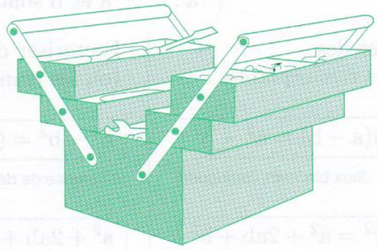
PREMIERE PARTIE :

FORMULAIRE de la $1^{ère}$ à la $4^{ème}$

COFFRE À OUTILS



Pour commencer le cours de cinquième

1 L'ESSENTIEL D'ALGÈBRE

1.1 EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

a Dans les expressions
$a + b$, a et b sont les termes de la **somme**,
$a \, . \, b$, a et b sont les facteurs du **produit**.

b Effectuer des produits remarquables

$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$
produit de deux binômes conjugués

$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
carré d'une somme de termes

$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
carré d'une différence de termes

Factoriser des expressions (ou les transformer en produit)

$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$
différence de deux carrés

$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$
trinôme carré parfait

$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$
trinôme carré parfait

c
- Une fraction algébrique ou rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.
- *Conditions d'existence* : le **dénominateur** de toute fraction algébrique doit être **non nul**.
- On ne peut simplifier une fraction algébrique que si son **numérateur** et son **dénominateur** ont été **factorisés**.

d Pour diviser une somme de termes par un nombre, on divise **chaque** terme par ce nombre.
Pour diviser un produit de facteurs par un nombre, on divise **un seul** facteur par ce nombre.

$$\frac{a^3 + a}{a} = a^2 + 1$$

$$\frac{a^3 \, . \, a}{a} = a^3$$

e $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ est un **polynôme** de degré n en la **variable** réelle x et à coefficients réels.

1.2 PUISSANCES

Si $\forall a \in \mathbb{R}_0$, $\forall b \in \mathbb{R}_0$, $\forall m \in \mathbb{Q}$, $\forall p \in \mathbb{Q}$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$,

$a^m \, . \, a^p = a^{m+p}$	$(a^m)^p = a^{mp}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$(ab)^m = a^m \, . \, b^m$		

$170\,000 = 1,7 \, . \, 10^5$; $(0,1)^2 = 0,01$;
$0,000\,475 = 4,75 \, . \, 10^{-4}$; $(0,2)^3 = 0,008$.

1.3 VALEURS APPROCHEES DU NOMBRE π

$\pi = 3,14159\ldots$

	Valeur approchée par défaut	Valeur approchée par excès
à moins de 1 unité près :	3	4
à moins de 10^{-1} près :	3,1	3,2
à moins de 10^{-2} près :	3,14	3,15
à moins de 10^{-3} près :	3,141	3,142
etc ...		

1.4 RADICAUX

a Si $a \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{\sqrt{a} = b \text{ ssi } b^2 = a.}$

En particulier, $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Mais $\sqrt{4} = 2$ et non pas ± 2. ($\sqrt{\ }$ est le symbole de la racine carrée positive).

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}.}$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+_0$, alors $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}.}$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.}$

(produit de deux binômes conjugués)

$\boxed{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab} + b.}$

(carré d'un binôme)

! $\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b}$
car $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

b • Si n est un naturel impair (distinct de 1) et $a \in \mathbb{R}$ ou si n est un naturel pair (non nul) et $a \in \mathbb{R}^+$, alors $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \text{ ssi } b^n = a.}$

• $\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}}$ (si $a \in \mathbb{R}^+_0$).

REMARQUE : $\sqrt[4]{(-2)^3}$ n'a pas de sens et donc $(-2)^{\frac{3}{4}}$ non plus.

$\sqrt[8]{(-2)^4} = \sqrt[8]{2^4} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

mais $(-2)^{\frac{4}{8}}$ n'a pas de sens car $(-2)^{\frac{4}{8}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ et $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

1.5 VALEUR ABSOLUE

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{R}^+ \\ -a & \text{si } a \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$

1.6 DIVISION D'UN POLYNOME PAR x − a

a Le **reste** de la division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$ égale la **valeur numérique** de $P(x)$ pour $x = a$ **(loi du reste)**.

b $\boxed{r = P(a) = 0}$ $\iff$ $\boxed{\text{a est une racine de } P(x)}$ $\iff$ $\boxed{(x-a)\,.\,Q(x) \text{ est une factorisation de } P(x).}$

c Le quotient $Q(x)$ se calcule par

la **méthode de la division euclidienne** ou par la **règle de Horner** :

$$\begin{array}{rrr|l} 4x^2 & -5x & -9 & x+1 \\ \hline -4x^2 & +4x & & 4x-9 \\ \hline & -9x & -9 & \\ & \mp 9x & \mp 9 & \\ \hline & & r = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 4 & -5 & -9 \\ -1 & & -4 & 9 \\ \hline & 4 & -9 & 0 = r \end{array}$$

$Q(x) = 4x - 9$ $\quad 4x^2 - 5x - 9 = (x+1)(4x-9)$

1.7 PROPRIETES DES EGALITES ET DES INEGALITES

1 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$:

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm c < b \pm c$$
$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm c \leqslant b \pm c.$$

2 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_0$:

- si $c > 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

  $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$ et $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$
- si $c < 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

  $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \geqslant bc$ et $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$.

3 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$:

$a < b$ et $b < c \quad \Leftrightarrow \quad a < c$

$a < b$ et $b \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad a < c$ (transitivité des relations « $<$ » et « $\leqslant$ »).

$a \leqslant b$ et $b \leqslant c \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant c$.

1.8 EQUATIONS

1 Équations du premier degré

On rassemble dans un membre *tous les termes en l'inconnue*, et dans l'autre membre, les *termes indépendants*. On isole ensuite x.

REMARQUE : $3x = 0 \iff x = 0$ $\left(\text{et non } \frac{1}{3}, \text{ ni } -\frac{1}{3}, \text{ ni } 3, \text{ ni } -3\right)$.

2 Équations du deuxième degré

On rassemble *tous les termes dans un même membre*;

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$,

$\rho = b^2 - 4ac$, (ρ est le **réalisant** de l'équation, il est parfois noté Δ)

- si $\rho > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\rho}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\rho}}{2a}}$$

Factorisation : $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$;

- si $\rho = 0$, alors l'équation admet une solution :

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

Factorisation : $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$;

- si $\rho < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.}$$

Factorisation : aucune.

REMARQUES

- Si $\rho \geqslant 0$, la **somme** des racines du trinôme du 2e degré est $-\frac{b}{a}$, le **produit** des racines est $\frac{c}{a}$.
- Deux nombres dont on connait la somme S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ (si $S^2 - 4P \geqslant 0$).

3 Équations du type «produit de facteurs égalé à 0»

On utilise la règle du produit nul et on résout les équations formées par chaque facteur égalé à 0.

$2x^3 - 8x = 0 \iff 2x(x^2-4) = 0 \iff 2x(x+2)(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

4 Équations fractionnaires (l'inconnue est présente au dénominateur)

- On pose les conditions d'existence *(dénominateurs non nuls)*;
- on réduit les deux membres au même dénominateur;
- on chasse les dénominateurs *(en multipliant les deux membres par le dénominateur commun)*;
- on résout l'équation obtenue et on confronte les solutions aux conditions d'existence.

REMARQUE

Un signe «moins» devant une barre de fraction joue le même rôle qu'un signe «moins» devant une parenthèse.

$-\frac{2x-4}{5}$ ou $\frac{-(2x-4)}{5}$ ou $\frac{-2x+4}{5}$ ou $\frac{2x-4}{-5}$ (on évitera cette dernière notation).

5 Équations bicarrées

On réduit les équations au second degré.

EXEMPLE

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$. Soit $x^2 = X$.

Les solutions de $X^2 - 2X - 3 = 0$ sont $X = 3$ ou $X = -1$ (à écarter).

D'où $x^2 = 3$, c.-à-d. $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. Ainsi, $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

6 Équations irrationnelles (l'inconnue est présente sous un radical)

EXEMPLE

$\sqrt{x+2} = 4 - x$. C.E. : $x + 2 \geqslant 0$; condition de résolution (C.R.) $4 - x \geqslant 0$. D'ou $x \in [-2; 4]$.

En élevant les deux membres au carré : $x + 2 = 16 - 8x + x^2$ ou $x^2 - 9x + 14 = 0$,

dont les solutions sont $\frac{9+5}{2}$ ou 7 (à écarter) et $\frac{9-5}{2}$ ou 2. Ainsi, $S = \{2\}$.

1.9 SYSTEMES D'EQUATIONS

EXEMPLES

1) $\begin{cases} 2x - 8 = 0 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 3 \cdot 4 - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(4; 3)\}.$

(2) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \underset{\text{par substitution}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x = -2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-3y) - 2y = 5 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(1; -1)\}.$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c|} & \times 3 \\ \times(-3) & \times 2 \end{array}$

par combinaisons linéaires

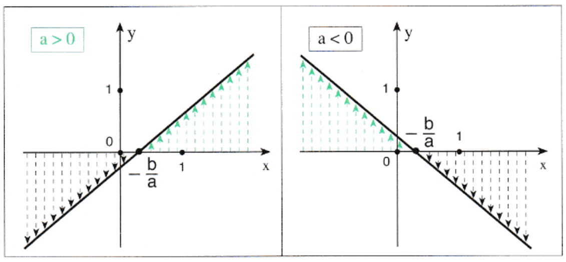
$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 9y = 6 \end{cases}$ $-11y = 11$ | $\begin{cases} 9x - 6y = 15 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ $11x = 11$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -11y = 11 \\ 11x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow S = \{(1; -1)\}.$

1.10 SIGNES

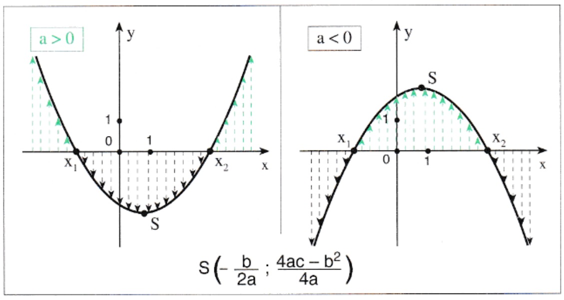
1 Binôme du 1er degré

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	signe contraire de a	0	signe de a

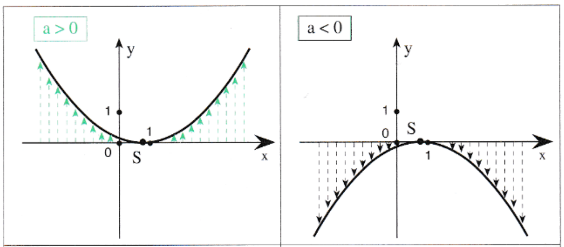


2 Trinôme du 2e degré

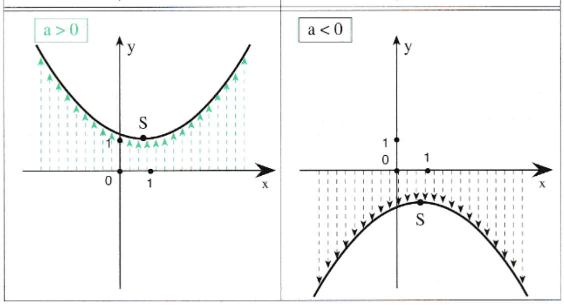
Si $\rho > 0$					
x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a



Si $\rho = 0$			
x		$x_1 = x_2$	
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a



Si $\rho < 0$	
x	
ax^2+bx+c	signe de a



REMARQUES

Les expressions

- $(ax+b)^2$, $(ax+b)^4$, ... $(ax^2+bx+c)^2$, ... sont **positives** pour tout réel x ;
- $(ax+b)^3$, $(ax+b)^5$, ... suivent la règle des signes de $ax+b$;
- $(ax^2+bx+c)^3$, $(ax^2+bx+c)^5$, ... suivent la règle des signes de ax^2+bx+c ;
- $-(ax+b)^2$, ... , $-(ax^2+bx+c)^2$ sont **négatives** pour tout réel x ;
- $-(ax+b)^3$ a le signe contraire de $(ax+b)^3$;
- $-(ax^2+bx+c)^3$ a le signe contraire de ax^2+bx+c.

1.11 INEQUATIONS

1 Du 1er degré

On rassemble *dans un membre les termes en l'inconnue* et, dans l'autre membre, les termes indépendants.

Si on **multiplie** ou **divise** les deux membres d'une inéquation par un **nombre négatif**, on obtient une inéquation de sens contraire à la première.

2 Du 2e degré

On rassemble *tous les termes dans un même membre*;
on cherche les racines de l'expression algébrique ainsi obtenue;
on dresse un tableau de signes et on sélectionne les solutions.

3 D'un degré supérieur au premier ou fractionnaire

On rassemble *tous les termes dans un même membre*;
on réduit au même dénominateur afin de n'avoir qu'un produit ou un quotient;
on énonce les éventuelles conditions d'existence;
on procède ensuite comme en $\boxed{2}$, **sans** supprimer les éventuels dénominateurs qui comprennent l'inconnue.

EXEMPLE

$$\frac{3}{1-2x} \leqslant -x$$

$$\frac{3}{1-2x} + x \leqslant 0$$

$$\frac{-2x^2+x+3}{1-2x} \leqslant 0 \quad \underline{\text{C.E.}} : x \neq \frac{1}{2}$$

x		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{-2x^2+x+3}{1-2x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$S = \leftarrow; -1] \cup \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

1.12 SYSTEMES D'INEQUATIONS

1 On résout chaque inéquation en dressant (si besoin) un **tableau de signes** pour **chacune** d'elles.

2 On calcule l'intersection des ensembles de solutions trouvés en $\boxed{1}$.

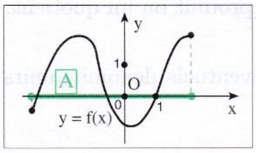
2 L'ESSENTIEL D'ANALYSE

2.1 VOCABULAIRE DES FONCTIONS

1 Une **fonction numérique d'une variable réelle** est une relation qui à chaque réel fait correspondre **au plus** un réel.

$\boxed{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)}$

- x est la **variable réelle**;
- f(x) est l'**image** de x par la fonction ou **l'expression analytique** de la fonction.



2 a) La fonction f est **définie en le réel a** lorsque f(a) est un réel.

Le **domaine de f**, noté dom f, est l'ensemble des réels en lesquels la fonction f est définie.

b) La fonction f est **définie sur une partie A de $\mathbb{R}$** lorsqu'elle est définie en tout réel de A.

Pour déterminer dom f, on pose des **conditions d'existence** sur f(x) :

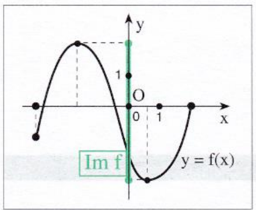
– les *dénominateurs* doivent être *non nuls*;

– les *radicands* de radicaux d'*indice pairs* doivent être *positifs*.

c) Une **racine** de f est un réel dont l'image par f est nulle.

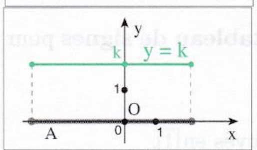
3 Le **graphe cartésien** ou **graphique** de la fonction numérique f d'une variable réelle est l'ensemble G_f des points du plan cartésien qui ont $\left(x; f(x)\right)$ comme **coordonnées**.

Une **équation cartésienne** de G_f est $y = f(x)$.



> Un **point appartient au graphique** d'une fonction f
>
> ssi
>
> les coordonnées du point vérifient l'équation de G_f.

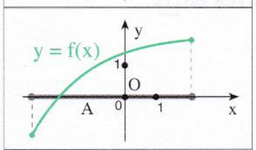
4 L'**ensemble des images** par la fonction f est notée im f.



5 a) Une fonction f est **constante** sur A, partie de dom f,

ssi x_1 et x_2 étant deux réels quelconques de A,

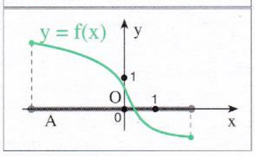
on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.



b) Une fonction f est **strictement croissante** sur A, partie de dom f,

ssi x_1 et x_2 étant deux réels quelconques de A,

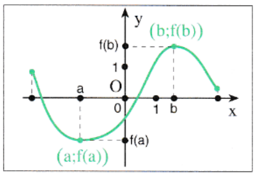
on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



c) Une fonction f est **strictement décroissante** sur A, partie de dom f,

ssi x_1 et x_2 étant deux réels quelconques de A,

on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



d) Une fonction f admet

- un **minimum** pour $x = a$ ssi
  il existe une partie I de dom f telle que, $\forall x \in I$, on ait $f(x) \geqslant f(a)$;
- un **maximum** pour $x = b$ ssi
  il existe une partie I de dom f telle que, $\forall x \in I$, on ait $f(x) \leqslant f(b)$.

$\boxed{6}$ La fonction f est **périodique** de période p non nulle lorsque,
$\exists p \in \mathbb{R}_0, \forall x \in \text{dom}\, f : \quad (x+p) \in \text{dom}\, f$ et $f(x+p) = f(x)$.

Propriété

> Si f est une fonction périodique de période p
> et si $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}_0$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$,
> alors $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x) = af(bx+c)+d$ est une fonction périodique
> de période $\dfrac{p}{b}$.

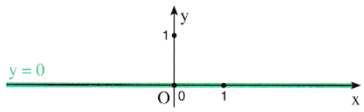
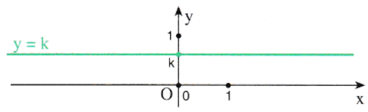
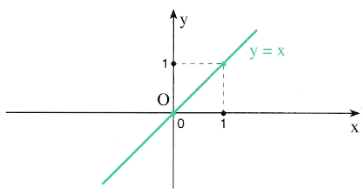
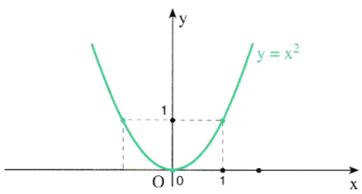
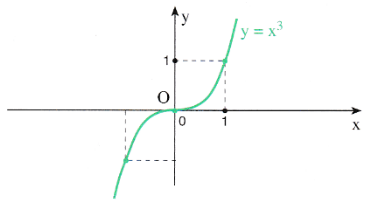
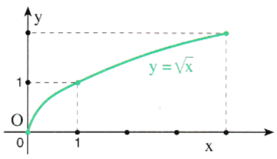
Économie graphique

Si une fonction est périodique de plus petite période strictement positive p, l'étude graphique se fera sur un intervalle $[0;p]$ ou $\left[-\dfrac{p}{2};\dfrac{p}{2}\right]$, par exemple.

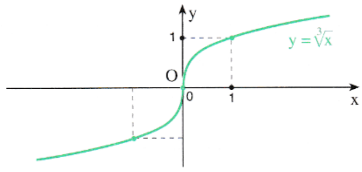
2.2 FONCTIONS USUELLES

$\boxed{1}$ CATALOGUE DES FONCTIONS USUELLES

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

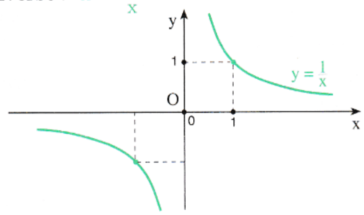
constante nulle : $x \to 0$  *Domaine :* $\mathbb{R}$	**constante non nulle :** $x \to k$  *Domaine :* $\mathbb{R}$
identique : $x \to x$  *Domaine :* $\mathbb{R}$	**carré :** $x \to x^2$  *Domaine :* $\mathbb{R}$
cube : $x \to x^3$  *Domaine :* $\mathbb{R}$	**racine carrée positive :** $x \to \sqrt{x}$  *Domaine :* $\mathbb{R}^+$

racine cubique : $x \to \sqrt[3]{x}$



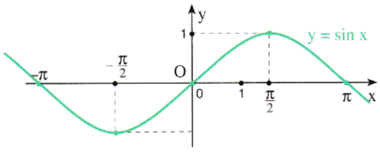
Domaine : $\mathbb{R}$

inverse : $x \to \frac{1}{x}$



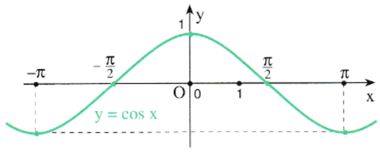
Domaine : $\mathbb{R}_0$

sinus : $x \to \sin x$



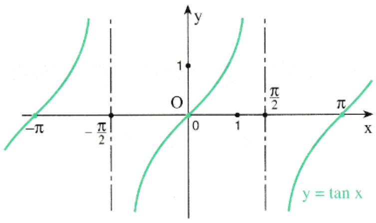
Plus petite période strictement positive : 2π
Domaine : $\mathbb{R}$

cosinus : $x \to \cos x$



Plus petite période strictement positive : 2π
Domaine : $\mathbb{R}$

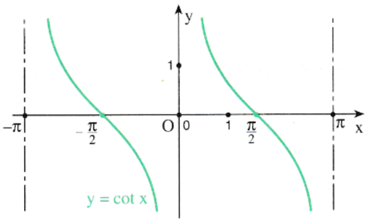
tangente : $x \to \tan x$



Plus petite période strictement positive : π

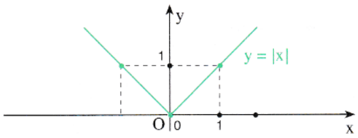
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

cotangente : $x \to \cot x$



Plus petite période strictement positive : π
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

valeur absolue : $x \to |x|$



Domaine : $\mathbb{R}$

2 MANIPULATIONS DE FONCTIONS USUELLES

Au départ du graphe cartésien de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$,
on construit celui de

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) + k$ en *ajoutant* k aux ordonnées de tous les points de G_f.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to kf(x)$ en *multipliant* par k les ordonnées de tous les points de G_f.

$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x + k)$ en *soustrayant* k aux abscisses de tous les points de G_f.

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(kx)$ en *divisant* par k les abscisses de tous les points de G_f.

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |f(x)|$
- en *gardant* la partie de G_f située au-dessus de l'axe des x,
- en *remplaçant* la partie de G_f située en dessous de l'axe des x par son symétrique par rapport à cet axe.

3 L’ESSENTIEL DE TRIGONOMÉTRIE

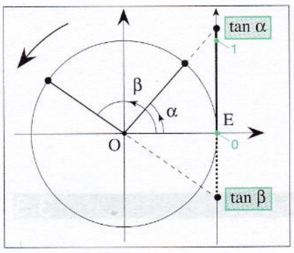
3.1 UNITES D’ANGLES

- Un **angle de 1°** est un angle dont l’amplitude est la nonantième partie de l’angle droit positif.
- Un **angle de 1 radian** est un angle au centre d’un cercle de rayon r qui intercepte sur ce cercle un arc dont la longueur est r.

3.2 NOMBRES TRIGONOMETRIQUES D’UN ANGLE

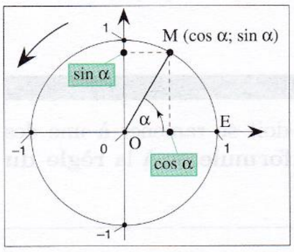
1 CONVERSION D’UNITÉS D’ANGLES

Un angle de d degrés ou r radians : $\boxed{\dfrac{d}{r} = \dfrac{180}{\pi}}$

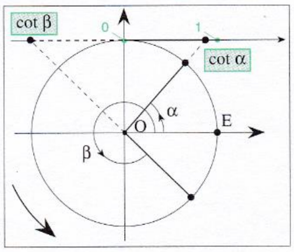


2 DÉFINITIONS

Sur le cercle trigonométrique (de rayon 1, orienté, d’origine E) :



$\cos\alpha =$ abscisse de M
$\sin\alpha =$ ordonnée de M
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (si $\cos\alpha \neq 0$, c.-à-d. si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$)
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (si $\sin\alpha \neq 0$, c.-à-d. si $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)



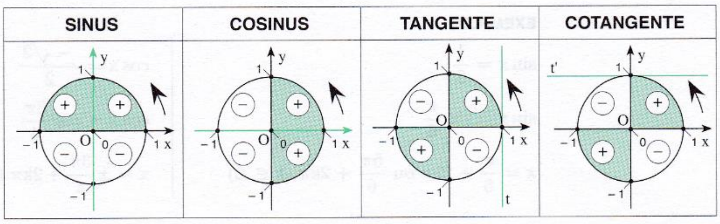
REMARQUE : $(\sin x)^n = \sin^n x \neq \sin x^n$

3 PROPRIÉTÉS DES NOMBRES TRIGONOMÉTRIQUES

Quel que soit l’angle orienté α :

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \quad ; \quad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$$



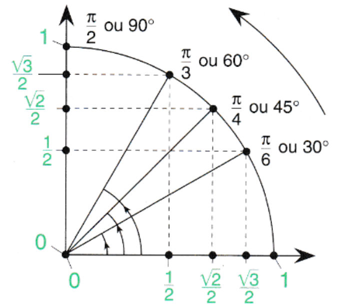
4 PROPRIÉTÉS DES ANGLES ASSOCIÉS

	SINUS	COSINUS	TANGENTES	COTANGENTES
Angles supplémentaires : $\pi - x$ et x	égaux	opposés	opposées	opposées
Angles opposés : $-x$ et x	opposés	égaux	opposées	opposées
Angles antisupplémentaires : $\pi + x$ et x	opposés	opposés	égales	égales

Angles complémentaires : $\frac{\pi}{2} - x$ et x :	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

5 NOMBRES TRIGONOMÉTRIQUES D'ANGLES REMARQUABLES

DEG	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



3.3 EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Pour être résolue, toute équation trigonométrique doit se ramener à une des **équations élémentaires suivantes**, grâce à une **formule** ou à la **règle du produit nul**.

- Angles ayant même SINUS :

$$\sin x = \sin \alpha$$
$$\Updownarrow \text{ (angles supplémentaires)}$$
$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Angles ayant même COSINUS :

$$\cos x = \cos \beta$$
$$\Updownarrow \text{ (angles opposés)}$$
$$x = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\beta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Angles ayant même TANGENTE :

$$\tan x = \tan \gamma$$
$$\Updownarrow \text{ (angles antisupplémentaires)}$$
$$x = \gamma + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

EXEMPLES

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$

$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

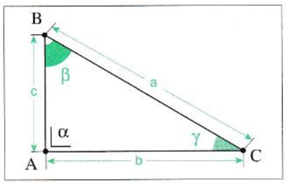
3.4 TRIANGLES

1 Dans tout **triangle rectangle**, si α est un angle aigu,

$$\sin\alpha\ (\text{aigu}) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

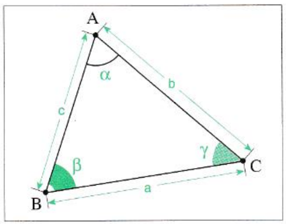
$$\cos\alpha\ (\text{aigu}) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\alpha\ (\text{aigu}) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$$



$\alpha = 90°$	$b = a \sin\beta$	$c = a \sin\gamma$
$\beta + \gamma = 90°$	$= a \cos\gamma$	$= a \cos\beta$
$a^2 = b^2 + c^2$	$= c \tan\beta$	$= b \tan\gamma$
$A = \frac{1}{2}bc$ (aire)	$= c \cot\gamma$	$= b \cot\beta$

2 Dans tout **triangle**,



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$ (Relations aux sinus)

(r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(Relations aux cosinus ou théorème d'Al Kashi ou théorème de Pythagore généralisé)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$ (aire)

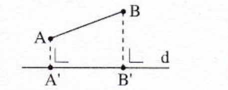
4 L'ESSENTIEL DE GÉOMÉTRIE

S'il n'y a aucune ambiguïté, on écrit «*côté*» au lieu de «*longueur d'un côté*».

4.1 TRANSFORMATIONS DU PLAN

Parmi les transformations du plan, on a étudié

- les **isométries** : transformations du plan qui **conservent les longueurs** ; l'ensemble des isométries comprend
  - les rotations de centre et d'amplitude donnés (si l'amplitude est 180°, la rotation est une symétrie centrale),
  - les symétries orthogonales d'axe donné,
  - les translations de vecteur donné ;
- les **agrandissements** et **réductions** de rapport donné ;
- les **projections orthogonales**.



La projection orthogonale de [AB] sur d est [A'B'].

4.2 TRIANGLES

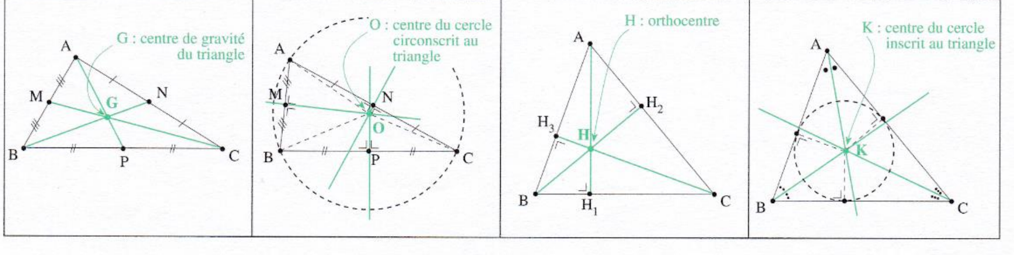
Le point M est le **milieu** du segment [AB]
ssi
les points A, M et B sont alignés et $\overline{AM} = \overline{MB}$.

$\boxed{1}$ Dans tout triangle

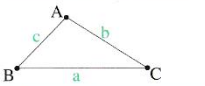
- une **médiane** est le segment de droite joignant un sommet au milieu du côté opposé ;
- une **médiatrice** est la perpendiculaire à un côté en son milieu (c'est aussi le lieu géométrique des points équidistants de deux points) ;
- une **hauteur** est le segment de droite issu d'un sommet perpendiculairement au côté opposé (ou à son prolongement) ;
- une **bissectrice** est la droite qui passe par un sommet et qui divise l'angle en deux angles de même amplitude (c'est aussi le lieu géométrique des points équidistants de deux côtés du triangle ou de leur prolongement).

POINTS D'INTERSECTION

Médianes	Médiatrices	Hauteurs	Bissectrices



Extrait d'ESPACE MATH $5^e/6^e$ - Editions de boeck - Formulaire de la $1^{ère}$ à la $6^{ème}$ (2 parties)



$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

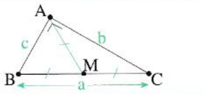
$a < b + c$; $c < a + b$

$b < a + c$

2 Dans tout triangle,

1) la somme des angles intérieurs égale 180°;

2) un côté est inférieur à la somme des deux autres.



$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$

$b^2 + c^2 = a^2$

$\overline{AM} = \frac{a}{2}$.

3 Dans tout triangle rectangle,

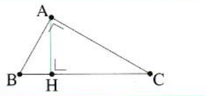
1) les angles aigus sont complémentaires;

2) la somme des carrés de deux côtés de l'angle droit égale le carré de l'hypoténuse (Théorème de Pythagore);

3) la médiane relative à l'hypoténuse égale la moitié de celle-ci.

4) la hauteur relative à l'hypoténuse est **moyenne proportionnelle** entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse;

5) chaque côté de l'angle droit est **moyenne proportionnelle** entre l'hypoténuse et sa projection orthogonale sur celle-ci.



$\overline{AH}^2 = \overline{BH} . \overline{HC}$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC} . \overline{BH}$

$\overline{AC}^2 = \overline{BC} . \overline{HC}$.

REMARQUE

Le réel x est **moyenne proportionnelle** entre les réels (de même signe) a et b si et seulement si $x^2 = ab$.

4 Si $b^2 + c^2 = a^2$, alors le triangle BAC est rectangle en A (Réciproque du théorème de Pythagore).

5 **1)** Deux **triangles** sont **isométriques** s'ils ont

- les trois côtés deux à deux de même longueur;
- deux côtés deux à deux de même longueur et l'angle compris de même amplitude;
- deux angles deux à deux de même amplitude adjacents à un côté de même longueur.

2) Si deux triangles sont isométriques,

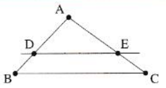
alors | leurs côtés homologues ont même longueur,
leurs angles homologues ont même amplitude.

6 **1)** Deux **triangles** sont **semblables** s'ils ont

- deux angles deux à deux de même amplitude;
- les trois côtés deux à deux proportionnels;
- deux côtés deux à deux proportionnels et l'angle compris de même amplitude.

2) Si deux triangles sont semblables,

alors | leurs côtés homologues sont proportionnels,
leurs angles homologues ont même amplitude.



Si DE // BC,

alors • $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}}$

• $\triangle DAE \sim \triangle BAC$

3) Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine

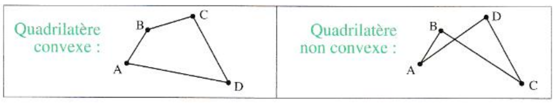
- sur les deux autres (ou sur leurs prolongements) des segments homologues proportionnels (Théorème de Thalès);
- un triangle semblable au premier.

4) Si une droite détermine sur deux côtés d'un triangle des segments homologues proportionnels, alors elle est parallèle au troisième côté (Réciproque du théorème de Thalès).

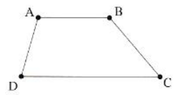
Extrait d'ESPACE MATH 5e/6e - Editions de boeck - Formulaire de la 1ère à la 6ème (2 parties)

4.3 QUADRILATERES ET CERCLES

1



- Un **trapèze** est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.



le **trapèze** ABCD

- Un **parallélogramme** est un quadrilatère ayant les côtés opposés sont parallèles;

  ou un quadrilatère ayant un centre de symétrie;

  ou un quadrilatère ayant les côtés opposés de même longueur;

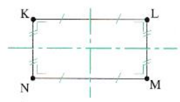
  ou un quadrilatère dont un côté est l'image d'un autre par une translation.

le **parallélogramme** MNPQ

- Un **rectangle** est un quadrilatère dont les angles sont droits;

  ou un quadrilatère dont les médianes sont des axes de symétrie;

  ou un parallélogramme ayant un angle droit.

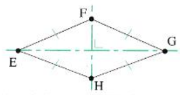


le **rectangle** KLMN

- Un **losange** est un quadrilatère dont les côtés ont même longueur;

  ou un quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétrie;

  ou un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.

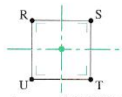


le **losange** EFGH

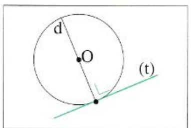
- Un **carré** est un quadrilatère dont les angles sont droits et les côtés de même longueur;

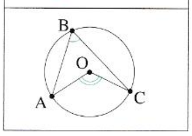
  ou un quadrilatère qui admet quatre axes de symétrie;

  ou un losange qui est rectangle.



le **carré** RSTU





2 **a)** La **tangente** (t) en un point d'un cercle est perpendiculaire au diamètre (d) passant par ce point.

La droite perpendiculaire à un diamètre d'un cercle par une de ces extrémités est tangente à ce cercle en ce point.

b) Dans un cercle, l'amplitude d'un **angle inscrit** ($\widehat{ABC}$) vaut la moitié de celle de l'**angle au centre** ($\widehat{AOC}$) qui intercepte le même arc ($\overset{\frown}{AC}$).

c) Tout **triangle inscrit dans un cercle** et dont un côté est un diamètre du cercle, est rectangle.

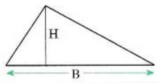
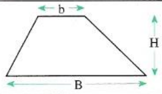
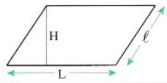
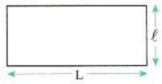
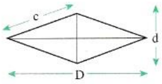
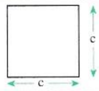
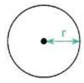
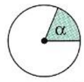
L'hypoténuse de tout triangle rectangle inscrit dans un cercle est un diamètre de ce cercle.

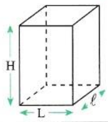
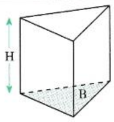
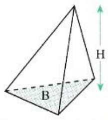
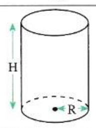
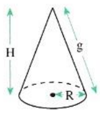
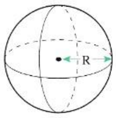
d) Tous les **cercles** sont **semblables**.

Le rapport de similitude est égal au rapport de leur rayon.

Extrait d'ESPACE MATH $5^e/6^e$ - Editions de boeck - Formulaire de la $1^{ère}$ à la $6^{ème}$ (2 parties)

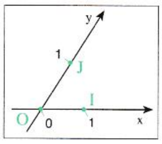
$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10^4\ cm^2$
$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3$
$1\ are = 100\ m^2$
$1\ ha = 100\ ares = 10^4\ m^2$
$1\ litre = 1\ dm^3$
$1\ tonne = 10^3\ kg$

Dans le plan	Figures	Périmètre	Aire
	**Triangle**	Somme des côtés	$\frac{1}{2}BH$
	**Trapèze**	Somme des côtés	$\frac{1}{2}(B+b)H$
	**Parallélogramme**	$2(L+\ell)$	LH
	**Rectangle**	$2(L+\ell)$	$L\ell$
	**Losange**	$4c$	$\frac{1}{2}Dd$
	**Carré**	$4c$	c^2
	**Cercle**	$2\pi r$	πr^2
	**Secteur circulaire** (α en radians)	αr	$\frac{\alpha r^2}{2}$

Dans l'espace	Solides	Aire latérale	Aire totale	Volume
	**Parallélépipède rectangle**	$2(L+\ell)H$	$2(L+\ell)H+2L\ell$	$L\ell H$
	**Prisme**	Somme S des aires des trois faces latérales	$S+2(\text{aire } B)$	$(\text{aire } B)H$
	**Pyramide**	Somme S des aires des faces latérales	$S+(\text{aire } B)$	$\frac{1}{3}(\text{aire } B)H$
	**Cylindre**	$2\pi RH$	$2\pi RH+2\pi R^2$	πR^2H
	**Cône**	πRg	$\pi Rg+\pi R^2$	$\frac{1}{3}\pi R^2H$
	**Sphère**	—	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

5 L'ESSENTIEL DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

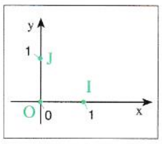
*Les élèves de la FESec ont commencé la **Géométrie dans l'espace** en 4e. Ils trouveront un «coffre à outils» de géométrie dans l'espace dans le manuel, tome 2* (page 4).



On travaille dans un **repère cartésien** d'un plan c.-à-d. un triplet (O, I, J) de points non alignés.

O est l'**origine** du repère.

Ces points forment deux droites OI ou **axe x des abscisses** et OJ ou **axe y des ordonnées**.

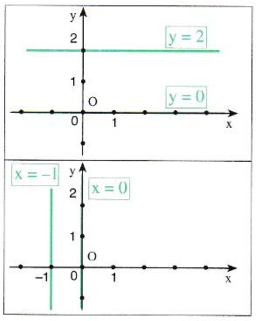


Ce repère est souvent **orthonormé** c.-à-d. que les longueurs des unités sont les mêmes sur les deux axes qui sont perpendiculaires.

Un **plan cartésien** est un plan où l'on a choisi un repère cartésien.

Dans un plan cartésien, tout point est repéré par un couple de réels : ses **coordonnées**.

5.1 DROITES



1 • Toute équation $y = mx + p$ $(m \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R})$ est celle d'une **droite** non parallèle à l'axe y.

En particulier, $y = p$ est une équation d'une droite parallèle à l'axe x ;
$y = 0$ est une équation de l'axe x.

• Toute droite du plan cartésien a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

En particulier, toute droite **parallèle à l'axe y** a pour équation $ax + c = 0$ ou $x = -\frac{c}{a}$.

2 • Le **coefficient angulaire** ou **pente**

– d'une droite d'équation $y = mx + p$ est le réel m ;
En particulier, le coefficient angulaire de toute droite parallèle à l'axe x est 0 ;

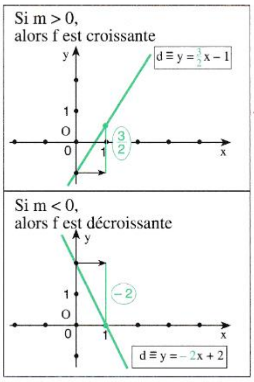
– d'une droite d'équation $x = b$ n'existe pas ;

– d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ (non parallèle à l'axe y) se trouve facilement **en isolant y** ;

– d'une droite (non parallèle à l'axe y) passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

• Dans l'équation $y = mx + p$, p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite ou l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.

3 Un **point** du plan cartésien **appartient à une droite**
ssi
les coordonnées du point vérifient une équation de cette droite.



4 • Si $m \neq 0$,
la droite d'équation $y = mx + p$ est le graphe cartésien de la **fonction du 1e degré** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to mx + p$.

• Si $m = 0$,
la droite d'équation $y = p$ est le graphe cartésien de la **fonction constante** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to p$.

5 Une équation de la droite de coefficient angulaire m passant par le point $A(x_A ; y_A)$: $\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$

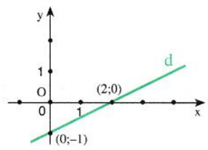
Note : On peut aussi écrire l'équation générale des droites de coefficient angulaire m (non parallèles à l'axe y) : $y = mx + p$.
On détermine p en exprimant que la droite passe par $A(x_A ; y_A)$: $y_A = mx_A + p$.
On isole p et on remplace p par son expression dans l'équation générale.

6 Pour **construire une droite** (dans un repère orthornormé)

1) **connaissant son équation $y = mx+p$ ou $ax+by+c = 0$:**
on calcule les coordonnées de deux points de la droite.

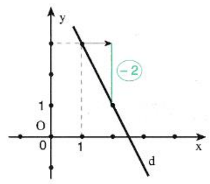
$d \equiv y = \frac{1}{2}x - 1$

x	y
0	−1
2	0



2) **connaissant son coefficient angulaire m et les coordonnées d'un point :**
on fixe le point et on dessine un triangle rectangle de côtés 1 (horizontalement vers la droite) et m (verticalement).

C.A. : −2 par (1; 3)



7 • Dans un plan cartésien, deux **droites parallèles** ont **même** coefficient angulaire.

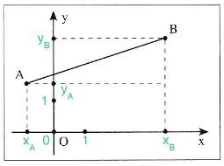
Si $\left| \begin{array}{l} d \equiv ax + by + c = 0 \\ d' \equiv a'x + b'y + c' = 0 \\ \text{d et d' ne sont pas parallèles aux axes,} \end{array} \right.$

alors $\boxed{d \,/\!/\, d' \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}}$ et $\boxed{d = d' \iff \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$

• Dans un repère orthonormé d'un plan cartésien, deux **droites perpendiculaires** (non parallèles aux axes) ont des coefficients angulaires **inverses** et **opposés**.

8 Pour trouver le **point d'intersection** de deux droites (non parallèles), on résout le **système** formé par leurs équations.

5.2 DISTANCES ET CERCLES



1 Dans un repère orthonormé du plan,

si | les coordonnées de A sont $(x_A; y_A)$,
| les coordonnées de B sont $(x_B; y_B)$,

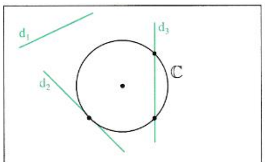
alors la **distance de A à B** ou la **longueur de [AB]** est

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

2 La **distance d'un point à une droite** est la distance du point au pied de la perpendiculaire à la droite issue de ce point.

3
- Le **cercle** de centre A et de rayon r est le lieu géométrique des points du plan situés à la distance r de A.
- Équation du **cercle** $\mathbb{C}$ de centre O(0; 0) et de rayon r : $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$
- Équation du **cercle** $\mathbb{C}$ de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r :

$$\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2}$$

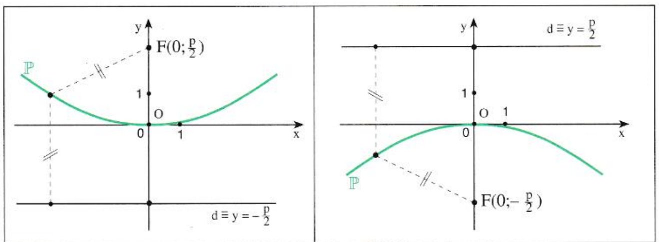


d_1 : droite **extérieure** à $\mathbb{C}$
d_2 : droite **tangente** à $\mathbb{C}$
d_3 : droite **sécante** à $\mathbb{C}$.

- Pour calculer les coordonnées des éventuels points d'intersection d'un cercle $\mathbb{C}$ et d'une droite d d'équation y = mx + p, on résout le système formé par l'équation de $\mathbb{C}$ et par l'équation de d : on remplace dans l'équation du cercle y par (mx + p).
- Un **point** du plan cartésien **appartient à un cercle**
  ssi
  les coordonnées du point vérifient une équation de ce cercle.

5.3 PARABOLES

- La **parabole** $\mathbb{P}$ de **foyer** F et de **directrice** d est le **lieu géométrique** des points du plan équidistants de F et de d.



$\mathbb{P} \equiv x^2 = 2py$ ou $y = \dfrac{1}{2p}x^2$	$\mathbb{P} \equiv x^2 = -2py$ ou $y = -\dfrac{1}{2p}x^2$

- Toute équation $y = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$

  est celle d'une **parabole** de **sommet** $S\left(-\dfrac{b}{2a} ; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ et

  d'**axe de symétrie** d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

  Cette courbe est le graphique d'une **fonction du 2e degré**
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to ax^2 + bx + c \qquad (a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$.

6 L'ESSENTIEL DU CALCUL VECTORIEL

6.1 VECTEURS

1 Un **couple de points** (A; B) détermine :

- la **direction** de la droite AB,
- le **sens** de A vers B,
- la **longueur** du segment [AB].

Quand les couples de points (A; B), (C; D), ... déterminent les mêmes sens, direction et longueur, on dit qu'ils définissent le même **vecteur**.

Chaque couple est un **représentant** du vecteur.

Un vecteur dont un représentant est (A; B) se note $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{u}$.

2 • Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit la **variation de position** qui permet d'aller de A en B.

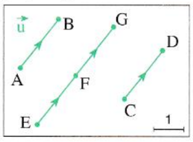
Cette variation de position a le même effet sur le point A que la **translation** qui applique A sur B.

• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par

- la **direction** de la droite AB,
- le **sens** de A vers B,
- la **longueur** du segment [AB], notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou $\overline{AB}$ et nommée **norme** de $\overrightarrow{AB}$.

EXEMPLES

- les *couples* (A; B), (C; D), (E; F) et (F; G) représentent le même vecteur.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{u}$.
- la *norme* de $\overrightarrow{AB}$ est 2.
  $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \overline{AB} = 2$.



3 • Si un représentant d'un vecteur est (A; B), le point A porte le nom d'**origine** et le point B celui d'**extrémité** du représentant de $\overrightarrow{AB}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur dont l'origine coïncide avec l'extrémité. Il porte le nom de **vecteur nul**.

La norme du vecteur nul vaut 0. Il n'a ni sens ni direction.

Le vecteur nul se note $\overrightarrow{0}$ et se dessine dans le plan par une boucle.

4 • Deux **vecteurs** sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

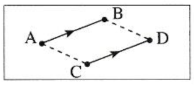
• Deux **vecteurs** sont **opposés** s'ils ont la même direction, des sens contraires et la même norme.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

• Deux **vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls sont **parallèles** s'ils ont même direction, c'est-à-dire si les droites AB et CD sont parallèles.

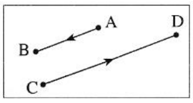
On note $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

6.2 PROPRIETES



1 Si A, B, C et D sont quatre points d'un plan non alignés trois à trois,

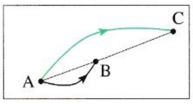
ABDC est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.



2 Si A, B, C et D sont quatre points d'un plan,

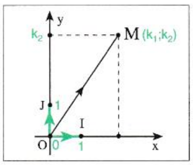
AB // CD $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles

$\iff$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.



3 Si A, B et C sont trois points d'un plan,

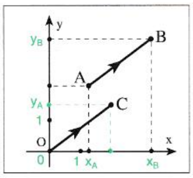
A, B et C sont alignés $\iff$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.



4 Dans un repère cartésien (O, I, J) d'un plan,
tout point M est tel qu'il existe **un seul** réel k_1 et **un seul** réel k_2 tels que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = k_1 \,.\, \overrightarrow{OI} + k_2 \,.\, \overrightarrow{OJ}};$$

$(k_1; k_2)$ sont les **coordonnées** du point M dans ce repère.



5 Dans un repère cartésien d'un plan,
si | les coordonnées de A sont $(x_A; y_A)$,
| les coordonnées de B sont $(x_B; y_B)$,

alors • les **composantes** de $\overrightarrow{AB}$ sont les réels du couple $\boxed{(x_B - x_A; y_B - y_A)}$

(les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées de C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$);

• des vecteurs égaux ont même composantes;

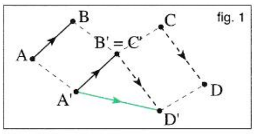
• des vecteurs opposés ont des composantes opposées;

• le **milieu** M de [AB] est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$,

c.-à-d. les coordonnées de M sont $\boxed{\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$.

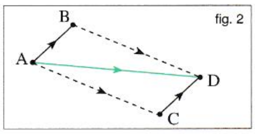
6.3 OPERATIONS VECTORIELLES

1 **Addition**



• $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'D'}$. (fig. 1)

• $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. (fig. 2)



• L'addition vectorielle est

– associative : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF})$;

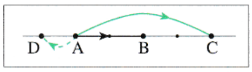
– commutative : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$.

• Dans un repère cartésien d'un plan,

si les composantes de $\overrightarrow{u}$ sont $(u_1; u_2)$ et celles de $\overrightarrow{v}$ sont $(v_1; v_2)$,

alors les composantes de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.

2 Multiplication par un réel



- Dans un repère cartésien d'un plan,

  si les composantes de $\overrightarrow{u}$ sont $(u_1; u_2)$ et k est un réel,

  alors les composantes de k $\overrightarrow{u}$ sont $(ku_1; ku_2)$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **parallèles**

  ssi

  il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{u}$.

EXEMPLES

$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

REMARQUE

Les élèves de la Communauté française trouveront dans le manuel, tome 2 (page 39), l'essentiel du **produit scalaire dans le plan**, vu en 4e de la FESeC.

7 L'ESSENTIEL DES STATISTIQUES

Si $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p$ sont les valeurs numériques de la **propriété** ou **caractère** observé chez des **individus** d'une **population** qui constituent une série statistique,
$n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_p$ sont les effectifs de la 1re, de la 2e, ..., de la p^e **classe** d'individus,

alors

- l'effectif total est noté n,

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

- la moyenne de la série est notée $\overline{x}$ ou m ou μ,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_p n_p) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{p} x_i n_i$$

- l'écart moyen de la série est noté e,

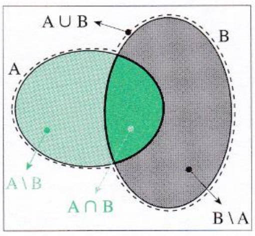
$$e = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{p} |x_i - \overline{x}| n_i$$

- la variance de la série est notée V,

$$V = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{p} (x_i - \overline{x})^2 n_i$$

- l'écart-type de la série est noté σ.

$$\sigma = \sqrt{V}$$



NOTE : OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

Rappels :

- $A \cap B$ ou l'**intersection** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à A **et** à B.
- $A \cup B$ ou l'**union** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.
- $A \setminus B$ ou la **différence** des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A sans appartenir à B.

DEUXIEME PARTIE :
FORMULAIRE de 5ème et 6ème

ARITHMETIQUE - ALGEBRE

COMBINATOIRE

- **Factorielle n** ou $n! = 1.2.3...n$; $0! = 1$
- Nombre d'**arrangements sans répétition** de n objets pris p à p *(l'ordre importe)* $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$
- Nombres d'**arrangements avec répétition** de n objets pris p à p *(l'ordre importe)* ...... $\boxed{B_n^p = n^p}$
- Nombres de **permutations** sans répétition de p objets *(l'ordre importe)* .... $\boxed{P_p = p!}$
- Nombre de **combinaisons sans répétition** de n objet pris p à p *(l'ordre n'importe pas)* $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

DÉVELOPPEMENT DES BINÔMES PAR LA FORMULE DE NEWTON

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^p a^{n-p} b^p + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

SUITES

	SUITE ARITHMÉTIQUE de premier terme u_1 et de raison r $(r \neq 0)$	SUITE GÉOMÉTRIQUE de premier terme u_1 et de raison q $(0 \neq q \neq 1)$
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n q$
Expression du ne terme	$u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_1 q^{n-1}$
Somme de n termes consécutifs	$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$	$S_n = u_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$
Formules usuelles	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1; \\ 1 & \text{si } a = 1; \\ +\infty & \text{si } a > 1. \end{cases}$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1}{1-a}$ si $0 < a < 1$.

NOMBRES COMPLEXES

$\boxed{i^2 = -1}$

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

$a + bi = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \operatorname{cis}\varphi$

$(r_1 \operatorname{cis}\varphi_1)(r_2 \operatorname{cis}\varphi_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$

$\frac{r_1 \operatorname{cis}\varphi_1}{r_2 \operatorname{cis}\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$

$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c$ et $b = d$

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$(r \operatorname{cis}\varphi)^n = r^n \operatorname{cis} n\varphi$ (formule de Moivre)

Les racines ne de $r \operatorname{cis}\varphi$ sont $\sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ et $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

TRIGONOMETRIE

FORMULES D'ADDITION ET DE SOUSTRACTION

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

FORMULES DE DUPLICATION

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos a = \dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\tan a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

FORMULES DE CARNOT

$\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$

FORMULES DE FACTORISATION (DE SIMPSON)

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

FORMULES DE TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMME OU DIFFÉRENCE

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$

$\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b)-\cos(a-b)\Big)$

ANALYSE

FONCTIONS CYCLOMÉTRIQUES

- $\text{Arc sin} : [-1;1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] : x \to \text{Arc sin}\, x$ tel que $\boxed{\text{Arc sin}\, x = y \iff \left(x = \sin y \text{ et } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)}$
- $\text{Arc cos} : [-1;1] \to [0;\pi] : x \to \text{Arc cos}\, x$ tel que $\boxed{\text{Arc cos}\, x = y \iff \left(x = \cos y \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\right)}$
- $\text{Arc tan} : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[: x \to \text{Arc tan}\, x$ tel que $\boxed{\text{Arc tan}\, x = y \iff \left(x = \tan y \text{ et } -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)}$

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

- $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \to \exp_a x = a^x \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$
- $\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \log_a x$ tel que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \log_a x = y \iff a^y = x}$ $\quad \log_a = \exp_a^{-1}$

Le **logarithme de base a** d'un réel strictement positif est l'**exposant** de la puissance de a égale à ce réel.

Cas particuliers • Si $\underline{a = e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \simeq 2,71$, alors le logarithme et l'exponentielle sont **népériens**.

• Si $\underline{a = 10}$, alors le logarithme et l'exponentielle sont **décimaux**.

Formules opératoires

$a^{x+y} = a^x a^y$

$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$a^{xy} = (a^x)^y$

$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$

$\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

$\log_a u^n = n \log_a u$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$a^{\log_a x} = x \quad (x \in \mathbb{R}_0^+)$

$\log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$

Conversion

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\log x}{\log a}$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

LIMITES

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0^- \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0^+$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Cas d'indétermination : $\boxed{\frac{0}{0}}$, $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$, $\boxed{\infty-\infty}$, $\boxed{0\,.\,\infty}$, $\boxed{1^\infty}$, $\boxed{0^\infty}$, $\boxed{\infty^0}$, $\boxed{0^0}$.

Règle de l'Hospital-Bernoulli

Sous des conditions de continuité et de dérivabilité des fonctions f et g et

si $\lim\limits_{\substack{x\to a \text{ ou} \\ x\to\pm\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}$ présente un cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$,

si $\lim\limits_{\substack{x\to a \text{ ou} \\ x\to\pm\infty}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ est réelle ou infinie, alors $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a \text{ ou} \\ x\to\pm\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a \text{ ou} \\ x\to\pm\infty}}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

REMARQUE

Si cette limite présente encore un cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on peut tenter de réitérer le procédé.

ASYMPTOTES

La courbe d'équation $y=f(x)$ admet

- une **asymptote verticale** d'équation $\boxed{x=a}$ ssi $\boxed{\lim\limits_{x\to a^-}f(x) \text{ est infinie } \textbf{ou } \lim\limits_{x\to a^+}f(x) \text{ est infinie}}$
- une **asymptote horizontale** d'équation $\boxed{y=b}$ ssi $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty}(x)=b \text{ ou } \lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=b}$
  (à gauche ou à droite)
- une **asymptote oblique** d'équation $\boxed{y=ax+b}$ ssi $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ (a\in\mathbb{R}_0) \text{ et } \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b\ (b\in\mathbb{R})}$
  (à gauche ou à droite)

CONTINUITÉ

La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ est **continue** en le réel a non isolé de son domaine de définition

ssi $\boxed{\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)}$

DÉRIVÉES

- Le **nombre dérivé** pour $x=a$ de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ est $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (si cette limite est réelle)
- La fonction f est **dérivable** en le réel a ssi $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$.
- La **fonction dérivée** est la fonction f′ qui, à chaque réel en lequel f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé de f en ce réel.
- Si f est dérivable en le réel a, alors f est continue en a.
- Équation cartésienne de la **tangente** t à la courbe $y=f(x)$ en un point d'abscisse a de la courbe :

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)\,.\,(x-a)}$$

ordonnée d'un point quelconque de t

ordonnée du point donné

coefficient angulaire

abscisse d'un point quelconque de t

abscisse du point donné de t

- **FORMULES**

$(k)'=0$ (k constante)

$(x)'=1$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(u+v-w)'=u'+v'-w'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$(kv)'=kv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1+\tan^2 x$

$(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$ ou $-1-\cot^2 x$

$(\operatorname{Arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{Arc}\cos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{Arc}\tan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{Arc}\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

$(a^x)'=a^x\,.\ln a$

$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$\boxed{\Big(v\big(u(x)\big)\Big)'=v'(u(x))\,.\,u'(x)}$

INTÉGRALES

La fonction F est une **primitive** ou une **intégrale indéfinie** de la fonction f continue sur un intervalle I de réels $\Leftrightarrow$ $\boxed{F' = f}$

- **FORMULAIRE**

$$\int dx = x + k$$
$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + k \quad (\text{si } p \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$$
$$\int e^x\,dx = e^x + k$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc\sin} x + k$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + k$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + k$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arc\tan} x + k$$
$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx \quad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$$
$$\int h'\big(g(x)\big)\,.\,g'(x)\,dx = h\big(g(x)\big) + k$$

Intégration

par parties : $\int f(x)\,.\,g'(x)\,dx = f(x)\,.\,g(x) - \int f'(x)\,.\,g(x)\,dx$ | par substitution : $\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)\,.\,g'(t)\,dt$

- Si F est une primitive de f, alors l'**intégrale définie** de la fonction f aux bornes a et b est $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

- Si • f est continue sur $[a;b]$,
  • P est la partie d'un plan comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe x, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$,

  alors • l'**aire** de P égale $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$ (si $f(x) \geqslant 0$),

  • le **volume** du solide engendré par la rotation de P autour de l'axe x est $\boxed{\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx.}$

CALCUL MATRICIEL ET SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

- **DÉTERMINANT D'UNE MATRICE (CARRÉE)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{rj}A^{rj} \quad (r = 1, 2 \text{ ou } 3)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_{is}A^{is} \quad (s = 1, 2 \text{ ou } 3) \text{ (règle de Sarrus)}$$

- **INVERSE D'UNE MATRICE**

$\boxed{\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}\,.\,\text{adj}\,\mathcal{A}}$ (si $\det \mathcal{A} \neq 0$, alors adj $\mathcal{A}$, l'**adjointe** de la matrice $\mathcal{A}$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de $\mathcal{A}$).

- **SOLUTIONS D'UN SYSTÈME CRAMÉRIEN**

(le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues et le déterminant de la matrice du système est non nul)

$\boxed{x_i = \frac{\det \mathcal{A}_i}{\det \mathcal{A}}}$ (où $\mathcal{A}_i$ est la matrice obtenue en remplaçant dans $\mathcal{A}$ la i^e colonne par celle des termes indépendants du système lorsqu'ils sont dans le second membre).

GEOMETRIE ANALYTIQUE PLANE

DROITES (dans un repère cartésien d'un plan)

- *Équations paramétriques* de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(x_u; y_u)$ et passant par le point $(x_A; y_A)$: $\begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

CERCLES (dans un repère orthonormé d'un plan : centre $A(x_A; y_A)$ et rayon r) : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$.

- *Équation cartésienne développée* : $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$

  avec $x_A = -\frac{1}{2}m$, $y_A = -\frac{1}{2}n$, $r = \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}n^2 - p}$ (si $m^2 + n^2 - 4p > 0$)

- *Équations paramétriques* : $\begin{cases} x = x_A + r\cos t \\ y = y_A + r\sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

DISTANCES (dans un repère orthonormé d'un plan)

- *d'un point* $P(x_P;y_P)$ *à la droite* $m \equiv ax+by+c=0$: $\boxed{d(P,m)=\dfrac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

CHANGEMENTS DE REPÈRE (dans un plan)

- *par la translation* qui applique $O(0;0)$ sur $O'(r;s)$:

$$\begin{cases} x = x' + r \\ y = y' + s \end{cases}$$

$\boxed{P(x;y) \text{ dans } (O,I,J)} \rightarrow \boxed{P(x';y') \text{ dans } (O',I',J')}$

(si le repère est orthonormé)

- *par la rotation* de centre $O(0;0)$ et d'amplitude θ :

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$\boxed{P(x;y) \text{ dans } (O,I,J)} \rightarrow \boxed{P(x';y') \text{ dans } (O',I',J')}$

CONVERSION DE SYSTÈMES DE COORDONNÉES

polaires → cartésiennes

$P(\rho;\omega) \rightarrow P(x_P;y_P)$: $\boxed{\begin{cases} x_P = \rho\cos\omega \\ y_P = \rho\sin\omega \end{cases}}$

cartésiennes → polaires

$P(x_P;y_P) \rightarrow P(\rho;\omega)$: $\boxed{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x_P^2+y_P^2} \\ \cos\omega = \dfrac{x_P}{\sqrt{x_P^2+y_P^2}} \\ \sin\omega = \dfrac{y_P}{\sqrt{x_P^2+y_P^2}} \end{array}}$

(Dans un repère orthonormé d'un plan)

ELLIPSES

– *Équations cartésiennes réduites* $(a > b)$ $\boxed{b^2 = a^2 - c^2}$

- *si l'axe focal est l'axe x* :

$\boxed{\mathbb{E} \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$

Foyers : $F\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, $F'\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right)$

Directrices : $d_F \equiv x = \dfrac{a^2}{c}$, $d_{F'} \equiv x = -\dfrac{a^2}{c}$

Équation focale : $(x-c)^2+y^2 = \varepsilon^2\left(x-\dfrac{a^2}{c}\right)^2$ ou $(x+c)^2+y^2=\varepsilon^2\left(x+\dfrac{a^2}{c}\right)^2$

Excentricité : $0 < \varepsilon < 1$

- *si l'axe focal est l'axe y* :

$\boxed{\mathbb{E} \equiv \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ou} \quad a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2}$

Foyers : $F\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right)$; $F'\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right)$

Directrices : $d_F \equiv y = \dfrac{a^2}{c}$, $d_{F'} \equiv y = -\dfrac{a^2}{c}$

Équation focale : $x^2+(y-c)^2 = \varepsilon^2\left(y-\dfrac{a^2}{c}\right)^2$ ou $x^2+(y+c)^2=\varepsilon^2\left(y+\dfrac{a^2}{c}\right)^2$

Excentricité : $0 < \varepsilon < 1$

– *Équations paramétriques* : $\boxed{\mathbb{E} \equiv \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

HYPERBOLES

– *Équations cartésiennes réduites* $\boxed{b^2 = c^2 - a^2}$

- *si l'axe focal est l'axe x* :

$\boxed{\mathbb{H} \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$

Foyers : $F\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, $F'\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)$

A.O. : $y = \dfrac{b}{a}x$; $y = -\dfrac{b}{a}x$

$\varepsilon > 1$

- *si l'axe focal est l'axe y* :

$\boxed{\mathbb{H} \equiv \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = -1 \quad \text{ou} \quad a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2}$

Foyers : $F\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right)$; $F'\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right)$

A.O. : $y = \dfrac{a}{b}x$; $y = -\dfrac{a}{b}x$

$\varepsilon > 1$

$\boxed{\mathbb{H} \equiv \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$

PARABOLES (paramètre : $p = d(F,d)$, sommet $O(0;0)$, excentricité $\varepsilon = 1$)

– *Équations cartésiennes réduites*

- axe de symétrie : axe x, foyer : $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, directrice : $d_F \equiv x = -\frac{p}{2}$: $\boxed{\mathbb{P} \equiv y^2 = 2px}$
- axe de symétrie : axe y, foyer : $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, directrice : $d_F \equiv y = -\frac{p}{2}$: $\boxed{\mathbb{P} \equiv x^2 = 2py}$
- axe de symétrie : axe x, foyer : $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, directrice : $d_F \equiv x = \frac{p}{2}$: $\boxed{\mathbb{P} \equiv y^2 = -2px}$
- axe de symétrie : axe y, foyer : $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, directrice : $d_F \equiv y = \frac{p}{2}$: $\boxed{\mathbb{P} \equiv x^2 = -2py}$

– *Équations paramétriques* $\boxed{\mathbb{P} \equiv \begin{cases} x = 2p\cot^2 t \\ y = 2p\cot t \end{cases}}$ $\left(t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right)$

ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE CONIQUE

– *Équation focale :* $(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{m^2 + n^2}\,|mx + ny + p|^2$

(Foyer $F(x_F; y_F)$, directrice $d_F \equiv mx + ny + p = 0$, excentricité ε)

– *Équation générale :* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad \big(\text{avec } (A; B; C) \neq (0; 0; 0)\big)$

GEOMETRIE VECTORIELLE ET ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

CALCUL VECTORIEL

- Les points A, B et C sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : r\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- Les points A, B, C et D sont **coplanaires** $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AD} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$.
- Dans un repère de l'espace, si les coordonnées de A sont $(x_A; y_A; z_A)$ et celles de $B(x_B; y_B; z_B)$

  alors
  - les **composantes** de $\overrightarrow{AB}$ sont $\boxed{(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)}$
  - les coordonnées de M, **milieu** de [AB] sont $\boxed{\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)}$

PRODUIT SCALAIRE

Dans un repère orthonormé de l'espace,

- $\boxed{\vec{u} \odot \vec{v} = ||\,\vec{u}\,||\,.\,||\,\vec{v}\,||\,.\cos\theta}$ (θ est une amplitude de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$)
- **Vecteurs orthogonaux :** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} = 0$
- Si les composantes de $\vec{u}$ sont $(x_u; y_u; z_u)$ et celle de $\vec{v}$ $(x_v; y_v; z_v)$,

  alors
  - $\vec{u} \odot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$
  - $||\,\vec{u}\,|| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$ (**norme** du vecteur $\vec{u}$)

DROITES $\big($dans un repère cartésien de l'espace : d par $A(x_a; y_a; z_a)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(x_u; y_u; z_u)\big)$

- *Équation vectorielle :* $d \equiv \overrightarrow{AX} = k\,\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}$, X est un point quelconque de d)
- *Équations paramétriques :* $d \equiv \begin{cases} x - x_A = kx_u \\ y - y_A = ky_u \\ z - z_A = kz_u \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- *Équations cartésiennes :* si $x_u \neq 0$ et $y_u \neq 0$ et $z_u \neq 0$, alors $d \equiv \dfrac{x - x_A}{x_u} = \dfrac{y - y_A}{y_u} = \dfrac{z - z_A}{z_u}$

PLANS $\big(\pi$ par $A(x_a; y_a; z_a)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\,(x_u; y_u; z_u)$ et $\vec{v}\,(x_v; y_v; z_v)\big)$

- *Équation vectorielle :*
  - $\pi \equiv \overrightarrow{AX} = k\,\vec{u} + h\,\vec{v}$ (k et h réels, X est un point quelconque de π)
  - $\pi \equiv \overrightarrow{AX} \odot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ est un **vecteur normal** à π)
- *Équations paramétriques :* $\pi \equiv \begin{cases} x - x_A = kx_u + hx_v \\ y - y_A = ky_u + hy_v \\ z - z_A = kz_u + hz_v \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R})$
- *Équation cartésienne :* $\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_A & x_u & x_v \\ y - y_A & y_u & y_v \\ z - z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$
- *Équation cartésienne générale d'un plan :* $\boxed{\pi \equiv ax + by + cz + d = 0}$ $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

DISTANCES (dans un repère orthonormé de l'espace)

La distance entre $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ est $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$

STRUCTURES

1) Un ensemble **E** (de nombres ou de vecteurs, par exemples) est muni de l'opération d'**addition**.

Les (5) propriétés de cette opération confèrent à **E** une structure de **groupe commutatif**

ssi

dans **E**, *l'addition est*	c.-à-d.
– *interne et partout définie*	: $\forall a, b \in \mathbf{E} : a + b \in \mathbf{E}$
– *associative*	: $\forall a, b, c \in \mathbf{E} : a + (b + c) = (a + b) + c$
– *telle que* **e** *soit le neutre*	: $\forall a \in \mathbf{E} : a + e = a = e + a$
– *symétrisable (tout nombre de* **E** *admet un opposé dans* **E***)*	: $\forall a \in \mathbf{E}, \exists a' \in \mathbf{E} : a + a' = 0 = a' + a$ et $a' = -a$
– *commutative*	: $\forall a, b \in \mathbf{E} : a + b = b + a$.

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis de l'addition sont des groupes commutatifs dont le neutre est 0.
L'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) muni de l'addition vectorielle est un groupe commutatif de neutre $\overrightarrow{0}$.

2) Un ensemble **E** (de nombres, par exemple) est muni de l'opération de **multiplication**.

Les (5) propriétés de cette opération confèrent à **E** une structure de **groupe commutatif**

ssi

dans **E**, *la multiplication est*	c.-à-d.
– *interne et et partout définie*	: $\forall a, b \in \mathbf{E} : a\,.\,b \in \mathbf{E}$
– *associative*	: $\forall a, b, c \in \mathbf{E} : a\,.\,(b\,.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c$
– *telle que* **1** *soit le neutre*	: $\forall a \in \mathbf{E} : a\,.\,1 = a = 1\,.\,a$
– *symétrisable (tout nombre de* **E** *admet un inverse dans* **E***)*	: $\forall a \in \mathbf{E}, \exists a' \in \mathbf{E} : a\,.\,a' = 1 = a'\,.\,a$ et $a' = \dfrac{1}{a}$
– *commutative*	: $\forall a, b \in \mathbf{E} : a\,.\,b = b\,.\,a$.

Exemples : $\mathbb{Q}_0$, $\mathbb{R}_0$ et $\mathbb{C}_0$ munis de la multiplication sont des groupes commutatifs.

3) Un ensemble **E** (de nombres, par exemple) est muni des opérations d'**addition** et de **multiplication**.

Les (11) propriétés de ces opérations confèrent à **E** une structure de **champ**

ssi

- **E** muni de l'addition est un *groupe commutatif*;
- *dans* **E**, *la multiplication est*
  - *interne et partout définie, associative et commutative ;*
  - telle que **1** soit le *neutre* et que tout élément **non nul** de **E** admette un *inverse*;
- *dans* **E**, *la multiplication est distributive par rapport à l'addition*

  c.-à-d. $\forall a, b, c \in \mathbf{E}$: $a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + a\,.\,c$
  $(a + b)\,.\,c = a\,.\,c + b\,.\,c$

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis de l'addition et de la multiplication sont des champs.

4) Un ensemble **V** (de vecteurs, par exemple) est muni de l'**addition** (vectorielle) et de la **multiplication** (des vecteurs par les réels).

Les (9) propriétés de ces deux opérations confèrent à **V** une structure d'**espace vectoriel** (sur le champ des réels).

ssi

- **V** muni de l'addition (vectorielle) est un *groupe commutatif*;
- *la multiplication (des vecteurs par des réels) est telle que le produit de tout vecteur par n'importe quel réel soit un vecteur et, de plus, elle est* c.-à-d.
  - *distributive par rapport à l'addition des réels* : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{V} (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
  - *distributive par rapport à l'addition des vecteurs* : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
  - *«associative»* : $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
  - *telle que* **1** *soit le neutre* : $1u = u = 1u$

Exemples : l'ensemble des vecteurs d'un plan et l'ensemble des vecteurs de l'espace munis de l'addition vectorielle et de la multiplication des vecteurs par les réels sont des espaces vectoriels sur le champ des réels.