INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO

Leidy Yoana Medina

Universidad de Medellín

Tabla de Contenido

¿Qué es el análisis numérico o métodos numéricos?

¿Qué es el análisis numérico o métodos numéricos?

Los métodos numéricos son una rama de la matemática cuyo objetivo principal es la **resolución de problemas matemáticos** mediante operaciones sencillas.

Ejemplo

1. **En cálculo diferencial o álgebra:**
   1.1 Hallar las soluciones de la ecuación. $3^{-x} = x$
   1.2 Sea $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$ en $[1, 2]$, hallar los valores máximos y mínimos.
2. **En cálculo integral**
   2.1 Solucionar la integral definida $\displaystyle\int_a^b e^{x^2}\, dx$
   2.2 Solucionar la integral definida $\displaystyle\int_a^b \frac{e^x}{x}\, dx$

Apunte importante

1. Los ingenieros y otros profesionales, en su campo de acción, tienen tantos problemas cuya **formulación matemática no es suficiente** para determinar una solución analítica. Ya que las soluciones analíticas implican procesos muy complejos.

Apunte importante

1. Los ingenieros y otros profesionales, en su campo de acción, tienen tantos problemas cuya **formulación matemática no es suficiente** para determinar una solución analítica. Ya que las soluciones analíticas implican procesos muy complejos.
2. En situaciones del mundo real, nos encontramos a menudo con problemas que **no pueden ser resueltos analíticamente** o de manera exacta y cuya solución debe ser abordada con ayuda de algún procedimiento numérico.

Por qué estudiar los métodos numéricos

- Son herramientas para reducir problemas de las matemáticas superiores mediante operaciones aritméticas básicas como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Por qué estudiar los métodos numéricos

- Son herramientas capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes y complejos que son difíciles de resolver analíticamente.

Por qué estudiar los métodos numéricos

- Existe software que facilita la solución de los problemas haciendo uso de los métodos numéricos.

Por qué estudiar los métodos numéricos

- La construcción y uso eficiente de los programas depende del entendimiento de la teoría.

Comparación de etapas: tradicional vs. computacional

Etapa	Enfoque tradicional	Enfoque con computador
Formulación	Leyes fundamentales explicadas brevemente.	Exposición profunda de la relación del problema con las leyes fundamentales.
Solución	Métodos muy elaborados y con frecuencia complicados para hacer manejable el problema.	Métodos computacionales fáciles de usar y aplicar.
Interpretación	Análisis limitado debido a lo complejo del cálculo manual.	La facilidad de cálculo permite pensar de forma global, desarrollar intuición y estudiar el comportamiento del sistema.

Table of Contents

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Algoritmos Numéricos

1. Los algoritmos numéricos son secuencias de instrucciones o procedimientos computacionales diseñados para resolver problemas matemáticos mediante cálculos numéricos.
2. Los algoritmos numéricos son herramientas computacionales diseñadas para resolver problemas matemáticos mediante cálculos numéricos, y desempeñan un papel fundamental en numerosas disciplinas científicas y tecnológicas.

Table of Contents

Medidas de error

Las medidas de error se utilizan para evaluar la precisión de los resultados obtenidos mediante cálculos numéricos en comparación con los valores exactos o esperados. Estas medidas proporcionan una forma de cuantificar la discrepancia entre el resultado aproximado y el valor de referencia.

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Se usa el término error para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las predicciones.

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Se usa el término error para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las predicciones.

La relación entre el resultado exacto, o verdadero, y el aproximado está dada por:

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Se usa el término error para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las predicciones.

La relación entre el resultado exacto, o verdadero, y el aproximado está dada por:

Error absoluto:

$$E_a = |V_e - V_a|$$

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Se usa el término error para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las predicciones.

La relación entre el resultado exacto, o verdadero, y el aproximado está dada por:

Error absoluto:

$$E_a = |V_e - V_a|$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|V_e - V_a|}{|V_e|}$$

El error relativo proporciona una medida de la discrepancia teniendo en cuenta la escala del problema.

Concepto de error en métodos numéricos

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente **exactos** y suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño de los modelos.

Se usa el término error para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las predicciones.

La relación entre el resultado exacto, o verdadero, y el aproximado está dada por:

Error absoluto:

$$E_a = |V_e - V_a|$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|V_e - V_a|}{|V_e|}$$

El error relativo proporciona una medida de la discrepancia teniendo en cuenta la escala del problema.

Error porcentual:

$$E_p = E_r \times 100$$

El error porcentual facilita la interpretación al expresar el error en términos porcentuales.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejemplo

Sea $p = 0.34 \times 10^{-4}$ y $p* = 0.54 \times 10^{-4}$. Determine el error absoluto y el error relativo.

Ejemplo

Sea $p = 0.34 \times 10^{-4}$ y $p* = 0.54 \times 10^{-4}$. Determine el error absoluto y el error relativo.

El error absoluto es

$$E_a = |0.34 \times 10^{-4} - 0.54 \times 10^{-4}| = 0.2 \times 10^{-4}$$

Ejemplo

Sea $p = 0.34 \times 10^{-4}$ y $p* = 0.54 \times 10^{-4}$. Determine el error absoluto y el error relativo.

El error absoluto es

$$E_a = |0.34 \times 10^{-4} - 0.54 \times 10^{-4}| = 0.2 \times 10^{-4}$$

El error relativo es:

$$E_r = \frac{|0.34 \times 10^{-4} - 0.54 \times 10^{-4}|}{0.34 \times 10^{-4}} = 0.58$$

Ejemplo

Sea $p = 0.34 \times 10^{-4}$ y $p* = 0.54 \times 10^{-4}$. Determine el error absoluto y el error relativo.

El error absoluto es

$$E_a = |0.34 \times 10^{-4} - 0.54 \times 10^{-4}| = 0.2 \times 10^{-4}$$

El error relativo es:

$$E_r = \frac{|0.34 \times 10^{-4} - 0.54 \times 10^{-4}|}{0.34 \times 10^{-4}} = 0.58$$

Es decir que : $E_{rp} = 58\%$ se puede observar que el la aproximación es solo el 42% del valor verdadero y esta muy lejos de ser aceptable

Ejemplo

Determine el error absoluto, error relativo y el error relativo porcentual y determine si la aproximación es o no admisible.

$$p = 0.567826564 \times 10^6 \quad p* = 0.56783000 \times 10^6$$

Ejemplo

Determine el error absoluto, error relativo y el error relativo porcentual y determine si la aproximación es o no admisible.

$$p = 0.567826564 \times 10^6 \quad p* = 0.56783000 \times 10^6$$

Error absoluto es:

$$E_a = |0.567826564 \times 10^6 - 0.56783000 \times 10^6| =$$

Ejemplo

Determine el error absoluto, error relativo y el error relativo porcentual y determine si la aproximación es o no admisible.

$$p = 0.567826564 \times 10^6 \quad p* = 0.56783000 \times 10^6$$

Error absoluto es:

$$E_a = |0.567826564 \times 10^6 - 0.56783000 \times 10^6| =$$

El error relativo es:

$$E_r = \frac{|0.567826564 \times 10^6 - 0.56783000 \times 10^6|}{0.567826564 \times 10^6} =$$

Para tener en cuenta

Por lo general, interesa el **error absoluto** y no el **error relativo**; pero, cuando el valor exacto de una cantidad es "muy pequeño" o "muy grande", l**os errores relativos son más significativos.**

Cifras significativas

Las **cifras significativas** son los dígitos de un número que aportan información sobre su precisión. Estas incluyen todos los dígitos conocidos con certeza más el primero que es incierto. Se utilizan en mediciones y cálculos científicos para reflejar la exactitud de los datos.

Aritmética

Sea

$$x = \pm 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1} \dots \times 10^e$$

y x^* una aproximación de x, en este curso se trabajarán dos tipos de aproximación a k cifras significativas:

1. Aproximación a k cifras significativas por corte

$$x^* = \pm 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_k \times 10^e$$

2. Aproximación a k cifras significativas por redondeo

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_k \times 10^e \text{ si } 0 \leq a_{k+1} \leq 4 \\ \pm 0.a_1 a_2 a_3 \dots (a_k + 1) \times 10^e \text{ si } 5 \leq a_{k+1} \leq 9 \end{cases}$$

operación en punto flotante por aproximación

Sea x^* y y^* aproximaciones de x y y respectivamente

1. $x \oplus y = (x^* + y^*)^*$
2. $x \ominus y = (x^* - y^*)^*$
3. $x \otimes y = (x^* \times y^*)^*$
4. $x \oslash y = (x^*/y^*)^*$ con $y^* \neq 0$

se debe hacer operación por operación y cada vez hacer la aproximación.

Cifras significativas

1. Los dígitos distintos de cero siempre son significativos.
   Ejemplo: En número 123.45 tiene 5 cifras significativas.

Cifras significativas

2. Los ceros entre dígitos distintos de cero son significativos.
   Ejemplo 2: El número 10.02 tiene 4 cifras significativas.

Cifras significativas

3. Los ceros a la izquierda (previos a un número distinto de cero) no son significativos.
   Ejemplo 3: El número 0.0045, tiene 2 cifras significativas.

Cifras significativas

4. Los ceros a la derecha de un número con punto decimal son significativos.
   Ejemplo 4: El número 3.400 tiene 4 cifras significativas.

Cifras significativas

5. Los ceros a la derecha en números sin punto decimal pueden o no ser significativos (dependen del contexto o notación científica).

Aritmética

Aritmética

- **Aritmética de corte o truncamiento:** Un número decimal se trunca eliminando algunas cifras, empezando por la derecha, después del punto decimal.
  Ejemplo: el truncamiento del número 0.8436 a una sola cifra decimal es 0.8, y a dos cifras decimales es 0.84.
- **Aritmética por redondeo:** si se desea redondear a una cifra decimal, se considera la cifra siguiente. Si esta es **0, 1, 2, 3 o 4**, el número se deja igual (se trunca); si es **5, 6, 7, 8 o 9**, se suma una unidad a la cifra que se está considerando.

Ejemplo

Sea $x = 79.26589$, hallar x^*

1. A dos cifras significativas por corte.
2. A dos cifras significativas por redondeo.
3. A seis cifras significativas por corte.
4. A seis cifras significativas por redondeo.

Ejemplo

Sea $x = 79.26589$, hallar x^*

1. A dos cifras significativas por corte.
2. A dos cifras significativas por redondeo.
3. A seis cifras significativas por corte.
4. A seis cifras significativas por redondeo.

La solución:
Sea $x = 79.26589 = 0.7926589 \times 10^2$

1. $x^* = 0.79 \times 10^2 = 79$
2. $x^* = 0.79 \times 10^2 = 79$
3. $x^* = 0.792658 \times 10^2 = 79.2658$
4. $x^* = 0.792659 \times 10^2 = 79.2659$

Ejemplo

Usando aritmética a 3 cifras significativas por redondeo hallar la aproximación de

$$x = \frac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$$

Solución: ${\frac{13}{14}}^* = 0.929$, ${\frac{6}{7}}^* = 0.857$ y $e = 2.72$, luego

$$x^* \quad = \quad \frac{0.929 - 0.857}{2 * 2.72 - 5.4} = \frac{0.0720}{5.44 - 5.4} = \frac{0.0720}{0.0400} = 1.80$$

Ejercicio

Usando aritmética a tres cifras significativas y por corte las soluciones de la ecuación cuadrática

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$$

Solución

Solución de una ecuación cuadrática esta dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a^* = 0.5$, $b^* = -30.7$ y $c^* = 0.166$, asi

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{30.7 \pm \sqrt{(-30.7)^2 - 4(0.5)(0.166)}}{2(0.5)} \\ &= \frac{30.7 \pm \sqrt{942 - 2(0.166)}}{1} \\ &= 30.7 \pm \sqrt{942 - 0.332} \\ &= 30.7 \pm \sqrt{941} \\ &= 30.7 \pm 30.6 \end{aligned}$$

por tanto $x_1^* = 61.3$ y $x_2^* = 0.1$

Ejercicios

Use redondeo aritmético a tres cifras y las siguientes fórmulas $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_1 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad x_2 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

1. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$
2. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$
3. $1.002x^2 + 11.01x - 0.01265 = 0$

Table of Contents

Fuentes de Error

1. Error de representación o de redondeo: Aunque un número tiene infinitas cifras decimales, el ordenador sólo permite representarlo con un número finito de cifras significativas.

Fuentes de Error

1. Error de representación o de redondeo: Aunque un número tiene infinitas cifras decimales, el ordenador sólo permite representarlo con un número finito de cifras significativas.
2. Error de truncamiento: Los métodos numéricos a menudo implican aproximaciones y truncamientos de series infinitas o funciones continuas para hacer que los cálculos sean computacionalmente manejables.

Fuentes de Error

1. Error de representación o de redondeo: Aunque un número tiene infinitas cifras decimales, el ordenador sólo permite representarlo con un número finito de cifras significativas.
2. Error de truncamiento: Los métodos numéricos a menudo implican aproximaciones y truncamientos de series infinitas o funciones continuas para hacer que los cálculos sean computacionalmente manejables.
3. Error de propagación: En muchos cálculos numéricos, los resultados de una operación se utilizan como entrada para la siguiente operación.

Fuentes de Error

1. Error de representación o de redondeo: Aunque un número tiene infinitas cifras decimales, el ordenador sólo permite representarlo con un número finito de cifras significativas.
2. Error de truncamiento: Los métodos numéricos a menudo implican aproximaciones y truncamientos de series infinitas o funciones continuas para hacer que los cálculos sean computacionalmente manejables.
3. Error de propagación: En muchos cálculos numéricos, los resultados de una operación se utilizan como entrada para la siguiente operación.
4. Error de aproximación: Al resolver problemas matemáticos complejos, a menudo se requiere aproximar soluciones utilizando métodos iterativos o algoritmos de optimización.

Table of Contents

Exactitud y precisión

Los errores en los cálculos y medidas se pueden caracterizar por la exactitud y la precisión.

Exactitud y precisión

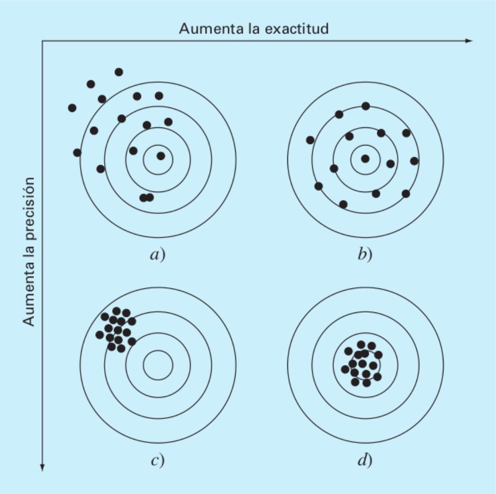
Los errores en los cálculos y medidas se pueden caracterizar por la exactitud y la precisión.
Exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.

Exactitud y precisión

Los errores en los cálculos y medidas se pueden caracterizar por la exactitud y la precisión.

Exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.

La precisión se refiere a qué tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos.


Aumenta la exactitud
Aumenta la precisión
a)
b)
c)
d)

Tarea 1:

Investigación teórica:

1. ¿Qué es el épsilon de la máquina?
2. ¿Por qué es importante en el contexto de los métodos numéricos?
3. ¿Cuál es su valor aproximado en sistemas que usan el tipo de dato float64 (doble precisión)?