ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
MÉTODOS NUMÉRICOS

Leandro Bravo GR1CC

Tarea 08 - Mínimos Cuadrados

Para la resolución de esta tarea se considera que el polinomio de grado m que se desea ajustar a n puntos tiene la siguiente forma: $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m$.
Al aplicar el ajuste de mínimos cuadrados y derivar $P(x)$ para cada coeficiente c_i con $i \in [0, m]$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de forma matricial: $Ac = b$.

Donde $A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n (x_i)^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n (x_i)^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n (x_i)^2 & \sum_{i=1}^n (x_i)^3 & \cdots & \sum_{i=1}^n (x_i)^{m+1} \\ \sum_{i=1}^n (x_i)^2 & \sum_{i=1}^n (x_i)^3 & \sum_{i=1}^n (x_i)^4 & \cdots & \sum_{i=1}^n (x_i)^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (x_i)^m & \sum_{i=1}^n (x_i)^{m+1} & \sum_{i=1}^n (x_i)^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^n (x_i)^{m+m} \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_ix_i \\ \sum_{i=1}^n y_i(x_i)^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i(x_i)^m \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$

Y para conocer los coeficientes calculamos $c = A^{-1}b$

Conjunto de Ejercicios

1. Dados los datos:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	130.11	113.18	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

a. Construya el polinomio por mínimo cuadrados de grado 1 y calcule el error.
b. Construya el polinomio por mínimo cuadrados de grado 2 y calcule el error.
c. Construya el polinomio por mínimo cuadrados de grado 3 y calcule el error.
d. Construya el polinomio por mínimo cuadrados de la forma be^{ax} y calcule el error.
e. Construya el polinomio por mínimo cuadrados de la forma bx^a y calcule el error.

```python
%load_ext autoreload
import numpy as np
import sympy as sym

xi_1 = [4.0, 4.2, 4.5, 4.7, 5.1, 5.5, 5.9, 6.3, 6.8, 7.1]
yi_1 =[102.56, 130.11, 113.18, 142.05, 167.53, 195.14, 224.87, 256.73, 299.50, 326.72
```

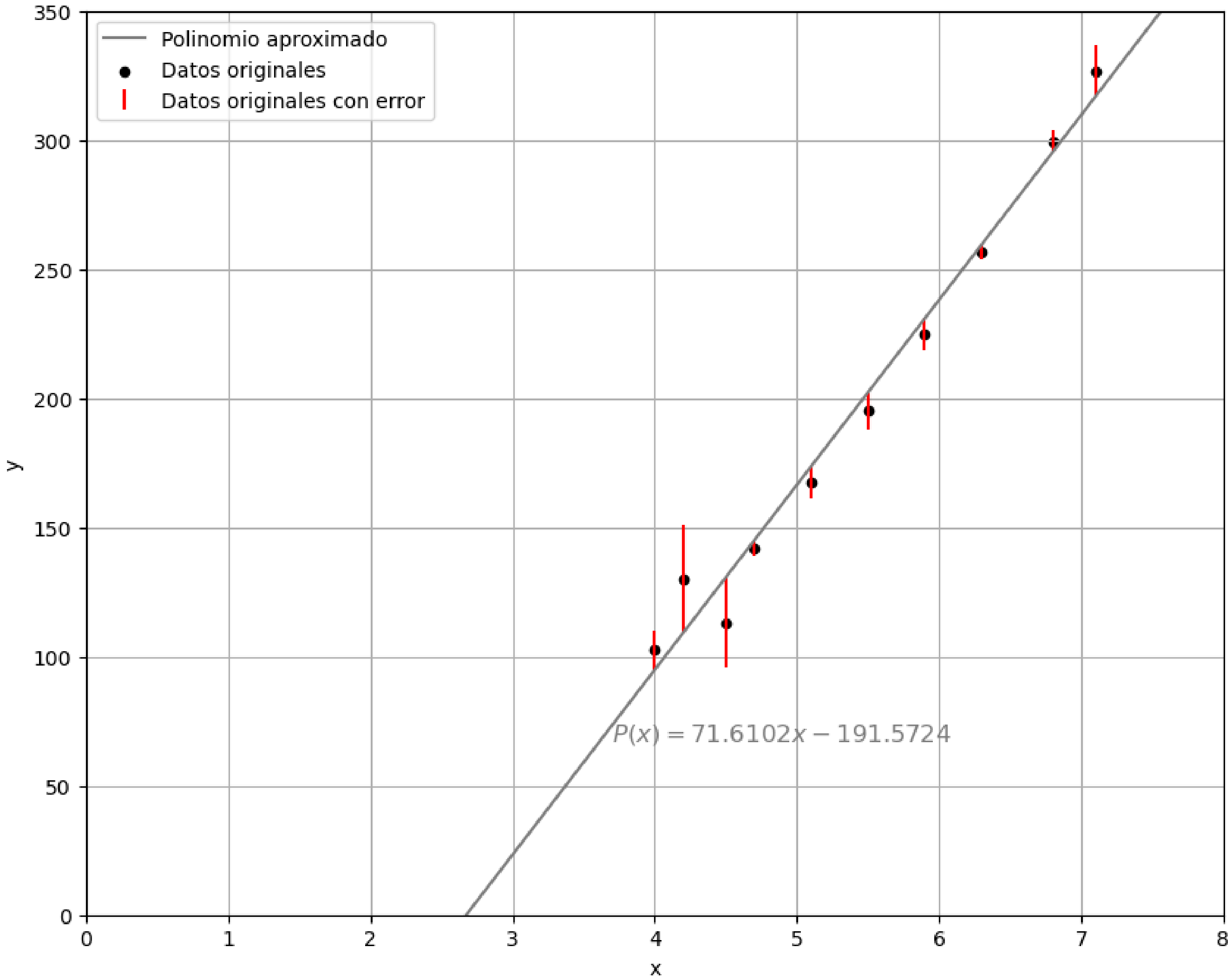
```python
xi_lin_1 = np.log(xi_1)
yi_lin_1 = np.log(yi_1)
```

a. Con grado 1:

```python
%autoreload 2
from src1 import minimosCuadrados, hallarCoef, graficar

a,b = minimosCuadrados(len(xi_1),1,xi_1,yi_1)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_1,yi_1,c,'grey',[0, 8],[0, 350],3.7,65,10)
```

```
Matriz A:
 [       10.0000        54.1000 ]
 [       54.1000       303.3900 ]
Vector b:
 [     1958.3900 ]
 [    11361.7640 ]
Coeficientes del polinomio:
 [     -191.5724 ]
 [       71.6102 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 7.6916
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 20.91956
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 17.4935
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 2.94554
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 6.10962
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 7.1437
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 6.05778
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 2.84186
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 4.12304
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 9.85998
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 105.883889
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$71.6102x - 191.5724$$



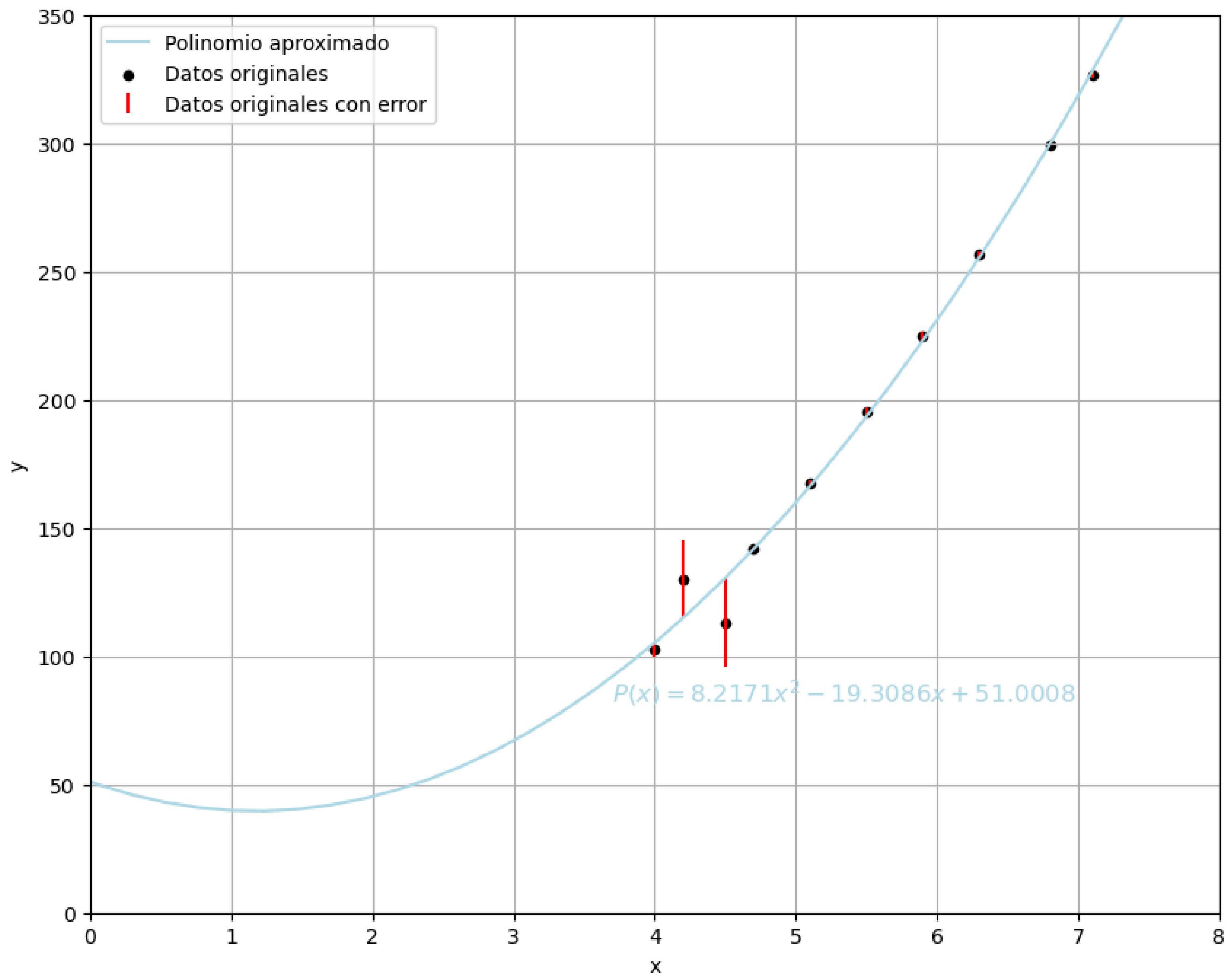
b. Con grado 2:

```
%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi_1),2,xi_1,yi_1)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_1,yi_1,c,'lightblue',[0, 8],[0, 350],3.7,80,10)
```

```
Matriz A:
 [       10.0000        54.1000       303.3900 ]
 [       54.1000       303.3900      1759.8310 ]
 [      303.3900      1759.8310     10523.1207 ]
Vector b:
 [     1958.3900 ]
 [    11361.7640 ]
 [    67962.4938 ]
Coeficientes del polinomio:
 [       51.0008 ]
 [      -19.3086 ]
 [        8.2171 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 2.68
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 15.255676
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 17.328375
```

```
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.283881
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 1.276289
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 1.769225
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 1.752689
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 1.236681
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 0.161024
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 1.413751
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 55.165621
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$8.2171x^2 - 19.3086x + 51.0008$



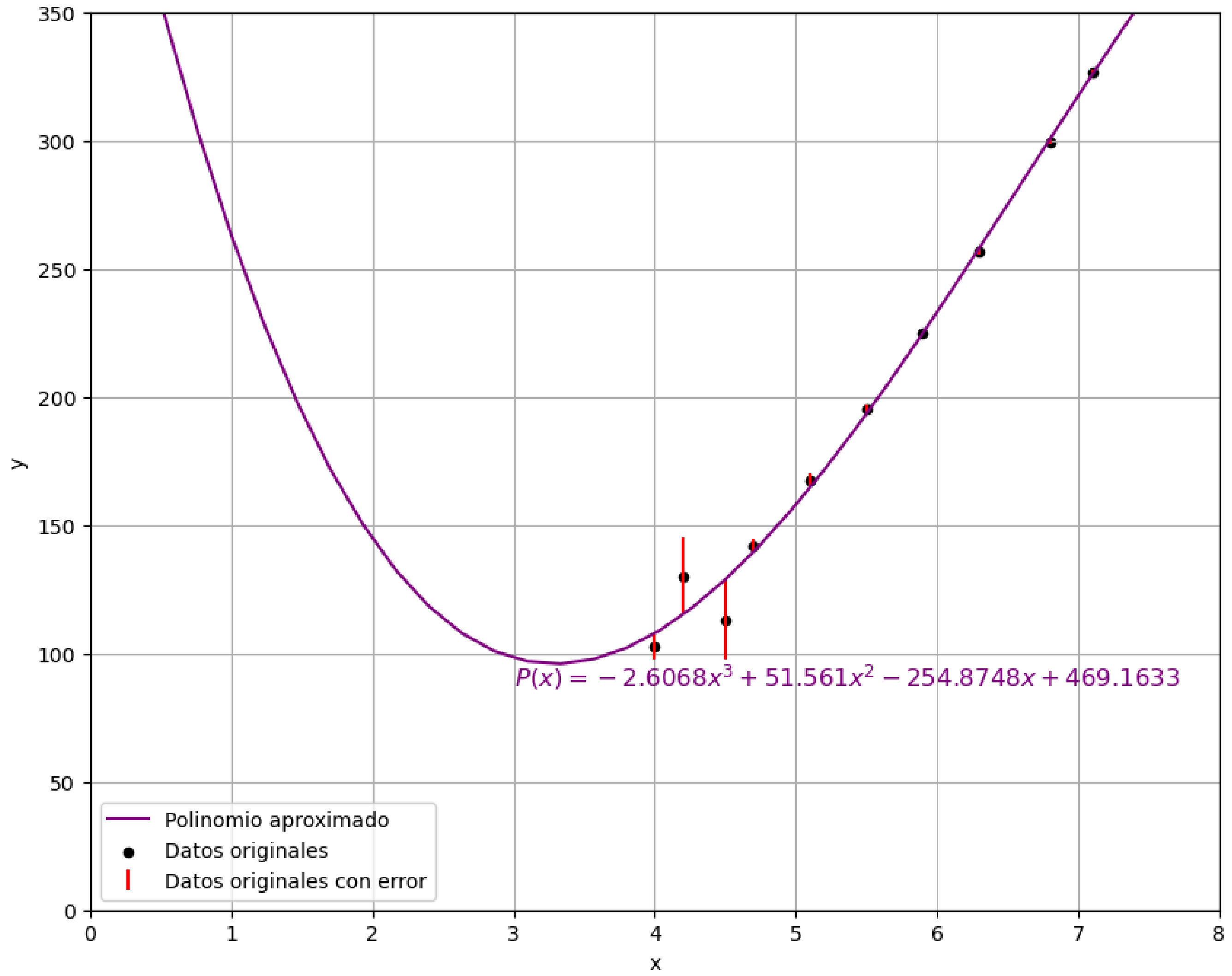
c. Con grado 3:

```
%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi_1),3,xi_1,yi_1)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_1,yi_1,c,'purple',[0, 8],[0, 350],3,85,10)
```

```
Matriz A:
 [        10.0000         54.1000        303.3900       1759.8310 ]
 [        54.1000        303.3900       1759.8310      10523.1207 ]
 [       303.3900       1759.8310      10523.1207      64607.9775 ]
 [      1759.8310      10523.1207      64607.9775     405616.7435 ]
```

```
Vector b:
 [     1958.3900 ]
 [    11361.7640 ]
 [    67962.4938 ]
 [   417441.6618 ]
Coeficientes del polinomio:
 [      469.1633 ]
 [     -254.8748 ]
 [       51.5610 ]
 [       -2.6068 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 5.2449
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 15.017418
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 15.6123
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 2.461566
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 2.921197
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 1.7742
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.011587
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 1.35563
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 1.033962
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 0.980165
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 51.83839
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$-2.6068x^3 + 51.561x^2 - 254.8748x + 469.1633$$



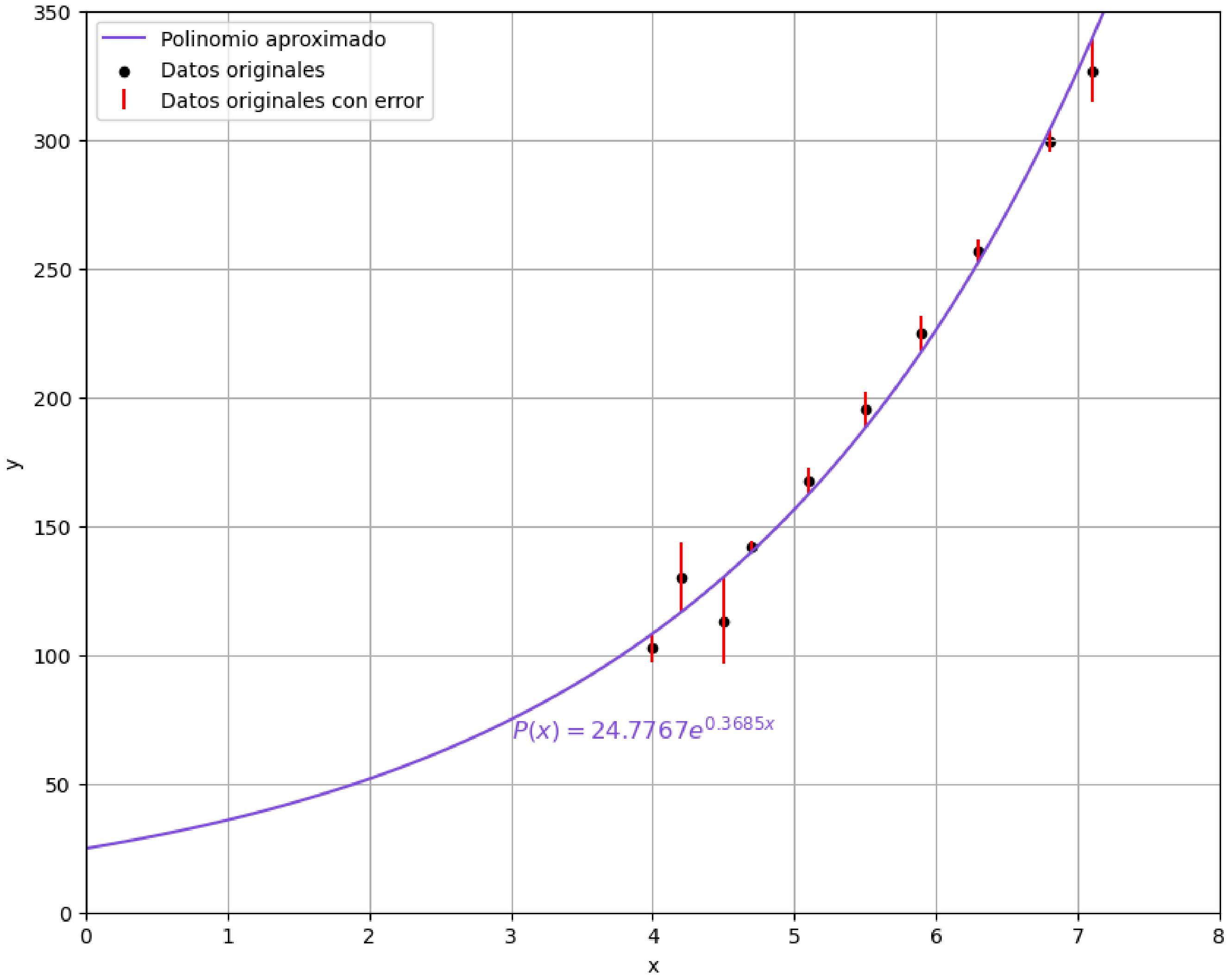
d. De la forma be^{ax}:

Para este caso, primero linealizamos la expresión obteniendo:
$ln(y) = ln(b * e^{ax}) \rightarrow ln(y) = ln(b) + ax$. De aquí se puede observar que $a_0 = ln(b)$ y que $a_1 = a$.

```
%autoreload 2
from src1 import graficarNoLineales, expOriginal

A,b = minimosCuadrados(len(xi_1),1,xi_1,yi_lin_1)
c = hallarCoef(A,b)
f_x = expOriginal(c,True)
graficarNoLineales(xi_1,yi_1,f_x,'#7E4BDE',[0,8],[0,350],3,65,5)
```

```
Matriz A:
 [       10.0000        54.1000 ]
 [       54.1000       303.3900 ]
Vector b:
 [       52.0336 ]
 [      285.4480 ]
Coeficientes del polinomio:
 [        3.2099 ]
 [        0.3685 ]
Con los coeficientes asociados al polinomio linealizado hallamos los coeficientes de nuestra
 expresión:

a = 0.368476623831711  y b = 24.776723697835532



El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 5.631596
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 13.643498
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 16.900527
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 2.020419
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 5.261285
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 7.10019
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 6.966197
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 4.219282
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 4.097769
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 12.365977
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 82.17
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$24.7767e^{0.3685x}$$



e. De la forma bx^a:

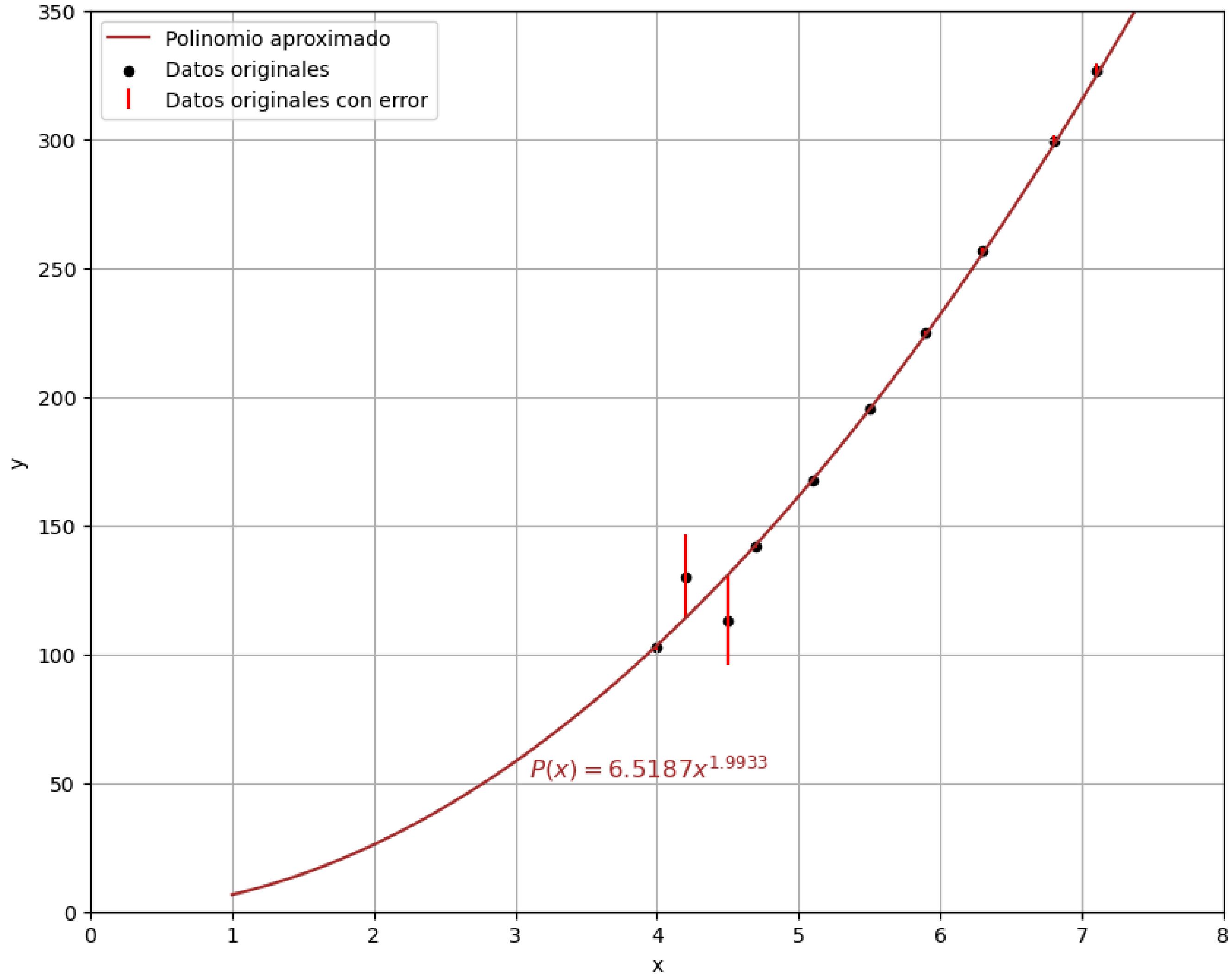
Para este caso, primero linealizamos la expresión obteniendo:
$ln(y) = ln(b * x^a) \rightarrow ln(y) = ln(b) + aln(x) \rightarrow y' = b' + ax'$. De aquí se puede observar que $a_0 = b' = ln(b)$, $a_1 = a$, $y' = ln(y)$ y $x' = ln(x)$.

```
%autoreload 2

A,b = minimosCuadrados(len(xi_1),1,xi_lin_1,yi_lin_1)
c = hallarCoef(A,b)
f_x = expOriginal(c,False)
graficarNoLineales(xi_1,yi_1,f_x,'brown',[0,8],[0,350],3.1,50,3)
```

```
Matriz A:
 [       10.0000        16.6995 ]
 [       16.6995        28.2537 ]
Vector b:
 [       52.0336 ]
 [       87.6238 ]
Coeficientes del polinomio:
 [        1.8747 ]
 [        1.9933 ]
Con los coeficientes asociados al polinomio linealizado hallamos los coeficientes de nuestra
 expresión:
```

```
a = 1.9932845789479074  y b = 6.518682345785391


El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.774936
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 16.220469
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 17.500112
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.462728
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.180644
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.188786
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.636596
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 1.173747
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 1.92187
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 2.399604
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 58.15
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$6.5187x^{1.9933}$



2. Repita los literales del ejercicio 1 para los siguientes datos.

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

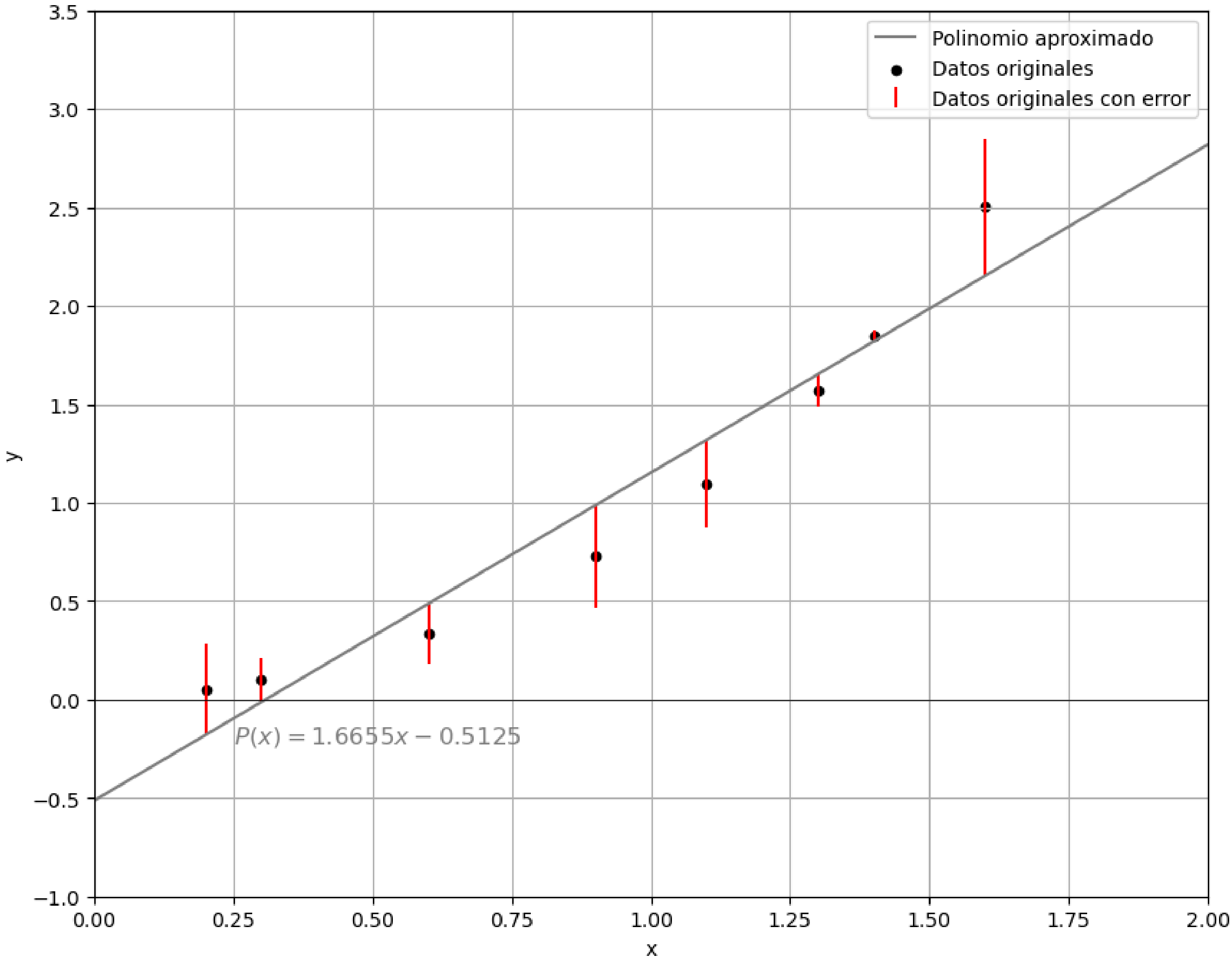
```python
xi_2 = [0.2, 0.3, 0.6, 0.9, 1.1, 1.3, 1.4, 1.6]
yi_2 =[0.050446,0.098426,0.33277,0.72660,1.0972,1.5697,1.8487,2.5015]
xi_lin_2 = np.log(xi_2)
yi_lin_2 = np.log(yi_2)
```

a. Con grado 1:

```python
%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi_2),1,xi_2,yi_2)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_2,yi_2,c,'grey',[0, 2],[-1, 3.5],0.25,-0.25,10)
```

```
Matriz A:
 [        8.0000          7.4000 ]
 [        7.4000          8.7200 ]
Vector b:
 [        8.2253 ]
 [       10.7313 ]
Coeficientes del polinomio:
 [       -0.5125 ]
 [        1.6655 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.229846
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.111276
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.15403
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.25985
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.22235
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.08295
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.0295
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.3492
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.041949
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$1.6655x - 0.5125$$



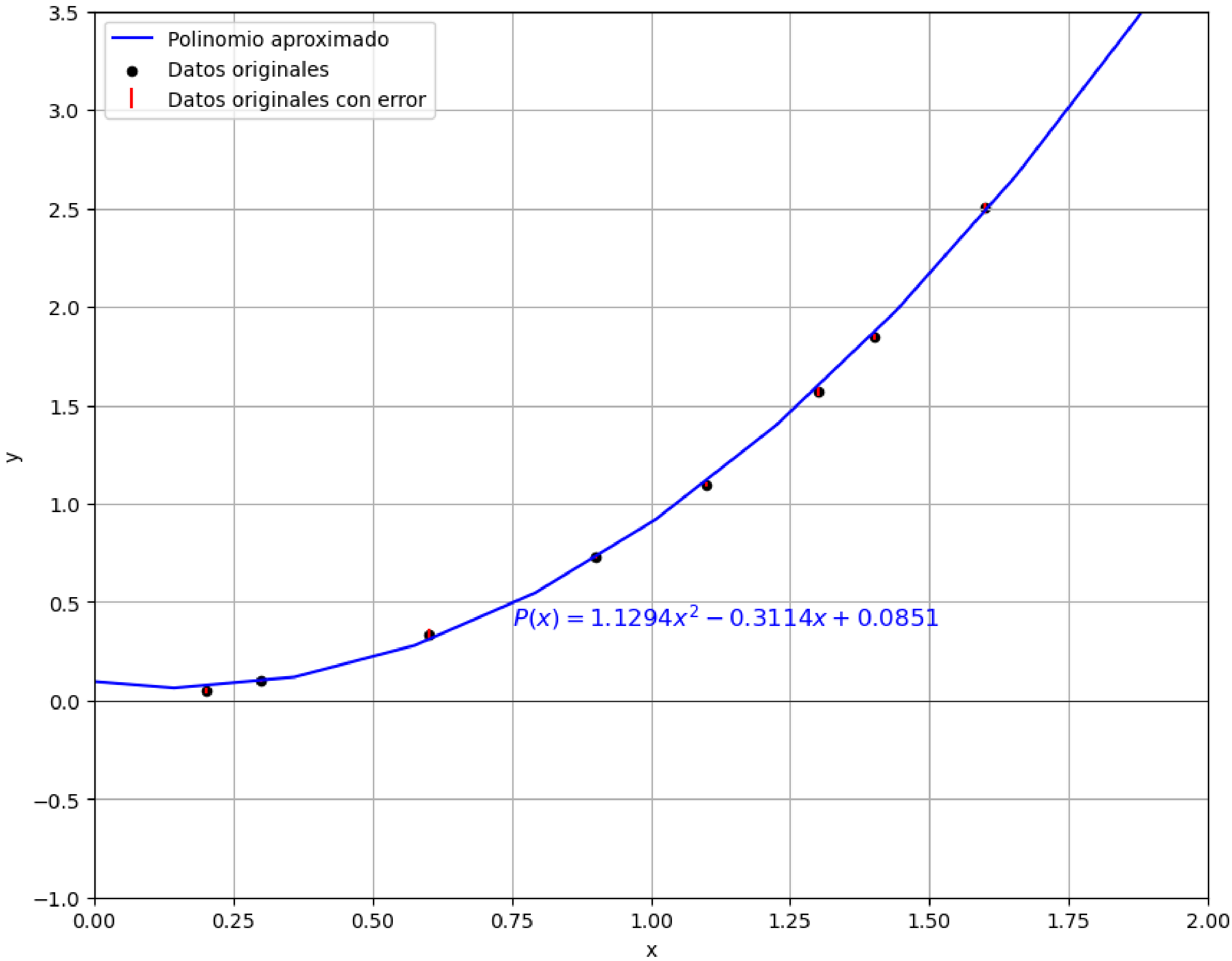
b. Con grado 2:

```
%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi_2),2,xi_2,yi_2)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_2,yi_2,c,'blue',[0, 2],[-1, 3.5],0.75,0.35,10)
```

```
Matriz A:
 [        8.0000         7.4000         8.7200 ]
 [        7.4000         8.7200        11.3480 ]
 [        8.7200        11.3480        15.5108 ]
Vector b:
 [        8.2253 ]
 [       10.7313 ]
 [       14.7269 ]
Coeficientes del polinomio:
 [        0.0851 ]
 [       -0.3114 ]
 [        1.1294 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.01755
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.0051
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.027926
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.006946
```

```
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.011934
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.019266
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.014064
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.023376
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.000302
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$1.1294x^2 - 0.3114x + 0.0851$$



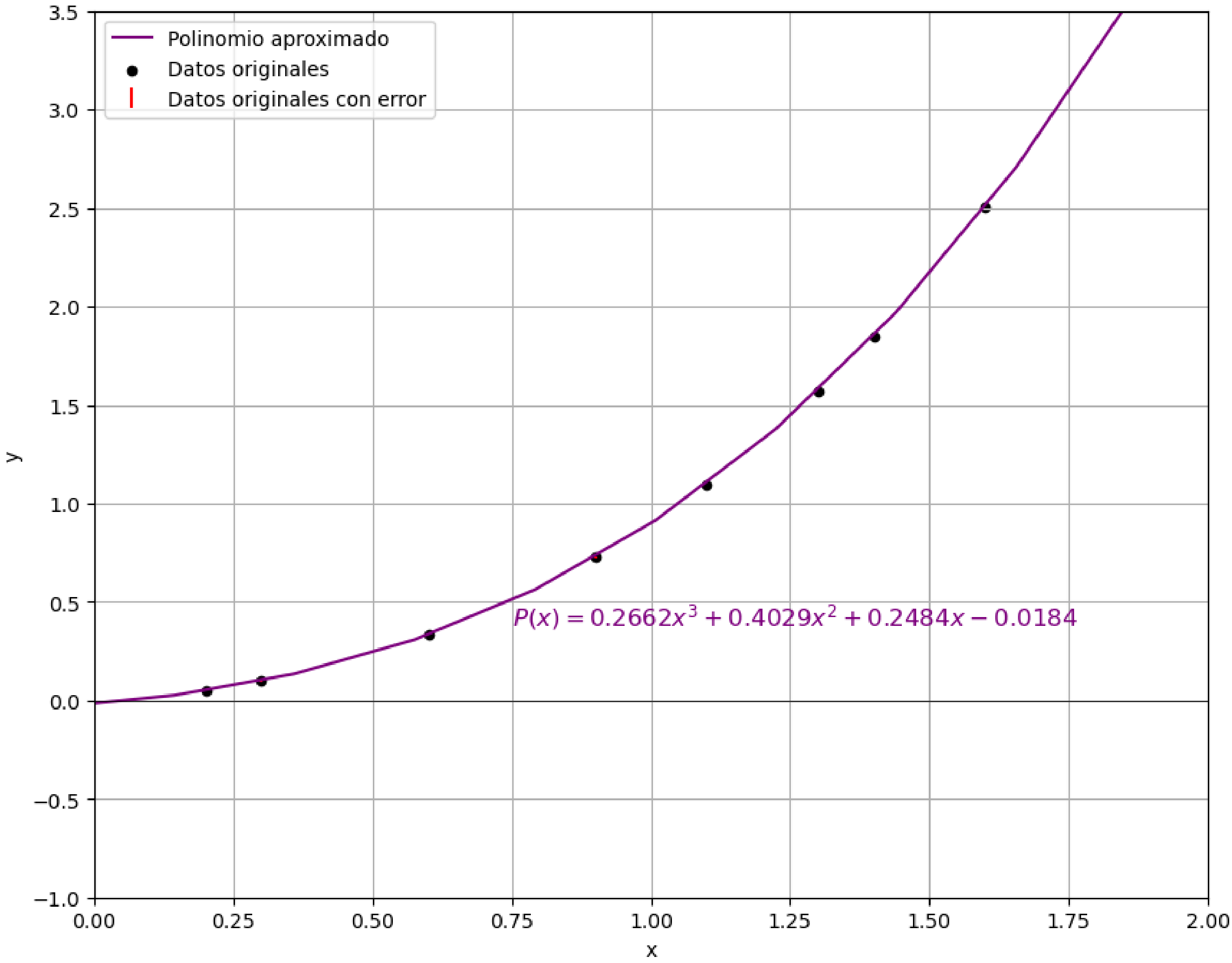
c. Con grado 3:

```
%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi_2),3,xi_2,yi_2)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(xi_2,yi_2,c,'purple',[0, 2],[-1, 3.5],0.75,0.35,10)
```

```
Matriz A:
 [        8.0000         7.4000         8.7200        11.3480 ]
 [        7.4000         8.7200        11.3480        15.5108 ]
 [        8.7200        11.3480        15.5108        21.8584 ]
 [       11.3480        15.5108        21.8584        31.4840 ]
Vector b:
 [        8.2253 ]
 [       10.7313 ]
 [       14.7269 ]
```

```
 [        20.8326 ]
Coeficientes del polinomio:
 [        -0.0184 ]
 [         0.2484 ]
 [         0.4029 ]
 [         0.2662 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.00092
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.001142
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.000413
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.001031
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.000539
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.000562
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.000797
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.000681
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 1e-06
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$0.2662x^3 + 0.4029x^2 + 0.2484x - 0.0184$$



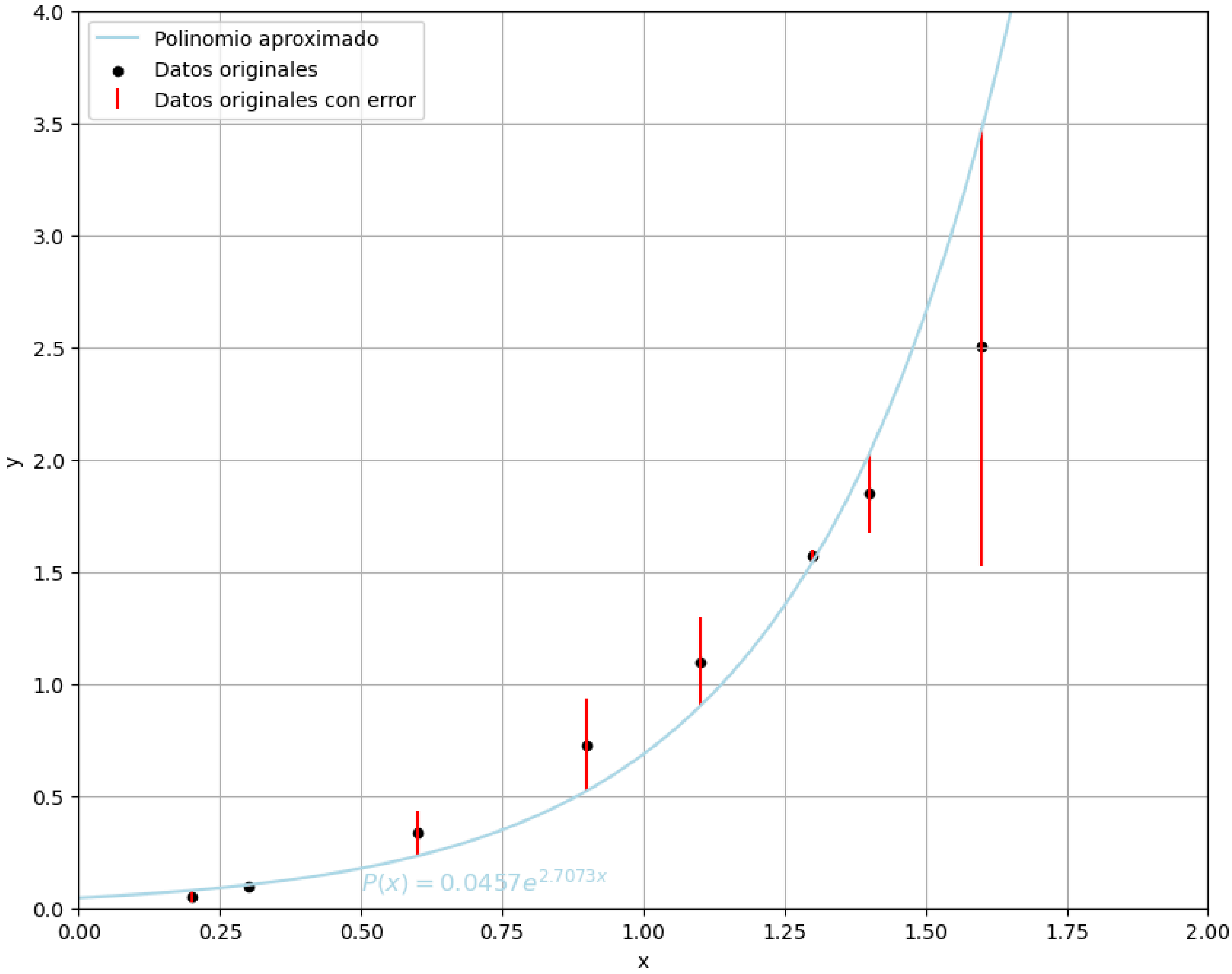
d. De la forma be^{ax}

```
%autoreload 2
from src1 import graficarNoLineales, expOriginal

A,b = minimosCuadrados(len(xi_2),1,xi_2,yi_lin_2)
```

```
        c = hallarCoef(A,b)
        f_x = expOriginal(c,True)
        graficarNoLineales(xi_2,yi_2,f_x,'lightblue',[0,2],[0,4],0.5,0.05,1)
```

```
Matriz A:
 [        8.0000         7.4000 ]
 [        7.4000         8.7200 ]
Vector b:
 [       -4.6500 ]
 [        0.7750 ]
Coeficientes del polinomio:
 [       -3.0855 ]
 [        2.7073 ]
Con los coeficientes asociados al polinomio linealizado hallamos los coeficientes de nuestra
 expresión:

a = 2.707294686913418  y b = 0.04570748069533027



El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.02809
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.004529
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.10083
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.204077
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.199238
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.026539
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.174262
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.974989
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.13
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$0.0457e^{2.7073x}$



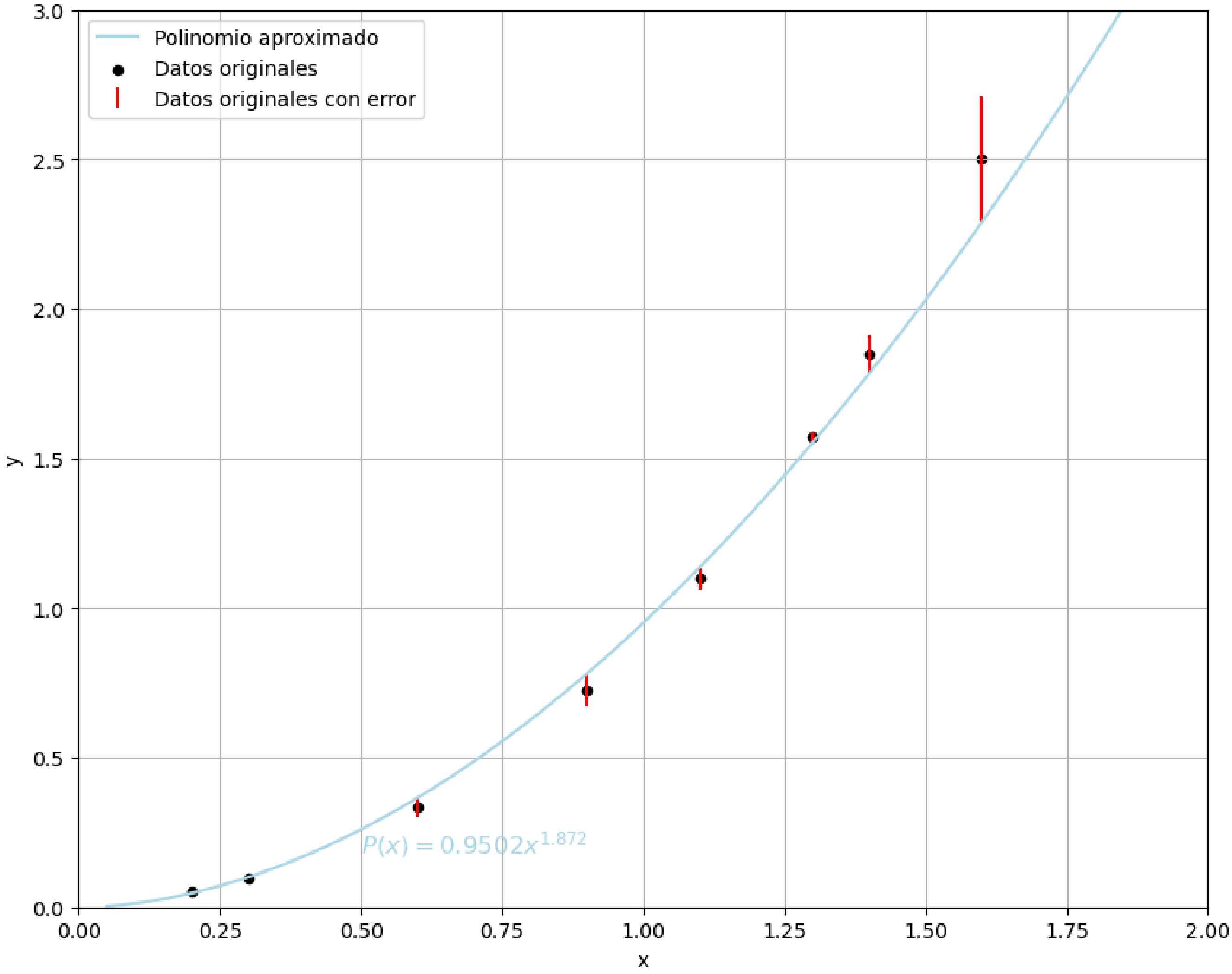
e. De la forma bx^a:

```
%autoreload 2

A,b = minimosCuadrados(len(xi_2),1,xi_lin_2,yi_lin_2)
c = hallarCoef(A,b)
f_x = expOriginal(c,False)
graficarNoLineales(xi_2,yi_2,f_x,'lightblue',[0,2],[0,3],0.5,0.16,0.15)
```

```
Matriz A:
 [        8.0000        -2.2654 ]
 [       -2.2654         4.7239 ]
Vector b:
 [       -4.6500 ]
 [        8.9591 ]
Coeficientes del polinomio:
 [       -0.0511 ]
 [        1.8720 ]
Con los coeficientes asociados al polinomio linealizado hallamos los coeficientes de nuestra
 expresión:

a = 1.8720092843265204  y b = 0.9501564755920617
```

```
El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.003743
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.001341
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.032416
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.053512
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.038601
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.016895
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.064816
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.211014
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.01
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$0.9502x^{1.872}$$



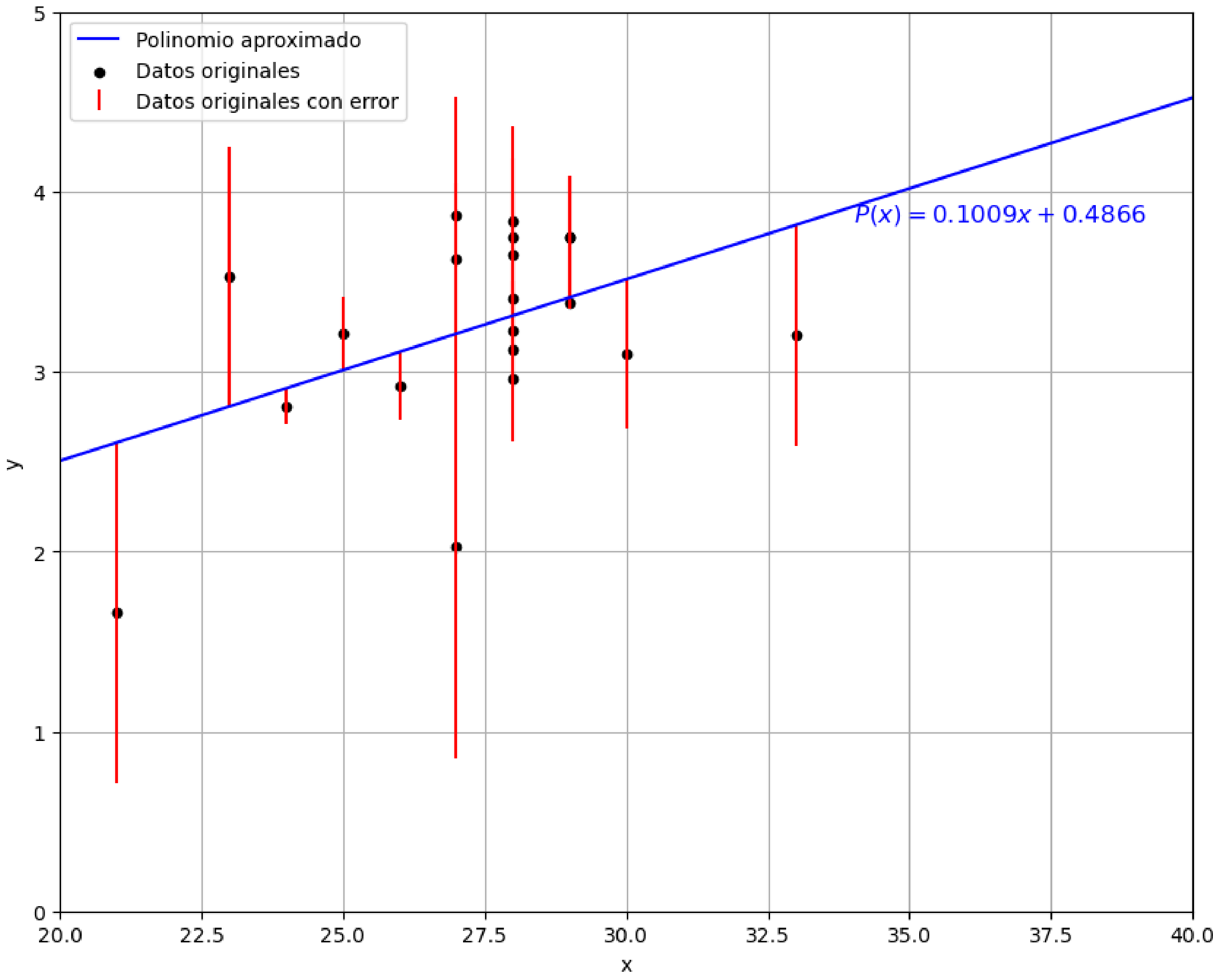
3. La siguiente tabla muestra los promedios de puntos del colegio de 20 especialistas en matemáticas y ciencias computacionales, junto con las calificaciones que recibieron estos estudiantes en la parte de matemáticas de la prueba ACT (Programa de Pruebas de Colegios Americanos) mientras estaban en secundaria. Grafique estos datos y encuentre la ecuación de la recta por mínimos cuadrados para estos datos.

Puntuación ACT	Promedio de puntos	Puntuación ACT	Promedio de puntos
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

```
PACT = [28,25,28,27,28,33,28,29,23,27,29,28,27,29,21,28,28,26,30,24]
PDP = [3.84,3.21,3.23,3.63,3.75,3.20,3.41,3.38,3.53,2.03,3.75,3.65,
       3.87,3.75,1.66,3.12,2.96,2.92,3.10,2.81]

%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(PACT),1,PACT,PDP)
c = hallarCoef(a,b)
graficar(PACT,PDP,c,'blue',[20,40],[0, 5],34,3.80,10)
```

```
Matriz A:
 [       20.0000       546.0000 ]
 [      546.0000     15034.0000 ]
Vector b:
 [       64.8000 ]
 [     1781.9700 ]
Coeficientes del polinomio:
 [        0.4866 ]
 [        0.1009 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.5282
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.2009
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.0818
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.4191
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.4382
El error absoluto de f(x_6) al punto x_6 es de 0.6163
El error absoluto de f(x_7) al punto x_7 es de 0.0982
El error absoluto de f(x_8) al punto x_8 es de 0.0327
El error absoluto de f(x_9) al punto x_9 es de 0.7227
El error absoluto de f(x_10) al punto x_10 es de 1.1809
El error absoluto de f(x_11) al punto x_11 es de 0.3373
El error absoluto de f(x_12) al punto x_12 es de 0.3382
El error absoluto de f(x_13) al punto x_13 es de 0.6591
El error absoluto de f(x_14) al punto x_14 es de 0.3373
El error absoluto de f(x_15) al punto x_15 es de 0.9455
El error absoluto de f(x_16) al punto x_16 es de 0.1918
El error absoluto de f(x_17) al punto x_17 es de 0.3518
El error absoluto de f(x_18) al punto x_18 es de 0.19
El error absoluto de f(x_19) al punto x_19 es de 0.4136
El error absoluto de f(x_20) al punto x_20 es de 0.0982
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.252437
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$0.1009x + 0.4866$



4. El siguiente conjunto de datos, presentado al Subcomité Antimonopolio del Senado, muestra las características comparativas de supervivencia durante un choque de automóviles de diferentes clases. Encuentre la recta por mínimos cuadrados que aproxima estos datos (la tabla muestra el porcentaje de vehículos que participaron en un accidente en los que la lesión más grave fue fatal o seria).

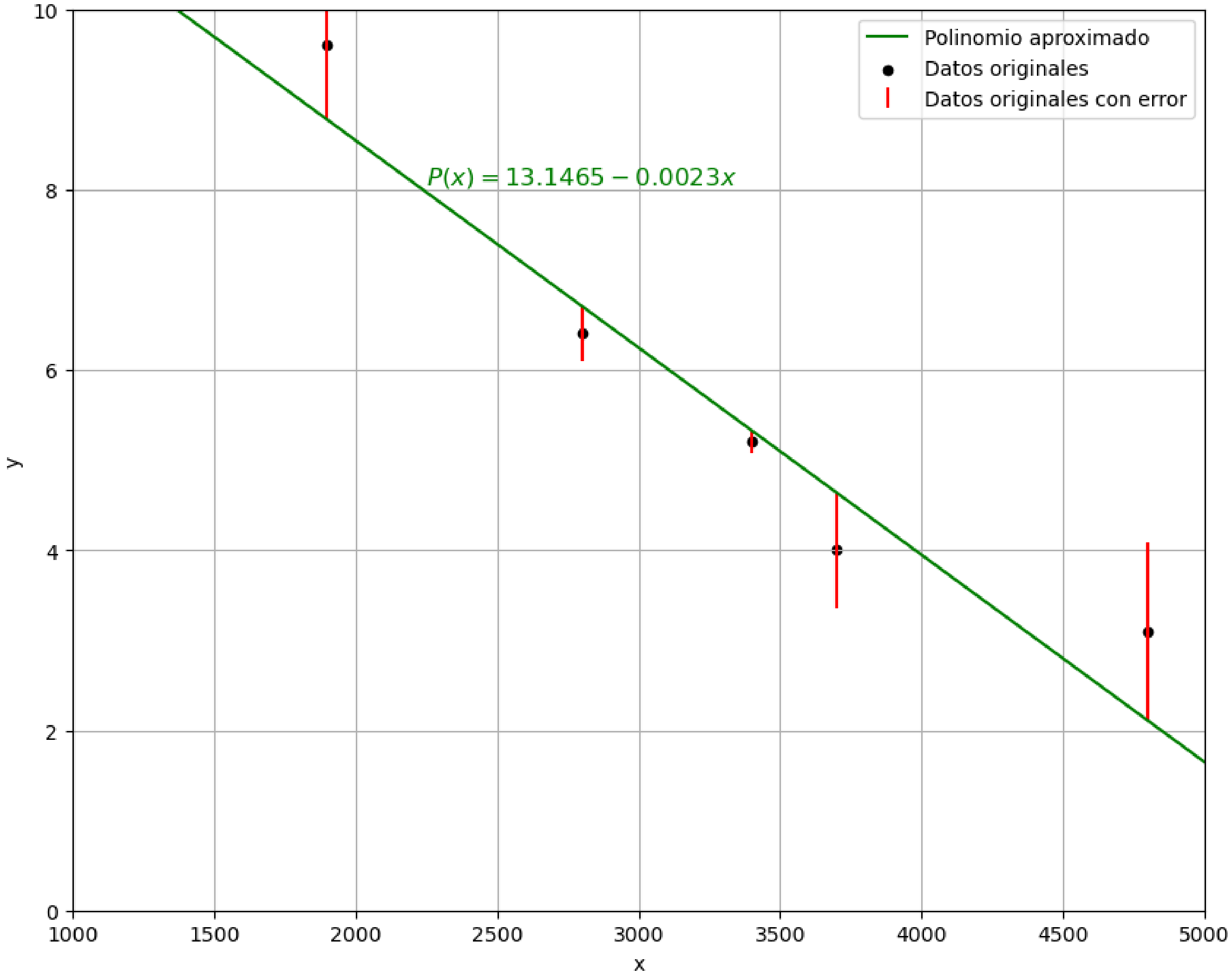
Tipo	Peso promedio	Porcentaje de presentación
1. Regular lujoso doméstico	4800 lb	3.1
2. Regular intermediario doméstico	3700 lb	4.0
3. Regular económico doméstico	3400 lb	5.2
4. Compacto doméstico	2800 lb	6.4
5. Compacto extranjero	1900 lb	9.6

```
xi = [4800,3700,3400,2800,1900]
yi = [3.1,4.0,5.2,6.4,9.6]

%autoreload 2

a,b = minimosCuadrados(len(xi),1,xi,yi)
```

```python
        c = hallarCoef(a,b)
        graficar(xi,yi,c,'green',[1000, 5000],[0, 10],2250,8,1000)
```

```
Matriz A:
 [        5.0000     16600.0000 ]
 [    16600.0000   59740000.0000 ]
Vector b:
 [       28.3000 ]
 [    83520.0000 ]
Coeficientes del polinomio:
 [       13.1465 ]
 [       -0.0023 ]

El error absoluto de f(x_1) al punto x_1 es de 0.9935
El error absoluto de f(x_2) al punto x_2 es de 0.6365
El error absoluto de f(x_3) al punto x_3 es de 0.1265
El error absoluto de f(x_4) al punto x_4 es de 0.3065
El error absoluto de f(x_5) al punto x_5 es de 0.8235
El error cuadrático medio para este ajuste es de: 0.436054
Por tanto, el polinomio aproximado en la forma solicitada es:
```

$$13.1465 - 0.0023x$$



Link del repositorio:

https://github.com/ElAlfa3007/M-todos_Num-ricos.git