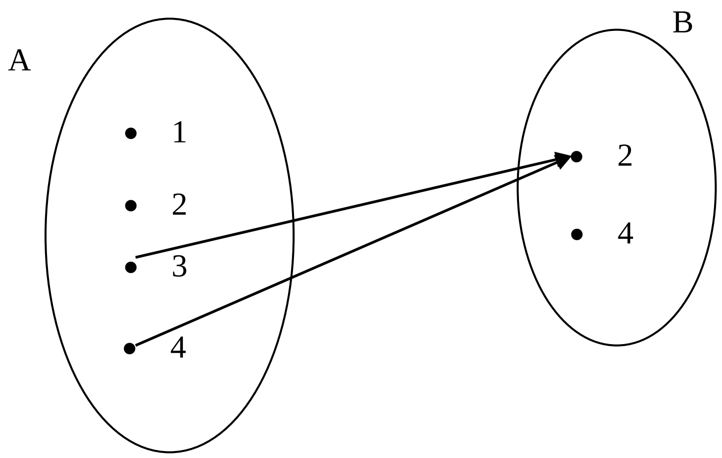
2.1 Définition

R est une **relation binaire entre deux ensembles *A* et *B*** si *R* est un sous-ensemble du produit cartésien $\boldsymbol{A \times B}$. On appelle $\boldsymbol{A \times B}$ le **schéma** de la relation *R*. Pour signifier que $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$ sont reliés par *R*, on note $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{x\,R\,y}$ ou $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Exemple : Soit les ensembles *A* = {1,2,3,4} et *B* = {2,4}. La relation *R* « est strictement plus grand que » est une relation entre *A* et *B* car $\boldsymbol{R = \{(3, 2), (4, 2)\}}$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{A \times B} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{4}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{4}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{4}), (\mathbf{4}, \mathbf{2}), (\mathbf{4}, \mathbf{4})\}$.

2.2 Représentation

Les relations binaires sont représentées par un **diagramme de Venn** ou **diagramme sagittal**. Pour l'exemple ci-dessus, le diagramme sagittal est :



2.3 Propriétés

Soit *R*, une relation entre deux ensembles *A* et *B*. Le tableau suivant nomme, définit et illustre sur l'exemple les différentes propriétés que cette relation peut posséder.

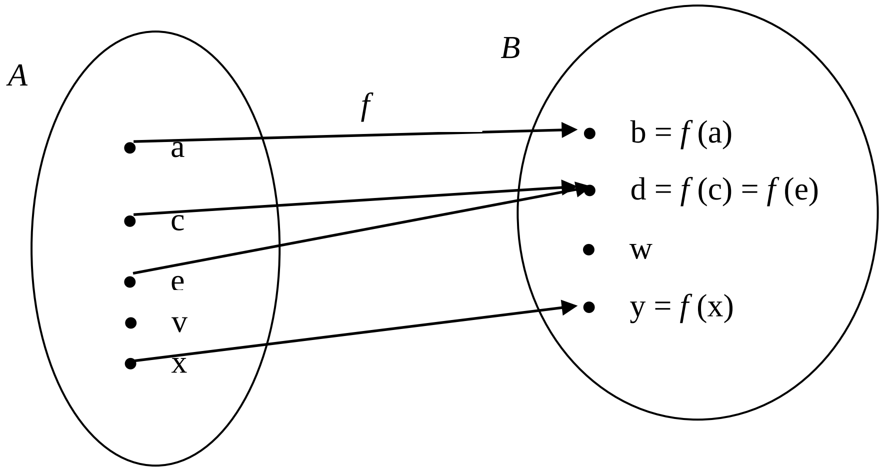
Nom de la propriété	Définition	Exemple
R est **injective**	Tout élément de ***B*** est l'image **d'au plus** un élément de ***A***	NON
R est **surjective**	Tout élément de ***B*** est l'image **d'au moins** un élément de ***A***	NON
R est **bijective**	Tout élément de ***B*** est l'image **d'un et un seul** élément de ***A***	NON
R est **fonctionnelle**	Tout élément de ***A*** est envoyé sur **au plus** un élément de ***B***	OUI
R est **partout définie**	Tout élément de ***A*** est envoyé sur **un et un seul** élément de ***B***	NON

Une relation bijective est donc une relation à la fois injective et surjective.

3. Liens avec la notion mathématique de fonction

3.1 Définition

Une **relation binaire** entre deux ensembles *A* et *B* qui est **fonctionnelle**, c'est-à-dire telle que tout élément de *A* est envoyé sur au plus un élément de *B* est appelée plus communément une **fonction**. Elle est notée $\boldsymbol{f}$ et est représentée par un diagramme sagittal, comme dans l'exemple ci-dessous illustrant une fonction *f* de *A* vers *B* qui n'est pas partout définie et qui n'est ni injective ni surjective.



y = *f* (x) se lit « $\boldsymbol{y}$ **est égal à** $\boldsymbol{f}$ **de** $\boldsymbol{x}$ » et représente la valeur de *f* en *x* ou encore l'image de *x* par *f*. L'ensemble *A* est appelé le **domaine** de la fonction *f*, l'ensemble *B* est appelé le **codomaine**. L'ensemble des éléments de *A* qui sont envoyés par la fonction *f* sur un élément de *B* est appelé le **domaine de définition de** $\boldsymbol{f}$ et est noté ***Dom f***. Autrement dit, $\boldsymbol{Dom\,f = \{\,x\ \in A\ |\ \exists\ y\ \in B : y = f(x)\}}$. L'inclusion suivante est toujours satisfaite : $\boldsymbol{Dom\,f\ \subseteq A}$. L'ensemble des éléments de *B* qui sont atteints par la fonction *f* est appelé l'**image de** $\boldsymbol{f}$ et est noté ***Im f***. Autrement dit, $\boldsymbol{Im\,f = \{\,y\ \in B\ |\ \exists\ x\ \in A : y = f(x)\}}$. L'inclusion suivante est toujours satisfaite : $\boldsymbol{Im\,f\ \subseteq B}$.

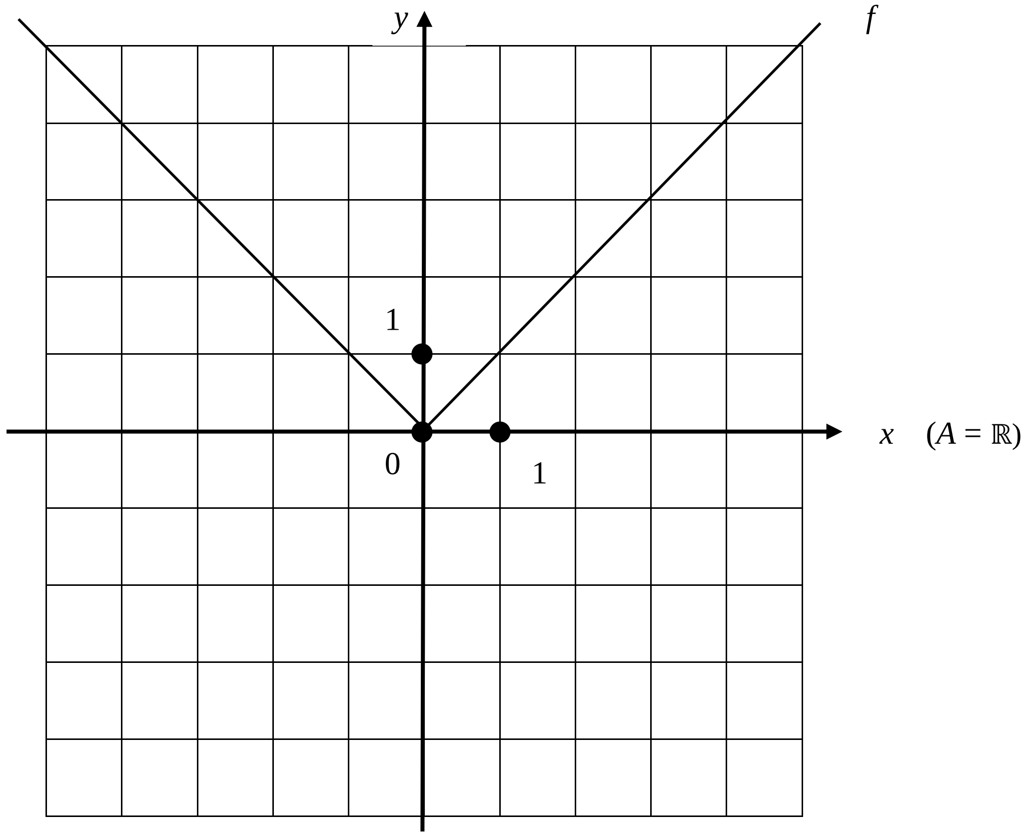
Si la relation fonctionnelle entre *A* et *B* est en plus une relation partout définie, l'égalité $\boldsymbol{Dom\,f = A}$ est satisfaite puisque tout élément de *A* est envoyé sur un et un seul élément de *B*. Dans ce cas, on dit que la **fonction** *f* est **partout définie** ou encore que *f* est une **application**.

Si la relation fonctionnelle entre *A* et *B* est en plus une relation surjective, l'égalité $\boldsymbol{Im\,f = B}$ est satisfaite puisque tout élément de *B* est l'image d'au moins un élément de *A*.

3.2 Le cas particulier des fonctions réelles de variables réelles

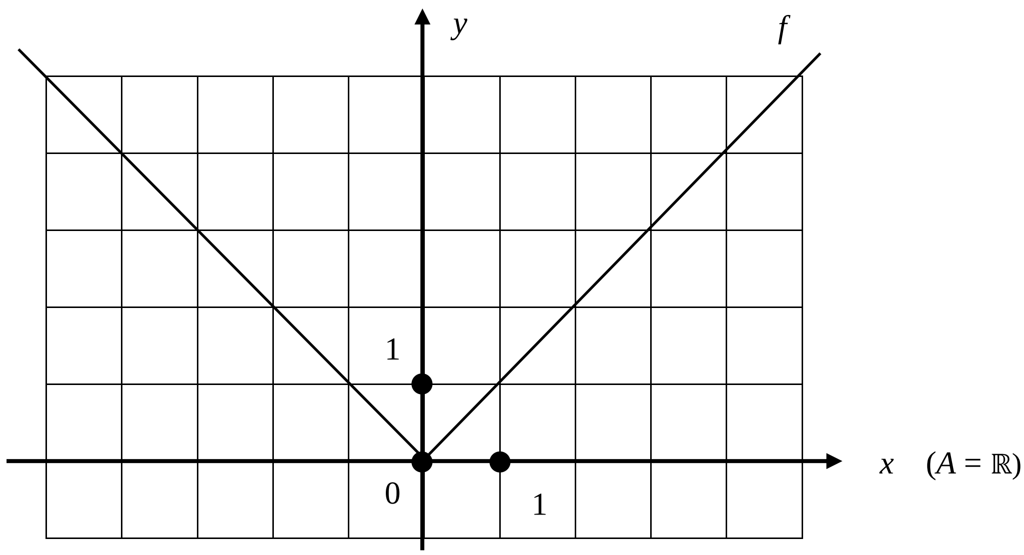
Dans ce cas, nous travaillerons toujours avec une relation fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction, définie sur des ensembles *A* et *B* inclus ou égaux à l'ensemble des nombres réels ℝ. On parle alors de **fonction réelle d'une variable réelle**. On note $\boldsymbol{f : A\ \subseteq \mathbb{R}\ \to B\ \subseteq \mathbb{R}\ ;\ x \rightsquigarrow y = f(x)}$. Dans ce cas, *f*(*x*) est appelée l'**expression analytique** de la fonction *f* et cette fonction est représentée par son **graphe cartésien** ou **graphique** dans le plan à deux dimensions $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, le graphique ci-dessous est le graphe cartésien de la fonction « **Valeur Absolue** » définie par $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \;\to \mathbb{R}\;;\; \boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}$



($B = \mathbb{R}$)

Cette fonction est en fait une application puisqu'elle est partout définie (*Dom f* = A = ℝ). Cette fonction n'est pas injective puisque tout élément de B = ℝ n'est pas l'image d'au plus un élément de A = ℝ (ainsi, y=2 est l'image de x=2 et x=-2) et elle n'est pas surjective puisque tout élément de B = ℝ n'est pas l'image d'au moins un élément de A = ℝ (les réels négatifs n'étant jamais atteints par f). Si l'application f avait été définie par $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \;\to \mathbb{R}^+\;;\; \boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}$, cette application, dont le graphe cartésien est représenté ci-après, devient alors surjective.



($B = \mathbb{R}^+$)

3.3 Propriétés graphiques des fonctions réelles de variables réelles

Ce paragraphe illustre comment voir si un graphique donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ correspond à celui d'une fonction, d'une fonction partout définie, c'est-à-dire d'une application, d'une fonction injective et/ou surjective et/ou bijective.

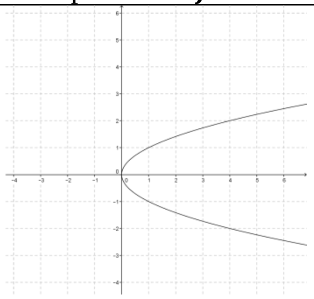
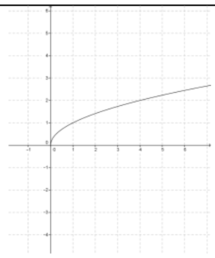
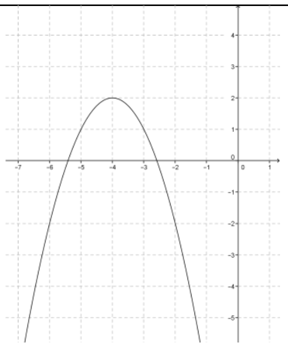
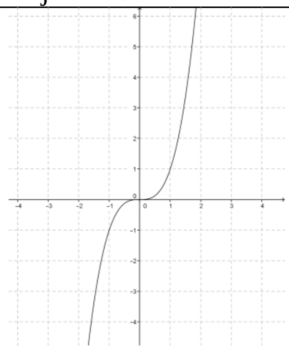
Un graphe cartésien donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ est celui d'une **fonction** *f* si toute droite verticale coupe le graphique en au plus un point. Un graphe cartésien donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ est celui d'une **application** *f* si toute droite verticale coupe le graphique en un et un seul point. Le domaine de définition d'une fonction *f* réelle d'une variable réelle se trouve donc sur l'axe *0x*. Si le domaine de définition de *f* est égal à *A*, le domaine de la fonction, alors celle-ci est partout définie et *f* est une application.

Un graphe cartésien donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ est celui d'une **fonction** *f* **injective** si toute droite horizontale coupe le graphique en au plus un point. Autrement dit, analytiquement parlant, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une fonction injective $\Leftrightarrow$ [$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Dom\, f} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$] $\Leftrightarrow$ [$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Dom\, f} : \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$].

Un graphe cartésien donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ est celui d'une **fonction** *f* **surjective** si tous les points du codomaine *B* sont atteints au moins une fois par *f* ou encore si toute droite horizontale coupe le graphique en au moins un point. Autrement dit, analytiquement parlant, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une fonction surjective $\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} : \exists\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. L'image d'une fonction *f* réelle d'une variable réelle se trouve donc sur l'axe *0y*. Si l'image de *f* est égale à *B*, le codomaine de la fonction, alors celle-ci est surjective.

Un graphe cartésien donné dans le plan $\mathbb{R}^2$ est celui d'une **fonction** *f* **bijective** s'il correspond au graphe cartésien d'une fonction *f* à la fois injective et surjective. Autrement dit, analytiquement parlant, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une fonction bijective $\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} : \exists!\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. Ou encore, graphiquement parlant, si toute droite horizontale coupe le graphique en un et un seul point.

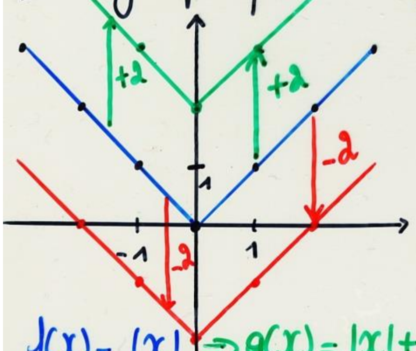
Exemples : Soit $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, représentée successivement par les graphes suivants :

 Ce graphe n'est pas celui d'une fonction.	 Ce graphe est celui d'une fonction injective mais qui n'est pas une application et qui n'est pas surjective.
 Ce graphe est celui d'une application ni surjective ni injective.	 Ce graphe est celui d'une application bijective.

3.4 Manipulations graphiques des fonctions réelles de variables réelles

A partir du graphique de $y = f(x)$, construire

1) le graphique de $y = g(x) = f(x) \pm c$, où $c \in \mathbb{R}_0^+$



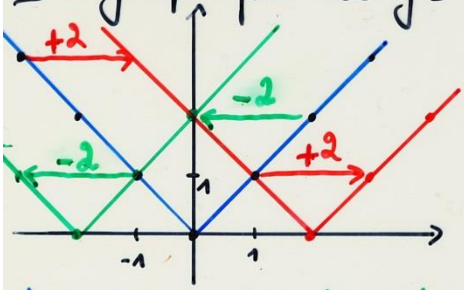
$f(x) = |x| \Rightarrow g(x) = |x| + 2$

$\Rightarrow g(x) = |x| - 2$

$y = f(x) + c \rightarrow$ Relever la courbe de c unités (ajouter c à toutes les ordonnées de G_f)

$y = f(x) - c \rightarrow$ Descendre la courbe de c unités (retirer c à toutes les ordonnées de G_f)

2) le graphique de $y = g(x) = f(x \pm c)$, où $c \in \mathbb{R}_0^+$



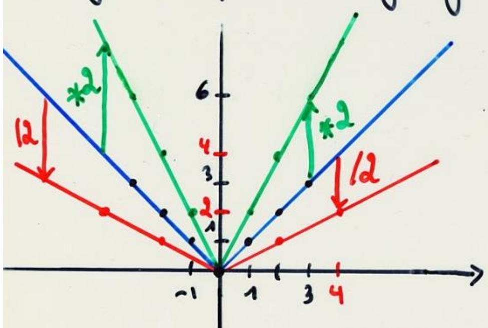
$f(x) = |x| \Rightarrow g(x) = |x+2|$

$\Rightarrow g(x) = |x-2|$

$y = f(x+c) \rightarrow$ Déplacer la courbe de c unités vers la gauche (soustraire c à toutes les abscisses de G_f)

$y = f(x-c) \rightarrow$ Déplacer la courbe de c unités vers la droite (ajouter c à toutes les abscisses de G_f)

3) le graphique de $y = g(x) = c \cdot f(x)$ ou $\frac{f(x)}{c}$, où $c \in \mathbb{R}_0$



$f(x) = |x| \Rightarrow g(x) = 2 \cdot |x|$

$\Rightarrow g(x) = \frac{|x|}{2}$

$y = c \cdot f(x)$

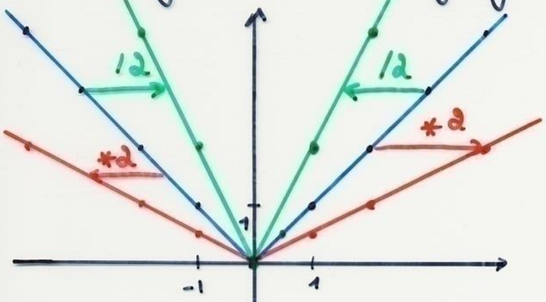
$\rightarrow$ Multiplier par c toutes les ordonnées de G_f.

$y = \frac{f(x)}{c}$

$\rightarrow$ Diviser par c toutes les ordonnées de G_f

15.

4) le graphique de $y = g(x) = f(c.x)$ ou $f\left(\frac{x}{c}\right)$, où $c \in \mathbb{R}_0$



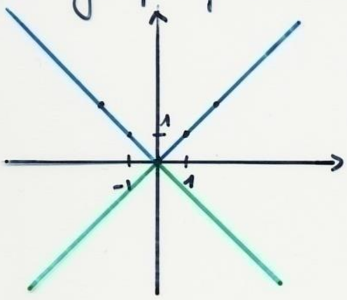
$y = f(c.x) \rightarrow$ Diviser par c toutes les abscisses de Gf.

$y = f\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow$ Multiplier par c toutes les abscisses de Gf

$f(x) = |x| \Rightarrow g(x) = |2x|$

$\Rightarrow g(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$

5) le graphique de $y = -f(x)$



$f(x) = |x|$

$\Downarrow$

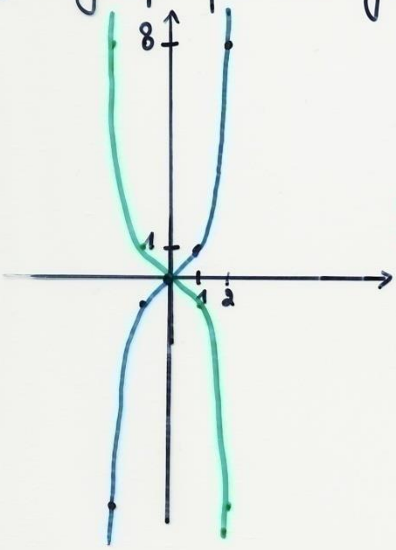
$g(x) = -|x|$

$y = -f(x)$

$\Downarrow$

Dessiner la courbe symétrique en prenant Ox comme axe de symétrie

6) le graphique de $y = f(-x)$



$f(x) = x^3$

$\Downarrow$

$g(x) = (-x)^3$

$= -x^3$

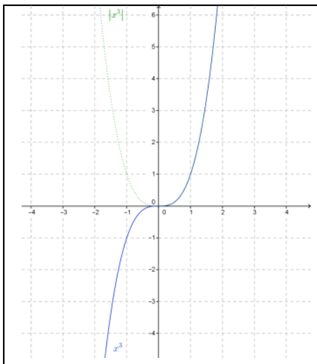
$y = f(-x)$

$\Downarrow$

Dessiner la courbe symétrique en prenant Oy comme axe de symétrie.

11

7) le graphique de y=|f(x)|

	$f(x) = x^3$ ⬇ $g(x) = \lvert x^3 \rvert$	$y = \lvert f(x) \rvert$ ⬇ Dessiner le symétrique de la partie négative de la courbe en prenant Ox comme axe de symétrie, la partie positive restant inchangée.

3.5 Parité des fonctions réelles de variables réelles

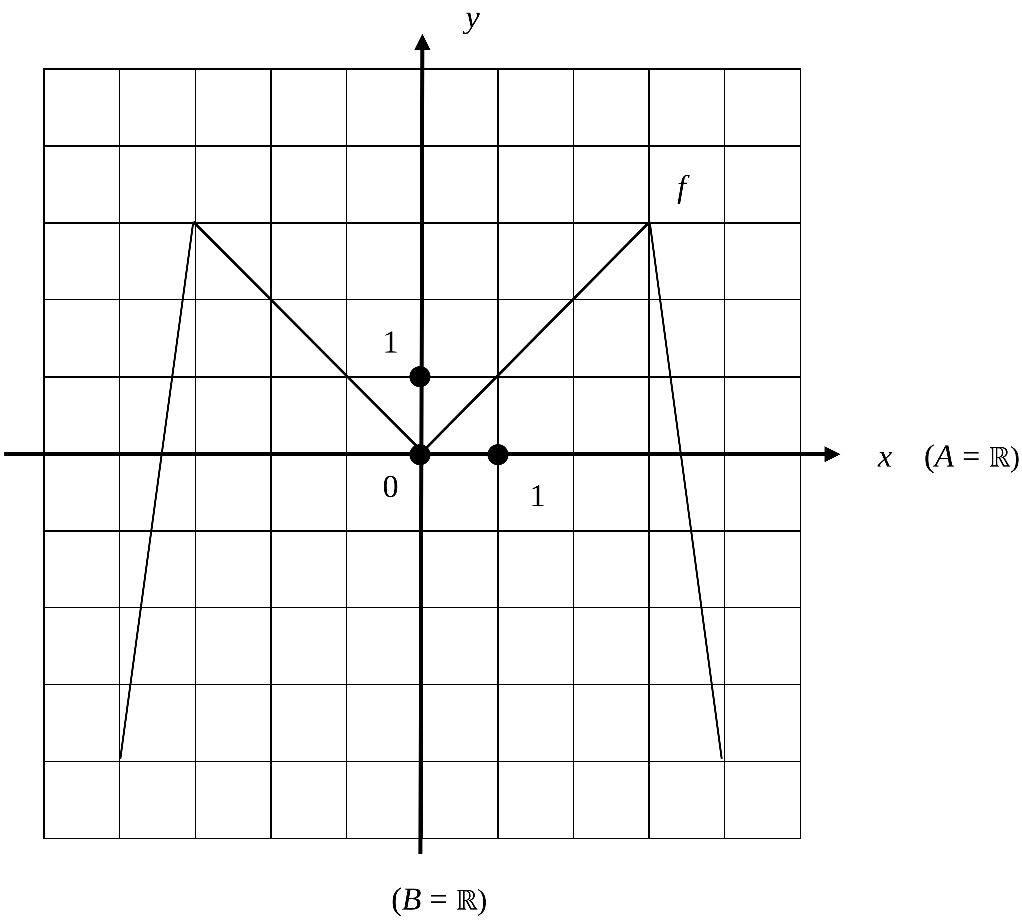
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une **fonction paire**

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf} : \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$\Leftrightarrow$L'axe *Oy* est un axe de symétrie orthogonale du graphique de *f*.

<u>Exemples :</u>

- $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$
- $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}\ ;\ \boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, représentée par le graphe cartésien suivant :



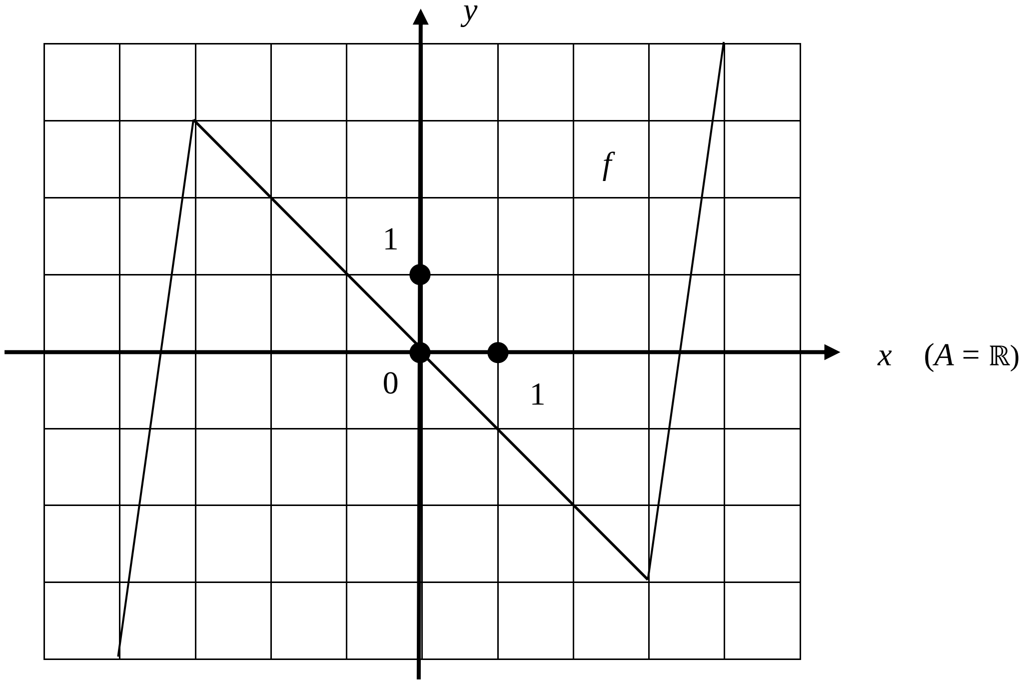
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \ \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est une **fonction impaire**

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf} : \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$\Leftrightarrow$L'origine *O* est un centre de symétrie centrale du graphique de *f.*

Exemples :

- $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \ \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$
- $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R} \ \to \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \leadsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, représentée par le graphe cartésien suivant :



Toute fonction *f* non nulle ne peut présenter les deux parités en même temps.

3.6 Fonctions réciproques de fonctions réelles de variables réelles

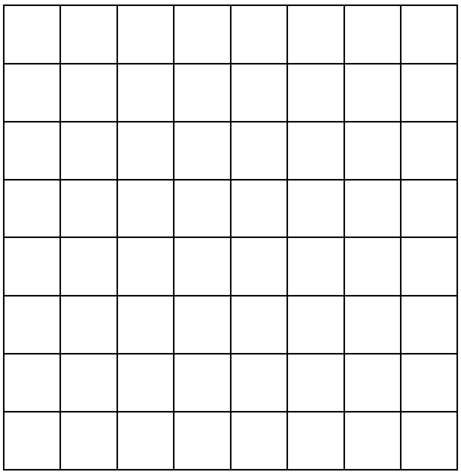
Les fonctions réelles d'une variable réelle injectives sont dites inversibles. La connaissance de *f*(*x*) permet de déduire *x*. Cette opération consiste à inverser la fonction *f* et à calculer la fonction réciproque de la fonction *f*. Autrement dit :

Si $f : Dom\,f \subseteq \mathbb{R} \ \to Im\,f \subseteq \mathbb{R} ; x \leadsto y = f(x)$ est injective, alors f est **inversible**. Elle admet une **fonction réciproque** notée f^{-1} et définie par $\boldsymbol{f^{-1}} : \boldsymbol{Im\,f} \subseteq \mathbb{R} \ \to \boldsymbol{Dom\,f} \subseteq \mathbb{R} ; \boldsymbol{y} \leadsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.**

Les domaines de définition et les images de la fonction *f* et de sa fonction réciproque f^{-1} sont donc inversés et les graphes cartésiens de *f* et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Pour trouver l'expression analytique de $x = f^{-1}(y)$ à partir de celle de $y = f(x)$, il faut **isoler *x* dans l'expression $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.

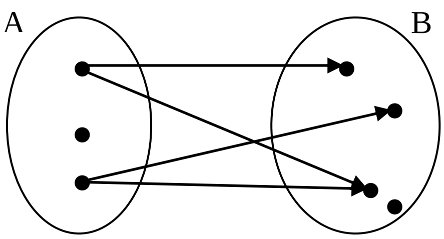
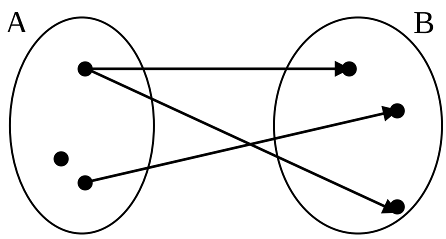
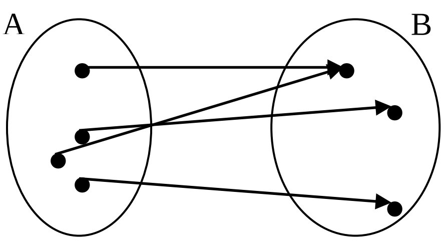
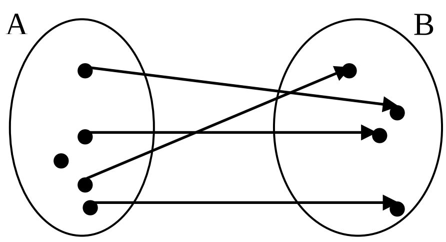
Contre-Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$; $x \leadsto y = f(x) = x^2$ n'admet pas de fonction réciproque.

Exemple : Fonctions carrée et racine carré $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; $x \rightsquigarrow y = f(x) = x^2$ et $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; $y \rightsquigarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ [3]

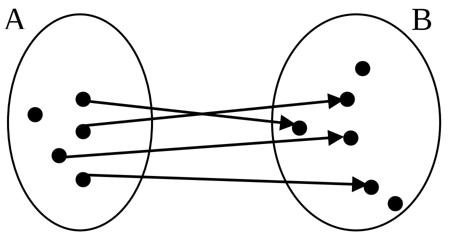
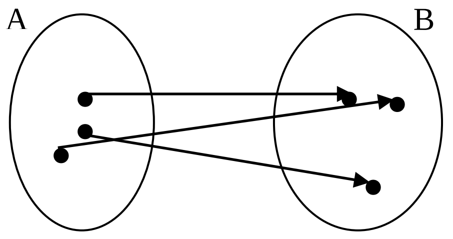


4.Exercices

1) Soient deux ensembles A et B et des relations R entre ces deux ensembles, représentées par les diagrammes sagittaux ci-dessous. Ces relations sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? fonctionnelles ? Ces relations sont-elles des applications ?

a) 	b) 
c) 	d) 

[3] En général, f^{-1} sera renotée dans le sens “classique”, c’est-à-dire, $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+; x \rightsquigarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour pouvoir la représenter sur le même graphique que *f*(x).

e)	f)
	

2) Représenter chacune des fonctions usuelles suivantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \rightsquigarrow y = f(x)$ et préciser pour chacune d'elle :

   a) L'expression analytique de *f*.
   b) Dom*f*, Im*f* et si *f* est une application ?
   c) Si *f* est injective ? surjective ? bijective ?
   d) Si *f* est paire et/ou impaire ?

   1) Fonction constante
   2) Fonction identité
   3) Fonction carré
   4) Fonction racine carrée
   5) Fonction cube
   6) Fonction racine cubique
   7) Fonction valeur absolue
   8) Fonction inverse

3) Vérifier analytiquement si les fonctions suivantes sont paires et/ou impaires :

   a) $f(x) = 4x^4 - 2$.

   b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

   c) $f(x) = \dfrac{-1}{3x}$.

   d) $f(x) = (x-1)^2$.

4) A partir du graphe cartésien de la fonction cube, notée *f*, tracer le graphe cartésien des fonctions suivantes en indiquant les manipulations graphiques effectuées. Préciser l'expression analytique des fonctions représentées et leurs éventuelles parités.

   a) $f_1 : x \mapsto f(x) + 2$.
   b) $f_2 : x \mapsto 2f(x)$.
   c) $f_3 : x \mapsto f(x+2)$.
   d) $f_4 : x \mapsto |f(x)|$.

5) A partir du graphe cartésien de la fonction racine carrée, notée *h*, tracer le graphe cartésien des fonctions suivantes en indiquant les manipulations graphiques effectuées. Préciser le domaine de définition des fonctions représentées et leurs éventuelles parités.

a) $h_1 : x \mapsto h(x) + 2$.
b) $h_2 : x \mapsto 3h(x)$.
c) $h_3 : x \mapsto h(x+4)$.
d) $h_4 : x \mapsto -h(x)$.

6) A partir du graphe cartésien de la fonction valeur absolue, notée *v*, tracer le graphe cartésien des fonctions suivantes en indiquant les manipulations graphiques effectuées. Préciser l'expression analytique des fonctions représentées et leurs éventuelles parités.

a) $v_1 : x \mapsto v(x) - 2$.
b) $v_2 : x \mapsto \frac{1}{2}v(x)$.
c) $v_3 : x \mapsto -v(x)$.
d) $v_4 : x \mapsto 2v(x) - 1$.

7) A partir du graphe d'une fonction usuelle à préciser, construire celui des fonctions suivantes, en indiquant le type de manipulations effectuées :

a) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$.
b) $y = 3(x-2)^3$.
c) $y = 2x + 3$.
d) $y = |x-2| + 3$.
e) $y = |2x|$.

8) Après avoir calculé les domaines de définition et ensembles-image des fonctions suivantes, calculer (graphiquement et algébriquement) leurs fonctions réciproques. Calculer également leurs domaines de définition et ensembles-image.

a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$.
b) $f(x) = x^3$.
c) $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$.
d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.
e) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

9) Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x)=x^2+1$ ainsi que sa réciproque. Cette réciproque est-elle une fonction ? Si non, déterminer une partie de $\mathfrak{R}$ sur laquelle elle le sera et calculer alors son expression analytique.

5. Solutions

1) a) pas injective, pas surjective, pas bijective, pas fonctionnelle, pas une application.
   b) injective, surjective, bijective, pas fonctionnelle, pas une application.
   c) pas injective, surjective, pas bijective, fonctionnelle, une application.
   d) injective, surjective, bijective, fonctionnelle, pas une application.
   e) injective, pas surjective, pas bijective, fonctionnelle, pas une application.
   f) injective, surjective, bijective, fonctionnelle, une application.

2) 1) a) f(x) = k où k ∈ $\mathbb{R}$, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\{k\}$, f est une application , c) f n'est pas injective, f n'est pas surjective, f n'est pas bijective, d) f est paire, f n'est pas impaire (sauf si k=0).

2) a) f(x) = x, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\mathbb{R}$, f est une application , c) f est injective, f est surjective, f est bijective, d) f n'est pas paire, f est impaire.

3) a) f(x) = x^2, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\mathbb{R}^+$, f est une application , c) f n'est pas injective, f n'est pas surjective, f n'est pas bijective, d) f est paire, f n'est pas impaire.

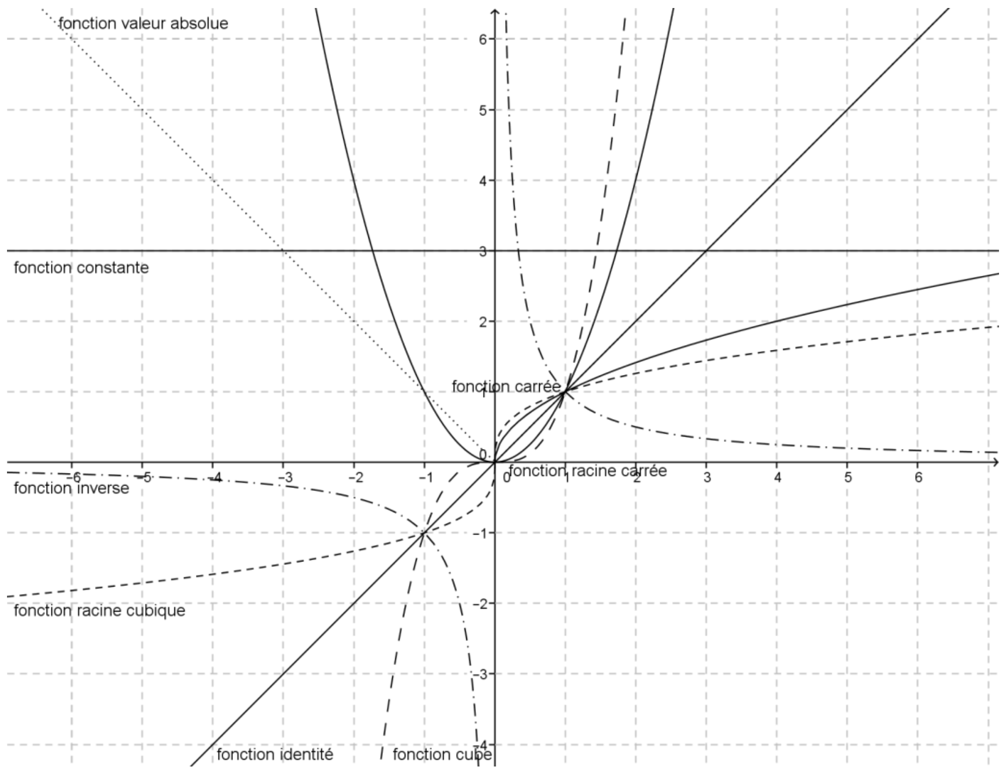
4) a) f(x) = $\sqrt{x}$, b) Domf = $\mathbb{R}^+$, Imf = $\mathbb{R}^+$, f n'est pas une application , c) f est injective, f n'est pas surjective, f n'est pas bijective, d) f n'est pas paire, f n'est pas impaire.

5) a) f(x) = x^3, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\mathbb{R}$, f est une application , c) f est injective, f est surjective, f est bijective, d) f n'est pas paire, f est impaire.

6) a) f(x) = $\sqrt[3]{x}$, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\mathbb{R}$, f est une application , c) f est injective, f est surjective, f est bijective, d) f n'est pas paire, f est impaire.

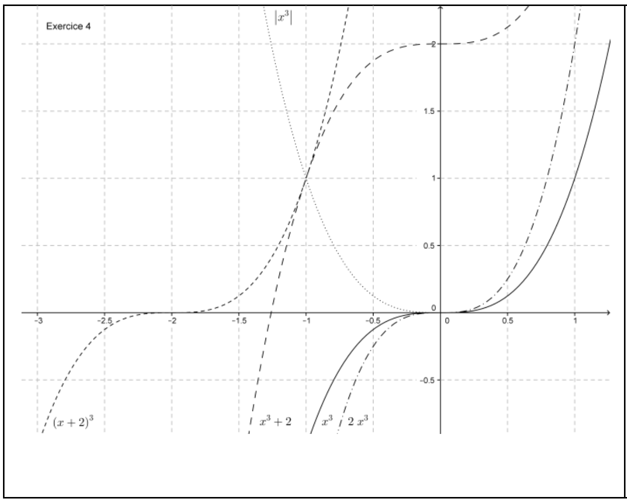
7) a) f(x) = |x|, b) Domf = $\mathbb{R}$, Imf = $\mathbb{R}^+$, f est une application , c) f n'est pas injective, f n'est pas surjective, f n'est pas bijective, d) f est paire, f n'est pas impaire.

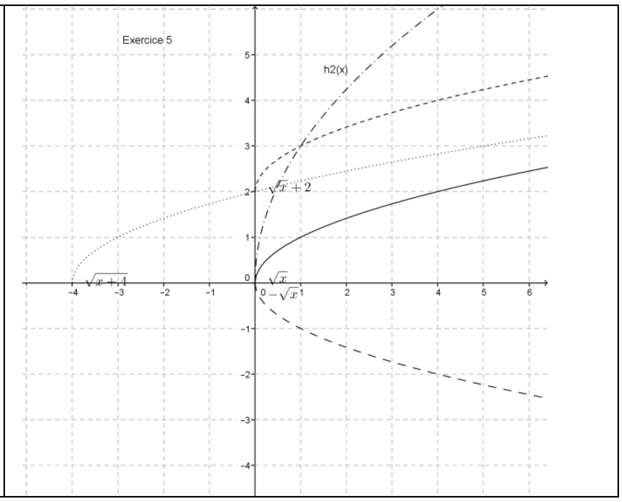
8) a) f(x) = $1/x$, b) Domf = $\mathbb{R}_0$, Imf = $\mathbb{R}_0$, f n'est pas une application , c) f est injective, f n'est pas surjective, f n'est pas bijective, d) f n'est pas paire, f est impaire.



3) a) paire.
   b) ni paire, ni impaire.
   c) impaire.
   d) ni paire, ni impaire.

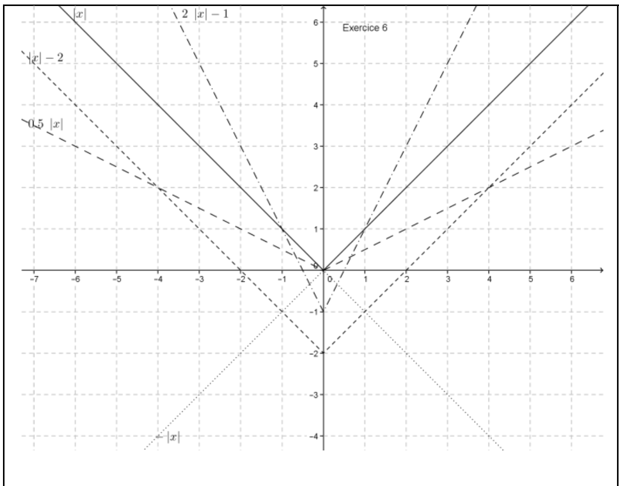
4) a) $f_1(x) = x^3 + 2$, f_1 n'est ni paire ni impaire, ajouter 2 aux ordonnées.
b) $f_2(x) = 2x^3$, f_2 est impaire, multiplier par 2 les ordonnées.
c) $f_3(x) = (x+2)^3$, f_3 n'est ni paire ni impaire, soustraire 2 aux abscisses.
d) $f_4(x) = |x^3|$, f_4 est paire, symétrie par rapport à l'axe Ox de la partie négative de la courbe

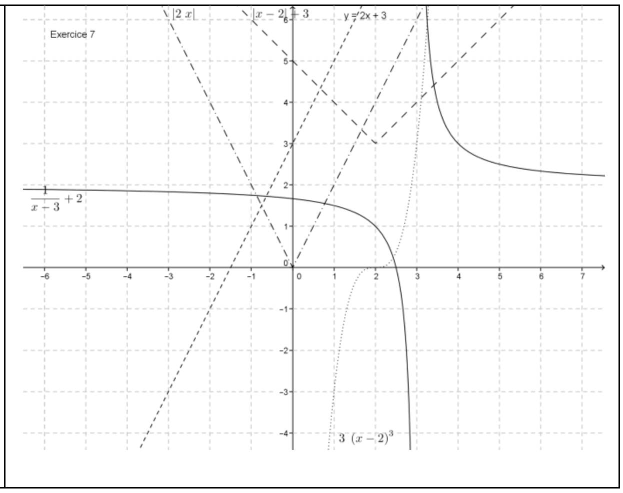




5) a) $h_1(x) = \sqrt{x} + 2$; $Domh_1 = \Re^+$; ajouter 2 aux ordonnées.
b) $h_2(x) = 3\sqrt{x}$; $Domh_2 = \Re^+$; multiplier par 3 les ordonnées.
c) $h_3(x) = \sqrt{x+4}$; $Domh_3 = [-4, \rightarrow[$; soustraire 4 aux abscisses.
d) $h_4(x) = -\sqrt{x}$; $Domh_4 = \Re^+$; symétrie par rapport à l'axe Ox.
Aucune parité vu les domaines de définition.

6) a) $v_1(x) = |x| - 2$; *paire* ; retirer 2 aux ordonnées.
b) $v_2(x) = \frac{1}{2}|x|$; *paire* ; diviser par 2 les ordonnées.
c) $v_3(x) = -|x|$; *paire* ; symétrie par rapport à l'axe Ox.
d) $v_4(x) = 2|x| - 1$; *paire* ; multiplier par 2 les ordonnées puis leur soustraire 1.





7) a) A partir de $f(x) = 1 / x$, ajouter 3 aux abscisses puis ajouter 2 aux ordonnées.

b) A partir de $f(x) = x^3$, ajouter 2 aux abscisses puis multiplier par 3 les ordonnées.

c) A partir de $f(x) = x$, multiplier par 2 les ordonnées et puis leur ajouter 3.

d) A partir de $f(x) = |x|$, ajouter 2 aux abscisses puis ajouter 3 aux ordonnées.

e) A partir de $f(x) = |x|$, diviser par 2 les abscisses.

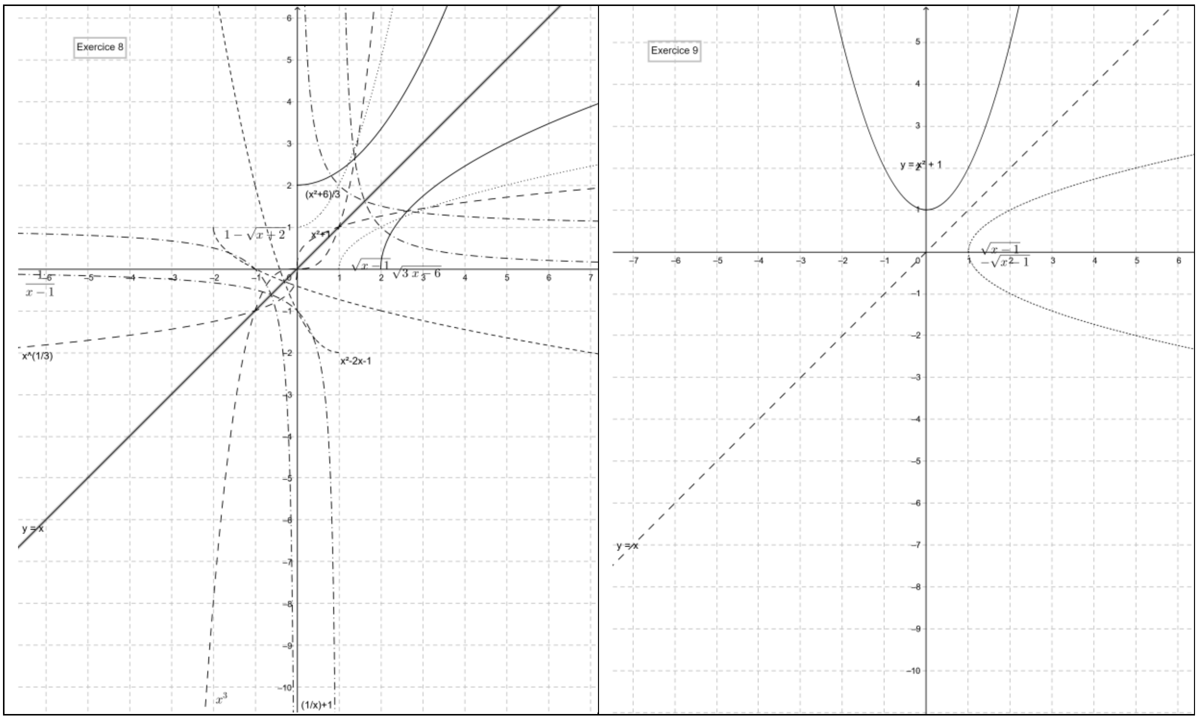
8) a) Dom$f$ = $[2,\rightarrow[$, Imf = $\Re^+$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+6}{3}$, Domf^{-1} = $\Re^+$, Imf^{-1} = $[2,\rightarrow[$.

b) Dom$f$ = $\Re$, Imf = $\Re$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, Domf^{-1} = $\Re$, Imf^{-1} = $\Re$.

c) Dom$f$ = $[-2,\rightarrow[$, Imf = $]\rightarrow,1]$, $f^{-1}(x) = x^2 - 2x - 1$, Domf^{-1} = $]\rightarrow,1]$, Imf^{-1} = $[-2,\rightarrow[$.

d) Dom$f$ = $[1,\rightarrow[$, Imf = $\Re^+$, $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, Domf^{-1} = $\Re^+$, Imf^{-1} = $[1,\rightarrow[$.

e) $Domf = \mathbb{R} \setminus \{1\}, Imf = \mathbb{R}_0 , f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1 , Domf^{-1} = \mathbb{R}_0 , Imf^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



9) La réciproque de f n'est pas une fonction (par le test de la droite verticale, un même x est envoyé sur deux y!) sauf si on limite f à $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$) auquel cas $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ (ou $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$)

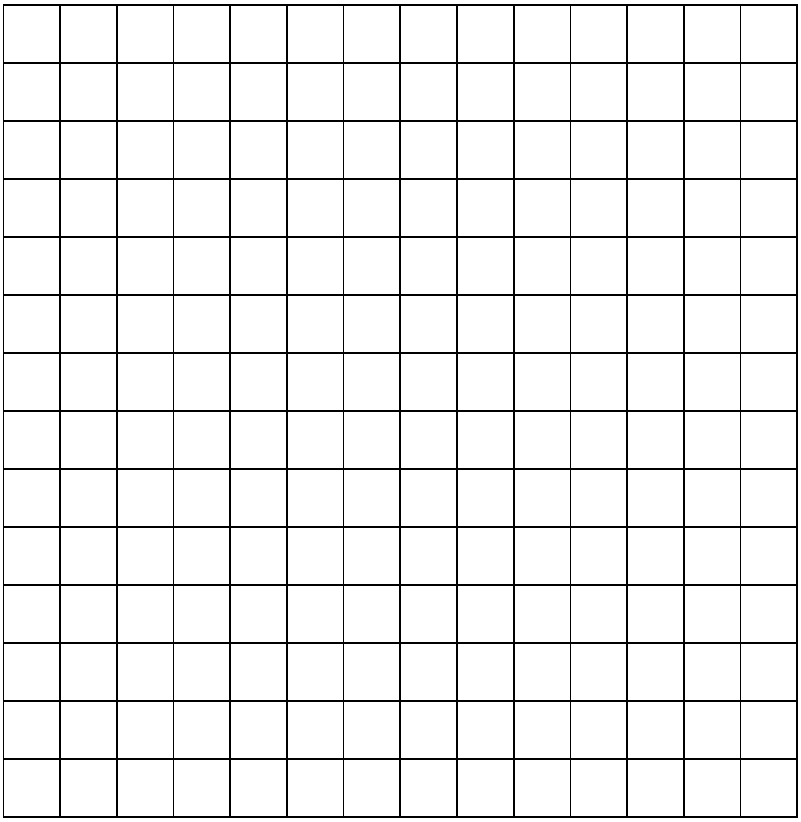
C. Fonctions linéaires (Premier degré)

1. Rappels

Une **droite verticale** a pour équation **x = a** , a ∈ ℝ. En particulier, l'axe Oy des ordonnées a pour équation x = 0. Les droites verticales ne sont pas des fonctions.

Une **droite horizontale** a pour équation **y = b** , b ∈ ℝ. En particulier, l'axe Ox des abscisses a pour équation y = 0. Les droites horizontales sont des fonctions constantes.

Une **fonction linéaire** est une **fonction du premier degré** dont l'équation générale est y = f(x) = mx + p, m et p ∈ ℝ, m≠0. Graphiquement, elle se représente par une **droite**.



- **m** est le **coefficient angulaire** ou **pente** de la droite. m représente la quantité dont y augmente (m>0) ou diminue (m<0) quand x augmente d'une unité. Autrement dit, m représente l'inclinaison de la droite y = mx + p par rapport à l'axe horizontal des abscisses. La pente d'une droite passant par deux points donnés $(x_1\,, y_1)$ et $(x_2\,, y_2)$ se calcule par la formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Le coefficient angulaire peut aussi se calculer par la formule $m = tg\ \theta$ où θ est l'angle entre l'axe Ox et la droite y = mx + p, orienté positivement dans l'intervalle $]0\,, 2\pi[$, si la même unité est adoptée sur les deux axes du repère.

- **p** est l'**ordonnée à l'origine**. p représente l'intersection de la droite y = mx + p avec l'axe Oy. Si p = 0, la droite y = mx passe par l'origine du repère (0,0).

Le coefficient angulaire d'une droite horizontale y = b vaut 0 et son ordonnée à l'origine vaut b. Le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une droite verticale x = a ne sont pas définis.

Deux **droites** d'un plan y = mx + p et y = m'x + p' sont **parallèles** ⟺ m = m' .

Si en plus p = p', alors elles sont **parallèles confondues**. Sinon, elles sont **parallèles distinctes**.

Deux **droites** d'un plan y = mx + p et y = m'x + p' sont **sécantes** ⟺ m ≠ m'.

Deux droites sécantes ont un seul **point d'intersection**, appelé aussi **point de concours**, calculé en résolvant le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$.

Deux **droites** sécantes y = mx + p et y = m'x + p' sont **perpendiculaires** ⟺ m m' = -1 ⟺ $m' = -\frac{1}{m}$.

On appelle **racine ou zéro** d'une droite un point x_0 dont l'image par la fonction du premier degré y = f(x) = mx + p, m ∈ $\mathbb{R}_0$, vaut zéro, c'est-à-dire un point x_0 vérifiant $f(x_0)=0$. Géométriquement, cela revient à calculer l'intersection de la droite avec l'axe Ox. Toute droite y = mx + p, m ∈ $\mathbb{R}_0$, a une seule racine au point x_0 solution de l'équation $mx_0 + p = 0$, c'est-à-dire au point $x_0 = -\frac{p}{m}$. Le signe de la fonction du premier degré y = f(x) = mx + p en fonction de la position de x par rapport à la racine x_0 est donné par le tableau suivant :

x		$x_0 = -\frac{p}{m}$	
y = f(x) = mx + p	-signe(m)	0	signe(m)

2. Exercices

1. Dessiner le graphe des fonctions du premier degré suivantes :

   a) y = 3x + 6.

   b) y = -2x + 1.

   c) y - 2 = 5x +3.

   d) y – 2 = 3 (x – 1).

2. Quelle est la pente de la droite qui passe par les points de coordonnées (2,4) et (8,-3) ?

3. Donner l'équation cartésienne de la droite

   a) A de coefficient angulaire $\frac{1}{2}$ et comprenant le point (-1,4).

   b) B comprenant (0,1) et (-3,1).

   c) C comprenant (2,-2) et parallèle à D $\equiv x = -1$.

   d) E comprenant (3,0) et parallèle à F $\equiv y = -2x + 3$.

   e) G comprenant (-1,-2) et perpendiculaire à H de coefficient angulaire $\frac{1}{2}$.

   f) I perpendiculaire à J $\equiv y = -x - 1$ et qui la coupe au point d'intersection de J avec l'axe y.

g) K passant par (-1,3) et ayant une inclinaison de 60° avec l'horizontale.

h) L comprenant les points (0,1) et (-1,-4).

i) M passant par le point (1,1) et dont la pente vaut -3.

j) N parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$ et passant par le point (-9,5).

k) O passant par le point de coordonnées (1,1) et perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$.

4. Trouver analytiquement le point de concours des droites suivantes :

   a) $2x + y = 5$ et $5y - x - 4 = 0$.

   b) $y - 2x + 6 = 0$ et $2y = 4x - 1$.

   c) $y = 2$ et $y - 1 = 3(x-2)$.

   d) $y - 2 = 3(x+4)$ et $y = 2x + 1$.

   e) $y = 3x + 2$ et $x = -3$.

5. Donner l'équation générale d'une droite perpendiculaire à la droite D $\equiv x = c$.

6. Un triangle a pour sommets les points A(0,0), B(4,2) et C(-2,4). Déterminer l'équation de

   a) La médiane issue de C.
   b) La hauteur relative au côté AB.
   c) La médiatrice du côté BC.

7. On sait que la température en degrés Fahrenheit (°F) peut être exprimée comme une fonction linéaire affine (c'est-à-dire une fonction du premier degré) de la température en degrés Celsius (°C). En sachant que, sur l'échelle Fahrenheit, l'eau gèle à 32° et bout à 212° et que, sur l'échelle Celsius, l'eau gèle à 0° et bout à 100° :

   a) Exprimer la température en °F en fonction de la température en °C.
   b) A quelle température, sur l'échelle Celsius, correspond 98,6°F ?
   c) Dessiner le graphe de la fonction linéaire affine considérée.

8. L'étude du contrôle chimique de la respiration a montré que le taux respiratoire *y*, mesuré en respirations par minute, est une fonction linéaire affine de la pression partielle en dioxyde de carbone dans les poumons. Nous noterons cette pression P_{CO2}. Lorsqu'une personne normale inhale de l'air provenant d'un sac contenant 2% de dioxyde de carbone, la pression partielle P_{CO2} est de 41 torrs et le taux respiratoire correspondant mesuré est de 13,8 respirations par minute. Si un sujet inhale de l'air provenant d'un sac contenant 6% de dioxyde de carbone, la pression partielle est de 50 torrs et le taux respiratoire correspondant est de 19,1 respirations par minute.

   a) Exprimer le taux respiratoire *y* comme une fonction linéaire affine de P_{CO2}.
   b) Dessiner le graphe de cette fonction.
   c) Calculer le taux respiratoire lorsque la pression partielle en dioxyde de carbone est de 45 torrs.

9. Un magasin de vêtements faisant les soldes annonce que tous les prix ont baissé de 20%. Si le prix d'une chemise est de 28 euros, quel était son prix de vente initial ?

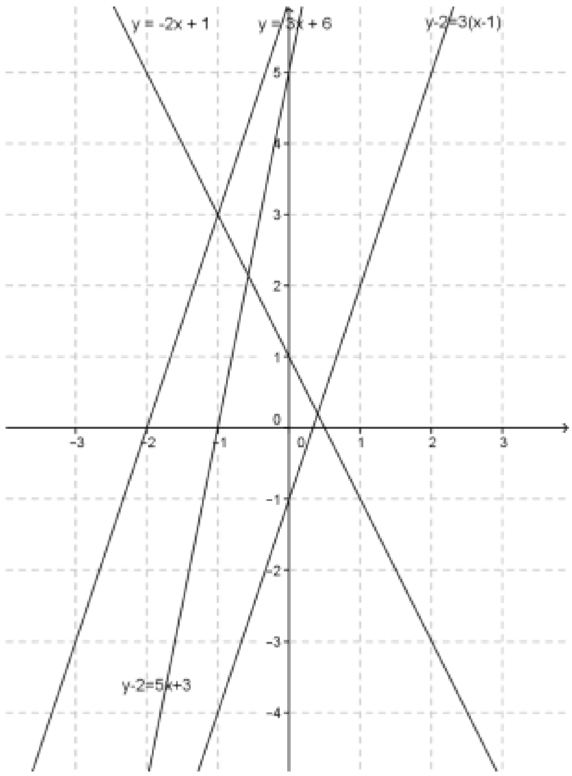
10. Un radiateur contient 8 litres d'un mélange d'eau et d'antigel. Si 40% du mélange est de l'antigel, combien devrait-on enlever du mélange pour le remplacer par de l'antigel afin que le mélange résultant contienne 60% d'antigel ?

11. On doit construire un silo à grains composé d'une partie supérieure qui est un cylindre circulaire droit de 2 m de rayon et de hauteur *h* et d'une partie inférieure qui est un cône circulaire droit de hauteur *h*/2. Pour quelle valeur de *h* le volume V total du silo sera-t-il de 500 m³ ?

12. Une fenêtre en verre coloré est prévue sous la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. La largeur de la fenêtre doit être de 3 m mais la hauteur *h* n'est pas encore déterminée. Si on doit utiliser 24 m² de verre, calculer la hauteur *h*.

3. Solutions

1.



2. $\frac{-7}{6}$

3. $A \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $B \equiv y = 1$, $C \equiv x = 2$, $E \equiv y = -2x + 6$, $G \equiv y = -2x - 4$,

$I \equiv y = x - 1$, $K \equiv y = \sqrt{3}\,x + 3 + \sqrt{3}$, $L \equiv y = 5x + 1$, $M \equiv y = -3x + 4$,

$N \equiv y = x + 14$, $O \equiv y = -x + 2$

4. a) $S = \left\{\left(\frac{21}{11}, \frac{13}{11}\right)\right\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \left\{\left(\frac{7}{3}, 2\right)\right\}$ d) $S = \{(-13, -25)\}$ e) $S = \{(-3, -7)\}$

5. $y = b$, $b \in \Re$

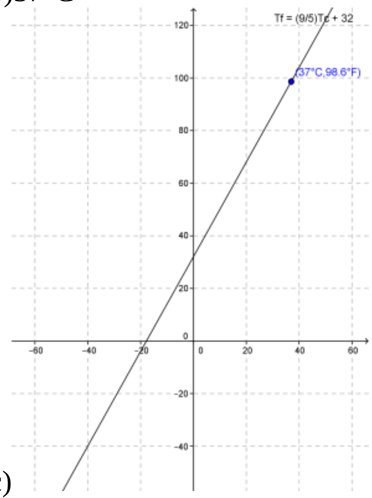
6. a) $m_C \equiv y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

b) $H_{AB} \equiv y = -2x$

c) $M_{BC} \equiv y = 3x$

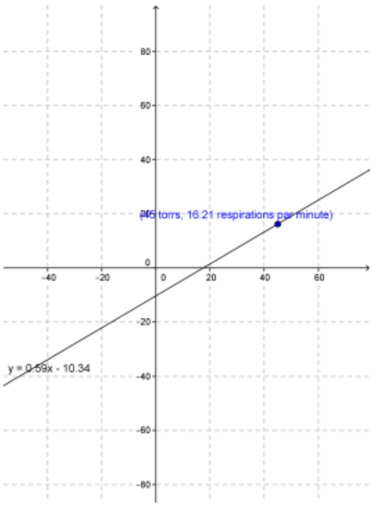
7. a) $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$

b)37°C

c) 

8.

a) $y = 0{,}59P_{CO2} - 10{,}34$

b) 

c)16,21 respirations par minute.

9. 35 euros

10. $\frac{8}{3}\, l \approx 2{,}6\, l$

11. $h = \frac{750}{7\pi} m \approx 34{,}1\, m$

12. $h = 8 - \frac{3}{4}\pi \approx 5{,}64\, m$

D. Fonctions quadratiques (Second degré)

1. Rappels

Une **fonction quadratique** est une fonction du second degré dont l'équation générale est y = f(x) = ax² + bx + c, a, b et c $\in \mathbb{R}$, a≠0. Graphiquement, elle se représente par une **parabole** dont les caractéristiques principales sont :

- **l'axe de symétrie :** il s'agit d'une droite verticale dont l'équation est donnée par $x = -\frac{b}{2a}$. Le graphe cartésien de la fonction y = f(x) = ax² + bx + c, a, b et c $\in \mathbb{R}$, a≠0, est symétrique par rapport à cet axe.

- **le sommet :** il se trouve sur l'axe de symétrie au point $(x\,,y) = \left(-\frac{b}{2a}\,,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (-\frac{b}{2a}\,,-\frac{\Delta}{4a})$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** (ou réalisant noté ρ) de l'équation du second degré ax² + bx + c = 0.

- **la concavité :** Si a > 0, la parabole est convexe, son graphe cartésien est tourné vers le haut et son sommet correspond à un minimum. Si a < 0, la parabole est concave, son graphe cartésien est tourné vers le bas et son sommet correspond à un maximum.

- **l'intersection avec l'axe Oy :** Cette intersection se calcule en remplaçant x par 0 dans l'équation y = ax² + bx + c. Le graphe cartésien d'une parabole passera donc toujours par le point (0,c).

- **l'intersection avec l'axe Ox :** Cette(ces) intersection(s) se calcule(nt) en cherchant pour quelle(s) valeur(s) de x l'équation y = ax² + bx + c sera nulle. Il s'agit donc de résoudre ax² + bx + c = 0. Trois cas peuvent se présenter :

Cas n°1 : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac} > 0.$

L'équation du second degré ax² + bx + c = 0 a deux solutions données par $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. L'équation ax² + bx + c = 0 peut se factoriser en a (x-x_1) (x-x_2) = 0. La parabole y = ax² + bx + c a donc deux intersections avec l'axe Ox données par (x_1,0) et (x_2,0). Le signe de la fonction du second degré y = f(x) = ax² + bx + c en fonction de la position de x par rapport aux deux racines x_1 et x_2 (où l'on suppose que $x_1 < x_2$) est donné par le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
y = f(x) = ax² + bx + c	signe(a)	0	-signe(a)	0	signe(a)

Cas n°2 : $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}.$

L'équation du second degré ax² + bx + c = 0 a une solution donnée par $x_1 = \frac{-b}{2a}$. L'équation ax² + bx + c = 0 peut se factoriser en a (x-x_1)² =0. La parabole y = ax² + bx + c a donc une intersection avec l'axe Ox donnée par (x_1,0). Le signe de la fonction du second degré y = f(x) = ax² + bx + c en fonction de la position de x par rapport à la racine x_1 est donné par le tableau suivant :

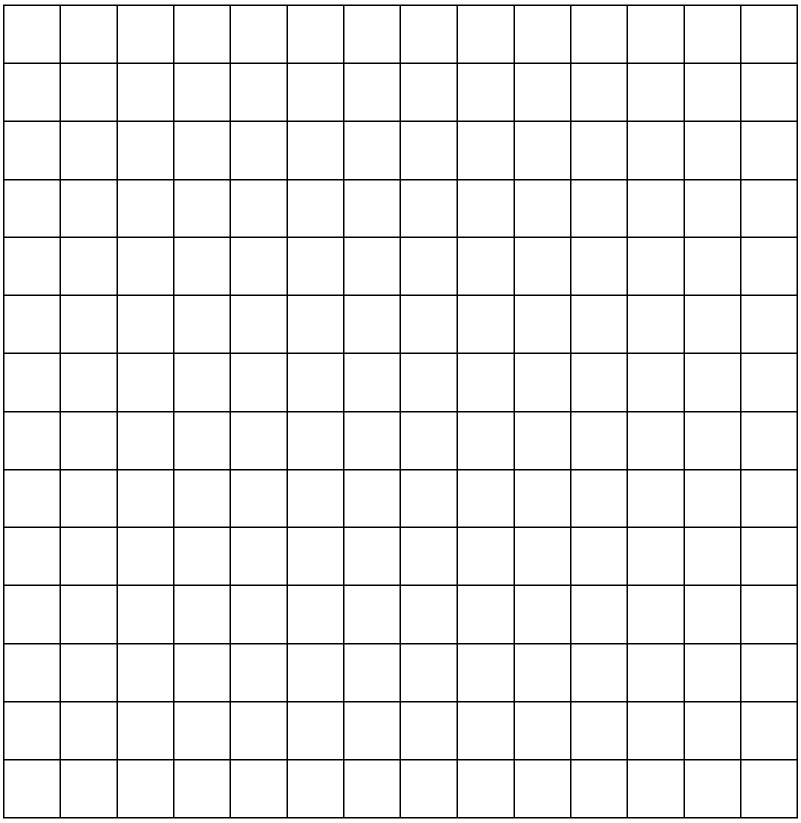
x		x_1	
y = f(x) = ax² + bx + c	signe(a)	0	signe(a)

Cas n°3 : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

L’équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ n’a pas de solution réelle[4]. Elle ne peut donc pas se factoriser dans $\mathbb{R}$. La parabole $y = ax^2 + bx + c$ n’a donc pas d’intersection avec l’axe Ox. Le signe de la fonction du second degré $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de la position de x est donné par le tableau suivant :

x	
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	signe(a)

Exemple : la parabole d’équation $y = -x^2 + 2x + 3$ a pour graphe cartésien



[4] Cette équation a deux solutions dans l’ensemble des nombres complexes. (voir Mathématique Appliquée 2)

2. Exercices

1. Résoudre

   a. $3x^2 - x + 5 = 0$.
   b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$.
   c. $(x-4)^2 + (x-3)^2 = (x-2)(3x-16)$.
   d. $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   e. $4x^2 - 11x + 7 = 0$.
   f. $4x^3 + 7x^2 + x = 0$.
   g. $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$.
   h. $6x^4 - 13x^2 + 6 = 0$.
   i. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-75}{x^2+5x+6}$.

2. Factoriser les équations a), b), d), e) et f) de l'exercice 1, si cela est possible.

3. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = x^2 - 9$
   b) $f(x) = \frac{2x}{-x^2+4x-3}$
   c) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$
   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
   e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x^2-2}}$
   f) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
   g) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}$
   h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$
   i) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$
   j) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2(x-3)-3(3-x)}$

4. Résoudre dans $\Re$:

   a) $5x-1 < \frac{2x-1}{x+1}$
   b) $x^2(x-3)-3(3-x) \geq 0$
   c) $\frac{x^2-4}{x-1} \leq 0$
   d) $\frac{x-1}{x} > 1$
   e) $\frac{3x}{1-x} < \frac{3x+1}{(x-1)^2}$
   f) $\frac{x^2(x-2)-9(x-2)}{x^2-x^3} \geq 0$
   g) $\begin{cases} x^2 \leq 3 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)(3-x)}{2x^3-8x} < 0 \\ \dfrac{10x(x-3)}{4x^2-5x+1} > 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{x^2(1-x)}{-x^2+5x-6} \geq 0 \\ -1 < \dfrac{2x}{(x-1)^2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-x} \geq \dfrac{-4}{x^2-1} \\ 2 < \dfrac{x^3-8}{x^2-4} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{1-x^2} < \dfrac{2}{x-1} \\ \dfrac{9(2-x)}{x^2-x^3} \geq \dfrac{x-2}{x-1} \end{cases}$

5. Déterminer *p* et *q* $\in \Re$ pour que la parabole $P \equiv y = x^2 + px + q$
   a) admette un minimum au point (-2,3).
   b) admette 2 pour racine et coupe l'axe y au point d'ordonnée –3.
   c) admette comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et soit tangente à l'axe des abscisses.

6. a) Déterminer *a*, *b* et *c* réels (*a*≠0) pour que la parabole $P \equiv y = ax^2 + bx + c$

   - admette un axe de symétrie passant par le point (1,-2).
   - coupe l'axe y en un point d'ordonnée –3.
   - soit tangente à la droite $D \equiv y = -4$.

   b) Représenter la parabole $P \equiv y = x^2 - 2x - 3$.

7. Trouver trois nombres impairs consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit 1595.

8. Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes. Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il?

9. L'aire d'un triangle rectangle est 429m² et l'hypoténuse a pour longueur h=72,5m. Trouver le périmètre de ce triangle rectangle.

10. Représenter graphiquement

a) $f(x) = |x^2 - 4|$
b) $f(x) = x^2 - |x + 1| + x - 3$
c) $f(x) = |x| + 2|1 - x| + |x + 1|$
d) $f(x) = |x^2 - 1| + 4x$
e) $f(x) = x^2 + |4x - 1|$

11. Soit les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \leadsto f(x) = -x^2 + 3x + 4$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \leadsto g(x) = -\frac{x}{2}$.

a) Représenter les graphes cartésiens de f et g.

b) A partir de ces graphes, compléter en justifiant le tableau suivant :

Les fonctions sont-elles	f	g
Injectives ?		
Surjectives?		
Bijectives ?		

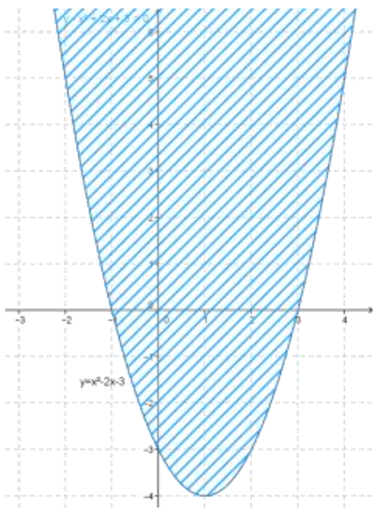
2. Solutions

1. a) $S = \varnothing$
   b) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
   c) $S = \{1,7\}$
   d) $S = \{2,3\}$
   e) $S = \left\{1, \frac{7}{4}\right\}$
   f) $S = \left\{0, \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{8}\right\}$
   g) $S = \{\pm\sqrt{6}\}$
   h) $S = \left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$
   i) $S = \{-8,10\}$

2. a) Impossible
   b) $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
   d) $(x - 2)\,(x - 3)$
   e) $4(x-1)\left(x - \frac{7}{4}\right)$
   f) $4x\left(x - \frac{-7 + \sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{-7 - \sqrt{33}}{8}\right)$

3. a) $\Re$
   b) $\Re \setminus \{1,3\}$
   c) $\left]\rightarrow,-4\right] \cup \left[1,\rightarrow\right[$
   d) $\left]-\dfrac{1}{2},\rightarrow\right[$
   e) $\left]1,\rightarrow\right[$
   f) $\left[-1,\rightarrow\right[\setminus \{3\}$
   g) $\left]\rightarrow,-1\right] \cup \left]\dfrac{1}{2},\rightarrow\right[$
   h) $\Re$
   i) $\Re$
   j) $\Re \setminus \{3\}$
4. a) S= $\left]\rightarrow,-1\right[\cup \left]-\dfrac{2}{5},0\right[$
   b) S = $\left[3,\rightarrow\right[$
   c) S = $\left]\rightarrow,-2\right] \cup \left]1,2\right]$
   d) S = $\Re_0^-$
   e) S = $\Re \setminus \{1\}$
   f) S = $\left[-3,1\right[\cup \left[2,3\right] \setminus \{0\}$
   g) S = $\left]1,\sqrt{3}\right]$
   h) S = $\left]-2,0\right[\cup \left]3,\rightarrow\right[$
   i) S = $\left]1,2\right[\cup \left]3,\rightarrow\right[\cup \{0\}$
   j) S = $\left]-2,-1\right[\cup \left]0,1\right[$
   k) S = $\left]-1,0\right[\cup \left[2,\rightarrow\right[$

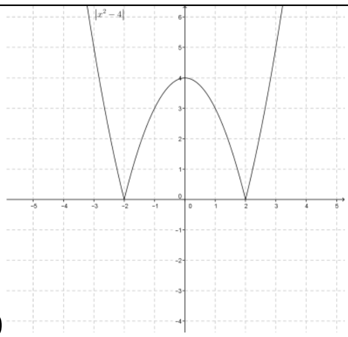
5. a) p = 4 et q = 7.
   b) p = -1 / 2 et q = -3
   c) p = 1 et q = 1 / 4
6. a) a = 1 et b = -2 et c = -3
   b)



7. (21, 23 et 25) ou (–25, -23 et –21).

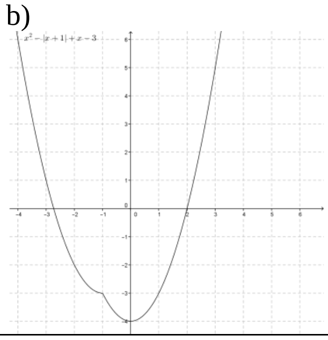
8. 13 personnes.
9. [71,5 + (858/71,5) + 72,5] m.

10.

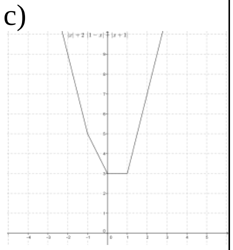


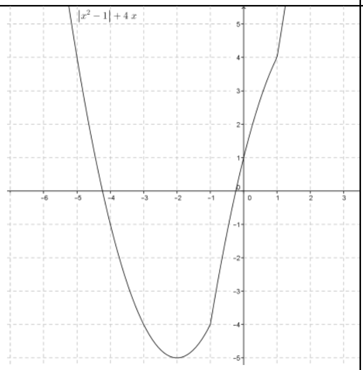
a)

b)



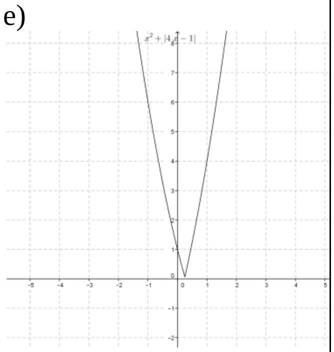
c)



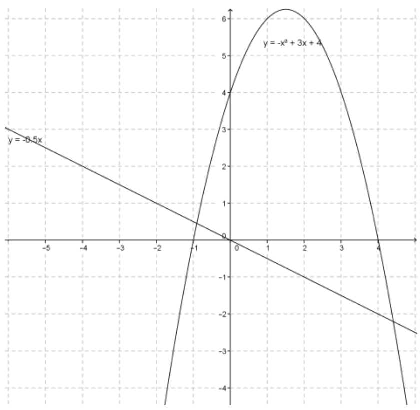


d)

e)



11. a)

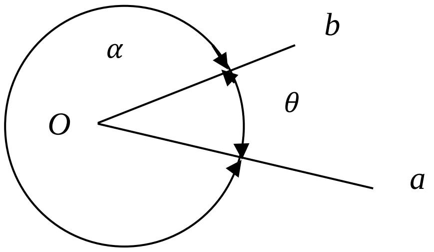


b)*f* n’est ni injective, ni surjective, ni bijective. *g* est injective, surjective et bijective.

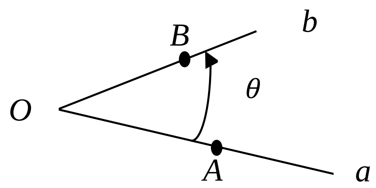
E. Fonctions trigonométriques

1. Définition des angles

Un **angle** est une **portion du plan comprise entre deux demi-droites** *a* et *b*. Le sommet *O* de l'angle est le point d'intersection des deux demi-droites. Il existe deux angles θ et α correspondant aux deux demi-droites a et b selon la portion du plan que l'on envisage.



Généralement, on travaille avec des angles orientés. Par convention, le **sens positif** est le **sens antihorlogique**. On utilisera une flèche curviligne pour indiquer le sens de l'angle. La demi-droite *a* est alors l'origine de l'angle et la demi-droite *b* son extrémité. Si *A* et *B* sont deux points des demi-droites *a* et *b*, nous parlerons également de l'angle $\widehat{AOB}$

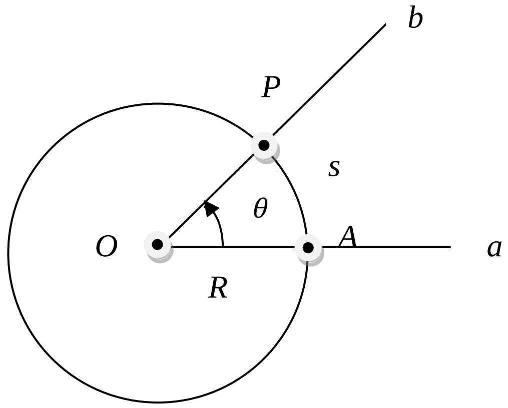


2. Mesure des angles

Les unités de mesure des angles utilisées dans ce cours sont le **degré** (°) et le **radian** (rd).

Un degré représente la **360ième partie d'un tour complet**. L'**angle plat** vaut 180° et **l'angle droit** 90°. Si des mesures inférieures au degré sont nécessaires, nous utilisons les dixièmes, centièmes ou millièmes de degré, c'est-à-dire les **degrés décimaux**. Nous pouvons également utiliser les **degrés-minutes-secondes** en divisant le degré en 60 parties égales, appelées minutes et notées $'$, et chaque minute en 60 parties égales, appelées secondes et notées $''$. Donc, $1'$=60$''$ et 1°=60$'$ = $(3600)''$. La notation $\theta = 73°56'18''$ se rapporte à un angle θ qui vaut 73 degrés, 56 minutes et 18 secondes. Pour exprimer la valeur de θ en degrés décimaux, nous utilisons les conversions $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ et $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, ce qui donne 73,938° que nous noterons 73°938. Inversement un angle θ =171°8873 vaut $\theta = 171°53'14''$.

Pour définir un angle d'un radian, nous avons besoin de deux notions supplémentaires. On appelle **angle au centre d'un cercle** de centre *O* et de rayon *R* tout angle dont le sommet est au centre *O* du cercle. Si θ est l'angle illustré ci-dessous, nous dirons que l'arc *AP*, noté *s*, du cercle sous-tend l'angle θ, ou encore, que l'angle $\boldsymbol{\theta}$ **est sous-tendu par l'arc** ***s***.



Un radian est la mesure d'un angle au centre d'un cercle sous-tendu par un arc de longueur égale au rayon du cercle. De manière générale, la mesure de l'angle θ en radians est égale au rapport entre l'arc s intercepté et le rayon R du cercle, ce que nous notons $mes_{rd}\theta = \frac{s}{R}$. Il s'agit d'un nombre sans dimension.

Etant donné que la longueur du cercle vaut $2\pi R$, un angle qui vaut 2π radians correspond à 360°. Nous avons donc les relations suivantes :

$$360° = 2\pi \text{ rd}$$

$$180° = \pi \text{ rd (angle plat)}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ rd (angle droit)}$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rd}$$

$$\frac{180°}{\pi} = 1 \text{ rd}$$

Si le ° n'est pas indiqué, cela signifie que l'angle est mesuré en radians et nous pouvons utiliser les relations ci-dessus pour obtenir le tableau de conversion suivant, qui nous sera très utile pour toute la suite de ce chapitre sur la trigonométrie :

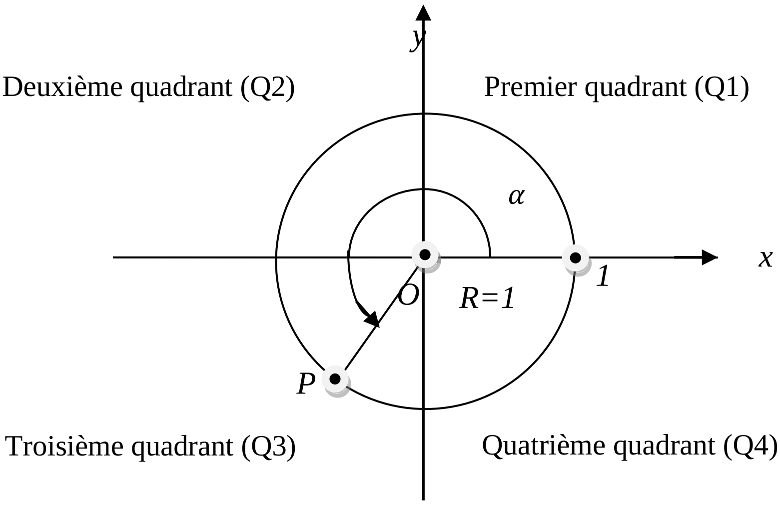
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radians	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
Degrés	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	

Pour terminer cette section sur la mesure des angles, il faut noter qu'un angle est susceptible d'une **détermination multiple**, et donc $mes_{rd}\theta = \frac{s}{R} + 2k\pi$ et $mes_{°}\theta = nombre\ de\ degrés + k\ 360°$, $k \in \mathbb{Z}$. La **détermination principale d'un angle** est le réel compris entre 0° et 360° si l'angle est mesuré en degrés et le réel compris entre 0 et 2π si l'angle est mesuré en radians.

3. Le cercle trigonométrique et les nombres trigonométriques d'un angle

3.1 Cercle trigonométrique

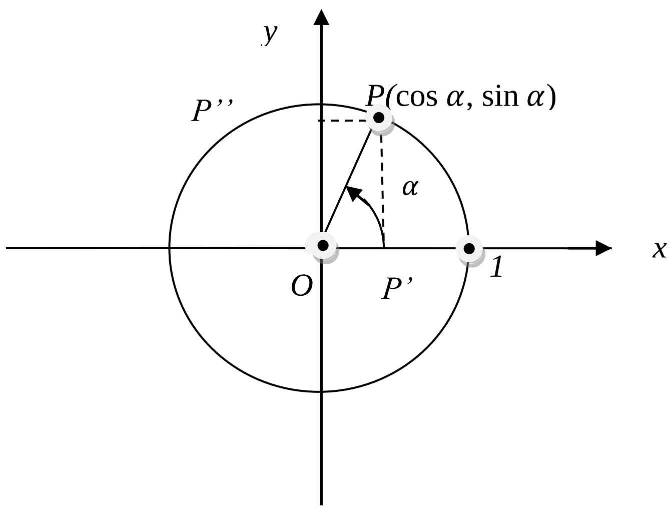
Dans un plan muni d'un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le **cercle centré à l'origine et de rayon 1**. L'angle orienté α rapporté au cercle trigonométrique y est représenté par un couple de deux demi-droites dont la demi-droite d'origine est la demi-droite *Ox*. L'angle orienté α est mesuré à partir de *Ox* dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens antihorlogique). Le cercle trigonométrique est divisé en quatre quadrants représentés ci-dessous. L'angle orienté α représenté ci-dessous se situe donc dans le troisième quadrant.



Nous allons maintenant définir les **nombres trigonométriques** de tout angle orienté α rapporté au cercle trigonométrique, à savoir le **cosinus**, le **sinus**, la **tangente** et la **cotangente** de l'angle.

3.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Pour définir le cosinus et le sinus de l'angle orienté α représenté ci-dessous dans le premier quadrant, notons *P'* et *P''* les projections orthogonales de *P* respectivement sur *Ox* et *Oy*. Les coordonnées du point *P* dans le repère orthonormé sont alors définies par $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$. Autrement dit, **$\cos\alpha$ est l'abscisse du point *P*** dans le repère orthonormé et **$\sin\alpha$ est l'ordonnée du point *P*** dans ce repère. L'axe *Ox* porte le nom d'axe des cosinus. L'axe *Oy* porte le nom d'axe des sinus.



Il découle de ces deux définitions les propriétés suivantes :

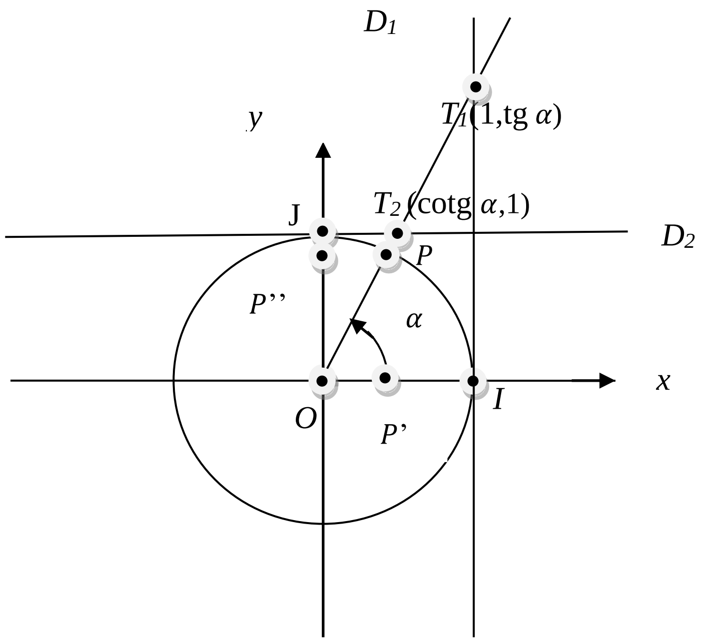
$\forall\alpha : -1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $\forall\alpha : -1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$\forall\alpha : \cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ (Formule Fondamentale de Trigonométrie)

Radians	0	$\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{\pi}{2}$	$\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$	π	$\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$	2π
Degrés	0°	$]0°, 90°[$	90°	$]90°, 180°[$	180°	$]180°, 270°[$	270°	$]270°, 360°[$	360°
Sinus	0	+	1	+	0	$-$	-1	$-$	0
Cosinus	1	+	0	$-$	-1	$-$	0	+	1

3.3 Tangente et cotangente d'un angle orienté

Pour définir la tangente et la cotangente de l'angle orienté α représenté ci-dessous dans le premier quadrant, traçons D_1 (respectivement D_2), la tangente au cercle trigonométrique en I (respectivement en J). Appelons T_1 (respectivement T_2), l'intersection de la demi-droite OP avec D_1 (respectivement D_2). Alors, **tg α est l'ordonnée du point T_1** dans le repère orthonormé et **cotg α est l'abscisse du point T_2** dans ce repère. La droite D_1 porte le nom d'axe des tangentes. La droite D_2 porte le nom d'axe des cotangentes. Certains angles orientés α n'auront pas de tangente ou de cotangente car toutes les demi-droites OP n'ont pas deux intersections avec les droites D_1 et D_2.



Les propriétés des triangles semblables appliquées aux triangles *OPP'* et OT_1I (respectivement *OPP''* et OT_2J) nous permettent de réécrire la tangente (respectivement la cotangente) de l'angle orienté α comme $\boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (respectivement $\boldsymbol{cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$**)** à condition que $\cos\alpha$ (respectivement $\sin\alpha$) ne soit pas nul. Il découle de ces deux définitions les propriétés suivantes :

$\forall\alpha$: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$ et $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha$

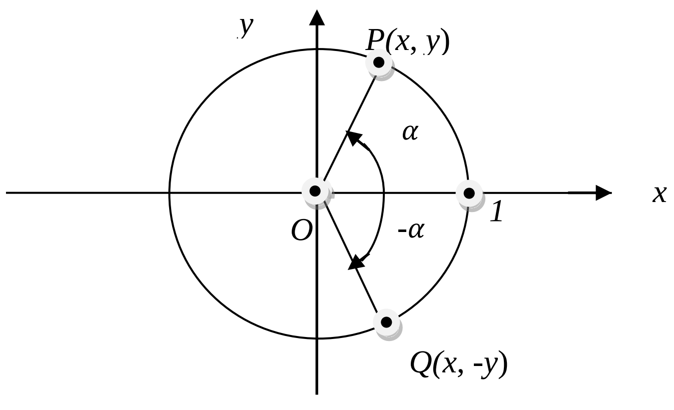
Radians	0	$\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{\pi}{2}$	$\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$	π	$\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$	2π
Degrés	0°	$]0°, 90°[$	90°	$]90°, 180°[$	180°	$]180°, 270°[$	270°	$]270°, 360°[$	360°
tg	0	+	$\nexists$	$-$	0	+	$\nexists$	$-$	0
cotg	$\nexists$	+	0	$-$	$\nexists$	+	0	$-$	$\nexists$

4. Angles associés

Dans cette section, nous allons comparer les nombres trigonométriques (sin, cos, tg, cotg) d'angles situés dans les deuxième, troisième et quatrième quadrants à ceux d'angles associés se trouvant dans le premier quadrant.

4.1 Angles opposés

Considérons deux angles opposés α et $-\alpha$ rapportés au cercle trigonométrique. En utilisant les définitions des nombres trigonométriques du paragraphe précédent, nous obtenons :

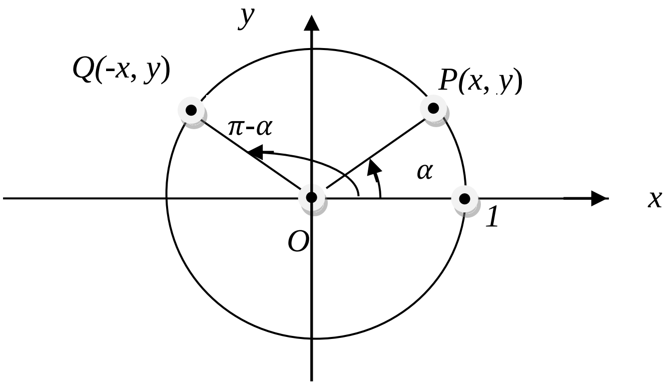


$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

4.2 Angles supplémentaires

Deux angles orientés sont supplémentaires si et seulement si leur somme vaut l'angle plat, c'est-à-dire 180° ou π rd.

Considérons deux angles supplémentaires α et $\pi - \alpha$ rapportés au cercle trigonométrique. En utilisant les définitions des nombres trigonométriques du paragraphe précédent, nous obtenons :

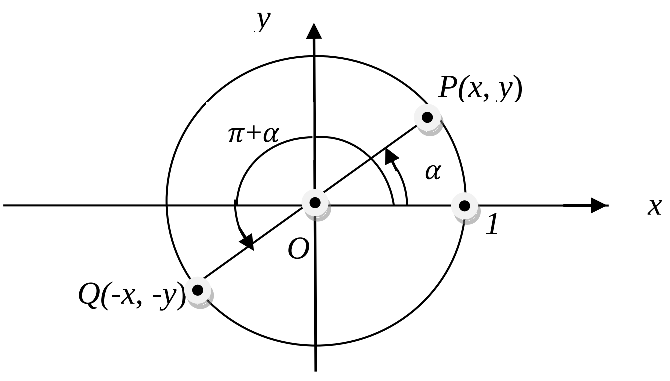


$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$

4.3 Angles antisupplémentaires

Deux angles orientés sont antisupplémentaires si et seulement si leur différence vaut l'angle plat, c'est-à-dire 180° ou π rd.

Considérons deux angles antisupplémentaires α et $\pi + \alpha$ rapportés au cercle trigonométrique. En utilisant les définitions des nombres trigonométriques du paragraphe précédent, nous obtenons :



$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}(\pi + \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$

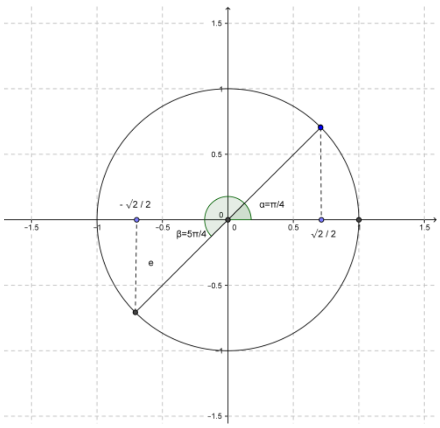
Les conclusions relatives aux nombres trigonométriques de ces différents angles associés sont importantes et doivent pouvoir être retrouvées très rapidement en se référant au cercle trigonométrique. Il en va de même pour le tableau de la section 5 reprenant les valeurs des nombres trigonométriques d'angles remarquables du premier quadrant.

5. Nombres trigonométriques d'angles remarquables

En utilisant les définitions des nombres trigonométriques d'angles rapportés au cercle trigonométrique, nous obtenons :

Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
Cotangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Les valeurs des nombres trigonométriques des angles associés à ces angles remarquables dans les trois autres quadrants peuvent être retrouvées par les processus exposés dans la section précédente. Ainsi $sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $tg\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$.



6. Formulaire de trigonométrie

Formules fondamentales

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules de Carnot

$$1 + \cos a = 2\, cos^2 \left(\frac{a}{2}\right) \qquad 1 - \cos a = 2\, sin^2 \left(\frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a \qquad 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$$

Formules de Simpson

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

Formules en tg($\alpha/2$)

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \qquad \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \qquad \tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

7. Equations trigonométrique

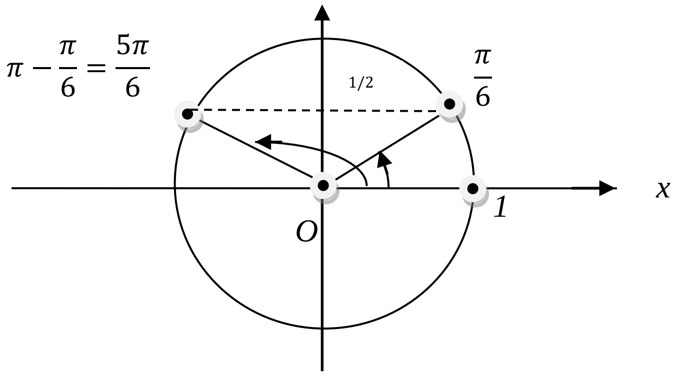
En utilisant les résultats des paragraphes 4, 5 et 6, nous pouvons maintenant résoudre n'importe quelle équation trigonométrique. Nous allons étudier d'abord les équations trigonométriques élémentaires de la forme sin ax = b ou cos ax = b ou tg ax = b. Nous examinerons ensuite des équations du type « second degré », a $\sin^2 x$ + b sin x + c = 0.

7.1 Equations élémentaires

Pour résoudre de telles équations, il faut connaître le tableau des nombres trigonométriques des angles remarquables, les formules pour passer d'un angle du premier quadrant à un angle d'un des trois autres quadrants et ne pas oublier la multi-détermination des angles.

Exemple 1 : Résoudre en radians dans ℝ l'équation trigonométrique $\sin x = \frac{1}{2}$.

L'examen du cercle trigonométrique nous conduit à deux angles possibles, à savoir $x = \frac{\pi}{6}$ (premier quadrant) et $x = \frac{5\pi}{6}$ (son supplémentaire dans le deuxième quadrant).



Au vu de la multi-détermination des angles (la périodicité de la fonction sinus est 2π, voir §9 !), l'ensemble des solutions de l'équation trigonométrique $\sin x = \frac{1}{2}$ est donné par $S = \left\{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 2 : Résoudre en radians dans ℝ l'équation trigonométrique $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

L'examen du cercle trigonométrique nous conduit à deux angles possibles, à savoir $2x = \frac{\pi}{3}$ (premier quadrant) et $2x = \frac{5\pi}{3}$ (son opposé dans le quatrième quadrant, orienté positivement). Il reste à tenir compte de la multi-détermination des angles (la périodicité de la fonction cosinus est 2π, voir §9 !) et à diviser ces deux ensembles de solutions par 2 pour trouver l'ensemble final des solutions de l'équation trigonométrique $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $S = \left\{x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 3 : Résoudre en radians dans ℝ l'équation trigonométrique $tg^{\,2}\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

Cette équation trigonométrique n'est pas directement sous la forme d'une équation trigonométrique élémentaire. Il faut d'abord en prendre la racine carrée et nous obtenons alors deux équations trigonométriques élémentaires à résoudre, $tg\left(\frac{x}{3}\right) = \pm 1$. L'examen du cercle trigonométrique nous conduit à un angle possible, à savoir $\frac{x}{3} = \frac{\pi}{4}$ (premier quadrant) pour la première équation , $tg\left(\frac{x}{3}\right) = 1$, et à un angle possible, à savoir $\frac{x}{3} = \frac{3\pi}{4}$ (deuxième quadrant) pour la seconde équation , $tg\left(\frac{x}{3}\right) = -1$. Il reste à tenir compte de la multi-détermination des angles (la périodicité de la fonction tangente est π, voir §9 !) et à multiplier ces deux ensembles de solutions par 3 pour trouver l'ensemble final des solutions de l'équation trigonométrique $tg^{\,2}\left(\frac{x}{3}\right) = 1$, $S = \left\{x = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi \vee x = \frac{9\pi}{4} + 3k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7.2 Equations du type a sin²x + b sinx + c = 0

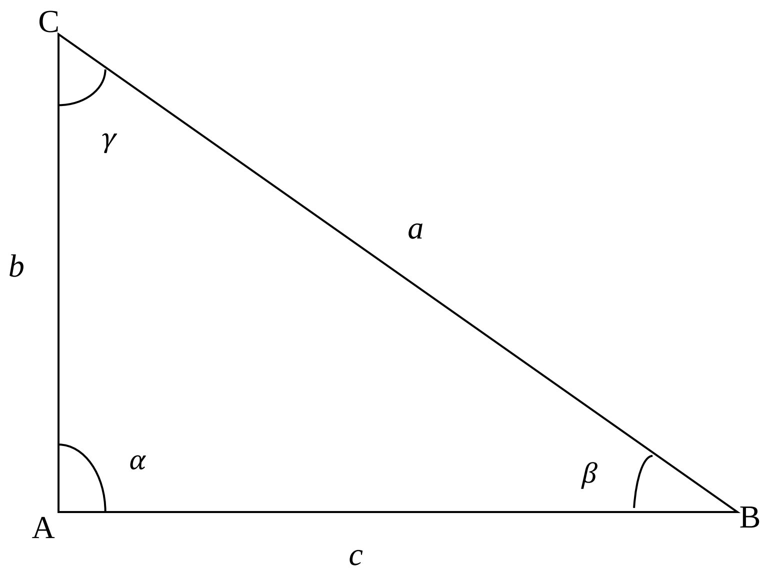
Pour résoudre une telle équation, il faudra poser y = sin x et résoudre l'équation du second degré correspondante. Trouver ensuite les valeurs de x en fonction de celles calculées pour y reviendra à résoudre une équation élémentaire pour autant que les solutions en y soient comprises entre -1 et 1.

Exemple 4 : Résoudre en radians dans ℝ l'équation trigonométrique $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

En posant y= sin x, nous devons d'abord résoudre l'équation du second degré $2y^2 + 3y - 2 = 0$ dont les solutions sont y = -2 (à rejetter !) et y = ½. L'examen du cercle trigonométrique nous conduit à deux angles possibles, à savoir $x = \frac{\pi}{6}$ (premier quadrant) et $x = \frac{5\pi}{6}$ (deuxième quadrant). Au vu de la multi-détermination des angles, l'ensemble des solutions de l'équation trigonométrique $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ est donné par $S = \left\{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Nombres trigonométriques dans un triangle rectangle

Nous nous contenterons ici de rappeler quelques relations importantes qui suffisent à déterminer les éléments manquants (côtés ou angles) d'un triangle rectangle dont d'autres éléments sont donnés. Soit un triangle rectangle ABC, rectangle en A. Désignons par a (respectivement b, c) la longueur du côté opposé au sommet A (respectivement B, C) et par α (respectivement β, γ) l'angle de sommet A (respectivement B, C).



Nous avons les relations suivantes :

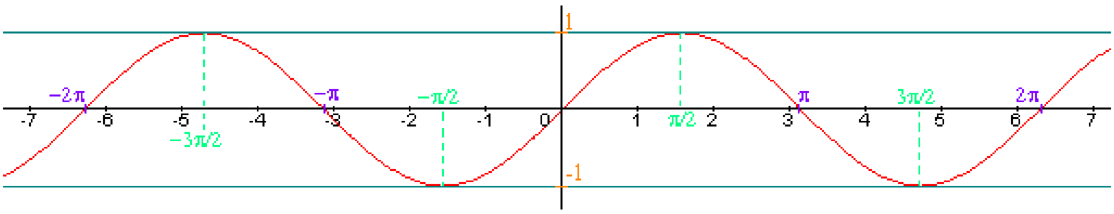
- $\beta + \gamma = 90°$
- $b^2 + c^2 = a^2$ (La somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse)
- $\cos\gamma = \frac{b}{a}$ et $\cos\beta = \frac{c}{a}$ (Le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle est le rapport entre la longueur du côté de l'angle droit adjacent à cet angle et la longueur de l'hypoténuse)
- $\sin\gamma = \frac{c}{a}$ et $\sin\beta = \frac{b}{a}$ (Le sinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle est le rapport entre la longueur du côté de l'angle droit opposé à cet angle et la longueur de l'hypoténuse)
- $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b}$ et $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$ (La tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle est le rapport entre la longueur du côté de l'angle droit opposé à cet angle et la longueur du côté de l'angle droit adjacent à cet angle)

Par exemple, si le triangle rectangle ABC est donné par a = 37 cm et β = 33°, alors γ = 57°, b = 20,15 cm et c = 31,03 cm.

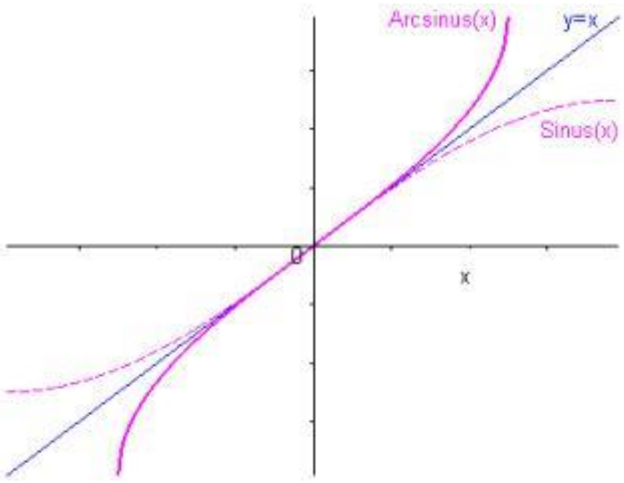
9. Les fonctions trigonométriques et leurs fonctions réciproques

9.1 Les fonctions sinus et arc sinus

La fonction sinus est définie par **sin :** $\mathbb{R} \to \boldsymbol{[-1,1] = x \leadsto y = \sin x}$ où $\sin x$ est la valeur du sinus de l'angle dont la mesure en **radians** est le réel x. C'est donc une application de période 2π ($\sin(x + 2\pi) = \sin x, \forall\, x \in \mathbb{R}$), non-injective mais surjective sur $[-1,1]$ et impaire ($\sin(-x) = -\sin x, \forall\, x \in \mathbb{R}$) dont le graphe cartésien représenté ci-après est symétrique par rapport à l'origine du système d'axes.

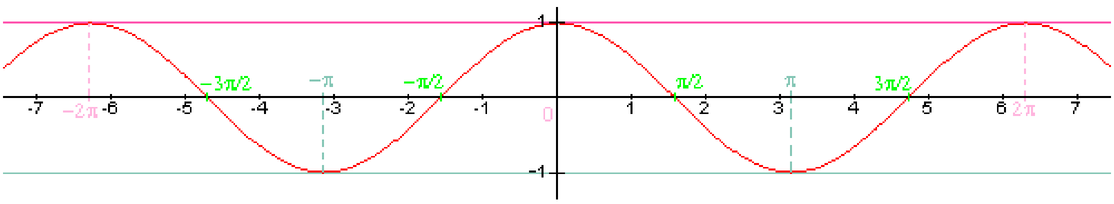


La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, à savoir sin : $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] = x \leadsto y = \sin x$ est injective Elle admet donc une fonction réciproque, appelée fonction arc sinus, notée arc sin et définie par **arc sin :** $\boldsymbol{[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] = x \leadsto y = \operatorname{arc\,sin} x \iff x = \sin y}$ avec $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Par exemple, arc sin $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ car $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et arc sin $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ car $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les graphes de ces deux fonctions réciproques sont proposés ci-dessous.

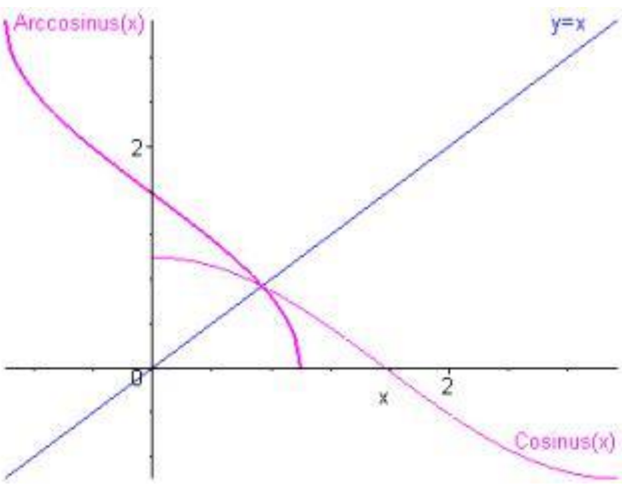


9.2 Les fonctions cosinus et arc cosinus

La fonction cosinus est définie par $\mathbf{cos:}\ \mathbb{R} \to [\mathbf{-1}, \mathbf{1}] = \boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ où $\cos x$ est la valeur du cosinus de l'angle dont la mesure en **radians** est le réel x. C'est donc une application de période 2π ($\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R}$), non-injective mais surjective sur $[-1,1]$ et paire ($\cos(-x) = \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R}$) dont le graphe cartésien représenté ci-dessous est symétrique par rapport à l'axe Oy du système d'axes.

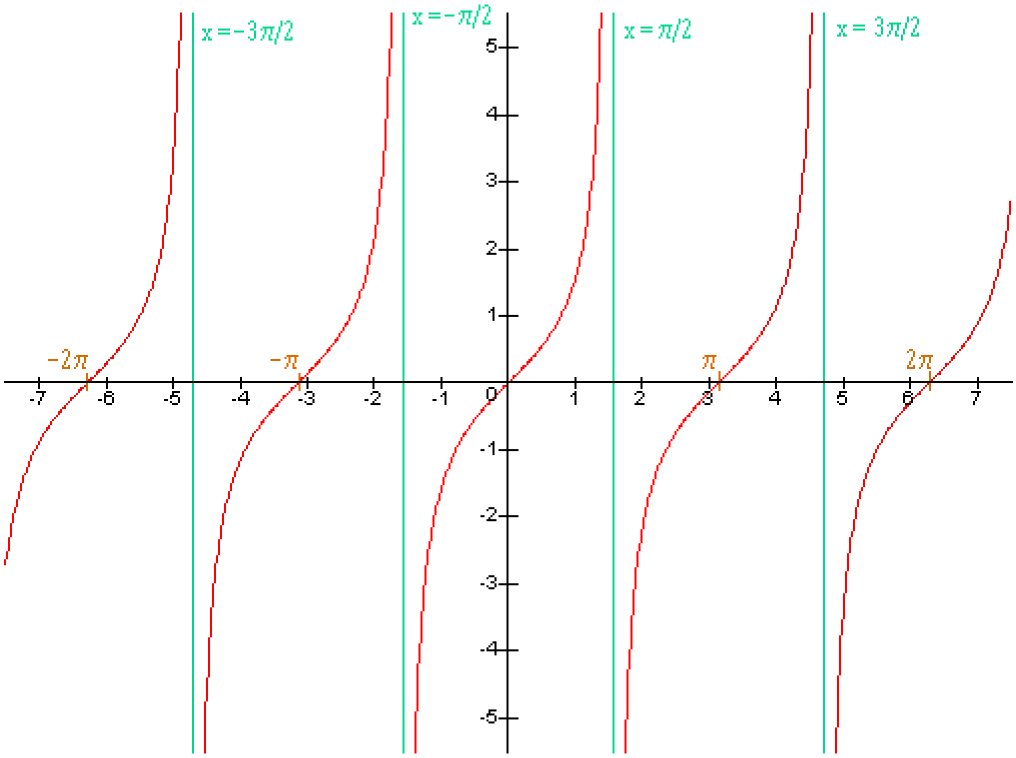


La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$, à savoir $\cos : [0, \pi] \to [-1,1] = x \rightsquigarrow y = \cos x$ est injective Elle admet donc une fonction réciproque, appelée fonction arc cosinus, notée arc cos et définie par **arc cos :** $[\mathbf{-1}, \mathbf{1}] \to [0, \pi] = \boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{arc\,cos}\,\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}$ avec $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{\pi}$. Par exemple, $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ car $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ car $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les graphes de ces deux fonctions réciproques sont proposés ci-après.

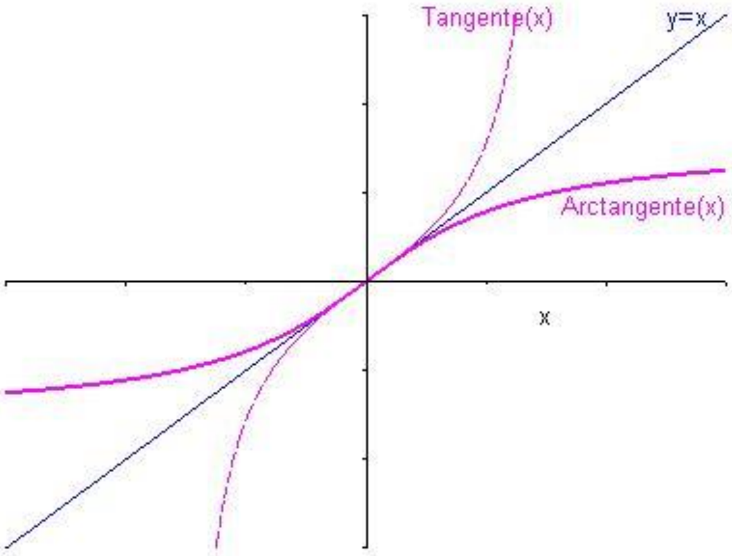


9.3 Les fonctions tangente et arc tangente

La fonction tangente est définie par $\mathbf{tg} : \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} = x \leadsto y = \mathbf{tg}\, x$ où $\operatorname{tg} x$ est la valeur de la tangente de l'angle dont la mesure en **radians** est le réel x. C'est donc une application de période π ($\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \forall\, x \in \mathbb{R}$), non-injective mais surjective sur $\mathbb{R}$ et impaire ($\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \forall\, x \in \mathbb{R}$) dont le graphe cartésien représenté ci-dessous est symétrique par rapport à l'origine du système d'axes.



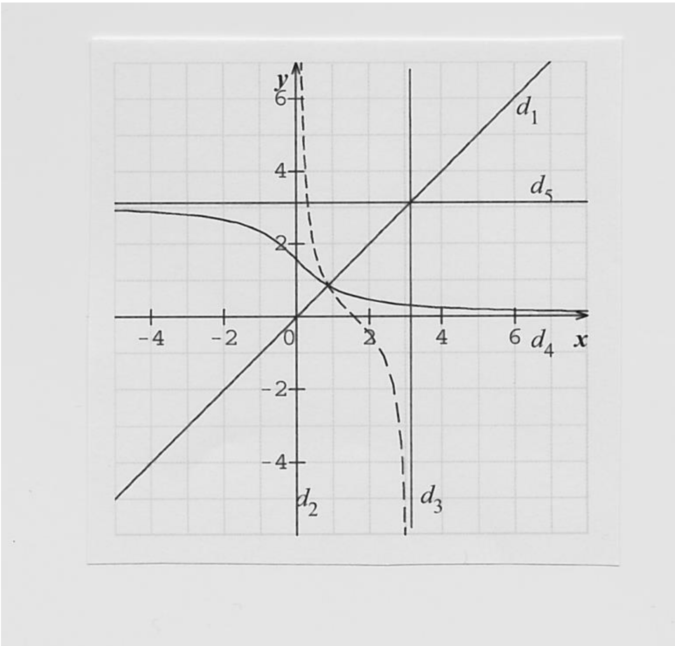
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à savoir $\operatorname{tg} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} = x \leadsto y = \operatorname{tg} x$ est injective Elle admet donc une fonction réciproque, appelée fonction arc tangente, notée arc tg et définie par $\mathbf{arc\ tg} : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = x \leadsto y = \mathbf{arc\,tg}\, x \Leftrightarrow x = \mathbf{tg}\, y$ avec $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Par exemple, $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ car $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ car $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ car $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Les graphes de ces deux fonctions réciproques sont proposés ci-après.



9.4 Les fonctions cotangente et arc cotangente

La fonction cotangente est définie par **cotg :** $\mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} = \boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}$ où $\operatorname{cotg} x$ est la valeur de la cotangente de l'angle dont la mesure en **radians** est le réel x. C'est donc une application de période π $(\operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x, \forall\, x \in \mathbb{R})$, non-injective mais surjective sur $\mathbb{R}$ et impaire $(\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x, \forall\, x \in \mathbb{R})$ dont le graphe cartésien est symétrique par rapport à l'origine du système d'axes.

La restriction de la fonction cotangente à l'intervalle $[0,\pi]$, à savoir $\operatorname{cotg} : [0,\pi] \to \mathbb{R} = x \rightsquigarrow y = \operatorname{cotg} x$ est injective Elle admet donc une fonction réciproque, appelée fonction arc cotangente, notée arc cotg et définie par **arc cotg :** $\mathbb{R} \to [0,\pi] = \boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{arc\,cotg}\,\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{cotg}\,\boldsymbol{y}$ avec $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{\pi}$. Par exemple, $\operatorname{arc\,cotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ car $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ et $\operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ car $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. Les graphes de ces deux fonctions réciproques (*f* en trait discontinu) sont proposés ci-dessous.



10. Exercices

1) Sans calculatrice, trouver les nombres trigonométriques[5] manquants et vérifiant les conditions suivantes :

   a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
   b) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

2) Sans calculatrice, calculer les nombres trigonométriques d'un angle *x* du deuxième quadrant, sachant que $12 \sin x + 5 \cos x = 0$.

3) Si $5 \operatorname{tg} \alpha = 4$, évaluer sans l'aide d'une calculatrice l'expression $\frac{5\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

[5] Rappel : les quatre nombres trigonométriques d'un angle α sont $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{cotg}\alpha$.

4) Les angles α, β étant aigus,

   a) si $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ et $\sin\beta = \frac{4}{5}$, calculer sans calculatrice $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$;

   b) si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ et $\sin\beta = \frac{3}{5}$, calculer sans calculatrice $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$.

5) Sans calculatrice, résoudre les équations suivantes en radians :
   a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\cos x = -1$
   c) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   d) $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
   e) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$

6) Sans calculatrice, résoudre les équations suivantes en radians :
   a) $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{cotg} x$
   b) $\operatorname{tg} x = 2 \sin x$
   c) $2\cos^2 x = 5\cos x + 3$
   d) $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$
   e) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$
   f) $2\sin^2 x = 3\cos x$
   g) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 + 5\cos x$
   h) $3\cos^2 x + 2\sin^2 x = \frac{3}{4}$
   i) $\operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{cotg} x$

7) Sans calculatrice, calculer la longueur d'un arc de cercle de 36 cm de rayon intercepté par un angle de $\frac{\pi}{12}$ radians.

8) Sans calculatrice, déterminer, dans un cercle de 10 cm de rayon, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 72° ?

9) Sans calculatrice, déterminer, dans un cercle de rayon 1,5 m, la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de 1 m de long ?

10) Sans calculatrice, calculer le rayon d'un secteur circulaire d'angle $\frac{3\pi}{4}$ radians et d'arc de 6 cm.

11) Trouver les données manquantes des triangles rectangles suivants (ces triangles sont rectangles en α et le côté a opposé à α est l'hypoténuse)
   a) a = 230 m , $\beta = 38°$
   b) a = 5678,76 m , b = 3456,48 m
   c) $\begin{cases} b + c = 252{,}4 \text{ m} \\ b - c = 7{,}6 \text{ m} \end{cases}$
   d) $\begin{cases} a = 225 \text{ m} \\ b/c = 0{,}75 \text{ m} \end{cases}$

12) Utiliser des manipulations graphiques pour représenter les fonctions suivantes à partir des graphes usuels de trigonométrie. Préciser le domaine de définition, la parité et la périodicité de chaque fonction.
   a) $f(x) = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$
   b) $f(x) = 4 \operatorname{cotg} x$
   c) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

13) Soit la fonction $f:\Re \to \Re; x \to f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) Représenter le graphe cartésien de *f*.
b) Résoudre graphiquement et analytiquement $f(x) = \frac{1}{2}$.
c) Préciser la période de *f* et sa parité. Justifier.
d) La fonction *f* est-elle une application ? Justifier.
e) La fonction *f* est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier.
f) Expliquer pourquoi la restriction de *f* définie par $g:[-\pi,\pi] \to [-1,1]\,;\, x \to g(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ admet une fonction réciproque g^{-1}?
g) Calculer le domaine de définition, l'image, l'expression analytique de g^{-1} et $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

11. Solutions

1) a) $\cos\alpha$ = -5/13 , tg α = -12/5 , cotg α = -5/12

   b) $\sin\alpha$ = -3/5 , tg α = 3/4 , cotg α = 4/3

2) $\sin\alpha$ = 5/13 , $\cos\alpha$ = -12/13 , tg α = -5/12 , cotg α = -12/5

3) 5/14

4) a)-36/85 et 13/85

   b)7/25 et 0

5) a)$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   b) $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   c) $\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

   d) $\frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

   e) $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

6) a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, h) $S = \emptyset$, i) x = 1,01 + $k\pi$ ou x = 5,72 + $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7) 3π cm

8) 4π cm

9) 2/3 rd

10) $8/\pi$ cm

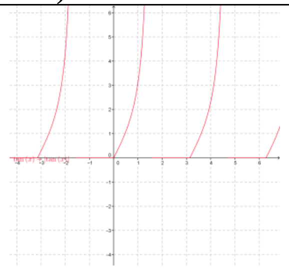
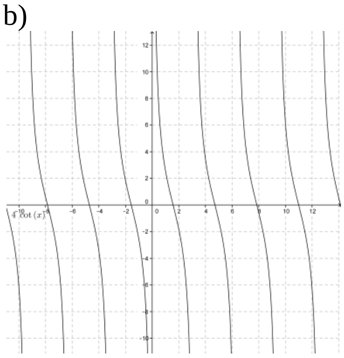
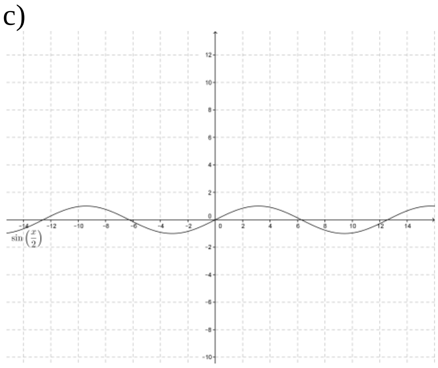
11) a)γ=52°, b=141,6 m et c=181,24 m

b)c=4505,67m , γ = 52°30’24’’ , β = 37°29’36’’

c)b=130 m , c=122,4 m , a=178,55 m , β = 43°28 , γ = 46°72

d)b=135m , c=180m , γ = 53°07’48’’ , β = 36°52’12’’

12)

 a) Domf = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, fonction ni paire ni impaire de période π	b)  Domf = $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, fonction impaire de période π	c)  Domf = $\mathbb{R}$, fonction impaire de période 4π

13) a) voir 12c) , b) $x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi , k \in \mathbb{Z}$, c) 4π , impaire, d) oui, e) non, non, non, f) car injective, g) $g^{-1} : [-1,1] \to [-\pi, \pi] ; x \leadsto g^{-1}(x) = 2 \arcsin x$, $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

F. Fonctions exponentielles et logarithmiques

1. Rappels

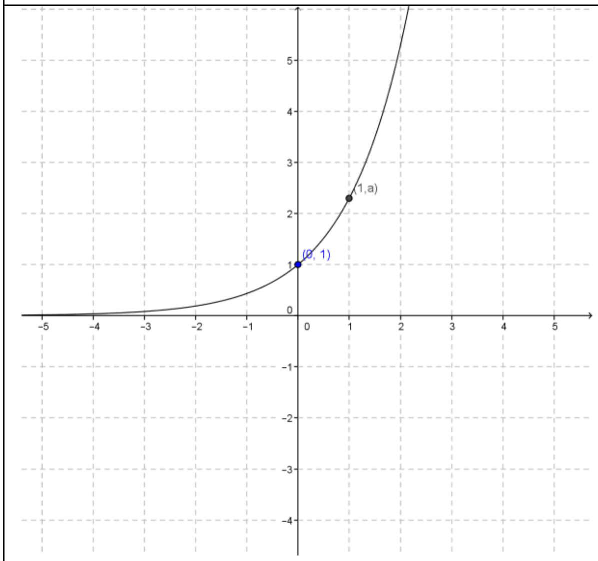
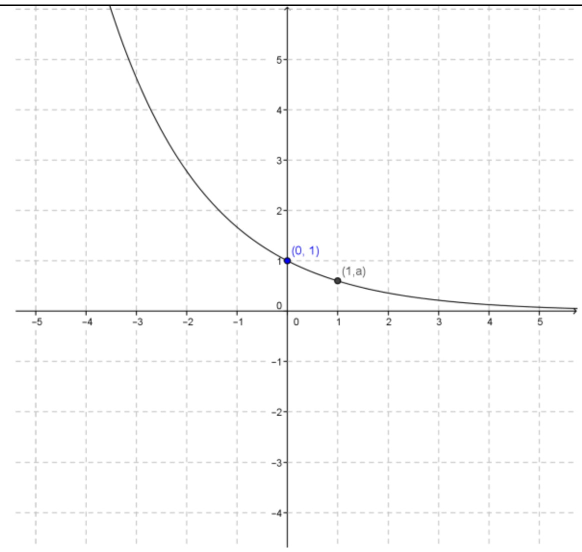
1.1. Fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. La fonction f telle que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \;\; ; \;\; x \leadsto y = f(x) = a^x$$

est appelée la **fonction exponentielle de base *a***.

L'allure du graphe de la fonction $y = a^x$ dépend de la valeur de a :

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Si $a > 1$, alors la fonction f est croissante et si $0 < a < 1$, alors la fonction f est décroissante. Dans tous les cas, l'intersection du graphe avec l'axe *Oy* a lieu au point (0,1) puisque $a^0 = 1 , \forall\, a \neq 0$. Dans tous les cas, le graphe de la fonction passe par le point (1,a) puisque $a^1 = a , \forall\, a$.

En étudiant a^x, nous excluons les cas $a \leq 0$ et $a = 1$. Notons que, si $a < 0$, alors a^x n'est pas un nombre réel pour de nombreuses valeurs de x ($x = 1 / 2$ par exemple). Si $a = 0$, alors $a^0 = 0^0$ n'est pas défini. Enfin, si $a = 1$, alors $a^x = 1, \forall\, x$, et le graphe de $y = a^x$ est alors une droite horizontale.

Les fonctions exponentielles vérifient les propriétés suivantes :

$\forall a, b > 0 \;\; , \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{x+y} = a^x . a^y \quad , \quad (a^x)^y = a^{x.y} \quad , \quad (ab)^x = a^x . b^x$$

Ces propriétés nous seront utiles dans la résolution d'équations exponentielles comme celles proposées dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1 : Résoudre dans ℝ l'équation $7^{3x} . 7^{2x} = 7^{4x+1}$

Par la troisième propriété énoncée ci-dessus, cette équation est équivalente à $7^{3x+2x} = 7^{4x+1}$, elle-même équivalente à $7^{5x} = 7^{4x+1}$. La fonction exponentielle de base 7, comme toutes les autres fonctions exponentielles, étant bijective, nous obtenons alors $5x = 4x + 1$, soit $x = 1$.

Exemple 2 : Résoudre dans ℝ l'équation $3^{5x-8} = 9^{x+2}$

En utilisant les propriétés énoncées ci-dessus et la bijectivité de la fonction exponentielle de base 3, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} & 3^{5x-8} = 9^{x+2} \\ \Leftrightarrow\ & 3^{5x-8} = (3^2)^{x+2} \\ \Leftrightarrow\ & 3^{5x-8} = 3^{2x+4} \\ \Leftrightarrow\ & 5x - 8 = 2x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & x = 4 \end{aligned}$$

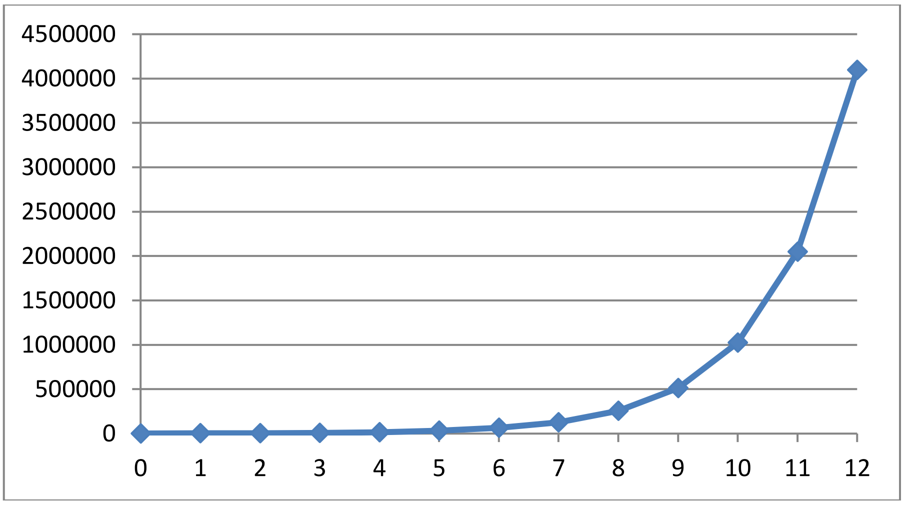
Les fonctions exponentielles sont d'une importance capitale en mathématique et ont des applications dans de nombreux domaines scientifiques comme la chimie, la physique, la biologie ou encore l'économie où elles sont utilisées pour décrire la croissance ou la décroissance de certaines variables.

Supposons par exemple qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour. Il y avait au départ 1 000 bactéries dans la population. Combien y en aura-t-il dans 10 jours ? Quand la population de bactéries aura-t-elle dépassé 2 millions d'individus ?

En se basant sur ces observations, nous obtenons le tableau suivant, où t est le temps en jours et $f(t)$ le nombre de bactéries au temps t.

t (temps en jours)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (nb de bactéries)	1 000	2 000	4 000	8 000	16 000

Nous voyons que $f(t) = (1\,000)\ 2^t$. Il s'agit donc d'une fonction exponentielle de base 2. Avec cette formule, nous pouvons prévoir le nombre de bactéries présentes dans la population après 10 jours à savoir $f(10) = (1\,000)\ 2^{10} = 1\,024\,000$ bactéries. Le graphe de la fonction est représenté ci-dessous.



Pour répondre à la deuxième question, à savoir quand la population de bactéries aura-t-elle dépassé 2 millions d'individus, nous allons être amenés à résoudre une inéquation de la forme

$$(1000)\ 2^t \ \geq 2\,000\,000 \ \Leftrightarrow \ 2^t \ \geq 2\,000$$

Le graphe ci-dessus nous fournit la réponse t = 11 jours. La résolution mathématique de cette inéquation nécessite la connaissance de la fonction réciproque de l'exponentielle de base 2, qui est une fonction logarithmique particulière parmi celles étudiées au paragraphe suivant. Si l'inéquation à résoudre fait apparaître une fonction exponentielle de base $0 < a < 1$, la décroissance de cette fonction et donc de sa réciproque (voir §1.2 !) nous obligera à inverser le sens de l'inéquation, comme nous le verrons plus loin sur un exemple.

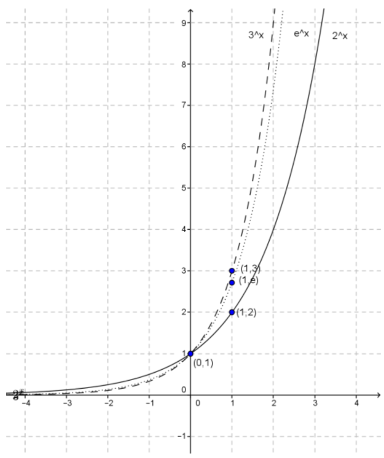
Avant de passer à ces fonctions logarithmiques, terminons ce paragraphe en examinant une fonction exponentielle particulière, à savoir la fonction exponentielle naturelle appelée également fonction exponentielle de base *e*.

Sans entrer en détail dans le calcul des limites, il peut être démontré que plus *n* est un entier positif élevé, plus le facteur $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se rapproche d'un nombre qui vaut 2,71828 et qui est noté *e*. C'est ce nombre qui permet de définir la fonction exponentielle naturelle.

La fonction f telle que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \ ; \ x \rightsquigarrow y = f(x) = e^x$$

est appelée la **fonction exponentielle de base *e*** ou **fonction exponentielle naturelle**. Puisque $2 < e < 3$, le graphe de la fonction $y = e^x$ (pointillé) est situé entre les graphes des fonctions $y = 2^x$ (trait continu) et $y = 3^x$(trait discontinu).



Cette fonction exponentielle particulière vérifie évidemment les propriétés énoncées plus haut pour n'importe quelle fonction exponentielle de base *a* et sera également utilisée dans des équations à résoudre comme par exemple :

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(e^x)^2 - 1 = 0$

En utilisant les propriétés énoncées ci-dessus et la bijectivité de la fonction exponentielle de base *e*, nous obtenons successivement :

$$(e^x)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = e^0$$
$$\Leftrightarrow \ x = 0$$

1.2. Fonctions logarithmiques

Ci-dessus, nous avons remarqué que la fonction exponentielle de base a donnée par $f(x) = a^x$ pour $0 < a < 1$ et $a > 1$ est bijective. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} appelée fonction logarithme de base a et notée log_a. Ses valeurs sont notées $log_a(x)$ ou $log_a x$, qu'on lit "logarithme de base *a* de *x*". Etant donné que, par la définition de fonction réciproque f^{-1},

$$y = f^{-1}(x) \ \Leftrightarrow x = f(y),$$

la définition de log_a peut être exprimée comme suit:

Soit *a* un nombre réel strictement positif et différent de 1. La fonction

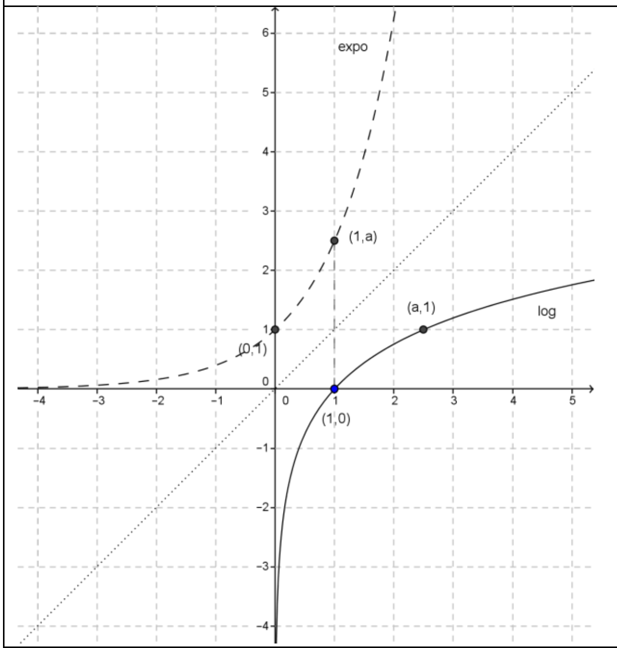
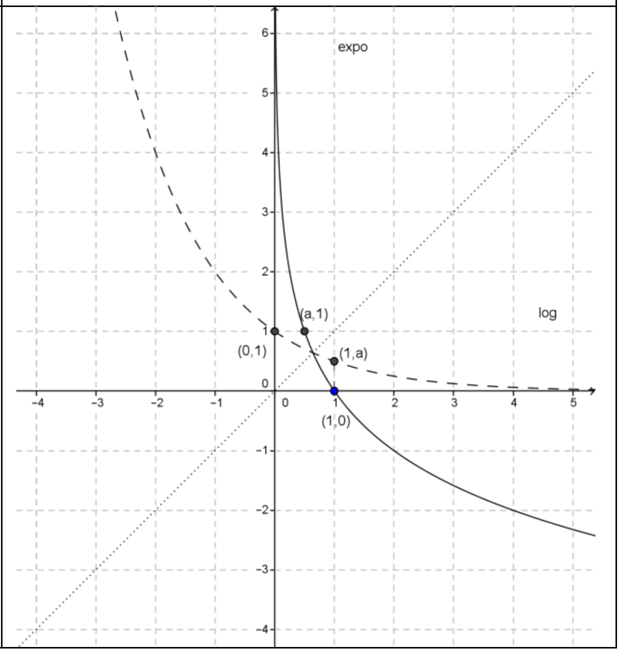
$$log_a : \mathbb{R}_0^+ \ \rightarrow \ \mathbb{R}; \ \ x \leadsto y = log_a x$$

est définie par

$$y = log_a x \ \ \Leftrightarrow x = a^y.$$

Cette fonction est appelée la **fonction logarithme de base *a***.

L'allure du graphe de la fonction $y = log_a x$ (trait continu) dépend de la valeur de a et est le symétrique du graphe de la fonction $y = a^x$ (trait discontinu) par rapport à la première bissectrice *y* = *x* (pointillé):

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Si $a > 1$, alors la fonction log_a est croissante et si $0 < a < 1$, alors la fonction log_a est décroissante. Dans tous les cas, l'intersection du graphe avec l'axe *Ox* a lieu au point (1,0) puisque $a^0 = 1 \Leftrightarrow \ 0 = log_a 1, \forall\, a \neq 0$. Dans tous les cas, le graphe de la fonction passe par le point (*a*,1) puisque $a^1 = a \ \Leftrightarrow \ 1 = log_a a, \forall\, a$.

Les fonctions logarithmiques vérifient les propriétés suivantes :

$\forall a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$, $\quad \forall c \in \mathbb{R}$, $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}_0^+$:

$$log_a 1 = 0 \quad , \quad log_a a = 1 \quad , \quad log_a(x.y) = log_a x + log_a y \quad ,$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y \quad , \quad log_a(x^c) = c \; log_a x \quad , \quad log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

Ainsi, $log_{10}1000 = log_{10}10^3 = 3$ et $log_2\left(\frac{1}{32}\right) = log_2 1 - log_2 32 = -log_2 2^5 = -5$. Notons que, en se rappelant que les fonctions logarithmiques et exponentielles sont des fonctions réciproques les unes des autres, nous aurions pu calculer directement $log_{10}1000 = 3$ puisque $10^3 = 1000$ et $log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$ puisque $2^{-5} = \frac{1}{32}$.

Les propriétés énoncées précédemment nous seront également utiles dans la résolution d'équations logarithmiques comme celles proposées dans les exemples ci-dessous :

Exemple 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $log_6(4x-5) + log_6(2) = log_6(2x+2)$

En utilisant les propriétés énoncées ci-dessus et la bijectivité de la fonction logarithmique de base 6, nous obtenons successivement :

$$\begin{gathered} log_6(4x-5) + log_6(2) = log_6(2x+2) \\ \Leftrightarrow log_6(2.(4x-5)) = log_6(2x+2) \\ \Leftrightarrow 8x - 10 = 2x + 2 \\ \Leftrightarrow x = 2. \end{gathered}$$

La solution obtenue vérifie bien les conditions d'existence imposées par les fonctions logarithmiques, à savoir $4x - 5 > 0$ et $2x + 2 > 0$ ou encore $x > 5/4$.

Exemple 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $log_4(5+x) = 3$

En utilisant la fonction exponentielle de base 4, réciproque de la fonction logarithmique de base 4, nous obtenons successivement :

$$\begin{gathered} log_4(5+x) = 3 \\ \Leftrightarrow 5 + x = 4^3 \\ \Leftrightarrow x = 59 \end{gathered}$$

La solution obtenue vérifie bien les conditions d'existence imposées par les fonctions logarithmiques, à savoir $x > -5$.

Pour répondre à la deuxième question de l'exercice sur la croissance de la population de bactéries du paragraphe précédent, à savoir quand la population de bactéries aura-t-elle dépassé 2 millions d'individus, nous savons donc maintenant résoudre l'inéquation

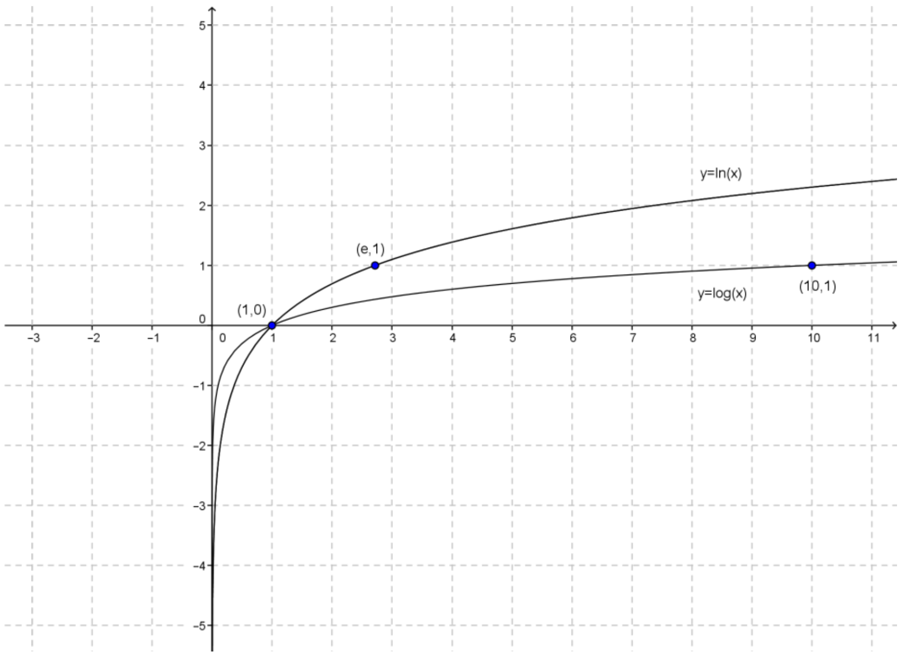
$$(1000)\; 2^t \geq 2\,000\,000 \Leftrightarrow 2^t \geq 2\,000 \Leftrightarrow t \geq log_2 2000 \Leftrightarrow t \geq 10{,}965$$

puisque la fonction 2^t est croissante et réciproque de la fonction $log_2 t$. La population de bactéries aura donc dépassé les deux millions d'individus après 11 jours.

Notons cependant que l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^t \geq 4$ a pour solution $t \leq log_{\frac{1}{2}}(4)$, c'est-à-dire $t \leq -2$, puisque la fonction $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ est décroissante et réciproque de la fonction $log_{\frac{1}{2}}(t)$.
Nous terminons ce paragraphe en évoquant deux bases particulières des fonctions logarithmiques.

Si *a* = 10, alors la fonction logarithmique log_{10} est appelée **logarithme décimal** et notée simplement log. Elle vérifie donc la définition $\boldsymbol{y = log\ x \ \Leftrightarrow x = 10^y}$.

Si *a* = *e*, alors la fonction logarithmique log_e est appelée **logarithme népérien** et notée simplement ln. Elle vérifie donc la définition $\boldsymbol{y = ln\ x \ \Leftrightarrow x = e^y}$. En particulier, $log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, $\forall\ a > 0, a \neq 1$, $\forall\ x > 0$.



2. Exercices

1) Représenter par manipulations graphiques les graphes cartésiens des fonctions définies par :

   a) $f(x) = 1 + e^{2x}$
   b) $f(x) = 4^x - 3$
   c) $f(x) = 4^{x-3}$
   d) $f(x) = \ln(x-2) + 1$

2) Quelle est l'équation du graphique qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale *y* = ln *x* ?

   a) Translation de 3 unités vers le haut.
   b) Translation de 3 unités vers la gauche.
   c) Symétrie axiale par rapport à l'axe *Ox*.
   d) Symétrie axiale par rapport à l'axe *Oy*.
   e) Symétrie axiale par rapport à la droite *y* = *x*.
   f) Translation de 3 unités vers la gauche suivie d'une symétrie axiale par rapport à la droite *y* = *x*.

3) Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\ tg\ x$

b) $f(x) = \ln(sin^2x)$

c) $f(x) = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$

d) $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$

e) $f(x) = \ln(2 + lnx)$

4) Sans calculatrice, déterminer la valeur exacte de

a) $log_2 64$

b) $log_8 2$

c) $log_{10} 1{,}25 + log_{10} 80$

d) $2^{log_2 3 + log_2 5}$

e) $log_6 \frac{1}{36}$

f) $\ln e^{\sqrt{2}}$

g) $e^{3 \ln 2}$

5) Dans certaines conditions, une population de bactéries est censée doubler toutes les trois heures. Supposons qu'il y ait initialement 100 bactéries.

a) A combien se monte la population après 15 heures ?
b) Quel est l'effectif de la population après *t* heures ?
c) Estimer la taille de la population après 20 heures.
d) Dessiner le graphique qui rend compte de l'évolution de cette population et estimer le temps nécessaire pour que cette population atteigne un effectif de 50 000. Vérifier analytiquement.

6) Le bismuth 210, ^{210}Bi, a une demi-vie de 5 jours.

a) Que reste-t-il d'un échantillon de 200 mg après 15 jours ?
b) Que reste-t-il après *t* jours ?
c) Estimer la quantité restante après 3 semaines.
d) Utiliser un graphique pour estimer après combien de temps il ne restera que 1 mg. Vérifier analytiquement.

7) On vous offre un poste de travail qui ne dure qu'un mois. Entre les deux modes de paiement suivants, lequel préférez-vous ?

a) Un million d'euros à la fin du mois ?
b) Un centime le premier jour, deux centimes le deuxième jour, quatre centimes le troisième jour, huit centimes le quatrième jour et ainsi de suite

8) Représenter le graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

9) Résoudre dans l'ensemble des réels les équations suivantes :

a) $e^{2x} - 3\,e^x - \ 4 = 0$

b) $10^x = 2$

c) $\ln x + \ln 2 = 1$

d) $4\ln 3 = \ln 81 - 2\ln\frac{x}{3}$

e) $(\ln x)^2 - \ln x^3 = -2$

f) $e^{4x} - \ 1 = 0$

g) $log_x 125 = 3$

h) $\ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\frac{3}{4}$

i) $3^{x+1} + 18\ .\ 3^{-x} = 29$

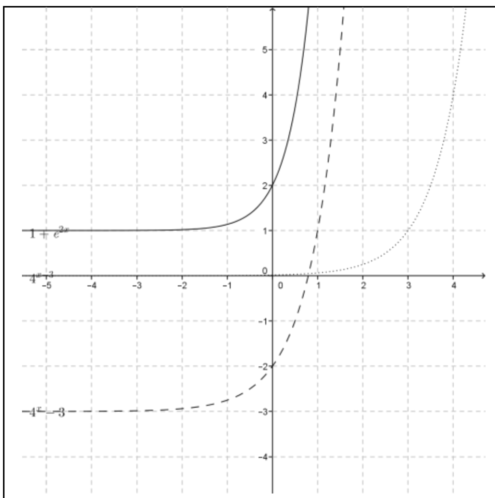
j) $\ln e^5 + \ln x^2 = 1$

k) $log_3 2\ -\ log_3(3^x\ - 1) = x$

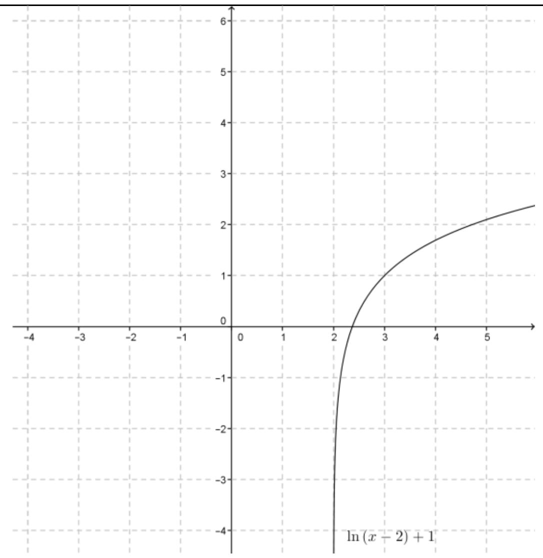
l) $2\,log_3 x + 3\,log_x 3 = 7$

3. Solutions

1.



a)diviser par 2 les abscisses de $y = e^x$et puis ajouter 1 aux ordonnées
b)soustraire 3 aux ordonnées de $y = 4^x$
c)ajouter 3 aux abscisses de $y = 4^x$



d)ajouter 2 aux abscisses de $y = \ln x$ et puis ajouter 1 aux ordonnées

2. a) $y = \ln x + 3$, b) $y = \ln(x+3)$, c) $y = -\ln x$, d) $y = \ln(-x)$, e) $y = e^x$, f) $y = e^x - 3$

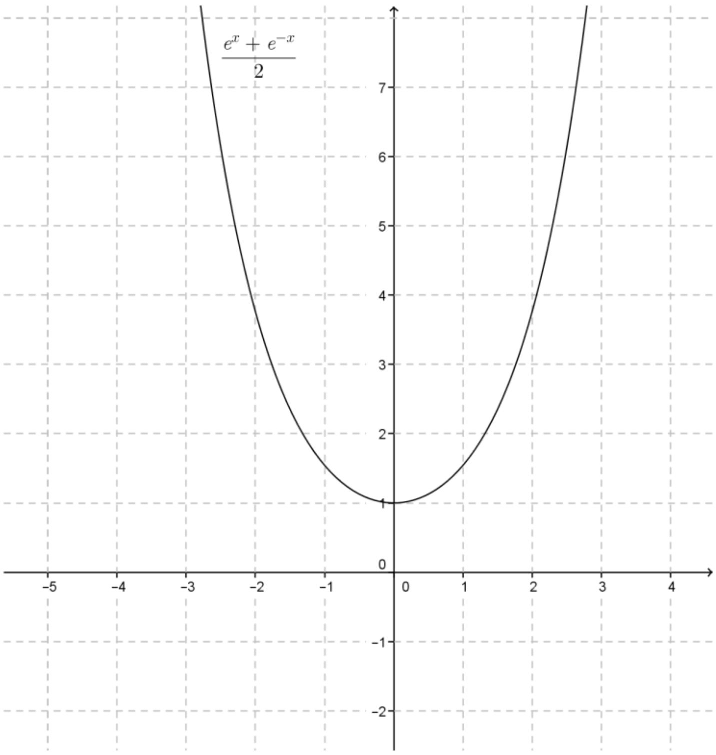
3. a) $Dom\, f = \mathbb{R}_0 \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$, b) $Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\}$, c) $Dom\, f = \mathbb{R}$, d) $Dom\, f =] \longrightarrow , \frac{\ln 3}{2}]$, e) $Dom\, f =]e^{-2}, \longrightarrow [$

4. a) 6 , b) $\frac{1}{3}$, c) 2 , d)15 , e) -2 , f) $\sqrt{2}$, g) 8

5. a) 3200 bactéries , b) 100 $2^{t/3}$, c) 100 $2^{20/3}$ ≈10 159 bactéries , d) $t = 3\ log_2 500 \approx 26{,}9$ heures

6. a) 25 mg , b) $y = 200\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$, c) $200\ \left(\frac{1}{2}\right)^{21/5} \approx 10{,}9$ mg , d) $= 5\ log_2 200\ \approx 38{,}2$ jours

7. b)
8.



9. a) S = {ln 4} , b) S = $\{log\ \ 2\}$, c) S = $\left\{\frac{e}{2}\right\}$, d) S = $\{3\}$, e) S = $\{e, e^2\}$, f) S = $\{0\}$, g) S = $\{5\}$, h) S = $\left\{-\frac{1}{2} , -\frac{3}{2}\right\}$, i) S = $\left\{2 , log_3 \frac{2}{3}\right\}$, j) S = $\left\{\pm \frac{1}{e^2}\right\}$, k) S = $\{log_3 2\}$, l) S = $\left\{\sqrt{3} , 27\right\}$

G. Calcul matriciel

Dès l'Antiquité, la géométrie et l'algèbre ont été les fondements sur lesquels les mathématiques se sont développées. Ces deux disciplines reposent sur deux concepts clés, à savoir les vecteurs et les matrices. Les vecteurs ne seront pas étudiés dans le cadre de ce cours mais le dernier chapitre se consacrera aux matrices. Les matrices peuvent être vues de façon élémentaire comme des tableaux de chiffres permettant par exemple de stocker des informations comme le classement des équipes de foot ou les mouvements de population entre différentes régions. Les matrices peuvent également être vues de façon plus puissante comme par exemple un outil essentiel pour résoudre des systèmes d'équations linéaires ou pour modéliser des rotations ou translations dans l'espace à deux ou trois dimensions. Avant d'aborder les principales opérations sur les matrices et ensuite les applications du calcul matriciel, nous allons passer en revue le vocabulaire matriciel de base.

1 Introduction

1.1 Définitions

Une **matrice de dimension $\boldsymbol{m \times n}$** est un **tableau de $\boldsymbol{mn}$ nombres disposés sur $\boldsymbol{m}$ lignes et $\boldsymbol{n}$ colonnes**. Une matrice est généralement notée par une lettre majuscule A, et, si nécessaire, ses dimensions sont indiquées en indice, $\boldsymbol{A_{m\times n}}$. Si les nombres de la matrice sont des réels, on écrit aussi $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}}$. Une matrice de dimension $m \times n$, ou plus simplement une matrice $m \times n$, s'écrit en abrégé $\boldsymbol{A = [a_{ij}]_{m\times n}}$ et a la forme générale suivante :

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Les nombres d'une matrice sont appelés **éléments**. L'**élément situé à l'intersection de la i$^{\text{ème}}$ ligne et de la j$^{\text{ème}}$ colonne** est noté $\boldsymbol{a_{ij}}$: c'est le terme général de la matrice. A titre d'exemple, a_{24} (qui se prononce « a deux quatre » et non « a vingt-quatre » !) est l'élément situé à l'intersection de la 2$^{\text{ème}}$ ligne et de la 4$^{\text{ème}}$ colonne. On emploie donc le nom de la matrice en minuscule pour en désigner ses éléments.

__Exemples :__
La matrice A ci-dessous est une matrice de dimension 3×5 puisqu'elle comporte 3 lignes et 5 colonnes. Elle compte donc 15 éléments. L'élément situé à l'intersection de la 3$^{\text{ème}}$ ligne et de la 4$^{\text{ème}}$ colonne, soit 1, est noté a_{34}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 10 & 12{,}1 \\ 10 & 2{,}5 & 4 & 8 & -1 \\ 1/4 & 6 & 5 & 1 & 4{,}7 \end{bmatrix}$$

La matrice $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$définie par $b_{ij} = i + 3^j$ s'écrit $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$.

Deux **matrices** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ sont **égales** lorsqu'elles sont tout à fait identiques, c'est-à-dire, si et seulement si, elles ont les mêmes dimensions (m = p et n = q) et tous les éléments correspondants sont égaux (a_{ij} = b_{ij} pour toutes les valeurs de i et de j). Les matrices $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne sont pas égales puisqu'elles n'ont pas les mêmes dimensions. Les matrices $E = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & y & -2 \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 8 & 0 & z \\ 2 & 1/4 & -2 \end{bmatrix}$ sont égales si et seulement si $x = 8$, $y = 1/4$ et $z = 1$.

1.2 Cas particuliers

Une matrice de dimension $1 \times n$ est appelée **matrice ligne**. Une matrice de dimension $m \times 1$ est appelée **matrice colonne**.

Une matrice comportant le même nombre de lignes et de colonnes est appelée **matrice carrée d'ordre *n***. La forme générale d'une telle matrice est

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La **diagonale principale** de cette matrice est formée des éléments a_{ii}, *i*=1,…,*n*. La somme des éléments de cette diagonale principale s'appelle la **trace** de la matrice *A*. On note $\boldsymbol{tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$. Ainsi, la matrice *B* définie au paragraphe 1.1 est une matrice carrée d'ordre 2 dont la trace vaut 15.

Une matrice dont tous les éléments valent 0 est appelée **matrice nulle** et est notée $\boldsymbol{O_{m \times n}} = [0]_{m \times n}$. Les matrices *C* et *D* ci-dessus sont respectivement les matrices nulles de dimensions 3×2 et 2×3.

Une matrice carrée dont tous les éléments situés sous la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire supérieure**. De la même façon, une matrice carrée dont tous les éléments situés au-dessus la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire inférieure**. La matrice $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure d'ordre 3 et la matrice $G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 1/5 & -6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ est triangulaire inférieure d'ordre 4.

Une matrice carrée dont tous les éléments non situés sur la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice diagonale**. Si en plus, tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, la matrice est appelée **matrice identité d'ordre *n*** (ou **matrice unité d'ordre *n***) et est notée $\boldsymbol{I_n}$. La matrice $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4. La matrice $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice identité ou unité d'ordre 3, notée aussi I_3.

Une matrice carrée $A = [a_{ij}]_{n \times n}$est appelée **matrice symétrique** si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour toutes les valeurs de *i* et *j*. Toute matrice diagonale est donc symétrique ! Une matrice carrée $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ est appelée **matrice antisymétrique** si et seulement si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour toutes les valeurs de *i* et *j*. Toute matrice antisymétrique a donc sa diagonale principale nulle ! Les matrices suivantes sont respectivement symétrique, antisymétrique et ni symétrique, ni antisymétrique : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4 & 5\\ 2 & -4 & 0 & -6\\ -3 & -5 & 6 & 0\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

1.3 Exercices

1) Soit la matrice $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0{,}2 & 1 & 8\\ 9 & 10 & 1/2\end{bmatrix}$.

   a) Quelles sont les dimensions de la matrice *B* ?
   b) Que valent b_{21}, b_{43} et b_{34} ?
   c) Dans cette matrice, comment note-t-on le nombre 10 ? Et le nombre 8 ?

2) Ecrire la matrice $C=\left[c_{ij}\right]_{3\times 3}$où $c_{ij}=(-1)^{i+j}\,2^i\,j$.

3) Existe-t-il une valeur de *x* pour laquelle les matrices *A* et *B* sont égales ? Si oui, donner cette valeur. Sinon, comment modifier la matrice *B* pour qu'elle soit égale à *A* pour une valeur de *x* ?

$$A=\begin{bmatrix}x^2 & 0\\ 1 & x\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

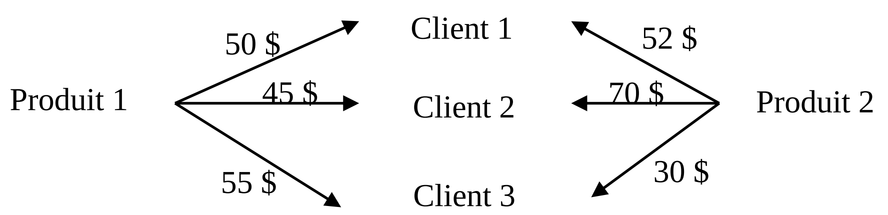
4) Pour quelles valeurs des paramètres *x* et *y* les matrices *A* et *B* sont-elles égales ?

$$A=\begin{bmatrix}2x+3 & 8\\ y & 4\end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix}x^2 & 8\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

5) Vrai ou faux. Justifier.

   a) Toutes les colonnes d'une matrice comportent le même nombre d'éléments.
   b) Une matrice 50 × 60 compte plus de lignes que de colonnes.
   c) Une matrice $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 2}$ peut être antisymétrique.
   d) [1 1 1] = [1 1]
   e) La trace d'une matrice antisymétrique vaut zéro.
   f) La matrice $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ où $a_{ij}=i.j$ est symétrique.
   g) La matrice $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ où $a_{ij}=i-j$ est antisymétrique.
   h) Une matrice de dimension 8 × 4 compte 12 éléments.
   i) La somme de tous les éléments d'une matrice antisymétrique est égale à la trace de cette matrice.

6) Un fabricant de composants électroniques vend deux produits différents à trois clients. Les deux produits sont fabriqués dans deux usines différentes. Les frais de transport de chaque produit, pour chaque client, sont indiqués dans le schéma suivant :



a) Présenter les informations contenues dans ce schéma sous la forme d'une matrice A de dimension 2×3 où a_{ij} représente les frais de transport à payer pour expédier le produit i au client j.
b) Quelle information la deuxième ligne de la matrice contient-elle ?
c) Quelle information la troisième colonne de la matrice contient-elle ?
d) Quelle information a_{12} donne-t-il ?

7) On observe trois véhicules pendant 6 minutes. L'espace parcouru par le véhicule n°i après j minutes est noté y_{ij}. On sait que $y_{ij}=j^2 a_i$, exprimé en kilomètres. Donner les bornes des indices i et j et écrire la matrice $Y=[y_{ij}]$ en sachant que les coefficients a_i sont donnés par $a_1= ½$, $a_2 = 1$ et $a_3= ¼$.

8) Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, E = \left[e_{ij}\right]_{2\times 2} \text{ où}$$

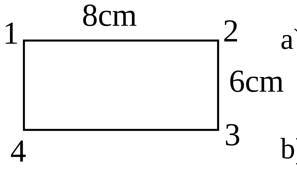
$$e_{ij} = 2^i j^2 , F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Donner les dimensions de chaque matrice.
b) Construire la matrice E.

Lesquelles des matrices données sont

c) des matrices lignes ?
d) des matrices carrées ?
e) des matrices colonnes ?
f) des matrices triangulaires supérieures ?
g) des matrices triangulaires inférieures ?
h) des matrices diagonales ?
i) des matrices symétriques ?
j) des matrices antisymétriques ?

9) Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 6cm et 8cm et dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 et 4 respectivement.



a) Former la matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{4\times 4}$ où a_{ij} représente la distance entre les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ sommets.

b) Vérifier que la matrice A est symétrique et expliquer ce résultat dans le contexte.

1.4 Réponses

1) a)$B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, b) $b_{21}=0$, $b_{43} = ½$, $b_{34} \nexists$, c) b_{42} , b_{33}
2) $C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \\ 8 & -16 & 24 \end{bmatrix}$
3) x = -1
4) x = 3 ou -1 et y = -5
5) a)vrai , b) faux, c) faux, d) faux, e)vrai, f)vrai, g)vrai, h)faux, i)vrai

6) $A = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 55 \\ 52 & 70 & 30 \end{bmatrix}$, b) les frais de transport du deuxième produit pour chacun des clients, c) les frais de transport de chacun des deux produits pour le troisième client, d) les frais de transport du premier produit pour le deuxième client.

7) $\begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 9/2 & 8 & \frac{25}{2} & 18 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 1/4 & 1 & 9/4 & 4 & \frac{25}{4} & 9 \end{bmatrix}$

8) a) A ∈ $\mathbb{R}^{2\times 2}$, B ∈ $\mathbb{R}^{2\times 3}$, C ∈ $\mathbb{R}^{2\times 2}$, D ∈ $\mathbb{R}^{2\times 2}$, E ∈ $\mathbb{R}^{2\times 2}$, F ∈ $\mathbb{R}^{3\times 3}$, G ∈ $\mathbb{R}^{3\times 3}$, H ∈ $\mathbb{R}^{3\times 3}$, J ∈ $\mathbb{R}^{3\times 3}$, b) $E = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$, c) aucune, d) A,C,D,E,F,G,H,J , e) aucune, f) A,C,H,J, g) A, h) A, i) A, j) G

9) a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 10 \\ 10 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, b) A est symétrique car la distance entre les *i*ème et *j*ème sommets et la distance entre les *j*ème et *i*ème sommets sont identiques.

2 Opérations élémentaires sur les matrices

Dans ce paragraphe, nous allons voir si les quatre opérations arithmétiques de base sur les nombres réels que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont généralisables aux matrices qui ont été définies au paragraphe précédent comme des tableaux de nombres réels !

2.1 Addition de matrices

L'addition de deux matrices de même dimension $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ est une opération matricielle dont le résultat (la somme) est la matrice de même dimension $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ définie par

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(n-1)} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2(n-1)} & b_{2n} \\ & & \vdots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m(n-1)} & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} + b_{1(n-1)} & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} + b_{2(n-1)} & a_{2n} + b_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} + b_{m(n-1)} & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

L'élément situé à l'intersection de la *i*ème ligne et de la *j*ème colonne de la matrice somme est donc égal à la somme des éléments qui se trouvent à l'intersection de la *i*ème ligne et de la *j*ème colonne dans les deux matrices à additionner.

Deux matrices de dimensions différentes ne peuvent être additionnées ! Ainsi, si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 9 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, alors *A* + *C* est impossible et *A* + *B*= $\begin{bmatrix} 2 & 10 & -15 \\ 10 & 3 & 6 \\ 1 & 12 & 11 \end{bmatrix}$.

L'addition de matrices vérifie les propriétés suivantes :

$\forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ et $C = [c_{ij}]_{m\times n}$:

- Commutativité de l'addition : $A + B = B + A$
- Associativité de l'addition : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Existence d'un élément neutre pour l'addition : $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$

2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

La multiplication d'une matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ par un scalaire $k \in \mathbb{R}$ est une opération dont le résultat est la matrice de même dimension $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$ définie par

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1(n-1)} & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2(n-1)} & ka_{2n} \\ & & \vdots & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{m(n-1)} & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

L'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice *kA* est donc égal à la multiplication par *k* de l'élément qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne dans la matrice *A*.

Pour les matrices *A*, *B* et *C* définies au paragraphe 2.1, $2C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$, $-\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 & 7/2 \\ -9/2 & -3/2 & -1 \\ 5/2 & -5/2 & -2 \end{bmatrix}$ et $-A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & -7 & -7 \end{bmatrix}$. Cette dernière matrice ***–A*** est appelée la **matrice opposée de *A***. Ces deux matrices vérifient la propriété suivante : Si $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, alors $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ et $A + (-A) = A - A = O_{m\times n}$.

La multiplication d'une matrice par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

$\forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $\forall\ k, l \in \mathbb{R}$:

- Distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de matrices: $k(A + B) = kA + kB$
- Distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de réels: $(k + l)A = kA + lA$
- $(kl)A = k(lA)$
- $1A = A$
- $0\,A = O_{m\times n}$
- $k\,O_{m\times n} = O_{m\times n}$

2.3 Transposition d'une matrice

La transposition d'une matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ est une opération dont nous nous servirons plus loin et qui n'a pas d'équivalent dans les nombres réels. La **transposée d'une matrice *A***, notée A^t ou A^T, est la matrice obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes de la matrice *A*. La première ligne de *A* devient donc la première colonne de A^T et ainsi de suite… La transposition d'une matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$de dimension $m \times n$ est donc une matrice $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$de dimension $n \times m$.

Pour les matrices *A*, *B* et *C* définies au paragraphe 2.1, $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ et $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 7 \\ -8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Cette opération de transposition permet de redéfinir les notions de matrices symétriques et antisymétriques vues au paragraphe précédent, à savoir, une matrice carrée $A = [a_{ij}]_{n\times n}$est appelée **matrice symétrique** si et seulement si $A = A^T$ et une matrice carrée $A = [a_{ij}]_{n\times n}$est appelée **matrice antisymétrique** si et seulement si $A = -A^T$.

La transposition d'une matrice vérifie les propriétés suivantes :

$\forall\, A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$:

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k\,A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

2.4 Multiplication de matrices

La multiplication de deux matrices $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ est une opération matricielle dont le résultat (le produit) est la matrice $C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ définie par

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1(p-1)} & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2(p-1)} & b_{2p} \\ & & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n(p-1)} & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(p-1)} & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(p-1)} & c_{2p} \\ & & \vdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m(p-1)} & c_{mp} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pour trouver l'élément situé à l'intersection de la *i*ème ligne et de la *j*ème colonne de la matrice produit, soit c_{ij}, on « multiplie » en quelque sorte, ou plus précisément, on effectue le produit scalaire de la *i*ème ligne de *A* par la *j*ème colonne de *B*.

Deux matrices de dimensions différentes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{r\times p}$ne peuvent être multipliées que si *n* = *r*, autrement dit que si le nombre de lignes de *B* est égal au nombre de colonnes de *A*. Le résultat est une matrice de dimension $m \times p$.

Ainsi, si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 9 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, alors *CB* est impossible à effectuer et *BC*= $\begin{bmatrix} 16 & -32 \\ 13 & 44 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Notons que $AB = \begin{bmatrix} 82 & -10 & -43 \\ -21 & 25 & 9 \\ 22 & 86 & 0 \end{bmatrix}$ et que $BA = \begin{bmatrix} -40 & -54 & -21 \\ 42 & 59 & -46 \\ 14 & 3 & 88 \end{bmatrix}$. Le produit matriciel n'est donc pas commutatif !

De façon analogue, l'expression a^n définie pour tout nombre réal *a* et pour tout nombre naturel *n* n'est plus forcément valable avec des matrices. En effet, $A^n = A.A \dots A$ (*n* fois) ne sera défini que si la matrice *A* est carrée.

Par exemple, si $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, alors $D^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ et $D^3 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$. De même, si $E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, alors $E^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$. Une telle matrice est dite idempotente. Elle vérifie la définition suivante : une matrice carrée $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$est appelée **matrice idempotente** si et seulement si $A^2 = A$.

De plus, si $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, alors $F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors que le produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un des deux nombres réels est nul, le produit de deux matrices peut être la matrice nulle sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle !

De même, pour des matrices *G*, *H* et *K* (par exemple $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$), $GH = GK \nRightarrow H = K$ alors que cette implication est valable dans les réels.
La multiplication de matrices vérifie par contre les propriétés suivantes :

$\forall\, A, B, C, D$ et E (avec des dimensions compatibles pour effectuer les différentes multiplications ci-dessous), $\forall\, k \in \mathbb{R}$:

- Associativité de la multiplication des matrices : $(AB)C = A(BC)$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- Existence d'un élément neutre pour la multiplication : $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$ et $I_nB_{n\times p} = B_{n\times p}$
- Distributivité de la multiplication de matrices par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$ et $(D + E)F = DF + EF$
- $(AB)^T = B^TA^T$
- $A_{n\times p}O_{p\times q} = O_{n\times q}$ et $O_{m\times n}A_{n\times p} = O_{m\times p}$

2.5 Exercices

1) Calculer, s'ils existent, les produits matriciels *AB*, *BA*, A^2, *AC* et *BC* où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2) Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Calculer $D = 3A\,(B+2C)$.
   b) Déterminer la matrice X telle que $2X + A\,(B+C) = I_2$.

3) Calculer, s'ils existent, les produits matriciels *AB* et *BA* où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

4) Quatre composants sont utilisés dans la constitution de trois aliments. Le poids en milligrammes du composant n°i dans une unité de l'aliment n°j est noté a_{ij}. Deux régimes combinent ces trois aliments. Le nombre d'unités de l'aliment n°i dans un repas du régime n°j est noté b_{ij}. Les matrices $A(a_{ij})$ et $B(b_{ij})$ sont les suivantes : $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.01 & 0.1 \\ 0.01 & 0.02 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
   a) Calculer C = *AB*.
   b) Que représente c_{ij} ?
   c) Utiliser la matrice C pour conseiller :
      - Le régime qui contient le moins de composant n°3.
      - Le régime dont la quantité de composant n°2 ne dépasse pas en poids 0,3 mg par repas.

5) Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer *AX*, *AY*, *AZ*.

6) Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où a et $b \in \mathbb{R}$. Calculer *AB* ainsi que A^n ($n \in \mathbb{N}$).

7) Résoudre l'équation $\mathrm{A}\,(\mathrm{X} - \mathrm{B}) = \mathrm{X}\,(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ dont l'inconnue est la matrice $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et où $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

8) Calculer X si $-3X + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

9) Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} -15 & 3-3a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.
   b) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

10) Soit $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Vérifier que M satisfait à la relation $M^2 = M + 2\,I_2$.

11) Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $E = [-1 \quad -2]$, $F = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} x & 1-x \\ 1+x & -x \end{bmatrix}$.

Effectuer si possible les opérations suivantes. Si une opération n'est pas définie, en donner la raison.

a) BF	b) BE	c) EB	d) 5A – 3D + FE	e) 3G + 2D
f) $3B^T$ - 2C	g) 4AD – $5G^2$	h) ED + AF	i) 2BC – 3FE	j) $A(B – C^T)$
k) E(AF)	l) $(ED)C^T$	m) A^2	n) B^2	o) $(BC)^2$
p) D^3	q) CI_3	r) I_3C	s) EG^2	

12) Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Si elle est définie, trouver la matrice X qui vérifie l'équation.

a) $2(A - B + X) = 3(2X - A)$
b) $3X - 2AC = 4BC$
c) $5X + AC = 2X - 3BD^T$
d) $2X + 3(A + B) = CD$

13) Sur les rayons de deux magasins de disques, on trouve 60 exemplaires de disques de Céline Dion, de Mes Aïeux et de Daniel Bélanger. Dans le premier magasin, ces disques totalisent 40 exemplaires. Dans ces deux magasins, on compte 30 exemplaires des disques de Céline Dion, le premier magasin en comptant deux fois plus que le second. Dans chaque magasin on dénombre également deux fois moins de disques de Mes Aïeux que de disques de Céline Dion.

a) Construire la matrice *A* des stocks de ces deux magasins.

Stock de disques par magasin	C. Dion	Mes Aïeux	D. Bélanger
Magasin 1			
Magasin 2			

b) La matrice $B = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$ donne le prix de vente de chacun des disques. Calculer *AB* et interpréter le résultat.

14) Soit $B = [5 \quad 12 \quad 6]$, la matrice donnant le nombre d'unités produites de trois biens (b1, b2 et b3) que fabrique une entreprise. Soit $Q = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, la matrice donnant les quantités de chacun des quatre composants (m1, m2 , m3 et m4 en colonne) requis pour la production d'une unité de chacun des trois biens (b1, b2 et b3 en ligne). Soit $C = [8 \quad 10 \quad 12 \quad 6]$, la matrice des coûts unitaires de chacun des composants.

a) Donner le sens et la valeur de q_{32} dans le contexte.
b) Calculer le produit matriciel *BQ* et interpréter le résultat de cette opération.
c) Calculer le produit matriciel QC^T et interpréter le résultat de cette opération.
d) Calculer le produit matriciel BQC^T et interpréter le résultat de cette opération.

2.6 Réponses

1) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -13 & 6 & -5 \\ 21 & 2 & 11 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, A² et AC n'existent pas,
   $BC = \begin{bmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 21 & 27 & 33 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

2) a) $D = \begin{bmatrix} 6 & 123 \\ 12 & 243 \end{bmatrix}$, b) $X = \begin{bmatrix} 1/2 & -17 \\ 0 & -41 \end{bmatrix}$

3) $AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & -11 \end{bmatrix}$ et BA n'existe pas

4) a) $C = \begin{bmatrix} 1.1 & 1.4 \\ 0.12 & 0.42 \\ 0.07 & 0.04 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) c_{ij} représente la quantité (en mg) du composant n°i dans le régime n°j , c) le régime n°2, le régime n°1

5) $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $AY = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $AZ = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

6) $AB = \begin{bmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8) $X = \begin{bmatrix} 29/3 & 2 \\ 20/3 & 1 \\ 9 & 5/3 \end{bmatrix}$

9) a) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 729 & 60a-60 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 729 & 9a-9 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$, b) a=1

11) a) non défini, b) non défini, c) [-7 -1 -15] , d) $\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 17 & -22 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 3x & 5-3x \\ 1+3x & -3x \end{bmatrix}$,
   f) $\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -21 & 0 \\ -13 & 11 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} -13 & -4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$, h) non défini, i) $\begin{bmatrix} 89 & -30 \\ 174 & 110 \end{bmatrix}$,
   j) $\begin{bmatrix} 15 & 7 & 11 \\ -30 & -34 & -32 \end{bmatrix}$, k) [-9] , l) [24 9 11] , m) $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$, n) non défini,
   o) $\begin{bmatrix} -272 & -1848 \\ 6006 & -503 \end{bmatrix}$, p) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, q) non défini, r) C , s) [-1 -2]

12) a) $\begin{bmatrix} -9/4 & 9/4 \\ 8 & 15/2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 26 & -8 & 20 \\ 140/3 & -56/3 & 116/3 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -29/3 & -16/3 & -56/3 \\ -25 & -62/3 & -41 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -11/2 & -23/2 \end{bmatrix}$

13) a) $AB = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, b) $AB = \begin{bmatrix} 560 \\ 280 \end{bmatrix}$ représente la valeur marchande totale des trois disques en stock dans chacun des deux magasins.

14) a) q_{32}=9 représente le nombre d'unités du composant m2 qu'il faut pour produire une unité du bien b3 , b) BQ = [69 209 70 82] donne les quantités requises de chacun des composants m1, m2, m3 et m4 pour effectuer la production des trois biens , c) $QC = \begin{bmatrix} 166 \\ 164 \\ 196 \end{bmatrix}$ donne le coût unitaire de production de chacun des biens b1, b2 et b3 , d) BQC^T = [3974] donne le coût total des unités produites des trois biens.

3 Déterminant et inverse d'une matrice carrée

Nous allons, dans cette section, introduire la notion de **déterminant d'une matrice** pour pouvoir définir ensuite la notion d'**inverse d'une matrice**, qui correspondra à la notion d'inverse d'un nombre réel et donc à la notion de division. Nous aurons alors tous les outils à notre disposition pour passer ensuite à la principale application du calcul matriciel, à savoir la résolution de systèmes d'équations linéaires.

3.1 Déterminant

Le déterminant d'une **matrice carrée**[6] ***A* d'ordre *n*** dont les éléments sont des nombres réels est un nombre réel associé à cette matrice, noté ***detA***, qui permettra de savoir si la matrice *A* admet une matrice inverse. En effet, une matrice carrée *A* d'ordre *n* dont le déterminant est non nul est dite **régulière** ou **non singulière** et admet une matrice inverse alors qu'une matrice carrée *A* d'ordre *n* dont le déterminant est nul est dite **singulière** et n'admet pas de matrice inverse. Comme nous allons le voir, le calcul d'un déterminant d'une matrice carrée *A* d'ordre *n* se fait de manière récursive puisqu'il consiste à écrire ce déterminant comme une somme de déterminants de matrices carrées d'ordre (*n*-1) et ainsi de suite jusqu'à se ramener à une somme de déterminants de matrices carrées d'ordre 2 pour lequel nous connaissons la formule du calcul du déterminant.

En effet, le **déterminant d'une matrice carrée A d'ordre 2**, $A = [a_{ij}]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, est défini par $\boldsymbol{detA} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{21}\, a_{12}}$, soit le produit des éléments de la diagonale principale moins le produit des éléments de la diagonale secondaire. Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, alors $detA = 2.4 - 1.(-3) = 11$. La matrice *A* est régulière et admet une matrice inverse. Nous verrons plus loin comment la calculer. La matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ est quant à elle singulière et n'aura donc pas de matrice inverse puisque $detB = 2.12 - 6.4 = 0$.

Le **déterminant d'une matrice carrée A d'ordre 3**, $A = [a_{ij}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, se ramène au calcul d'une somme de déterminants de matrices carrées d'ordre 2 puisqu'il est défini par

$$\boldsymbol{detA} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{12}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{13}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}\, a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}\, a_{31})}$$

Comment retenir une formule aussi compliquée ? Notons d'abord que les signes des différents termes de la somme alternent (+,-,+). De plus, le premier terme est le produit du premier élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{11}) par un déterminant d'ordre 2. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{11}, à savoir la première ligne et la première colonne. Quant au deuxième terme, c'est le produit du deuxième élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{12}) par un déterminant d'ordre 2. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{12}, à savoir la première ligne et la deuxième colonne. Enfin, le troisième terme est le produit du troisième élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{13}) par un déterminant d'ordre 2. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{13}, à savoir la première ligne et la troisième colonne.

[6] Le déterminant d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une notion qui dépasse le cadre de ce cours.

Ainsi, le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ vaut 28 puisqu'il s'obtient par les calculs suivants : $detA = 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 5.7+2.7-3.7=28 !

Ce processus se généralise à toute matrice carrée d'ordre *n*. Ainsi, le calcul du **déterminant d'une matrice d'ordre 4**, $A = [a_{ij}]_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ est analogue puisqu'il se ramène au calcul d'une somme de déterminants de matrices carrées d'ordre 3, à savoir

$$\boldsymbol{detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}$$

Notons d'abord que les signes des différents termes de la somme alternent (+,-,+,-). De plus, le premier terme est le produit du premier élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{11}) par un déterminant d'ordre 3. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élément a_{11}, à savoir la première ligne et la première colonne. Quant au deuxième terme, c'est le produit du deuxième élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{12}) par un déterminant d'ordre 3. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{12}, à savoir la première ligne et la deuxième colonne. De même, le troisième terme est le produit du troisième élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{13}) par un déterminant d'ordre 3. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{13}, à savoir la première ligne et la troisième colonne. Enfin, le quatrième terme est le produit du quatrième élément de la première ligne de la matrice *A* (a_{14}) par un déterminant d'ordre 3. Ce déterminant est celui de la matrice résiduelle obtenue en supprimant de la matrice *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élémenta_{14}, à savoir la première ligne et la quatrième colonne. Les quatre déterminants des matrices carrées d'ordre 3 se calculent à leurs tours par une somme de trois déterminants de matrices carrées d'ordre 2.

Ainsi, le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ vaut -21 puisqu'il s'obtient par les calculs suivants :

$$detA = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right\} + \left\{-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$
$$-2\left\{-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \{3-1\} + \{-3-6\} - 2\{1+6\} = 2 - 9 - 14 = -21\ !$$

Nous remarquons directement que le calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 4 demande de nombreux calculs et donc du temps ! Les développements seront encore plus longs si l'ordre *n* de la matrice carrée *A* augmente ! Malheureusement ce processus est le seul disponible pour calculer le déterminant de n'importe quelle matrice carrée d'ordre *n*. Nous allons heureusement voir maintenant une propriété du déterminant permettant de simplifier ces calculs.

En effet, nous pouvons montrer que l'on peut développer tout déterminant selon n'importe quelle ligne ou selon n'importe quelle colonne et pas uniquement selon la première ligne comme nous l'avons fait jusqu'ici. Le résultat obtenu sera toujours le même ! L'avantage de cette propriété est donc de choisir une ligne ou une colonne comprenant beaucoup d'éléments nuls ! Le déterminant d'une matrice carrée *A* d'ordre *n* se calcule en fait sous la forme d'une somme de termes dont chacun est le produit d'un élément de la matrice (situé sur la ligne ou la colonne choisie) par le déterminant de la matrice résiduelle obtenue en supprimant dans *A* la ligne et la colonne où se trouve cet élément. On attribue un signe – ou un signe + à chaque produit (autrement dit à chaque terme de la somme) de la façon indiquée par la matrice des signes :

Matrice des signes

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

Dans cette matrice, il y a donc une alternance des signes d'une ligne à l'autre ou d'une colonne à l'autre. Plus précisément, le signe à l'intersection de la *i*ème ligne et de la *j*ème colonne est donné par la formule $(-1)^{i+j}$, ce qui fera un signe + à une position « paire » et un signe – à une position « impaire ». Le déterminant de la matrice résiduelle obtenue en supprimant dans *A* la ligne et la colonne où se trouve l'élément a_{ij} s'appelle le **mineur associé à l'élément $\boldsymbol{a_{ij}}$** et se note M_{ij}. Le **cofacteur associé à l'élément $\boldsymbol{a_{ij}}$** est défini par $(-1)^{i+j}M_{ij}$ et se note C_{ij}.

Cette notion de cofacteur, qui sera réutilisée plus tard lors du calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre *n*, permet donc de résumer la procédure du calcul du déterminant d'une matrice carrée *A* d'ordre *n* comme suit :

En résumé, le déterminant d'une matrice carrée *A* d'ordre *n* se calcule en choisissant n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne de la matrice *A* et en effectuant, une fois la ligne ou la colonne choisie, la somme des produits des éléments de cette ligne ou de cette colonne par leurs cofacteurs. Autrement dit, si *A* est une matrice carrée d'ordre *n*, alors

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\,C_{1k} \quad = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,C_{ik} \quad = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,C_{kj}$$

suivant que l'on développe suivant la première ligne, la ligne n° *i* ou la colonne n° *j*. Il est donc indiqué de choisir une ligne ou une colonne comportant de nombreux zéros !

Ainsi, le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calculé précédemment en développant suivant la première ligne, peut également se calculer en développant suivant la deuxième ligne. Nous obtenons alors les calculs suivants : $detA = -4\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = -4.(-1) + 3.7 + 1.3=28 ! Nous obtenons également 28 en développant par exemple suivant la première colonne : $detA = 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ = 5.7 - 4.(-1) - 1.11=28 !

Par cette propriété, le calcul du déterminant de la matrice carrée d'ordre 4, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, sera donc plus rapide si nous développons les calculs suivant la troisième ligne ou la deuxième colonne qui comportent trois zéros. Nous obtenons donc $detA = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ où le déterminant de la matrice 3x3 se calcule plus facilement en le développant suivant la deuxième colonne.

3.2 Inverse

Dans cette section, nous allons généraliser l'opération d'inversion de tout nombre réel non nul. Rappelons en effet que tout nombre réel a non nul possède un inverse unique $a^{-1} = \frac{1}{a}$, vérifiant $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. De la même façon, si **A est une matrice carrée d'ordre n régulière**, c'est-à-dire dont le déterminant est non nul, la **matrice inverse de A** est donnée par $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA}$ où **$adjA$ est la matrice adjointe de A** définie comme étant **la transposée de la matrice des cofacteurs des éléments de A**. Cette matrice inverse est unique. Rappelons que le cofacteur associé à l'élément a_{ij} (situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de A) est défini par $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ où M_{ij}, le mineur associé à l'élément a_{ij}, est défini par le déterminant de la matrice résiduelle obtenue en supprimant dans A la ligne n°i et la colonne n°j où se trouve l'élément a_{ij}. De plus, une matrice carrée d'ordre n régulière A et sa matrice inverse A^{-1} vérifie l'égalité suivante : $\boldsymbol{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$ où I_n est la matrice identité d'ordre n. L'égalité $\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}}$ se déduit immédiatement de la relation précédente et des propriétés des déterminants.

Par exemple, si $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, alors $detA$ = -7. Comme $detA \neq 0$, la matrice A est régulière et sa matrice inverse est donnée par $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/7 & 1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{bmatrix}$.
De façon générale, si A est une matrice carrée d'ordre 2 régulière $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $detA = ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Il n'y a malheureusement pas de généralisation possible de cette formule pour une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ et les calculs de matrices inverses seront souvent longs ! Rappelons que le résultat doit vérifier l'égalité : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Si $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, alors $detB$ = 8. Comme $detB \neq 0$, la matrice B est régulière et sa matrice inverse est donnée par $B^{-1} = \frac{1}{detB} adjB = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -11 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11 & 5 & -7 \\ -7 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -11/8 & 5/8 & -7/8 \\ -7/8 & 1/8 & -3/8 \end{bmatrix}$. L'égalité $B.B^{-1} = B^{-1}.B = I_3$ est bien satisfaite.

Les propriétés suivantes permettent de parfois simplifier le calcul d'inverses de matrices carrées d'ordre n :

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n inversibles et $c \in \mathbb{R}$ un scalaire.

- Les matrices A^{-1}, A^T et AB sont régulières et donc inversibles.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

3.3 Exercices

1) Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

b) $det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a-2 & a \\ a & a+2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

f) $det\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

k) $det\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & d \\ c & e & f \end{bmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

m) $det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

n) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

o) $det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

p) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

2) Pour quelle(s) valeur(s) de *x* la matrice est-elle singulière ?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ x & 3x \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2x & x+1 \\ x-2 & 3x \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

3) Trouver, si elle existe, la matrice inverse de chaque matrice donnée :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

i) $I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

j) $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

k) $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

4) Soit X une matrice carrée d'ordre 2 telle que $2X\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$. Quelle est l'expression de la matrice X ?

5) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 0 \\ x & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de *x* la matrice *A* n'est-elle pas inversible ?
b) Exprimer A^{-1} en fonction *x*.
c) Pour quelle(s) valeur(s) de *x* le déterminant de la matrice *A* vaut-il 14 ?

3.4 Réponses

1) a) -22 , b) 6 , c) 10 , d) -4 , e) 0 , f) -8 ,g) -28 , h) 12 , i) -36 , j) 0 , k) –abc , l) -36 , m) -44 , n) -8 , o) -3 , p) -68
2) a) x = 0 ou x = 4 , b) jamais, c) x = 1 , d) x = 3 ou x = 1
3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{bmatrix}$, C^{-1} n'existe pas, $D^{-1} = \begin{bmatrix} a/(a^2-4) & -2/(a^2-4) \\ -2/(a^2-4) & a/(a^2-4) \end{bmatrix} \Leftrightarrow a \neq 2 \; et \; a \neq -2$, E^{-1} n'existe pas, $F^{-1} = \begin{bmatrix} -1/44 & 3/44 & 7/44 \\ 31/44 & 39/44 & 3/44 \\ 19/44 & 31/44 & -1/44 \end{bmatrix}$, G^{-1} n'existe pas, $H^{-1} = \begin{bmatrix} -2/21 & 1/3 & 10/21 \\ 1/21 & 1/3 & -5/21 \\ 5/21 & -1/3 & -4/21 \end{bmatrix}$, $I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1/20 & 1/5 & 3/40 \\ 1/4 & 0 & -3/8 \end{bmatrix}$, J^{-1} n'existe pas, $K^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ 9/5 & -1 & 1/5 \end{bmatrix}$
4) $X = \begin{bmatrix} 51/2 & -16 \\ -50 & 29 \end{bmatrix}$
5) a) x = -2 ou x = 3 , b) $A^{-1} = \frac{1}{-x^2+x+6}\begin{bmatrix} x & 3 & -x \\ -2 & 1-x & 2 \\ 6-x^2 & -3 & x \end{bmatrix}$, c) aucune

4 Systèmes carrés d'équations

La forme générale d'un système d'équations linéaires comportant *n* équations et *n* inconnues est la suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce système, les inconnues sont $x_1, x_2, \dots, x_n$, alors que $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des constantes et que a_{ij} est le coefficient de l'inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équation. On peut écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$ où $A = [a_{ij}]_{n\times n}$est la matrice des coefficients, $X = [x_i]_{n\times 1}$, la matrice colonne des inconnues et $B = [b_i]_{n\times 1}$, la matrice colonne des constantes :

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

Par exemple, le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 4y = -6 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -6 \end{bmatrix}$. Celui de trois équations à trois inconnues $\begin{cases} -x + y - 3z = 4 \\ 2x + y - z = 8 \\ 3x - 2y + 4z = 12 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Dans l'ensembles des réels, on résout l'équation à une seule inconnue $ax = b$ où $a \neq 0$ en multipliant chaque membre de l'équation par l'inverse de *a*, soit a^{-1}. Puisque $a \neq 0$, on obtient alors $ax = b \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$. Les équations $ax = b$ et $AX = B$ se ressemblent par leur forme. Il est donc naturel de penser que l'on peut résoudre l'équation matricielle $AX = B$, c'est-à-dire trouver l'expression de la matrice des inconnues (et donc la valeur de chacune des inconnues), en employant à peu près la même méthode que pour résoudre l'équation réelle à une seule inconnue $ax = b$. La notion de matrice inverse vue au paragraphe précédent nous aidera dans cette tâche. En effet, si la matrice *A* carrée d'ordre *n* est régulière, elle est inversible et l'on obtient successivement $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$, puisque $A^{-1}A = I_n$!

La solution du système de deux équations à deux inconnues défini plus haut est donc donnée par $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 13 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 \\ 51 \end{bmatrix}$, puisque $detA \neq 0$!

Celle du système de trois équations à trois inconnues est $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -11/8 & 5/8 & -7/8 \\ -7/8 & 1/8 & -3/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ -7 \end{bmatrix}$, puisque $detA \neq 0$!

Il est conseillé de vérifier l'exactitude de la solution d'un système d'équations en substituant les valeurs des inconnues dans chacune des équations. Si l'on obtient une égalité dans chaque cas, alors la solution est exacte.

Exercices : Résoudre, si possible, chacun des systèmes d'équations linéaires suivants en recourant au produit matriciel et à la matrice inverse de la matrice des coefficients.

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - 4y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2x + 3y = 11 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ 8x - 7y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + 5y + 9z = 20 \end{cases}$

5) $\begin{cases} a - 2b - 3c = -1 \\ 2a - b - 2c = 2 \\ 3a - b - 3c = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_3 = 8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 4y - 4z = -4 \\ 3x - 3y - 8z = 20 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 4x + 2y - 3z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Réponses :

1)x = 2 et y = 1 , 2) x = 2 , y = 5 , 3) x = 1 et y = 1, 4) x = 25 , y = -15 , z = 5 , 5) a = 2 , b = 0, c = 1 , 6) impossible, 7) x = 5 , y = -3 , z = ½ , 8) x = -11 , y = -1 , z = -16

La méthode étudiée dans cette section ne fonctionne pas si la matrice *A* des coefficients est singulière, s'il y a plus d'équations que d'inconnues ou si, vice-versa, il y a plus d'inconnues que d'équations dans le système à résoudre, autrement dit si la matrice *A* des coefficients est rectangulaire. Ces différents cas sortent du cadre de ce cours.

Nous allons terminer en étudiant une autre façon de résoudre un système carré d'équations admettant une solution unique, c'est-à-dire un système dont la matrice A des coefficients est régulière ou encore inversible. Cette méthode s'appelle la **règle de Cramer**. Soit donc ***AX* = *B* un système de *n* équations linéaires à *n* inconnues ($x_1, x_2, \dots, x_n$) tel que det*A*≠0**. Notons **Δ(≠0) le déterminant de la matrice *A* et Δ_{x_i} le déterminant de la matrice que l'on obtient en remplacant la *i*ème colonne de *A* par la matrice colonne *B* des constantes où *i* = 1 , 2, …, *n*.** La règle de Cramer permet alors de calculer la solution unique de ce système par la formule $\boldsymbol{x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$.

Par exemple, le système de trois équations à trois inconnues $\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ 2x + y + 5z = -5 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ et admet une solution unique donnée par $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3$ et $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$ puisque $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 9$ et $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6$.

Exercices : Résoudre, si possible, chacun des systèmes d'équations linéaires ci-dessus à l'aide de la règle de Cramer.

5 Exercices récapitulatifs

1) Soient les matrices: A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et C = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer

   a) le cofacteur de a_{32} .

   b) $\det B$.

   c) A^{-1}.

   d) A^T.

   e) le mineur de c_{22} .

   f) A + 2B .

   g) C – A .

   h) AB .

   i) C^2 .

   j) la solution du système d'équations $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y = 0 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$ par la méthode de l'inverse.

2) Résoudre l'équation matricielle $-3X + AB = C^T$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3) A l'aide du calcul matriciel, calculer la solution du système d'équations $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \end{cases}$.

4) Soient les matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ où $b_{ij} = \begin{cases} 6 & si \;\; i = j \\ i + j & si \;\; i \neq j \end{cases}$,
C = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et F = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vrai ou Faux. Justifier !

   a) A est triangulaire inférieure ?

   b) B est symétrique ?

   c) $C^T C = 4 I_2$?

   d) D est inversible ?

   e) EF = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

f) $D - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$?

g) $F^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

h) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

i) FA = AF ?

j) $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$?

5) Soient les matrices A, B, C, D, E, F, G, H et J suivantes : $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,
$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & -12 & 2 \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer si cela est possible (sinon, justifier pourquoi cela est impossible) :

a) $(A+B)\,C^T - 2B$, $DE + B^{-1}$, C^2 , $AB + F^T$, DFE

b) le mineur de f_{21}

c) le cofacteur de g_{23}

d) F^{-1}

e) la solution du système d'équations $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \end{cases}$ par la règle de Cramer

f) la matrice X telle que $-3X + GE = D^T$

g) la matrice Y telle que $Y + D^T E = 2C$

h) det J

i) J^{-1}

Réponses :

1) a) 4 , b) detB = 0 , c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -10 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, e) -6 ,
f) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 8 & 7 & 24 \\ 9 & -5 & 5 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ -2 & 13 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 16 & 14 & 38 \\ -13 & -26 & -52 \\ -12 & -15 & -35 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 9 & 11 & -4 \\ 0 & 64 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,
j) x = 15 , y = 6 , z = -1

2) $X = \begin{pmatrix} 29/3 & 2 \\ 20/3 & 1 \\ 9 & 5/3 \end{pmatrix}$

3) x = -4 , y = -3 , z = 7

4) a) Faux (A est triangulaire supérieure), b) Vrai ($b_{ij} = b_{ji}$) , c) Faux ($\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$) , d) Faux (detD = 0) , e) Vrai (par calculs) , f) faux ($\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$) , g) Vrai (par définition de transposée) , h) faux ($\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) , i) Faux (FA n'existe pas) , j) Vrai (par calculs)

5) a) $(A+B)\,C^T - 2B = \begin{pmatrix} 30 & -14 \\ 20 & -22 \end{pmatrix}$, $DE + B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $AB + F^T$ impossible , $DFE = \begin{pmatrix} 24 & 11 \\ 54 & 15 \end{pmatrix}$, b) -8 , c) -6 , d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, e) x = -4 , y = -3 , z = 7 ,
f) $X = \begin{pmatrix} 29/3 & 2 \\ 20/3 & 1 \\ 9 & 5/3 \end{pmatrix}$, g) impossible , h) detJ = 0 , i) J^{-1} n'existe pas