

Elément de module: Séries Temporelles

- **Chapitre1 : Notions sur les Séries Temporelles.**
 1. Introduction aux séries temporelles
 2. Décomposition des séries temporelles
 3. Caractéristiques de la prédiction
- **Chapitre2 : Modèles déterministes (filtres).**
 1. Techniques du lissage simple
 2. Lissage exponentiel
- **Chapitre3 : Modèles stochastiques linéaires.**
 - MA - AR - ARMA - ARIMA
- **Chapitre4 : Modèles stochastiques non linéaires.**
 - ARCH - GARCH

Chapitre1 : Notions sur les Séries Temporelles.

1. Introduction aux séries temporelles
2. Décomposition des séries temporelles
3. Caractéristiques de la prédiction

1. Introduction aux séries temporelles

- Définition d'une série temporelle
- Les composantes de la série temporelle

Définition d'une série temporelle

Définition

- ❑ Une série temporelle (**série chronologique**) c'est une suite d'observations collectées dans le temps, qui suppose que le comportement du future dépend principalement du passé.
- ❑ Mathématiquement, on peut définir la série temporelle comme une suite de la forme $Y = (y_t)_{t \in \Theta}$, où y_t est l'observation de la variable Y à l'instant t et Θ l'espace de temps.
 - $t = 1$ c'est la première observation de la série $(y_t)_{t \in \Theta}$
 - $t = T$ c'est la dernière observation de la série $(y_t)_{t \in \Theta}$

But de la prédiction

Prévoir les valeurs futures de y_t .

Définition d'une série temporelle

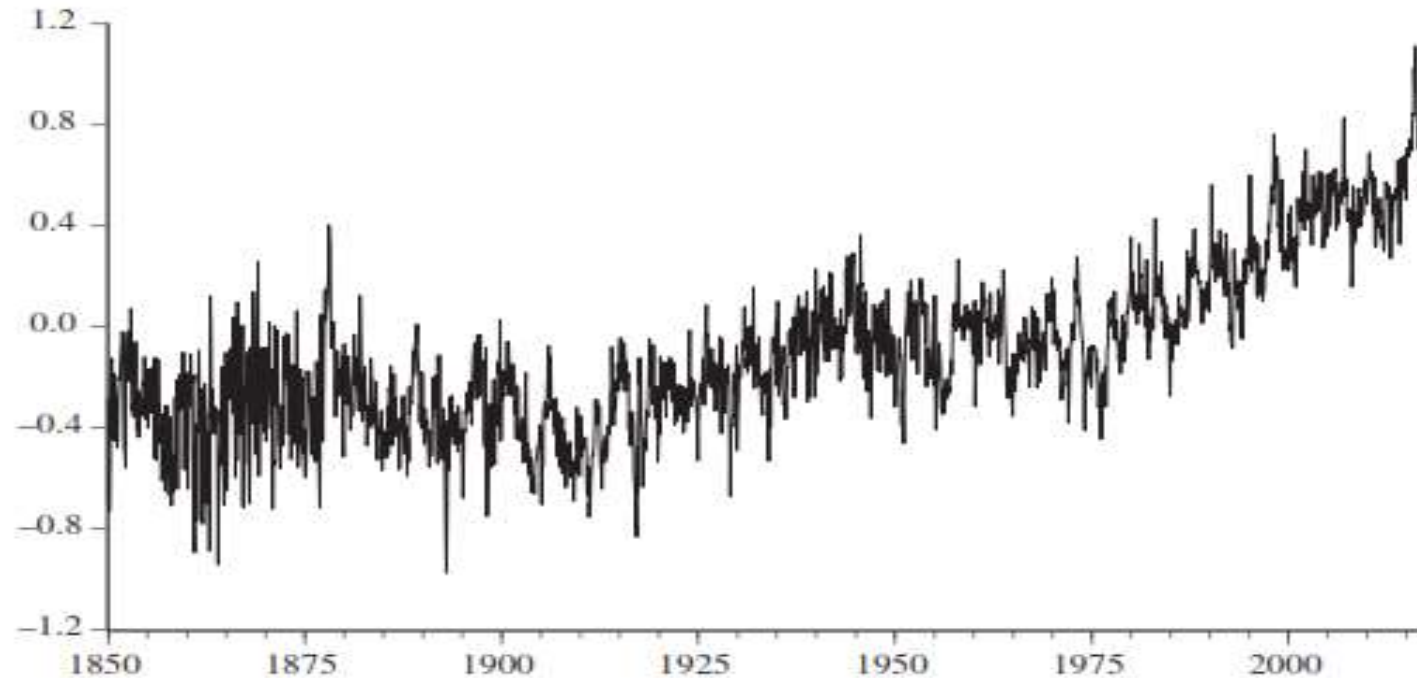
- ❑ Dans une séries temporelle, les observations sont mesurées à des intervalles de temps égaux.
- ❑ L'espace de temps Θ peut être discret ou continu:
 - Si $(t \in \mathbb{N}) : (y_t)_{t \in \Theta}$ est dite une série temporelle discrète.
Exemple: nombre de ventes, de voyages, de passagers...
 - Si $(t \in \mathbb{R}) : (y_t)_{t \in \Theta}$ est dite une série temporelle continue.
Exemple: signal radio, charge électrique, température...

Une série continue peut être discrétiser et transformée en une série discrète.

- ❑ Dans ce qui suit on suppose que $(y_t)_{t \in \Theta}$ est une série discrète et uni-variée.

Définition d'une série temporelle

□ Exemple d'une série temporelle à espace de temps discret: $(y_t \in \mathbb{R})$ et $(t \in \mathbb{N})$



La température globale entre 1850 et 2017.

Réf. Data from Met Office Hadley Centre for Climate Science and Services

Les composantes de la série temporelle

□ Une série temporelle peut être définie comme une combinaison des composantes suivantes : $y_t = (C1, C2, \dots) = (F1, F2, F3, \dots)$

- La composante Niveau L_t ($T_t = \text{cte}$)
- La composante Tendance T_t
- La composante Saisonnalité S_t
- La composante Cycle
- La composante Effet Calendrier
- La composante bruit (la composante irrégulière) ε_t

La composante Niveau L_t

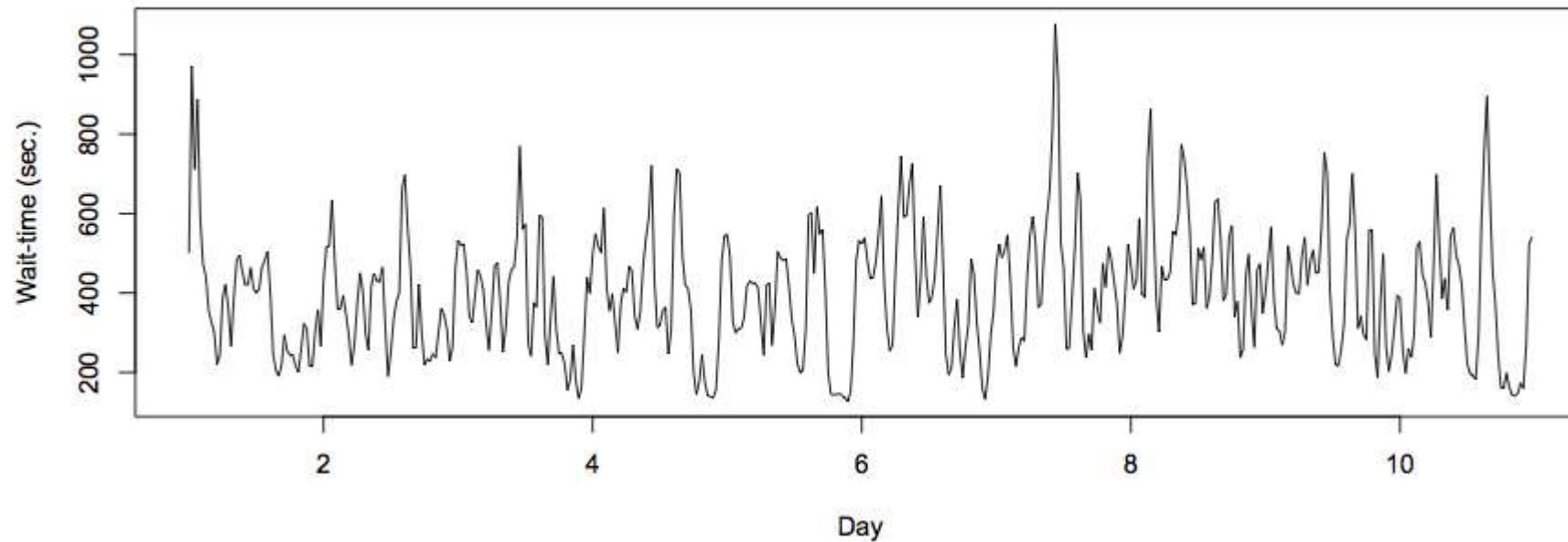
- ❑ C'est une évolution à long terme des données, elle est caractérisée par de petites fluctuations de faibles amplitudes autour d'une moyenne constante.
- ❑ Le niveau peut être exprimée par:

$$L_t = \mu = \bar{Y}$$

- La composante niveau décrit le cas d'un processus stable dans le temps (sans tendance, sans saisonnalité).

Exemple

❖ Cette figure présente le temps d'attente par jour,



✓ Le processus est constant dans le temps.

La composante Tendance T_t

- ❑ C'est une évolution à long terme des données, elle peut être croissante ou décroissante.
- ❑ La tendance peut être exprimée comme une combinaison linéaire des fonctions de temps :

$$T_t = \sum_{i=0}^m \beta_i f_i(t)$$

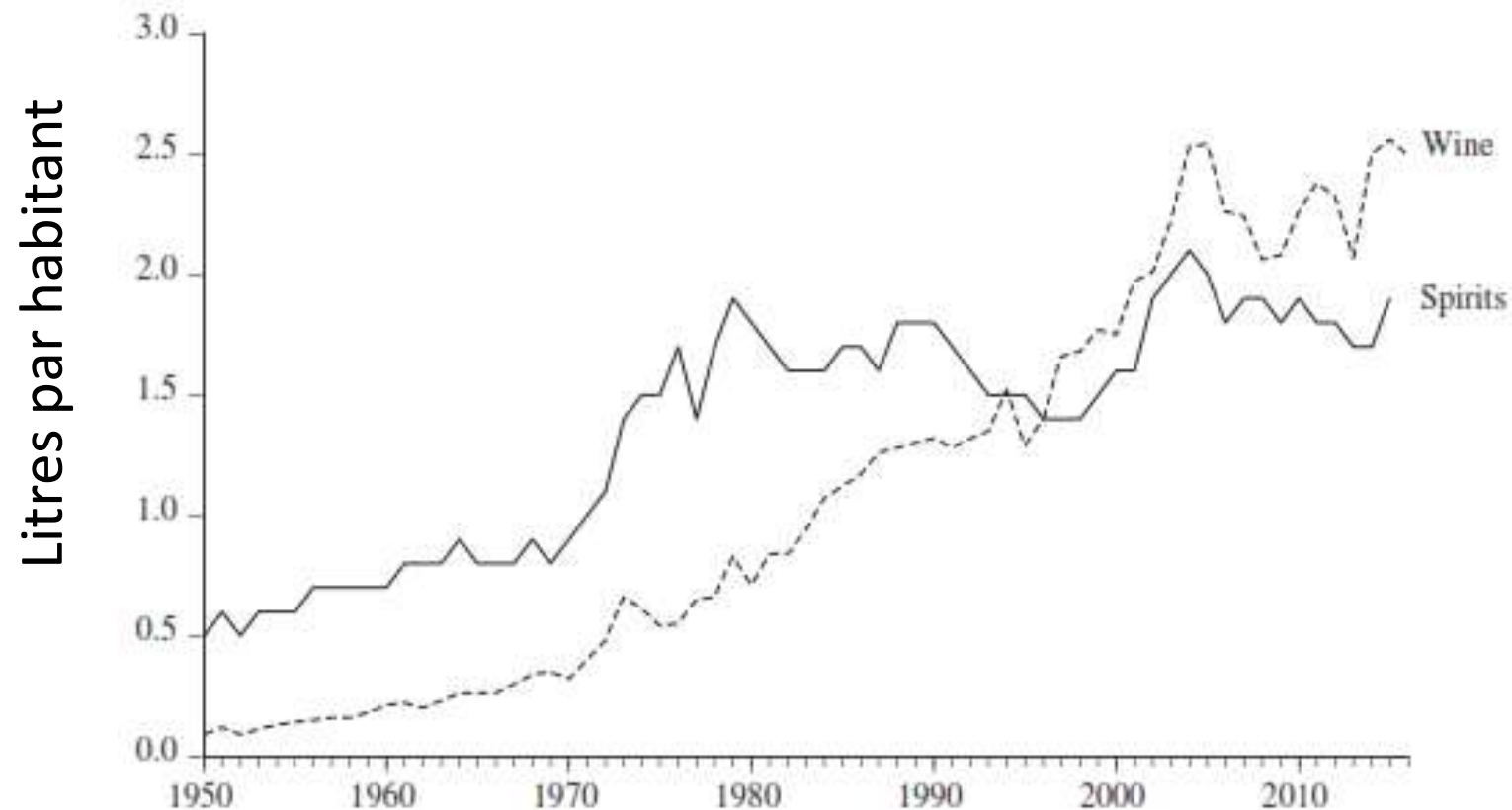
- ❑ Il existe plusieurs types de tendances :

- Tendance Linéaire : $T_t = \beta_0 + \beta_1 t$
- Tendance Exponentielle : $T_t = \beta_0 \exp(t)$
- Tendance Quadratique : $T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

Exemple

- La consommation annuelle de l'alcool au Royaume-Uni entre 1950 et 2015

Réf. Data from: www.adelaide.edu.au/wine-econ/databases



La composante Saisonnalité S_t

- ❑ C'est un **phénomène régulier** dans le temps où les données manifestent des fluctuations qui se répètent à des périodes fixes et connues.
- ❑ Ce phénomène montre que la série est influencée par des facteurs saisonniers (trimestre, mois, semaine, jour).

On a alors :

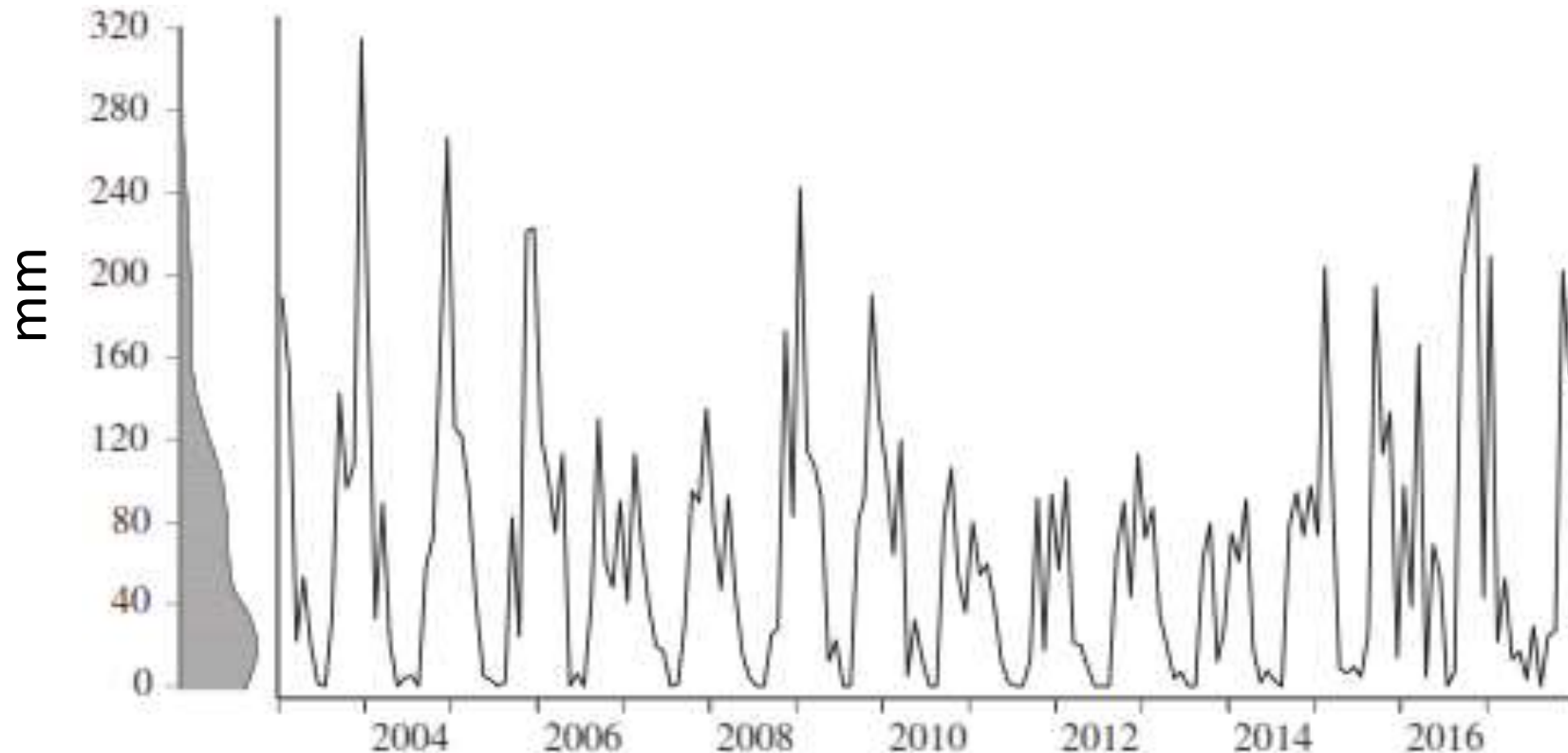
$$\forall s ; S_{t+s} = S_t$$

avec s la saison (période).

Exemple

Les précipitations mensuelles dans l'île grecque de Céphalonie entre 2003 et 2017.

Réf. Data from Personal communication.

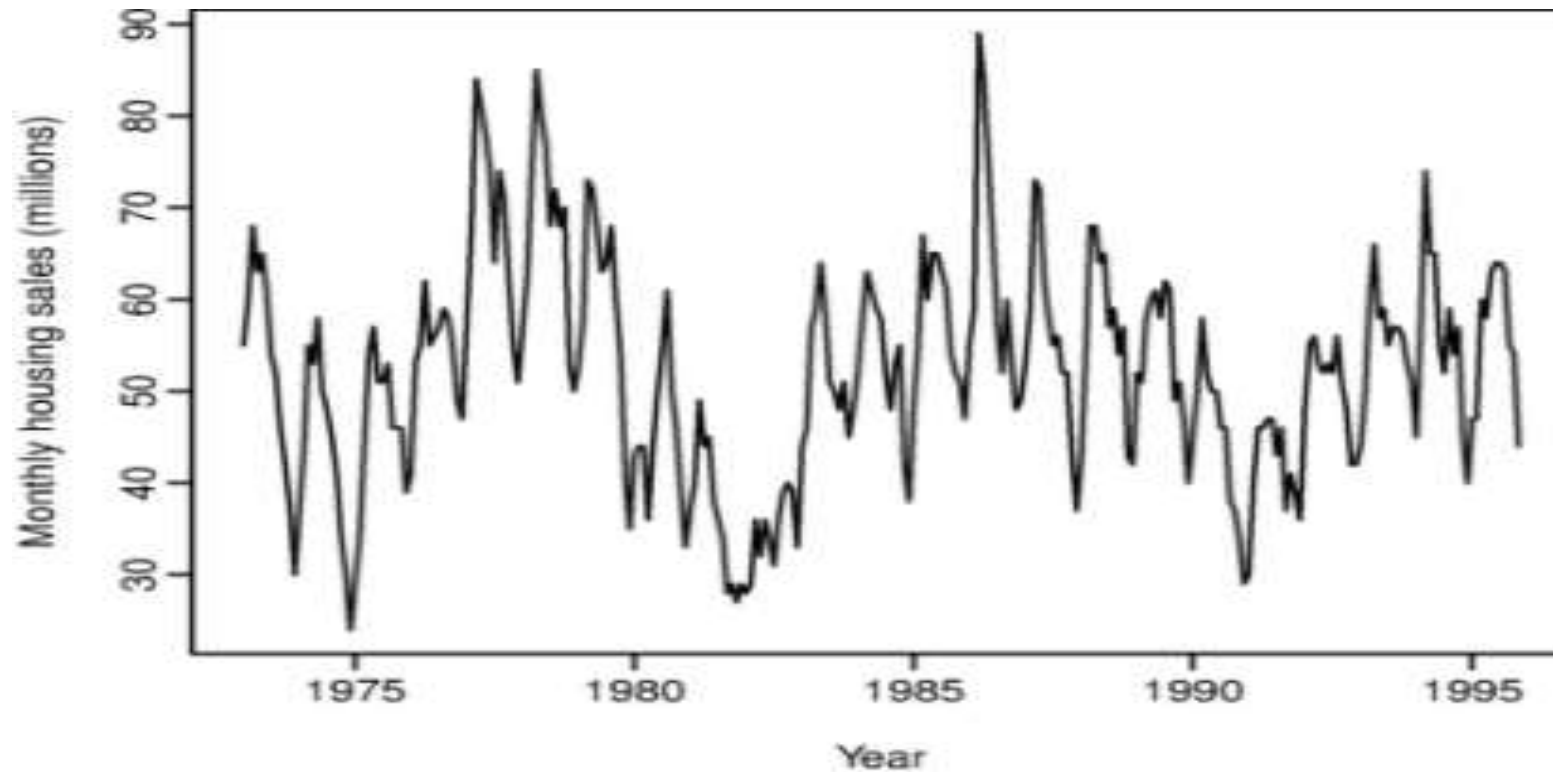


La composante Cycle

- ❑ C'est un **phénomène irrégulier** dans le temps où les données manifestent des fluctuations (des hauts et des bas) qui ne sont pas fixes périodiquement.
- La durée de la composante cycle est plus grande que celle de la composante saisonnalité.
- **L'ampleur de la composante cycle** varie beaucoup par rapport à la saisonnalité.
- Généralement, on intègre la composante cycle dans la tendance et on l'appelle composante **tendance-cycle**.

Exemple

Cette figure présente les ventes mensuelles des maisons.



- ✓ Elle montre une forte saisonnalité chaque année, et aussi un comportement cyclique très fort pendant une période de 6-10 ans. Il n'y a pas de tendance dans ce cas.

La composante Effet Calendrier

- ❑ Elle présente des fluctuations qui varient selon des événements liées au calendrier dont la valeur (date) qui change d'une unité (année, mois) à une autre.
- ❑ Elle fait partie de la composante saisonnière.
- ❑ Les événements calendrier peuvent être :
 - **Les fêtes mobiles** : sont des fêtes ayant des dates qui varient d'une année à une autre par rapport au calendrier grégorien ou islamique.
 - **Les jours ouvrables** : sont des jours qui varient d'une façon mensuelle et annuelle.

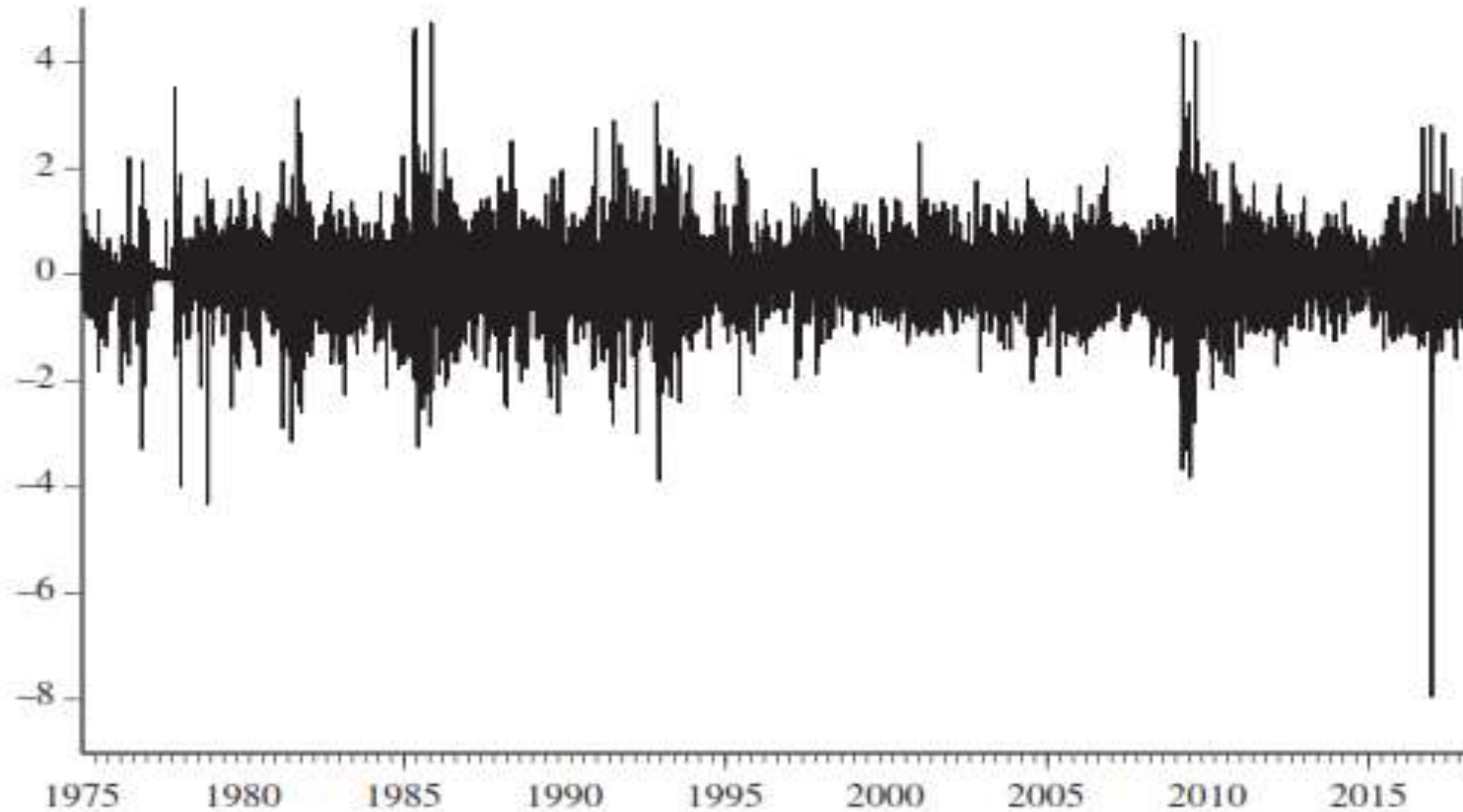
Exemple: les ventes des climatiseurs.

La composante bruit (la composante irrégulière) ε_t

- ❑ Ce sont des fluctuations aléatoires et imprévisibles qui s'avèrent être causées par des événements indépendants de la tendance et de la saisonnalité.
- ❑ Ces fluctuations sont causées par des événements imprévisibles dans le temps:
 - Les inondations.
 - Les guerres.
 - Les grèves.
 - Les élections.
 - L'adoption de lois ...
 - COVID 19

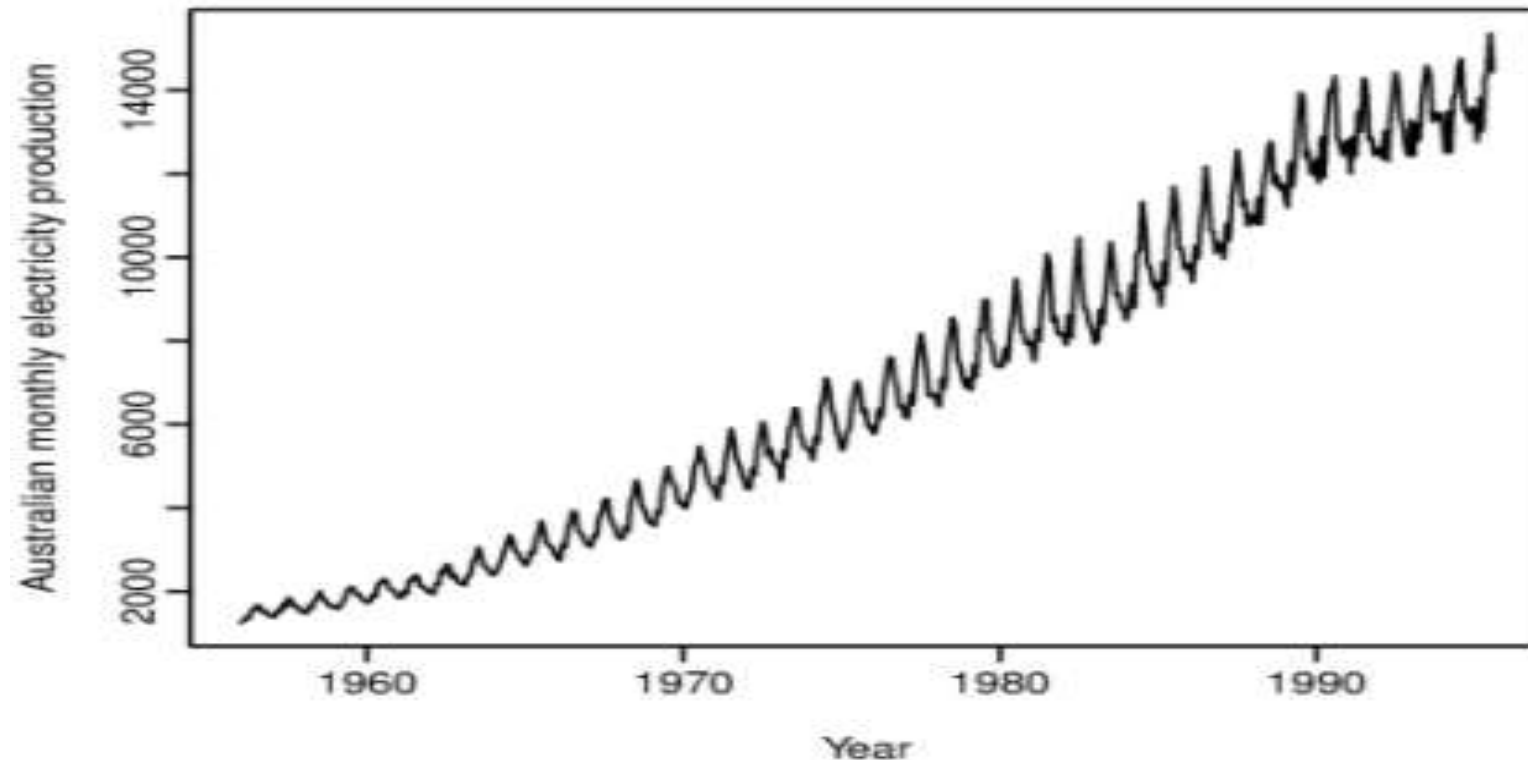
Exemple

Le pourcentage du changement quotidien dans le taux de change en \$-£.



Exemple

Cette figure présente la production électrique mensuelle en Australie.



Quelles sont les composantes de cette série?

2. Décomposition des séries temporelles

- Types de décompositions
- Méthodes d'identification des types de décompositions

Types de décompositions

- ❑ **La décomposition additive** est utilisée lorsque la tendance et la saisonnalité sont linéaire.

$$y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

- ❑ **La décomposition multiplicative** est utilisée lorsque la tendance et/ou la saisonnalité sont non linéaires.

$$y_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t$$

Remarque:

Une décomposition multiplicative peut se transformer en une décomposition additive en passant par une transformation logarithmique.

Méthodes d'identification des types de décompositions

Méthode graphique (méthode de la bande) :

Cette méthode est basée sur une analyse visuelle, on trace deux courbes, l'une passe par le minimum de chaque période et l'autre passe par le maximum de chaque période.

- Si les deux courbes sont parallèles (bande de largeur constante): la décomposition est dite additive.
- Si les deux courbes ne sont pas parallèles (bande de largeur variable) : la décomposition est dite multiplicative.

Méthodes d'identification des types de décompositions

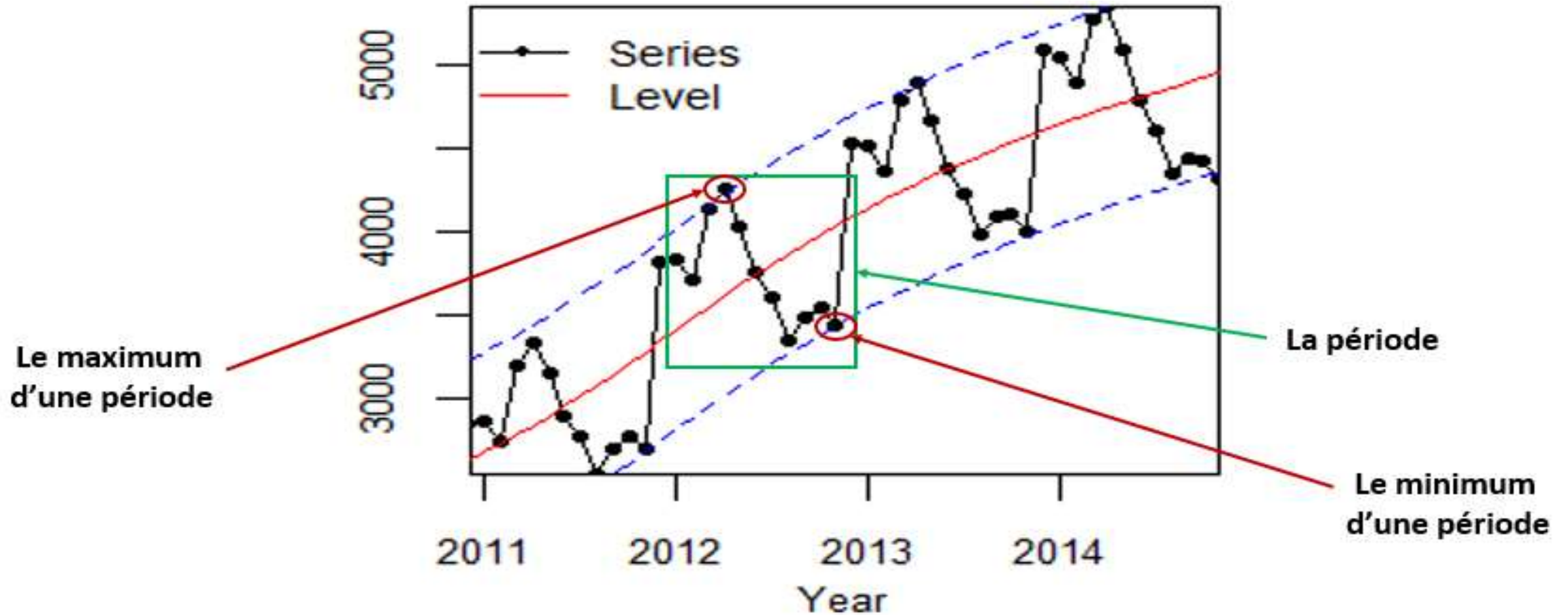


Figure: Les ventes d'un produit

Méthodes d'identification des types de décompositions

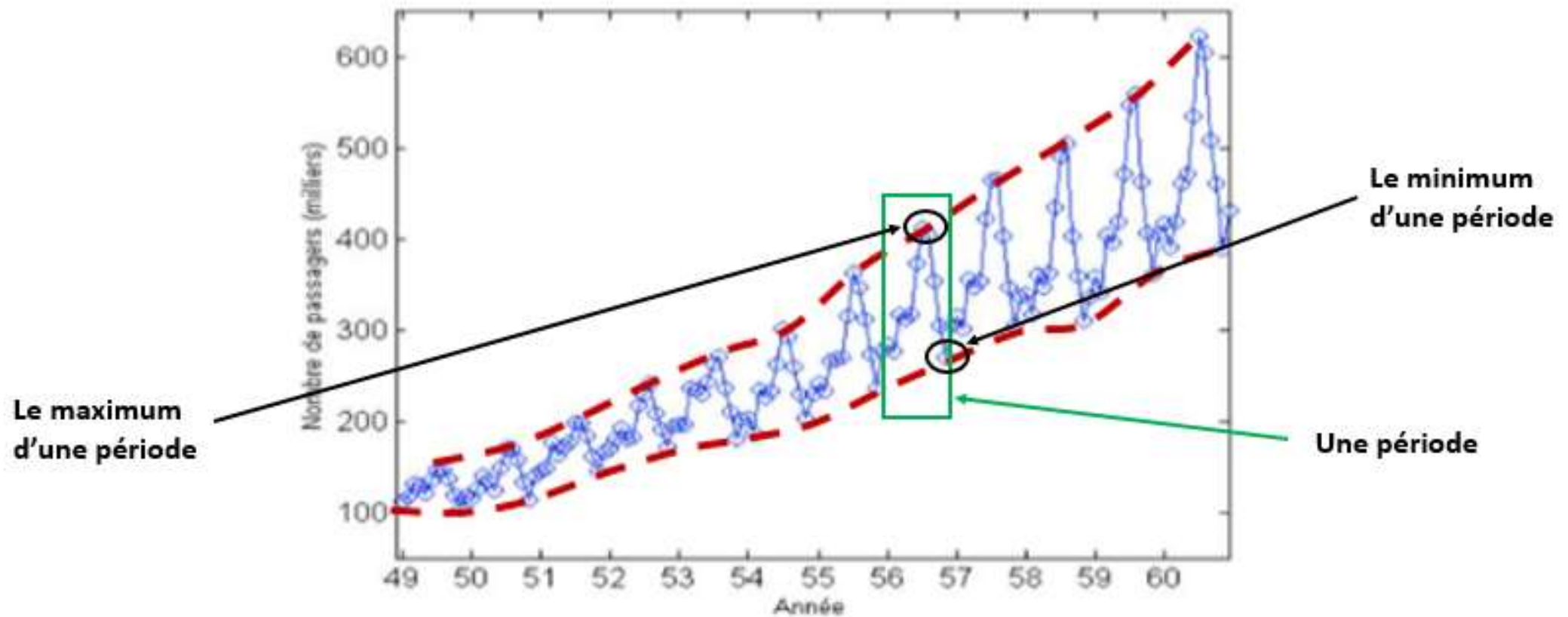


Figure: Le trafic aérien international

Méthodes d'identification des types de décompositions

Méthode analytique :

Cette méthode est basée sur le calcul de la moyenne et de l'écart type pour chaque période :

- Si $\forall s$ on a $\sigma_s = a\bar{y}_s + b$ alors la décomposition est multiplicative.
- Si $\forall s$ on a $\sigma_s = cte = b$ alors la décomposition est additive.

Tels que:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (y_t - \bar{y}_s)^2} \quad \text{et} \quad \bar{y}_s = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s y_t$$

s c'est la période.

Exercice

Le tableau ci-dessous donne les valeurs trimestrielles de la consommation d'un produit A dans la région Fès-Meknès pour la période 2016-2019.

1. Tracer la série temporelle.
2. Donner la nature de cette série en utilisant la méthode graphique puis vérifier là en utilisant la méthode analytique.
3. Donner la décomposition de la série

Années	Trimestres				
	Trim. 1	Trim. 2	Trim. 3	Trim. 4	Moy. Annuelle
2016	3,8	7,7	8,6	4,4	6,125
2017	4,3	7,5	8,8	4,6	6,3
2018	4,5	7,2	8,5	4	6,05
2019	4	7,8	9,2	4,6	6,4

3. Les caractéristiques de la prédiction

- Caractéristiques de prédictions
- Types de prédictions
- Erreur de la prédiction

Natures de prédictions

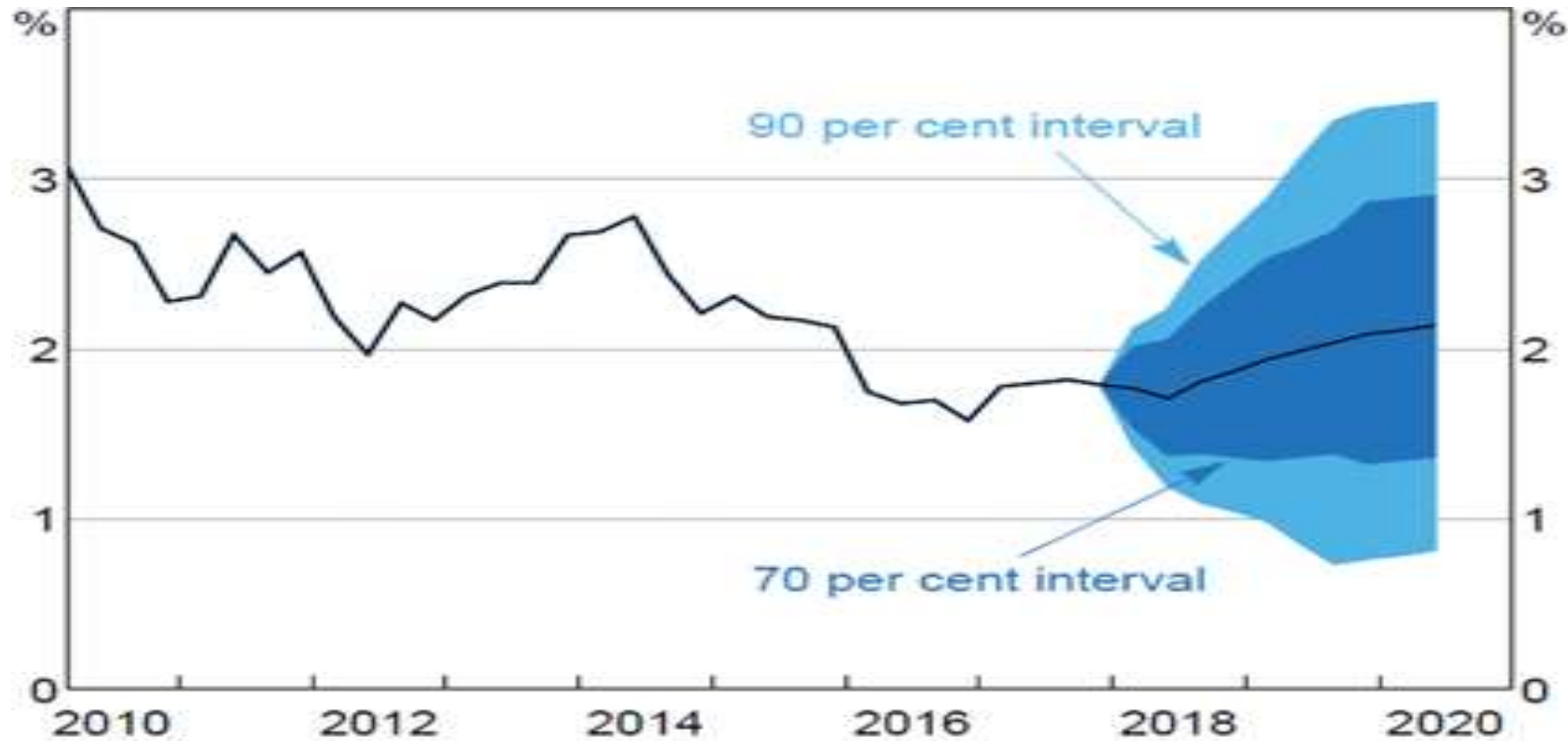
- **Point de prédictions** : Le point de prédiction est une valeur unique qui représente notre meilleure estimation de la valeur d'intérêt au futur.
- **Intervalle de prédictions** :
 - L'intervalle de prédiction (IP) est une plage de valeurs susceptibles de contenir une valeur future d'une observation individuelle.
 - Le IP est très significatif pour la prise de décision qu'un seul point de prédiction.
 - Chaque modèle possède une démarche permettant d'obtenir l'intervalle de prédiction.
- **Niveau de prédictions** : C'est la fréquence avec laquelle de nouvelles prédictions sont préparées.
- **Horizon de prédictions** : C'est la différence entre la date actuelle et la date de la prédiction. Il est souvent dicté par la nature du problème.

Exemple

Pour la planification de la production, on peut prévoir la demande avec une projection de 3 mois dans le futur et préparer une nouvelle prévision chaque mois.

- Déterminer le niveau de prédictions?
- Déterminer l'horizon de prédictions?

Exemple: Prédiction du taux d'inflation



Types de prédictions

Les problèmes de prédiction sont toujours classés selon trois échelles :

- **Prédiction à court terme** : inclue des prédictions qui s'étendent à plusieurs jours, semaines ou mois dans le futur.
- **Prédiction à moyen terme** : inclue des prédictions qui s'étendent de 1 à 2 années dans le futur.
- **Prédiction à long terme** : inclue des prédictions qui s'étendent à plusieurs années dans le futur.

Remarque:

Les prédictions à court terme sont généralement plus précises que celles à long terme.

Erreur de la prédiction

Elle permet de mesurer la différence entre le réel et ce qui est prévu.

L'objectif de la prédiction est de minimiser cette erreur pour cela il faut définir des métriques pour la mesurer:

- \hat{y}_i les valeurs prévues,
- y_i les valeurs observées.
- n le nombre d'observations.

Erreur quadratique moyenne :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

Elle permet de mesurer la performance du modèle par rapport aux valeurs d'ordre supérieur.

Erreur de la prédiction

Erreur de prédiction moyenne absolue/ Amplitude moyenne de l'erreur:

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n}$$

Elle permet de mesurer la performance du modèle par rapport aux valeurs d'ordre inférieur.

Pourcentage d'erreur de la prédiction moyenne :

$$\text{MPE}(\%) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right) * 100$$

Elle permet de montrer si les résultats des modèles présentent une sous-prédiction ($\text{MPE} < 0$) ou une sur-prédiction ($\text{MPE} > 0$) .

Erreur de la prédiction

Coefficient d'efficacité:

$$CE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}$$

Il permet de tester si la performance du modèle est meilleure que la moyenne ou non.