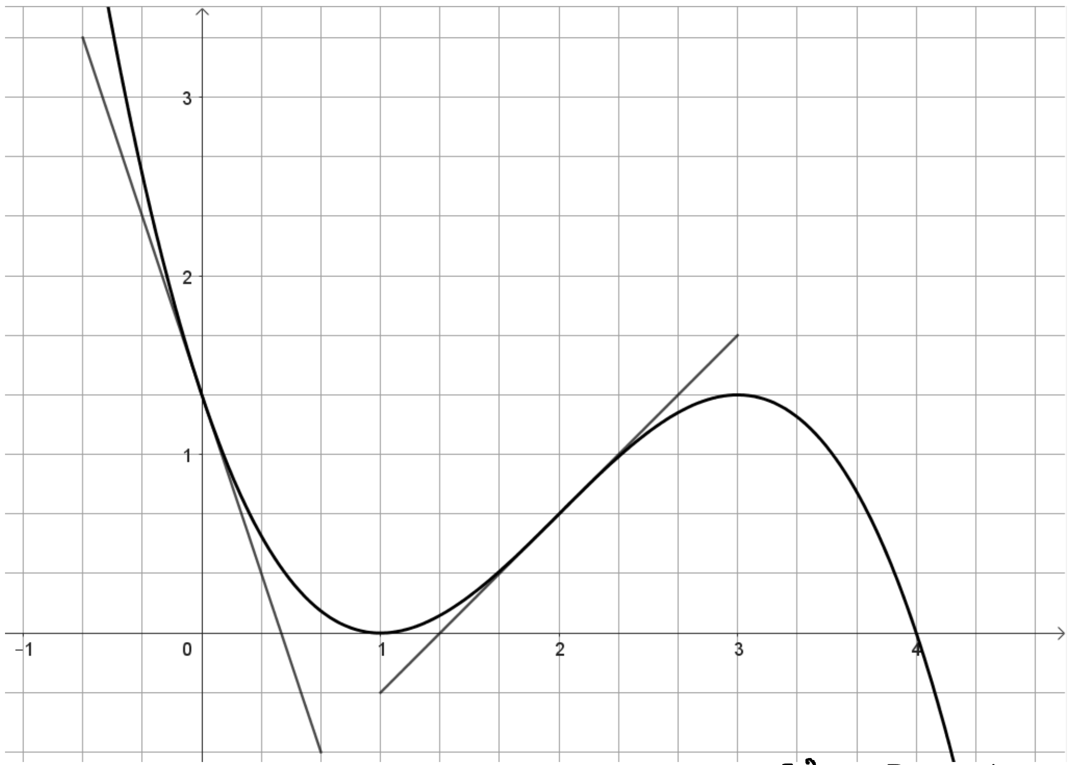
Examen de mathématiques - Q2

Durée de l'examen : 3h
Calculatrice et tout autre appareil électronique sont interdits.

Question 1. Soit la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous. /5



4/3 0 2/3 -3 0 1

(a) Déterminer, à l'aide du graphique, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

(b) Donner une équation de la tangente au graphe de f en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.
1 2 3

$f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

1) $-3 \cdot (x - 0) + 4/3 = -3x + 4/3$

2) $0 \cdot (x - 1) + 0 = 0$

3) $1 \cdot (x - 2) + 2/3 = x - 4/3$

Question 2. Soient les nombres complexes $z_1 = 2i - 1$, $z_2 = 4 + i$ et $z_3 = 3 - 4i$. Calculer : /6

(a) $|z_1| =$ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

(b) $\overline{z_1} - 2z_2 =$ $(-1-2i) - (8+2i) = -9-4i$

(c) $z_1 \cdot z_3 =$ $(-1 \cdot 3 - 2 \cdot (-4)) + (-1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3) \cdot I = (-3+8) + (4+6) \cdot I$

$= 5 + 10i$

(d) $\frac{z_1}{z_2} =$

$\frac{(-1+2i)}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{-4+8i+i-i^2}{16 \cancel{+4i} \cancel{-4i} - i^2} = \frac{-4+9i+1}{16+1} = \frac{9i-2}{17}$

$i^2 = -1$

Question 3. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants. /4

(a) 2cis 225° $= 2 \cdot \left(\cos -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

(b) $-3(\text{cis}\ \frac{\pi}{2} - \text{cis}\ (-\pi))$

1 2

1 $-3(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}) = i$

2 $-3(\cos -\pi + i\sin -\pi) = -1$

$-3(i - (-1)) = -3 - 3i$

Question 4. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants et les placer dans un plan de Gauss. /5

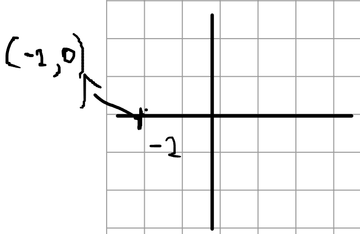
(a) -2

$|Z| = \sqrt{4+0}$

$|Z| = 2$

$\sin\varphi = \frac{0}{2}$ $\cos\varphi = \frac{-2}{2} = -1$

$2 \operatorname{cis}(\pi)$



(b) $-\sqrt{3}+3i$

① $-\sqrt{3}+3i$

trigo $= r \operatorname{cis} \varphi$

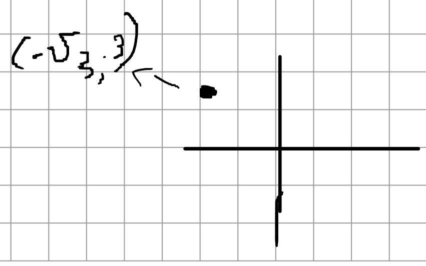
② $r = |z| \to \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2+3^2} = \sqrt{3+3^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

③ $\begin{cases} \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \\ \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

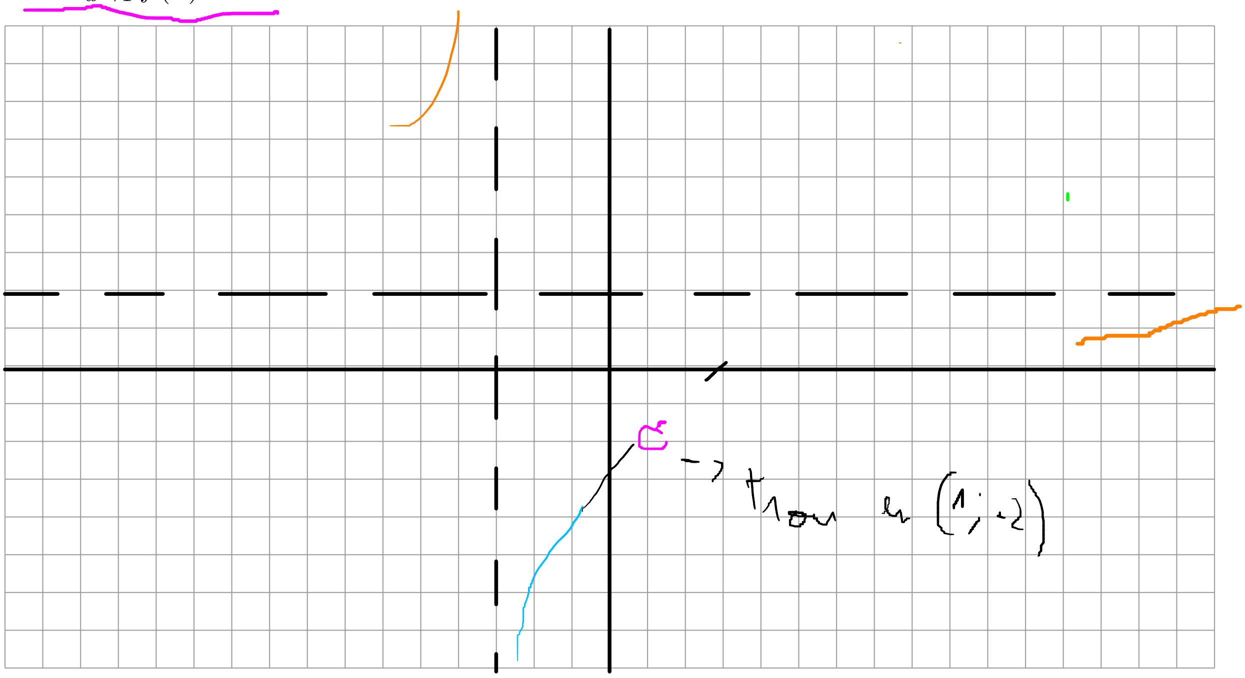
④ cos $-\frac{1}{2}$, sin $+\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

⑥ Trigo : $2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{-}$



Question 5. Esquisser le graphique d'une fonction f répondant aux conditions suivantes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) \nexists$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$. /4



Question 6. Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement. /17

(a) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+6x+9}{x+3}$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x^2+x^4-2}$

(c) $\lim_{x \to 3} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2-x}\right)$

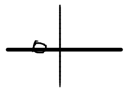
(d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^4+x-1}{2x^4+x^3-x+1}$

(e) $\lim_{x \to -2} \frac{x+5}{x-2}$

(f) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x+1}+2x\right)$

(g) $\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x^2-1}$

a) $\frac{(-3)^2+6.(-3)+9}{-3+3} = \frac{0}{0}$ CI $\overset{H}{=} \frac{2x+6}{1} = 2.(-3)+6 = 0$ Trou en $(-3;0)$

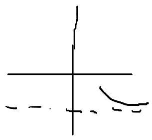


b) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-\infty+\infty-2}$ CI $= \sqrt{x^4} = \sqrt{\infty^2} = +\infty$ ~~AH~~

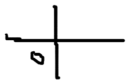
$m = \frac{\sqrt{-x^2+x^4-2}}{x} = \frac{\sqrt{x^4}}{x} = \frac{x^3}{\cancel{x}} = \infty$ pas d'AO

c) $\lim_{x\to3} 1-\sqrt{-1} = 1-\sqrt{i^2} = 1-|i|$ Trou en $(3;1-|i|)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^4+x-1}{2x^4+x^3-x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ CI $= \frac{-5\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \frac{-5}{2}$ AH



e) $\lim_{x\to-2} \frac{-2+5}{-2-2} = -\frac{3}{4}$ Trou en $(-2;-3/4)$



f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\infty+\infty}-\infty = \infty-\infty$ CI $= \sqrt{\infty} = +\infty$ AH $\nexists$.

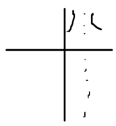
$m = \frac{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x}{x} = \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{|2x|}{x} = 2$

$P = \sqrt{4x^2-3x+1}$ ~~+2x~~ $-2x = \infty$ ~~AO~~

g) $\frac{1}{0} = ?\infty$

	-1	1
x^2-1	+ 0 - 0 +	

$\frac{1}{0} = +\infty$ AV en $x=1$ lim exacte



Question 6. (Suite.)

Question 7. Calculer la dérivée des fonctions suivantes : /13

(a) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 103$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{3x^6}$

(c) $f(z) = \arctan(z)\cos(z)$

(d) $f(t) = 2^t - \log_2(t) + x$

(e) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2+1}$

(f) $f(x) = e^{2023}$

(g) $f(x) = (\arcsin x)^5$

(h) $f(u) = e^{u^3-7u+3}$

a) $20x^4 - 6x$

b) $\frac{1}{3}\ (x^{-6})' = -6 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-7} = \dfrac{-2}{x^7}$

c) $f' = \dfrac{1}{1+z^2}$ $\quad g' = -\sin z$ $\quad = \dfrac{\cos(z)}{1+z^2} + \arctan(z) \cdot (-\sin(z))$

d) $= 2^t \ln 2 - \dfrac{1}{t \ln a} + 1$

e) $\dfrac{(12x^2 \cdot (x^2+1)) - (4x^3 \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{12x^4 + 12x^2 - 8x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x(3x^3 + 3x - 2x^2)}{(x^2+1)^2}$

f) $= e^{2023}$

g) $5(\arcsin x)^4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{5(\arcsin(x))^4}{\sqrt{1-x^2}}$ car $(f(x))^n = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

e) $e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{u^3-7u+3} \cdot 3u^2 - 7$

Question 7. (Suite.)

Question 8. On veut clôturer une prairie rectangulaire devant avoir une superficie de 1 km^2. Le pâturage est borné par une route rectiligne sur l'un de ses côtés. Pour clôturer, le prix est de 500 euros le km le long de la route et de 300 euros le km le long des autres côtés. Quelles sont les dimensions de la prairie minimisant le coût total ? 0/4

Nique ta salope de mère

/14

Question 9. Calculer les intégrales suivantes.

(a) $\int x^5 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 7\,\mathrm{d}x$

(b) $\int (10-6x^2)\sqrt{x^3-5x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^8 e^u - \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,\mathrm{d}u$

(d) $\int (x-5)\cdot e^{-x}$

(e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^4(t)\,\mathrm{d}t$

a) $\int x^5\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x} + \int 7\,dx \quad = \frac{x^6}{6} - \frac{1}{x} + \ln x + 7x + k$

$= x^{-2}$

b) $-2\int (-5+3x^2)\cdot(x^3-5x)^{1/2}\,dx \;= -2\int u^{1/2}\,du = -2\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = -2\cdot u^{3/2}\cdot\frac{2}{3}$

soit $u = x^3-5x$

$\frac{du}{dx} = 3x^2-5$

$du = 3x^2-5\,dx$

$= \frac{-4\sqrt{(x^3-5x)^3}}{3}$

$= \frac{-4\sqrt{(x^3-5x)^2\cdot(x^3-5x)}}{3}$

$= \frac{-4x^3-20x\cdot\sqrt{x^3-5x}}{3}$

c) $\int_1^8 e^u - u^{-1/3}\,du \quad \left[e^u - \frac{3u^{2/3}}{2}\right]_1^8$

$= \left(e^8 - \frac{3\sqrt[3]{8^2}}{2}\right) - \left(e^1 - \frac{3\sqrt[3]{1}}{2}\right)$

d)

$f = x-5 \quad f' = x$

$g' = e^{-x} \quad g = e^{-x}$

$(x-5)\cdot e^{-x} - \int x\cdot e^{-x}\,dx$

$f = x \quad f' = 1$

$g' = e^{-x} \quad g = e^{-x}$

$= (x-5)\cdot e^{-x} - x\cdot(-e^{-x}) - \int e^{-x}\,dx = (x-5)\cdot e^{-x} - x\cdot(-e^{-x}) - e^{-x} + k$

$= e^{-x}(x-5+x-1) + k$

$\pi/2$

Question 9. (Suite.)

l) on pose $u = \cos(t)$

$\frac{du}{dx} = -\sin t$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{-1}{-1} \cdot \sin(t)\cos^4(t)\,dt = \frac{1}{-1}\int_{1/2}^{0} -\sin(t)\cos^4(t)\,dt$$

on change déjà les bornes pour simplifier par après

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$-1\int_{1/2}^{0} u^4\,du = \int_0^{1/2} u^4\,du = \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^{1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{32\cdot 5} = \frac{1}{160}$$

$: \; -\int_a^b dx = \int_b^a dx$

Question 10. Déterminer la fonction f vérifiant les conditions suivantes : /3

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^2 x} - \sin x \quad \text{et} \quad f(\pi) = 1.$$

$$3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \sin x\,dx = 3\tan x + \cos x + k$$