Présentation du cours de mathématiques appliquées 1

Bénédicte Le Bailly, benedicte.lebailly@heh.be

Campus technique
HAUTE ECOLE EN HAINAUT

Bachelier en Informatique et systèmes, Bloc 1, Quadri 1

UE Mathématiques appliquées 1, 30h, 3 ects

AA1 : Mathématiques appliquées 1	**30h, 3 ects**	**100%**

Théorie : 20h (Lundi, 10h30 à 12h30 (2/09A), du 25/09/23 au 27/11/23)

Exercices : 10h

Groupe 1 : 5 séances de 2h à partir du 15/11 (LE BAILLY)
Groupe 2 : 5 séances de 2h à partir du 29/09 (LE BAILLY)
Groupe 3: 5 séances de 2h à partir du 11/10 (LE BAILLY)
Groupe 4 : 5 séances de 2h à partir du 23/10 (CARLIER)
Groupe 5 : 5 séances de 2h à partir du 27/10 (CARLIER)

Examen écrit d'exercices à cahiers fermés et sans calculatrice

Suites du cours

Bachelier en Informatique et systèmes, Bloc1, Quadri 2

UE Mathématiques appliquées 2, 40h, 4 ects		
AA1 : Mathématiques appliquées 2 (CARLIER)	**40h, 4 ects**	**100%**

Bachelier en Informatique et systèmes, Bloc2, Quadri 1

UE Sciences appliquées, 54h, 6 ects		
AA1: Mathématiques et statistiques appliquées (CARLIER)	**30h, 3 ects**	**50%**
AA2 : Physique appliquée (MICHIELS)	24h, 3 ects	50%

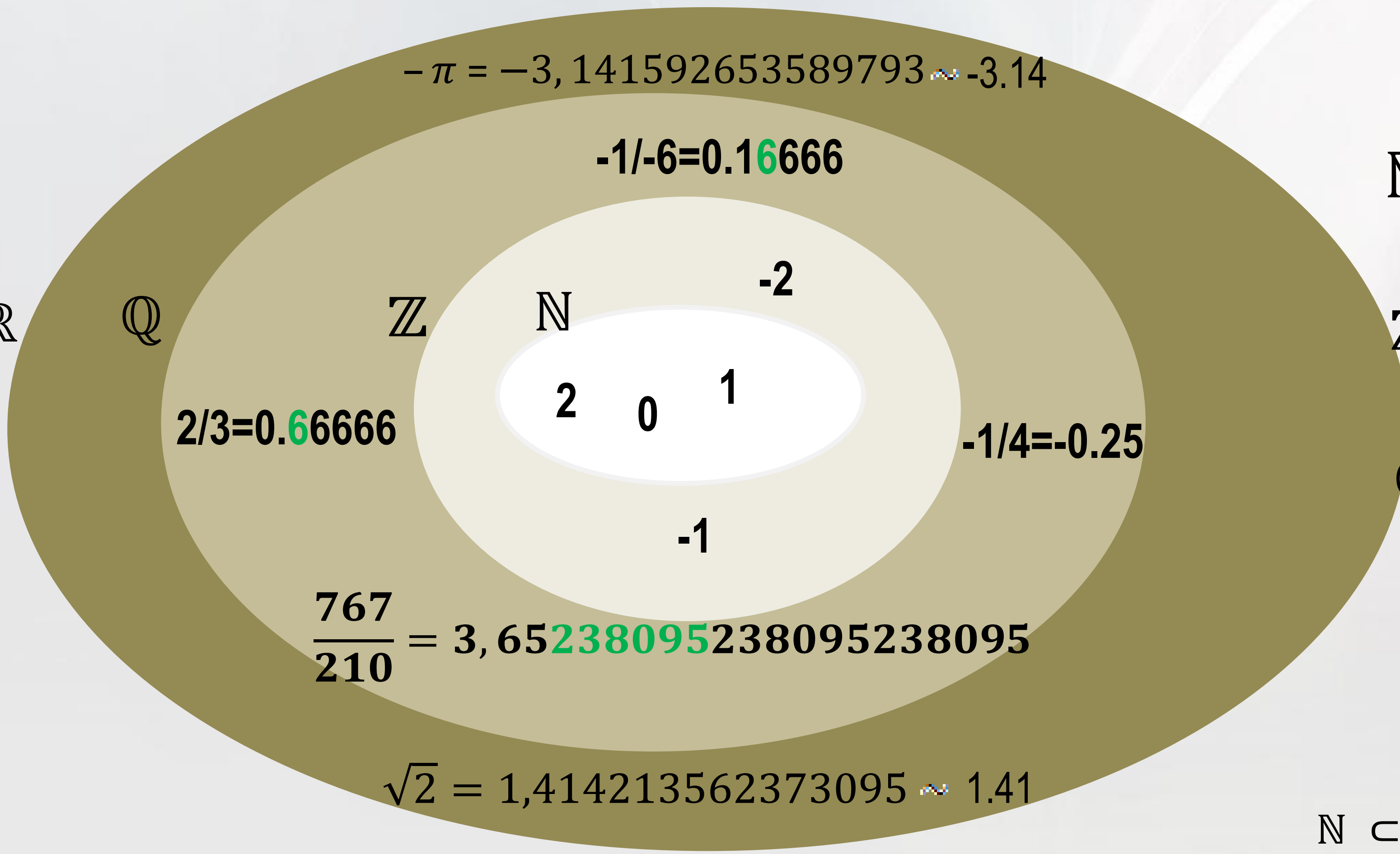
Bachelier en Informatique et systèmes, Bloc2, Quadri 2

UE Mathématiques appliquées à l'informatique, 25h, 2 ects		
AA1 : Mathématiques appliquées à l'informatique (CHAPELLE)	**24h, 2 ects**	**100%**

Plan du cours de mathématique appliquée 1
Théorie 20h

A. Opérations élémentaires sur les nombres réels
B. Relations, fonctions
C. Fonctions du premier degré (droites)
D. Fonctions du second degré (paraboles)
E. Fonctions trigonométriques
F. Fonctions exponentielles et logarithmiques
G. Calcul matriciel

Ensembles de nombres (p.1)



$\mathbb{N}$: naturels (entiers positifs)

$\mathbb{Z}$: entiers (relatifs)

$\mathbb{Q}$: rationnels

$\mathbb{R}$: réels

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Conventions de notation (p.1)

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

$\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \{\dots, -3, -2, 0, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}_0 \setminus \{1,2\}$ représente l'ensemble de tous les nombres réels non nuls sauf les naturels 1 et 2

Opérations sur les fractions (p.2)

Toute fraction $\frac{a}{b}$ est le quotient de deux nombres réels a et b,
a est appelé le **numérateur** et b le **dénominateur** $(\neq 0)$.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad , b, d \neq 0$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \ , \ \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15}$
- $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad , b, d \neq 0$ $\quad \frac{1}{3} . \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$
- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad , b, c, d \neq 0$ $\quad \frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{5}{6}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad , b, d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ad = bc$ $\quad \frac{1}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Produits remarquables (p.2)

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 + b^2$ ne se factorise pas
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Puissances à exposants entiers : définitions (p.2)

- $a^0 = 1$ Exemple : $10^0 = 2^0 = (-8)^0 = 1$
- $a^1 = a$ Exemple : $12^1 = 12$
- $a^n = a.a.a. \quad ... \quad .a \quad (n \text{ fois}, n \in \mathbb{N}_0)$
  Exemple : $3^4 = 3.3.3.3 = 81$, $\pi^2 = \pi.\pi$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ Exemple : $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
- $0^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ Exemple : $0^3 = 0^{100} = 0$

Puissances à exposants entiers : propriétés (p.3)

- $(a.b)^m = a^m.\,b^m$ Exemple : $(2.3)^3 = 2^3.3^3 = 216$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ Exemple : $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$

- $(a^m)^n = a^{m.n}$ Exemple : $(10^2)^3 = 10^6$

- $a^m.a^n = a^{m+n}$ Exemple : $2^3.2^2 = 2^5 = 32$

- $\frac{a^m}{a^n} = a^m.a^{-n} = a^{m-n}$ Exemple : $\frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

HAUTE ECOLE EN HAINAUT — Campus technique

Opérations arithmétiques élémentaires → Exercice p.5

Soient $a, b, c \in I\!R_0^+$, $n \in I\!N$, $\alpha \in Z\!\!Z_0$.

1. Calculer $10^4 \cdot 10^{-2}$, $(10^3)^{-4}$, $(-5)^0$
2. Écrire les expressions suivantes avec des exposants positifs

$$a^2 \cdot a^{-4}, \qquad \frac{a^{-5}}{b^{-5}}, \qquad (0.1)^{-5}, \qquad 5^{-4}, \qquad 10^{-6}$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(\frac{a^2b^3c^{-2}}{a^3b^2c}\right)^{-1}, \qquad \frac{a^{-2\alpha}}{a^{3\alpha}}, \qquad 2^\alpha \cdot 2^{1-\alpha}$$

5. Calculer

$$\sqrt[8]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a}, \qquad \frac{\sqrt[4]{4a^4}}{\sqrt[3]{2a}}$$

7. Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{10} - 1}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2}}$$

8. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$ (b) $\left(\sqrt{a\sqrt[5]{a^8}}\right)^4$

1. 10^2; 10^{-12}; 1.
2. $\frac{1}{a^2}$; $\frac{b^5}{a^5}$; 10^5; $\frac{1}{5^4}$; $\frac{1}{10^6}$.
3. $\frac{ac^3}{b}$; $\frac{1}{a^{5\alpha}}$; 2.
4. $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $b \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
5. $a \cdot \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
6. $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 6^5.
7. $\frac{10 - 10\sqrt{2} - \sqrt{5}}{5}$; $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$;
8. (a) $\frac{1}{4}$; (b) $a^5 \cdot \sqrt[5]{a}$;

Racines niémes d'un nombre réel : définitions (p.3)

La racine n-ième ($n \in \mathbb{N}_0$) d'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est le réel b dont la n-ième puissance est a :

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

- Si n est pair et $a \geq 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe. Exemple : $\sqrt[4]{16} = 2$ puisque $2^4 = 16$
- Si n est pair et $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Exemple : $\sqrt{-2} \nexists$
- Si n est impair et $a \geq 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ puisque $2^3 = 8$
- Si n est impair et $a < 0$, alors $\sqrt[n]{a}$ existe et est notée $-\sqrt[n]{-a}$.

  Exemple : $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -8$

Racines niémes d'un nombre réel : propriétés (p.3)

$(a, b \in \mathbb{R}^+$ et $m, n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\})$:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ Exemple : $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{3} = 2 . \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$ Exemple : $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ Exemple : $\sqrt[3]{49} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^2$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ Exemple : $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$
- $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ Exemple : $\sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$

Pas de radicaux au dénominateur!!! (p.4)

$$\sqrt{a}\,.\sqrt{a} = a \quad , \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b.$$

Si le dénominateur de la fraction est de la forme $a\sqrt{b}$,
on multiplie alors numérateur et dénominateur de la fraction par $\sqrt{b}$.
Ainsi, $\frac{1+\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{8}).\sqrt{2}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+4}{6}$.

Si le dénominateur de la fraction est de la forme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$,
on multiplie alors numérateur et dénominateur de la fraction par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$,
qu'on appelle **binôme conjugué** du binôme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}).(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{-3} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$.

Puissances à exposants rationnels (p.4)

Par définition, nous posons pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $m, n \in \mathbb{N}_0$ $(n \neq 1)$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ et } a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} .$$

Ainsi, $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$ et $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$.

Propriétés $(a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p, q \in \mathbb{Q})$:

- $(a.b)^p = a^p.\, b^p$
- $(a^p)^q = a^{p.q}$
- $a^p.a^q = a^{p+q}$

Exemple : $\dfrac{x^{\frac{7}{3}}\, y^{-\frac{3}{2}}\, \sqrt{y}}{x^2} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{y}$. (→Exercices page 5)

Opérations arithmétiques élémentaires → Exercice p.5

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_0$.

1. Calculer $10^4 \cdot 10^{-2}$, $(10^3)^{-4}$, $(-5)^0$

2. Écrire les expressions suivantes avec des exposants positifs

$$a^2 \cdot a^{-4}, \qquad \frac{a^{-5}}{b^{-5}}, \qquad (0.1)^{-5}, \qquad 5^{-4}, \qquad 10^{-6}$$

3. Simplifier les expressions suivantes :

$$\left(\frac{a^2b^3c^{-2}}{a^3b^2c}\right)^{-1}, \qquad \frac{a^{-2\alpha}}{a^{3\alpha}}, \qquad 2^\alpha \cdot 2^{1-\alpha}$$

5. Calculer

$$\sqrt[8]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a}, \qquad \frac{\sqrt[4]{4a^4}}{\sqrt[3]{2a}}$$

7. Rendre rationnel le dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{10} - 1}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2}}$$

8. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$ (b) $\left(\sqrt{a\sqrt[5]{a^8}}\right)^4$

1. 10^2; 10^{-12}; 1.
2. $\frac{1}{a^2}$; $\frac{b^5}{a^5}$; 10^5; $\frac{1}{5^4}$; $\frac{1}{10^6}$.
3. $\frac{ac^3}{b}$; $\frac{1}{a^{5\alpha}}$; 2.
4. $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $b \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
5. $a \cdot \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{a^2}$.
6. $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 6^5.
7. $\frac{10 - 10\sqrt{2} - \sqrt{5}}{5}$; $\frac{-\sqrt{2} - 2}{2}$;
8. (a) $\frac{1}{4}$; (b) $a^5 \cdot \sqrt[5]{a}$;

Puissances à exposants rationnels

Question d'examen :

En supposant que les expressions utilisées ci-dessous soient bien définies, montrer que

a) $\sqrt[5]{a^4} \quad \sqrt[10]{a^3} \quad \sqrt{a} \;=\; a\,\sqrt[5]{a^3}$

b) $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = 8 - 3\sqrt{7}$

c) $\dfrac{5^{(x^2)}}{25^x} \quad : \quad \dfrac{\left(5^{2x}\right)^{(x-1)}}{5^{(x^2)}} \quad = \quad 1$

Puissances à exposants rationnels : qcm

Question 1(Opérations arithmétiques) : En supposant que $a \in \mathbb{R}_0^+$, évaluer l'expression $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$:

a) $a^7 \ \sqrt{a}$

b) $a^3 \ \sqrt[3]{a}$

c) $a^{\frac{2}{15}}$

d) $a^{\frac{3}{10}}$

Binôme conjugué : qcm

Question 5 (Binôme conjugué) : En supposant que $a \in \mathbb{R}$, évaluer l'expression $\frac{a-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

a) $\frac{a}{2} - 1$

→ b) $(\sqrt{5} - 2)a + 2\sqrt{5} - 5$

c) $\frac{a-\sqrt{5}}{9}$

d) $(2 - \sqrt{5})a - 2\sqrt{5} + 5$