Systèmes prédictifs

PLAN

Elément du module 1 : Séries Temporelles

Chapitre2 : Modèles déterministes

- Techniques du lissage simple:
  - Modèle Naïf
  - Modèle Naïf Saisonnier
  - Modèle de la Moyenne
  - Modèle de la Moyenne mobile simple
  - Modèle de la Moyenne mobile centrée
- Lissage Exponentiel:
  - Lissage Exponentiel Simple
  - Lissage Exponentiel Double
  - Lissage Exponentiel Triple

Motivation

$$\boldsymbol{y_t = f(L_t, T_t, S_t, \varepsilon_t)}$$

Les modèles déterministes permettent de modéliser les composantes déterministes:

$$\boldsymbol{(L_t, T_t, S_t)}$$

Les modèles déterministes possèdent deux rôles :

- **Lissage :** estimer les composantes déterministes $(L_t, T_t\ et\ S_t)$ de la série temporelle y_t.
- **Prévision :** prévoir les valeurs futures de la série temporelle y_t.

Hypothèses des modèles déterministes

Les modèles déterministes supposent que la série temporelle est constituée de deux éléments principaux :

$$\boldsymbol{y_t = f(L_t, T_t, S_t, \varepsilon_t)}$$

Tel que, le bruit $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ suit les hypothèses suivantes :

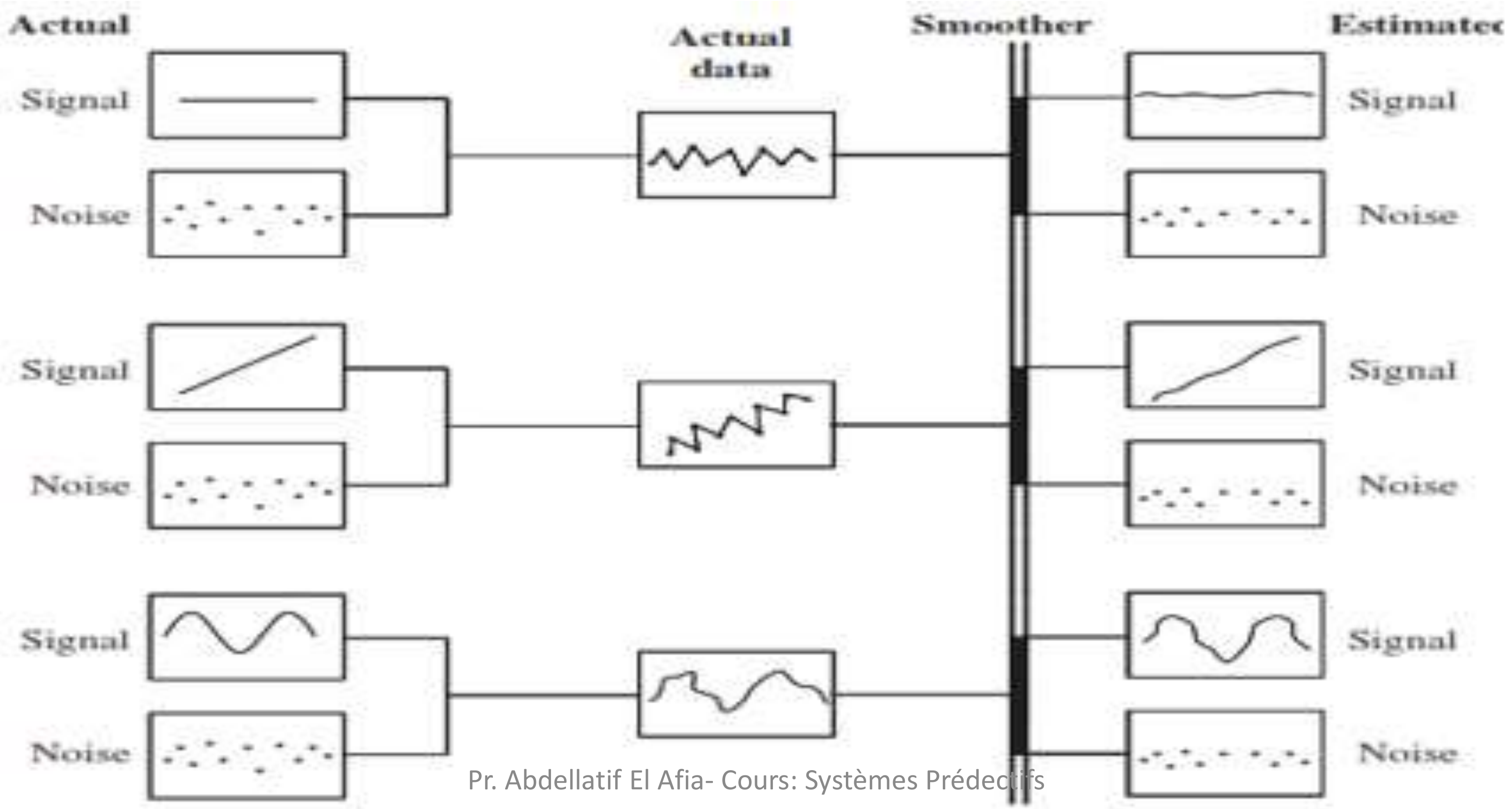
- Pas de corrélations entre les bruits: $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$, $\forall k \neq 0$ et $\forall t$.
- L'espérance du bruit est constante: $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon = cte$, $\forall t$.
- La variance du bruit est constante: $var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = cte$, $\forall t$.

Remarque:

Ce bruit est dit **Bruit Blanc**.

Définition du Lissage

Le lissage c'est une opération permettant de **séparer** la composante déterministe de la composante stochastique, et donc c'est un **filtre** permettant d'obtenir une **estimation** des composantes du signal.



Types des Lisseurs

On peut diviser les techniques de lissages en :

- **Lisseurs en arrière :** $\boldsymbol{y_t}$ sera remplacée par une combinaison des observations à l'instant t et antérieur à t. (exemple : lissage exponentiel).
- **Lisseurs en avant :** $\boldsymbol{y_t}$ sera remplacée par une combinaison des observations à l'instant t et postérieur à t.
- **Lisseurs en arrière et en avant :** $\boldsymbol{y_t}$ sera remplacée par une combinaison des observations à l'instant t, antérieur à t et postérieur à t. (exemple : lissage par la moyenne mobile, lissage par la moyenne).

Notations

Le temps $t = 1, 2, 3, \dots, n$ peut être des secondes, des jours, des mois, des années.

Les valeurs de la séries temporelles $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Les prévisions: $y_{n+h} = F_{n+h}$ prévision à l'horizon h (les h observations qui suivent l'observation n).

L'erreur de prévision: $e_t = y_t - F_t$ pour tout t.

Lissage Simple

Modèle Naïf

Le modèle Naïf permet de lisser chaque observation de la série par la valeur de la dernière observation y_n de la série.

Ce modèle permet d'estimer le niveau de la série.

$$\forall t \in \{1, \dots, n\} \qquad \hat{L}_t = y_n$$

Les prévisions sont:

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = y_n$$

Limites:

Il considère que seulement la dernière observation qui est importante.

Modèle Naïf Saisonnier

Le modèle Naïf Saisonnier permet de lisser chaque observation de la série par la valeur de la même observation appartenant à la saison précédente.

Ce modèle permet d'estimer la saisonnalité de la série.

$$\forall t \in \{1, \dots, n\} \qquad \hat{S}_t = y_{t-s}$$

Les prévisions sont:

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = y_{n-s}$$

s: c'est la période de la saisonnalité.

Limites:

Il ne capture que les informations sur la dernière saison.

Modèle de la Moyenne

Le modèle de la Moyenne permet de lisser chaque observation de la série par la moyenne de toutes les observations de la série.

Ce modèle permet d'estimer le niveau de la série.

$$\forall t \in \{1, \dots, n\} \qquad \hat{L}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Les prévisions sont:

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Limites:

Déterminer combien d'observations à utiliser pour calculer la moyenne.

Modèle de la Moyenne Mobile Simple

Le modèle de la Moyenne Mobile permet de lisser chaque observation à l'instant t par la moyenne des m observations incluant et antérieur à t.

Le nombre des observations utilisé pour lisser chaque observation est nommé l'ordre de la moyenne mobile m. Ainsi le modèle est noté $\mathrm{m}\text{-}MA$.

Ce modèle permet d'estimer la tendance de la série: $\forall t \in \{m, \dots, n\}$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=-m+1}^{0} y_{t+i}$$

Les prévisions sont:

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = \frac{1}{m} \sum_{i=n}^{n-m+1} y_i$$

Modèle de la Moyenne Mobile Centrée

Le modèle de la Moyenne Mobile Centrée permet de lisser chaque observation à l'instant t par une combinaison linéaire des observations incluant et entourant t.

Ce modèle permet d'estimer la tendance de la série:

Si l'ordre m est impair

$\forall t \in \{p, \ldots, \mathrm{n}\}$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{m}\sum_{i=-p}^{p} y_{t+i}$$

Tel que: $m = 2p + 1$

Ce modèle est symétrique.

Ce modèle est noté m-MA.

Modèle de la Moyenne Mobile Centrée

Si l'ordre $\boldsymbol{m}$ est pair, le modèle n'est plus symétrique.

Que faire dans le cas ou l'ordre m est pair? Comment rendre le modèle symétrique?

- **Double moyenne mobile.**

Moyenne mobile d'ordre $m = 2p$ sur la série $(y_t)_t$:

$$\hat{T}_t^{(*)} = \frac{1}{2p} \sum_{i=-p+1}^{p} y_{t+i}$$

Moyenne mobile simple d'ordre $m = 2$ sur la série $\left(\hat{T}_t^{(*)}\right)_t$:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{2}(\hat{T}_t^{(*)} + \hat{T}_{t-1}^{(*)})$$

Modèle de la Moyenne Mobile Centrée

Si l'ordre m est pair

$\forall t \in \{(p+1), \dots, \mathrm{n}\}$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{4p}\left(y_{t-p} + 2\sum_{i=-p+1}^{p-1} y_{t+i} + y_{t+p}\right)$$

Tel que: $m = 2p$

Ce modèle est noté $2 \times m$-MA: moyenne mobile d'ordre m suivie par une moyenne mobile d'ordre 2.

Modèle de la Moyenne Mobile Centrée

Finalement, la formule générale du modèle de la Moyenne Mobile Centrée:

$$\hat{T}_t = \begin{cases} \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=-p}^{p} y_{t+i} \quad , & \forall t \in \{p, \dots, \mathrm{n}\} \quad \textbf{si} \quad m = 2p+1 \\ \dfrac{1}{4p}\left(y_{t-p} + 2\displaystyle\sum_{i=-p+1}^{p-1} y_{t+i} + y_{t+p}\right) \quad , & \forall t \in \{(p+1), \dots, \mathrm{n}\} \quad \textbf{si} \quad m = 2p \end{cases}$$

Question de recherche:

Trouver la formule de prévision F_{n+h} pour le modèle de la moyenne mobile centrée.

Exercice

Donner l’estimation de la tendance pour les cas suivants:

1. Série temporelle avec saisonnalité annuelle.
2. Série temporelle avec saisonnalité trimestrielle.
3. Série temporelle avec saisonnalité hebdomadaire.

Exercice

Pour le cas de la série temporelle avec saisonnalité annuelle: $MA(m = 12)$

$$T_t = \frac{1}{4 \times 6}(y_{t-6} + 2y_{t-5} + 2y_{t-4} + \cdots + 2y_{t+5} + y_{t+6})$$

Pour le cas de la série temporelle avec saisonnalité trimestrielle: $MA(m = 4)$

$$T_t = \frac{1}{4 \times 2}(y_{t-2} + 2y_{t-1} + 2y_t + 2y_{t+1} + y_{t+2})$$

Pour le cas de la série temporelle avec saisonnalité hebdomadaire: $MA(m = 7)$

$$T_t = \frac{1}{7}(y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3})$$

Exercice

Les ventes journalière (lundi-vendredi) d'un produit pendant 4 semaines.

Semaine 1

Jours	Ventes	Jours	Ventes
1	43	11	40
2	45	12	67
3	22	13	30
4	25	14	32
5	31	15	37
6	51	16	65
7	41	17	58
8	37	18	32
9	22	19	48
10	25	20	24

Exercice

1. Tracez la série temporelle.
2. Donnez les composantes de la série temporelle.
3. Calculez la moyenne mobile centrée d'ordre 3 et d'ordre 5, et tracez les dans le même graphe.

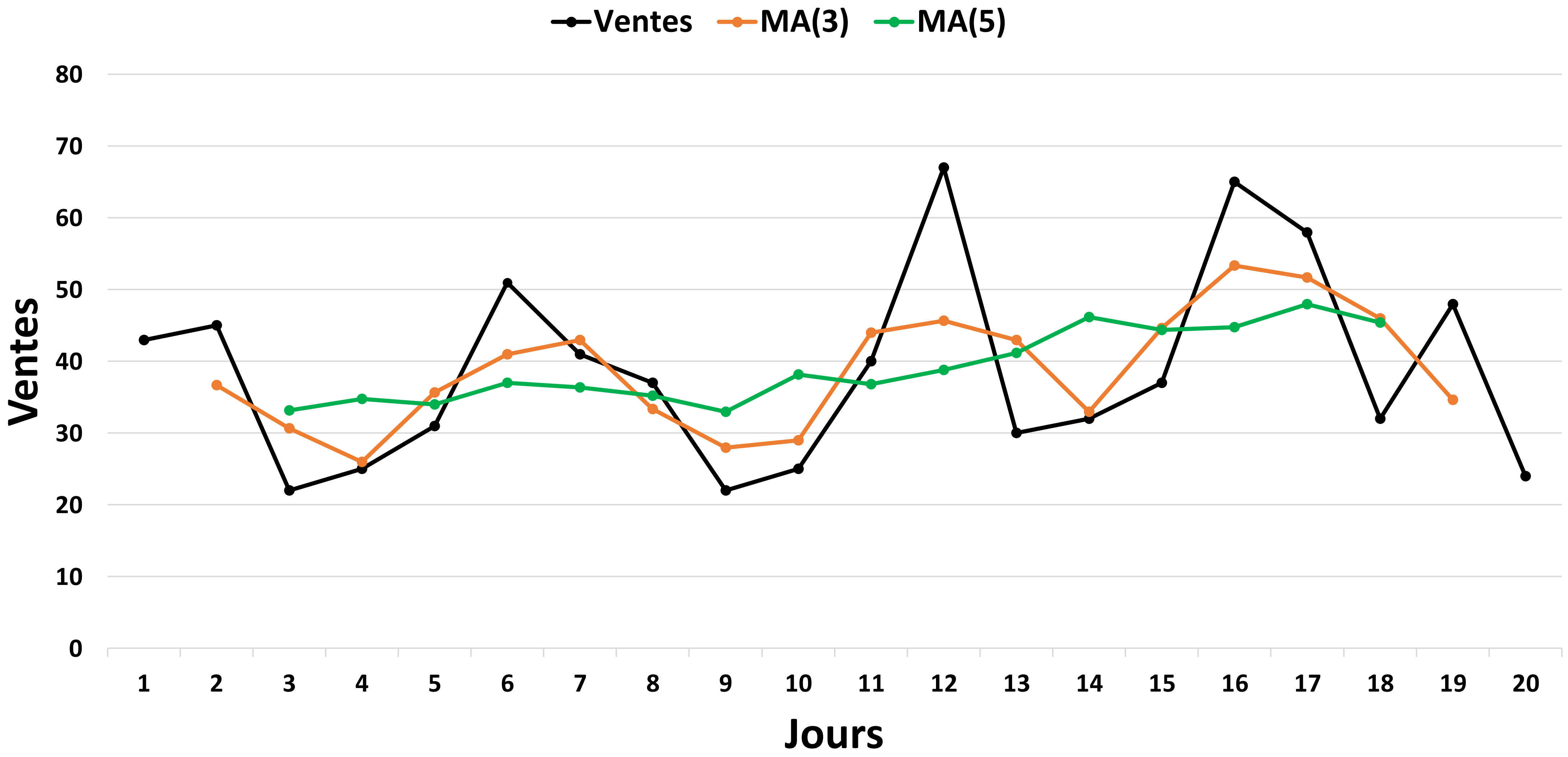
Jours	Ventes	MA(3)	MA(5)
1	43		
2	45		
3	22		

4. Que remarquez-vous?

Exercice

Jours	Ventes	MA(3)	MA(5)
1	43	-	-
2	45	36,7	-
3	22	30,7	33,2
4	25	26,0	34,8
5	31	35,7	34
6	51	41	37
7	41	43	36,4

Exercice



Ventes
MA(3)
MA(5)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Ventes
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
Jours

Notes

- Si l'ordre de la moyenne mobile augmente:
  - La série devient courte.
  - Le lissage devient fort.

- Si la série contient de la saisonnalité, l'application d'une moyenne mobile ayant l'ordre égal à la période élimine la saisonnalité.

Modèle de la Moyenne Mobile

Limites:

- Ces modèles sont incapables de filtrer la saisonnalité dans les données.
- Ajout de nouvelles observations et élimination des autres.
- Toutes les observations ont presque le même degré d'influence.

Lissage Exponentiel

Lissage exponentiel Simple - Principe

- C'est un modèle statistique adapté pour les séries sans tendance et sans saisonnalité:

$$\boldsymbol{y_t = L_t} + \varepsilon_t$$

Donc, $\forall t \in \{1, \dots, \text{n}\}$:

$$\boldsymbol{\hat{L}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \cdots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1 + (1-\alpha)^t \hat{L}_0}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^i y_{t-i} + (1-\alpha)^t \hat{L}_0}$$

Ou simplement: $\boldsymbol{\hat{L}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}}$

$\alpha \in \,]0,1[$ c'est le paramètre du lissage du niveau.

Les prévisions sont: $\forall t \in \{1, \dots, n\}$ $F_{t+1} = \hat{L}_t$ et $F_1 = \hat{L}_0$

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = \boldsymbol{\hat{L}_n}$$

Lissage exponentiel Simple – choix de $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\hat{L}_0})$

Il faut choisir $\boldsymbol{\alpha}$ et $\hat{L}_0$ permettant de minimiser la somme des carrées des erreurs de prévision (SSE):

$$SSE = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} (y_t - \boldsymbol{F_t})^2 = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} {e_t}^2$$

$$\{\hat{\alpha}, \hat{L}_0\} = \underset{\boldsymbol{\alpha} \in]0,1[}{\operatorname{argmin}} [\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{L}_{t-1})^2]$$

Lissage exponentiel Simple - Pseudocode

Inputs : *série temporelle* $(y_t)_t$ *, nombre des observations* n*, l'horizon* h.

Outputs : *les paramètres* $\{\hat{\alpha}, \hat{L}_0\}$ *et la prévision* F_{n+h}

Initialisation de $\hat{L}_0 = y_1$ *et* $\alpha = \alpha_0$

while *(la précision n'est pas bonne)*

for $t = 1$ ***to*** n

calculer $\hat{L}_t$

endfor

Calculer l'erreur $SSE = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{L}_{t-1})^2$

Modifier le paramètre α *et* $\hat{L}_0$ *selon:* $\alpha \leftarrow \alpha - d$ ***et*** $\hat{L}_0 \leftarrow \hat{L}_0 - d$

Endwhile

Calculer la prévision $F_{n+h} = \hat{L}_n$

Lissage exponentiel Simple – influence de α

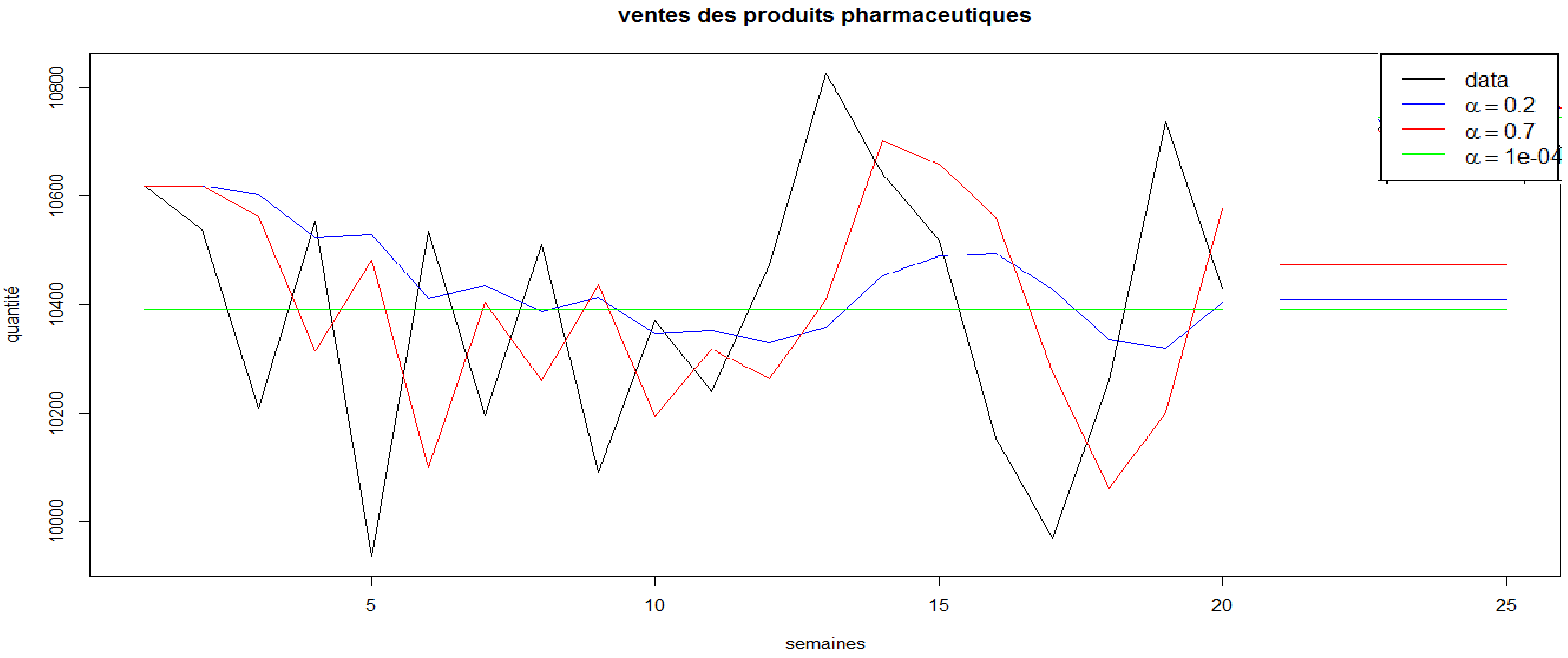
Si α proche de 0:

- les observations anciennes auront une grande influence sur $\hat{L}_t$(mémoire forte).
- Réactivité faible au dernières observations.

Si α proche de 1:

- les observations récentes auront une grande influence sur $\hat{L}_t$ (mémoire faible).
- Sensibilité aux fluctuations.

Lissage exponentiel Simple – Exemple



Lissage exponentiel Double - Principe

- C'est un modèle statistique adapté pour les séries avec tendance :

$$\boldsymbol{y_t = L_t + T_t + \varepsilon_t}$$

Donc, $\forall t \in \{1, \dots, \mathrm{n}\}$:

Lissage du niveau :

$$\boldsymbol{\widehat{L}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\widehat{L}_{t-1} + \widehat{T}_{t-1})}$$

Lissage de la tendance :

$$\boldsymbol{\widehat{T}_t = \beta\left(\widehat{L}_t - \widehat{L}_{t-1}\right) + (1-\beta)\widehat{T}_{t-1}}$$

$\alpha, \beta \in]0,1[$**:** paramètre de lissage du niveau et la tendance.

Les prévisions sont: $\forall t \in \{1, \dots, n\}$ $\quad F_{t+1} = \widehat{L}_t + \widehat{T}_t$ et $F_1 = \widehat{L}_0 + \widehat{T}_0$

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = \widehat{L}_n + h\widehat{T}_n$$

Lissage exponentiel Double – choix de $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \hat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}})$

Il faut choisir $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \hat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}})$ permettant de minimiser la somme des carrées des erreurs de prévision (SSE):

$$SSE = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} (y_t - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{t}})^2 = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} {e_t}^2$$

$$\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}}\} = \underset{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in]0,1[}{\operatorname{argmin}} [\sum_{t=1}^{n} (y_t - (\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}))^2]$$

Lissage exponentiel Double - Pseudocode

Inputs : *série temporelle* $(y_t)_t$, *nombre des observations* n, *l'horizon* h.

Outputs : *les paramètres* $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{L}_0, \hat{T}_0\}$ *et la prévision* F_{n+h}

Initialisation de $\hat{L}_0 = y_1$, $\hat{T}_0 = y_2 - y_1$, $\alpha = \alpha_0$ *et* $\beta = \beta_0$

while *(la précision n'est pas bonne)*

for $t = 1$ ***to*** n

Calculer $\hat{L}_t$ et $\hat{T}_t$

endfor

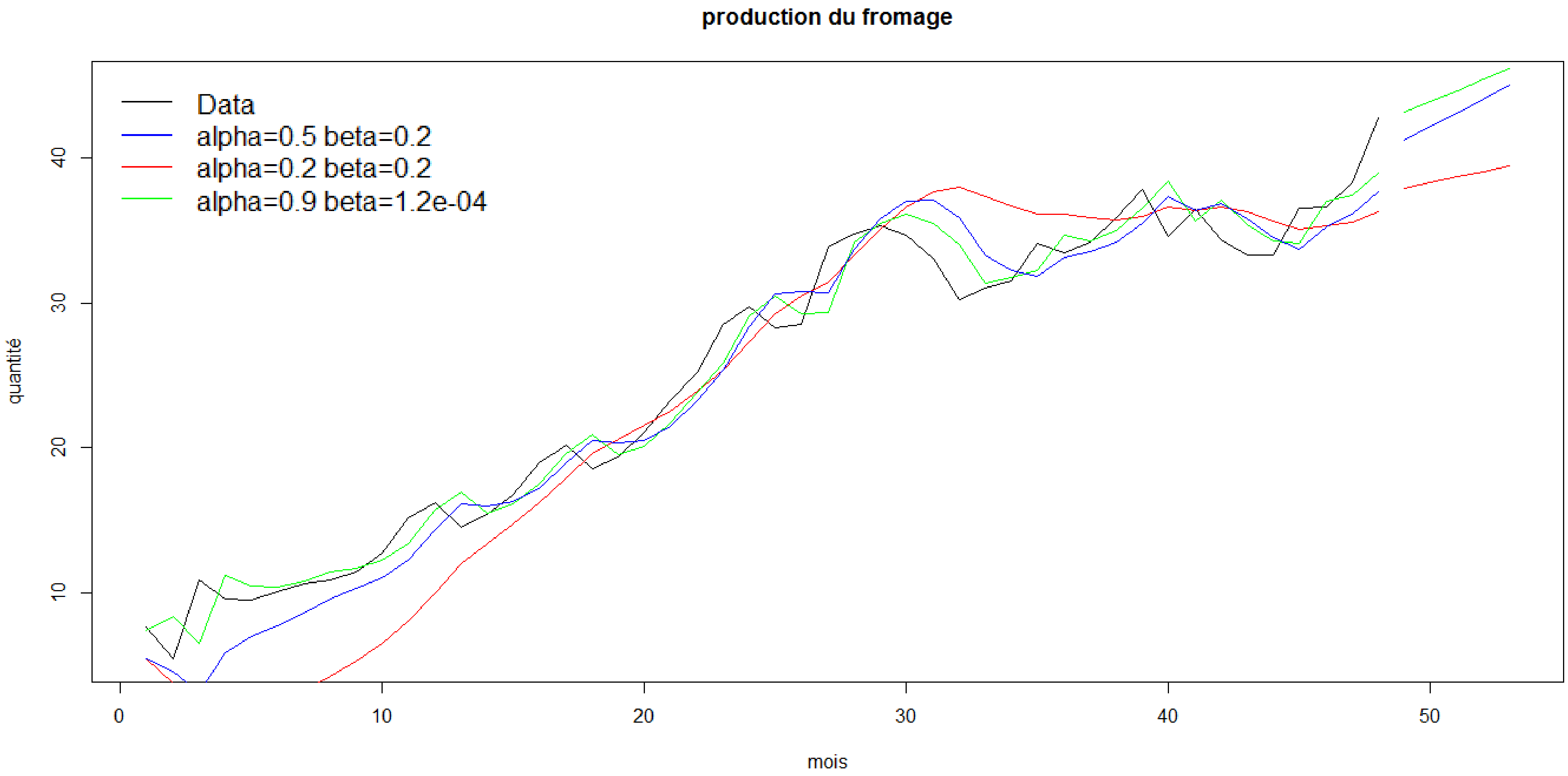
Calculer l'erreur $SSE = \sum_{t=1}^{n}(y_t - (\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}))^2$

Modifier les paramètres: $\alpha \leftarrow \alpha - d$, $\beta \leftarrow \beta - d$, $\hat{L}_0 \leftarrow \hat{L}_0 - d$ *et* $\hat{T}_0 \leftarrow \hat{T}_0 - d$

Endwhile

Calculer la prévision $F_{n+h} = \hat{L}_n + h\hat{T}_n$

Lissage exponentiel Double – Exemple



Lissage exponentiel Triple - Principe

- C'est un modèle statistique adapté pour les séries avec tendance et saisonnalité :

$$y_t = \boldsymbol{L_t} + \boldsymbol{T_t} + \boldsymbol{S_t} + \varepsilon_t$$

Donc, $\forall t \in \{1, \dots, \mathrm{n}\}$:

- **Lissage du niveau :**

$$\boldsymbol{\hat{L}_t} = \alpha(\boldsymbol{y_t} - \boldsymbol{\hat{S}_{t-L}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\hat{L}_{t-1}} + \boldsymbol{\hat{T}_{t-1}})$$

- **Lissage de la tendance :**

$$\boldsymbol{\hat{T}_t} = \boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\hat{L}_t} - \boldsymbol{\hat{L}_{t-1}}\right) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\hat{T}_{t-1}}$$

- **Lissage de la saisonnalité :**

$$\boldsymbol{\hat{S}_t} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{y_t} - \boldsymbol{\hat{L}_{t-L}} - \boldsymbol{\hat{T}_{t-1}}) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\hat{S}_{t-L}}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in]0,1[$: paramètre de lissage du niveau, la tendance et la saisonnalité.

Les prévisions sont: $\forall t \in \{1, \dots, n\} \quad F_{t+1} = \hat{L}_t + h\hat{T}_t + \hat{S}_{t-s+h}$ et $F_1 = \hat{L}_0 + h\hat{T}_0 + \hat{S}_{1-s}$

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad F_{n+h} = \hat{L}_n + h\hat{T}_n + \hat{S}_{n-s+h}$$

Lissage exponentiel Triple – choix de $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \widehat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{0}})$

Il faut choisir $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \widehat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{0}})$ permettant de minimiser la somme des carrées des erreurs de prévision (SSE):

$$SSE = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} (y_t - \boldsymbol{F_t})^2 = \sum_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{n}} {e_t}^2$$

$$\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}, \widehat{\boldsymbol{L}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{0}}, \widehat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{0}}\} = \underset{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma} \in]0,1[}{\operatorname{argmin}} [\sum_{t=1}^{n} (y_t - (\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1} + \hat{S}_{t-s}))^2]$$

Lissage exponentiel Triple - Pseudocode

Inputs : *série temporelle* $(y_t)_t$ *, nombre des observations* n*, l'horizon* h.

Outputs : *les paramètres* $\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{L}_0, \hat{T}_0, \hat{S}_0\}$ *et la prévision* F_{n+h}

Initialisation de $\hat{L}_0 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2} + \cdots + \boldsymbol{y_s})$, $\hat{T}_0 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}}\left(\frac{\boldsymbol{y_{s+1} - y_1}}{\boldsymbol{s}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{y_{2s} - y_s}}{\boldsymbol{s}}\right)$, $\hat{S}_0 = y_s - \hat{L}_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ *et* $\gamma = \gamma_0$

while *(la précision n'est pas bonne)*

for $t = 1$ ***to*** n

Calculer $\hat{L}_t$, $\hat{T}_t$ *et* $\hat{S}_t$

endfor

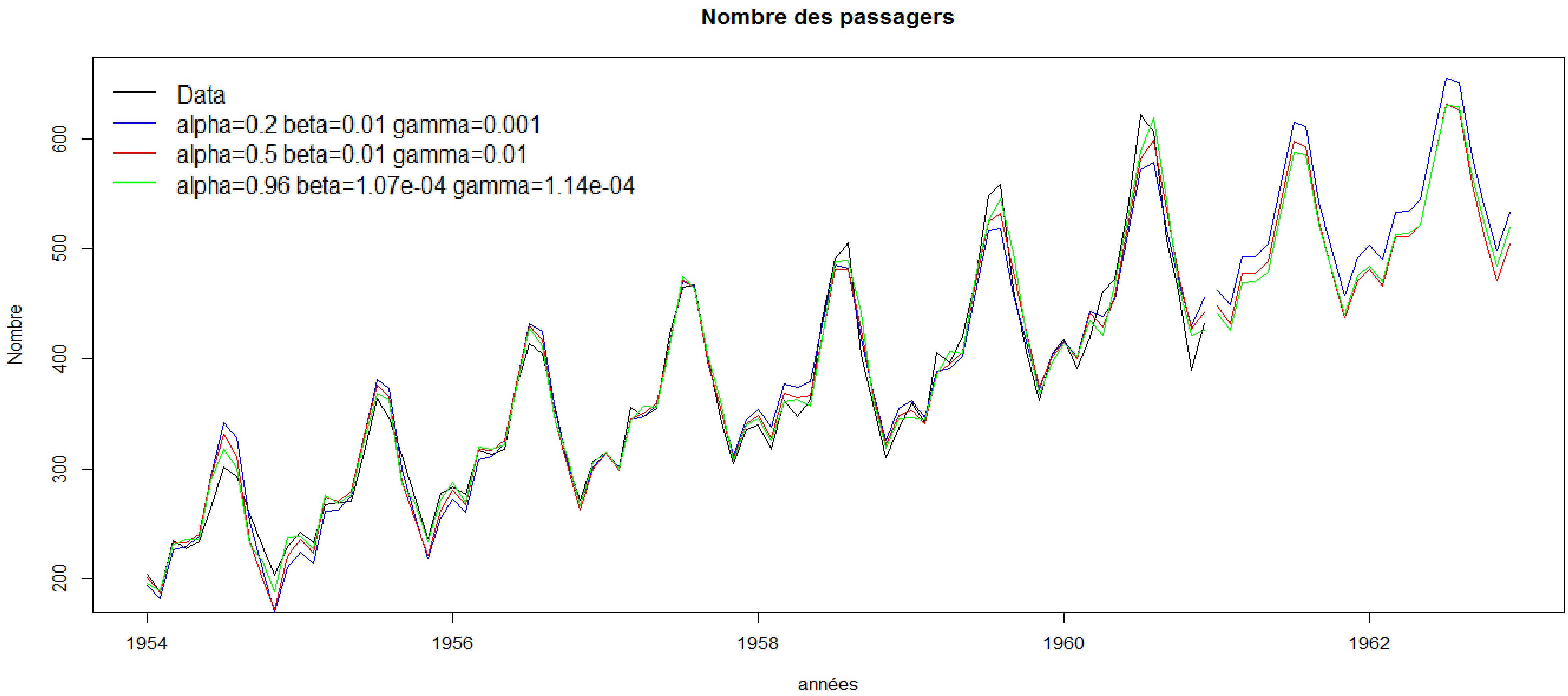
Calculer l'erreur $SSE = \sum_{t=1}^{n}(y_t - (\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1} + \hat{S}_{t-s}))^2$

Modifier les paramètres: $\alpha \leftarrow \alpha - d$, $\beta \leftarrow \beta - d$ **,** $\gamma \leftarrow \gamma - d$, $\hat{L}_0 \leftarrow \hat{L}_0 - d$, $\hat{T}_0 \leftarrow \hat{T}_0 - d$ ***et*** $\hat{S}_0 \leftarrow \hat{S}_0 - d$

Endwhile

Calculer la prévision $F_{n+h} = \hat{L}_n + h\hat{T}_n + \hat{S}_{n-s+h}$

Lissage exponentiel Triple – Exemple



Taxonomie du lissage exponentiel

		Tendance				
Saisonnalité		N	A	A_{am}	M	M_{am}
	N	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t + h\hat{T}_t$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t + \Phi_h\hat{T}_t$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^h$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^{\Phi_h}$
		$\hat{L}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \Phi\hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}.(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
			$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}) + (1-\beta).\Phi.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t/\hat{L}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t/\hat{L}_{t-1}) + (1-\beta).(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
		Brown	**Holt linéaire**	**Holt exponentiel**	**Gardner McKenzie**	**Taylor**

am=amortie

Taxonomie du lissage exponentiel

		Tendance				
		N	A	A_{am}	M	M_{am}
Saisonnalité	A	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t + S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = L_t + hT_t + S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t + \Phi_h \hat{T}_t + S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^h + S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^{\Phi_h} + S_{t-L+h}$
		$\hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-L}) + (1 - \alpha)\hat{L}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \Phi\hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-L}) + (1 - \alpha)\hat{L}_{t-1}.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t - \hat{S}_{t-L}) + (1 - \alpha)\hat{L}_{t-1}.(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
		$\hat{S}_t = \gamma(X_t - \hat{L}_{t-1}) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{T}_t = \beta\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta\left(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}\right) + (1-\beta).\Phi.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta\left(\hat{L}_t / \hat{L}_{t-1}\right) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta\left(\hat{L}_t / \hat{L}_{t-1}\right) + (1-\beta).(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
			$\hat{S}_t = \gamma(X_t - \hat{L}_{t-1} - \hat{T}_{t-1}) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma(X_t - \hat{L}_{t-1} - \Phi.\hat{T}_{t-1}) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma(X_t - \hat{L}_{t-1}.\hat{T}_{t-1}) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma(X_t - \hat{L}_{t-1}.(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}) + (1 - \gamma)\hat{S}_{t-L}$
			Holt-Winters additif			

Taxonomie du lissage exponentiel

		Tendance				
		N	A	A_{am}	M	M_{am}
Saisonnalité	M	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = (L_t + hT_t).S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = (\hat{L}_t + \Phi_h\hat{T}_t).S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^h.S_{t-L+h}$	$\hat{X}_{t+h/t} = \hat{L}_t.(\hat{T}_t)^{\Phi_h}.S_{t-L+h}$
		$\hat{L}_t = \alpha(X_t/\hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t/\hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1}+\hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t/\hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{L}_{t-1} + \Phi\hat{T}_{t-1})$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t/\hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{L}_t = \alpha(X_t/\hat{S}_{t-L}) + (1-\alpha)\hat{L}_{t-1}.(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
		$\hat{S}_t = \gamma(X_t/\hat{L}_{t-1}) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t - \hat{L}_{t-1}) + (1-\beta).\Phi.\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t/\hat{L}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1}$	$\hat{T}_t = \beta(\hat{L}_t/\hat{L}_{t-1}) + (1-\beta).(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}$
			$\hat{S}_t = \gamma X_t/(\hat{L}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma X_t/(\hat{L}_{t-1} + \Phi.\hat{T}_{t-1}) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma X_t/(\hat{L}_{t-1}.\hat{T}_{t-1}) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-L}$	$\hat{S}_t = \gamma X_t/(\widehat{L_{t-1}.(\hat{T}_{t-1})^{\Phi}}) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-L}$
			Holt-Winters multiplicatif			