Ceros de Funciones

Leidy Yoana Medina

Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Medellín

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Tabla de Contenido

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ceros de Funciones

Introducción

Hallar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, para $f(x)$ una función no lineal es un problema bastante común en las área de las matemáticas aplicadas, y en la mayoría de los casos no se puede hallar la solución exacta y se debe recurrir a aproximar la solución.

Introducción

Hallar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, para $f(x)$ una función no lineal es un problema bastante común en las área de las matemáticas aplicadas, y en la mayoría de los casos no se puede hallar la solución exacta y se debe recurrir a aproximar la solución.

1. Cerrados
   1.1 Bisección
   1.2 Falsa posición
2. Abiertos
   2.1 Newton
   2.2 Secante

.

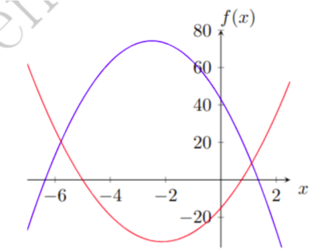
Motivación

Un problema que puede ambientar la necesidad de métodos de aproximación de ceros es el hallar los puntos de intersección de dos curvas (bastante necesario en los curso de calculo). Un ejemplo de este problema es encontrar los interceptos de las curvas

$$f_1(x) = -5x^2 - 25x + 43$$

$$f_2(x) = 4x^2 + 17x - 15$$

La gráfica de las dos curvas



Para hallar los puntos de intersección igualando las funciones $f_1(x) = f_2(x)$ o lo que es lo mismo $f_1(x) - f_2(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -5x^2 - 25x + 43 - (4x^2 + 17x - 15) &= 0 \\ -9x^2 - 42x + 58 &= 0 \\ x_1 = 1.1146934 \qquad & x_2 = -5.78136 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Ahora se tienen las funciones

$$f_1(x) = 3x^2 + e^{2x}$$

$$f_2(x) = \ln x + 7x^3 + 3.3$$

y se desea hallar los puntos de intersección, la gráfica es:
En este caso al intentar resolver la ecuación $f_1(x) - f_2(x) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} (3x^2 + e^{2x}) - (\ln x + 7x^3 + 3.3) &= 0 \\ e^{2x} - \ln x + 3x^2 - 7x^3 - 3.3 &= 0 \end{aligned}$$

que algebraicamente es imposible de resolver o muy difícil.

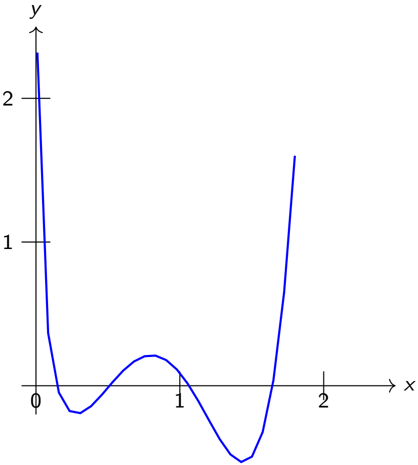


Figure: $f(x) = 3x^2 + e^{2x} - 7x^3 - \ln x - 3.3$

Tabla de Contenido

Métodos Cerrados

Antes de iniciar el método de la bisección, recordaremos dos teoremas que garantizan poder hallar una aproximación a la solución de $f(x) = 0$.

Métodos Cerrados

Antes de iniciar el método de la bisección, recordaremos dos teoremas que garantizan poder hallar una aproximación a la solución de $f(x) = 0$.

Teorema del valor intermedio

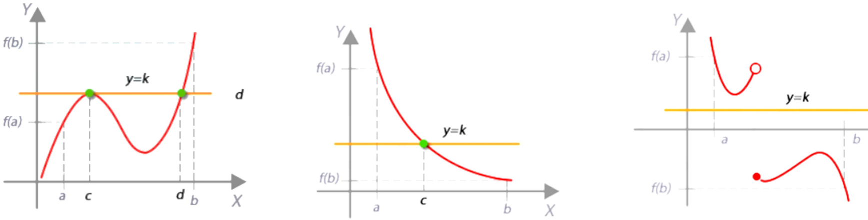
Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces para cada k tal que $f(a) < k < f(b)$, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Métodos Cerrados

Antes de iniciar el método de la bisección, recordaremos dos teoremas que garantizan poder hallar una aproximación a la solución de $f(x) = 0$.

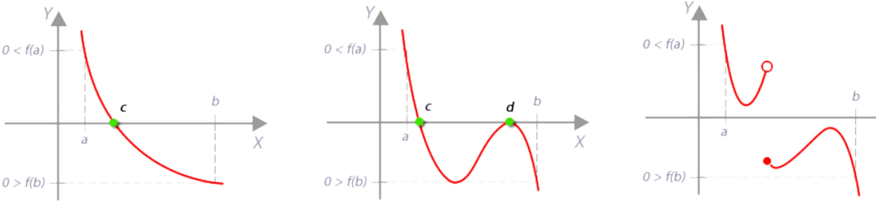
Teorema del valor intermedio

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces para cada k tal que $f(a) < k < f(b)$, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



Teorema de Bolzano

Sea una función $f(x)$ continua definida en un intervalo $[a, b]$, entonces si se cumple que $f(a)f(b) < 0$ (con signos opuestos), existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Método de Bisección

- El método de bisección se basa en el teorema de Bolzano
- Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. De acuerdo al teorema de Bolzano, existe al menos un número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

El método se basa en divisiones sucesivas de lo subintervalo $[a, b]$ y en cada división localizar el subintervalo que contenga la raíz haciendo uso del teorema de Bolzano.

Búsqueda binario

Para iniciar, supongamos que $a_1 = a$ y $b_1 = b$, y sea p_1 el punto medio del intervalo

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Búsqueda binario

Para iniciar, supongamos que $a_1 = a$ y $b_1 = b$, y sea p_1 el punto medio del intervalo

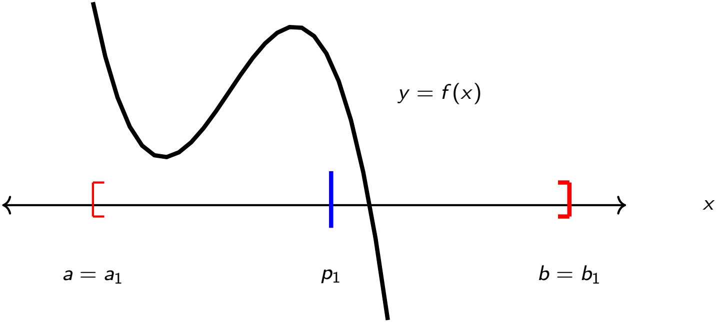
$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

1. Si $f(p_1) = 0$, entonces p_1 es una raíz de la función f. Lo logramos :D
2. De lo contrario:
   2.1 Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tiene el mismo signo, entonces $p \in (p_1, b_1)$ entonces $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$
   2.2 Si $f(p_1)$ y $f(b_1)$ tiene el mismo signo, entonces $p \in (a_1, p_1)$ y $b_2 = p_1$ y $a_2 = a_1$

Ahora repetimos el proceso con el intervalo $[a_2, b_2]$.

Ejemplo

Analicemos el problema de la búsquema graficamente

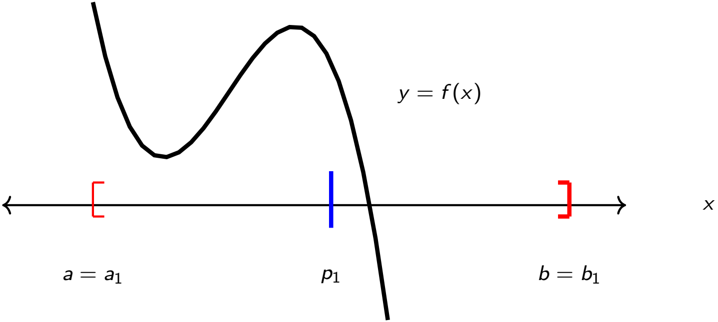


Preguntemos:

1. $f(a_1)$ y $f(p_1)$ tienen el mismo signo ?

Ejemplo

Analicemos el problema de la búsqueda graficamente

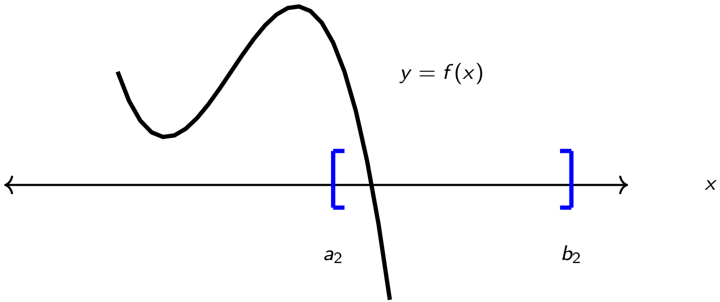


Preguntemos:

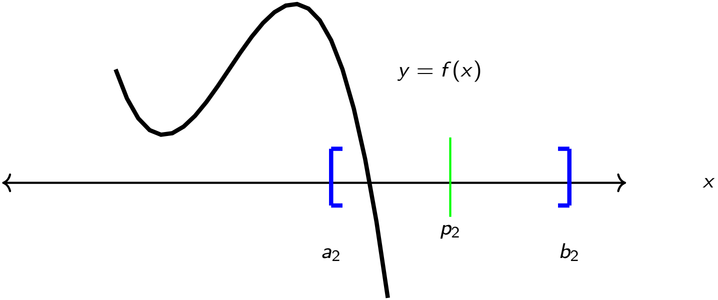
2. Si lo tiene es decir que: $p* \in (b_1, p_1)$, entonces $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$

Ejemplo

Segunda partición



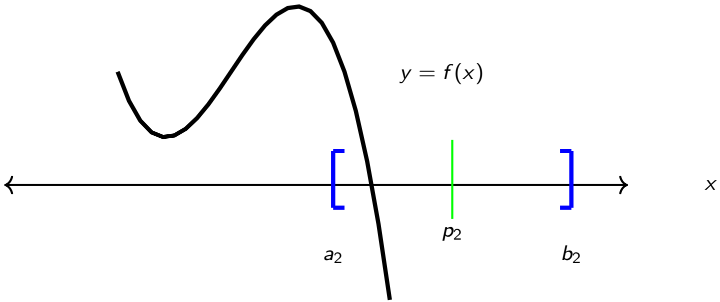
Segunda partición



Preguntemos:

1. $f(a_2)$ y $f(p_2)$ tienen el mismo signo ?

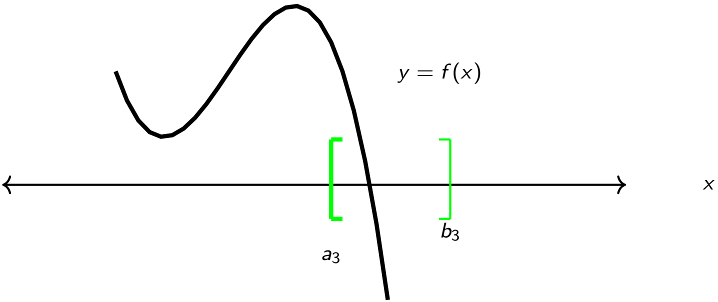
Segunda partición



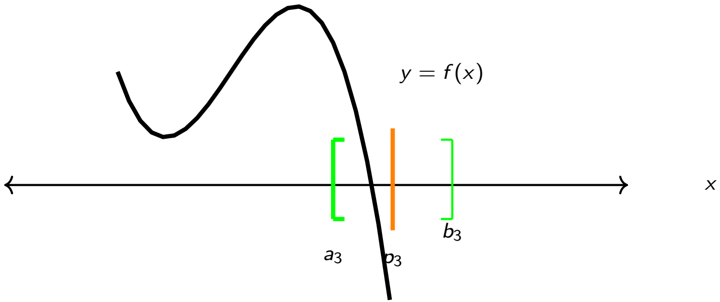
Preguntemos:

2. No lo tiene es decir que: $p* \in (a_2, p_2)$, entonces $a_3 = a_2$ y $b_3 = p_2$

Tercera partición



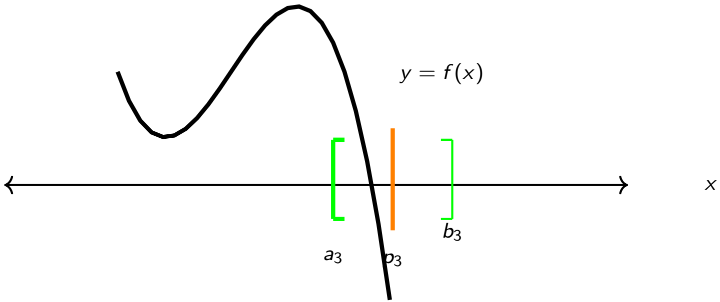
Tercera partición



Preguntemos:

1. $f(a_3)$ y $f(p_3)$ tienen el mismo signo ?

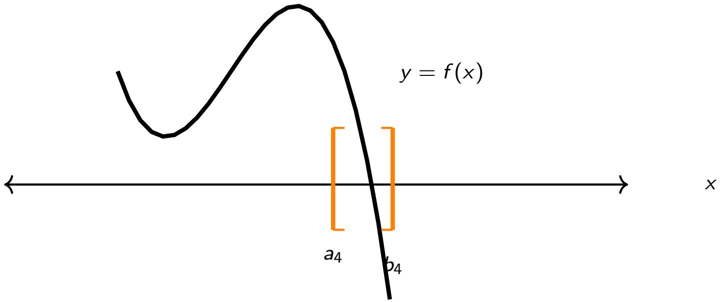
Tercera partición



Preguntemos:

2. No lo tiene es decir que: $p* \in (a_3, p_3)$, entonces $a_4 = a_3$ y $b_4 = p_3$

Cuarta Partición



Cuando parar

Hasta cuando debo hacer el proceso

Cuando parar

Hasta cuando debo hacer el proceso

Este proceso se repite hasta que se cumpla una o varias de las siguientes condiciones:

1. Se realiza un numero máximo de iteraciones N.
2. $|f(c_n)| < Tol$
3. $|b_n - a_n| < Tol$

donde la tolerancia Tol es el valor a partir del cual se considera que es despreciable el resultado ($Tol \approx 0$). Y se toma como la aproximación de la raíz α el valor de $\alpha^* = c_n$.

Ejemplo

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^2 - 6$, encontrar una aproximación de α tal que $f(\alpha) = 0$, en el intervalo de $[2, 3]$, con una exactitud de 10^{-2}

Numéro de Iteraciones

Nota

Si se trabaja con una tolerancia de 10^{-t} con $t \in \mathbb{N}$, entonces como mínimo se exige que trabaje con t+1 cifras significativas.

Nota 2

El número de iteraciones necesarias para obtener una tolerancia de ε, tal que $|\alpha - c_c| < \varepsilon$ esta dado por ojo parte entera

$$n = \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{log(2)} \right\rfloor \tag{1}$$

donde $\lfloor n \rfloor$ es la parte entera de n.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejemplo

Ejemplo 1

Sea $f(x) = 3^{-x} - x$, hallar una aproximación de α tal que $f(\alpha) = 0$, en el intervalo de $[0, 1]$

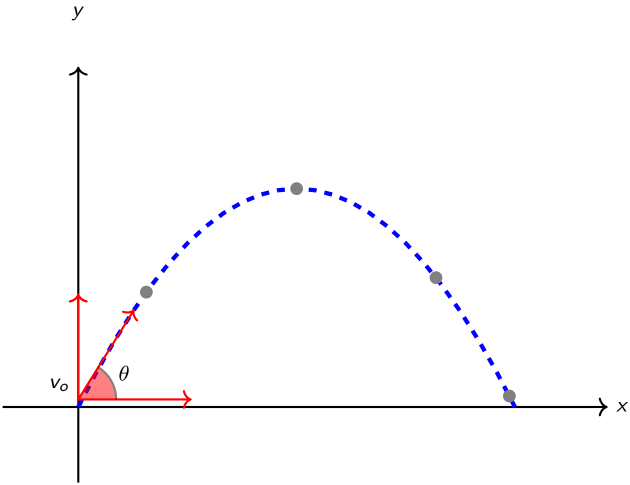
La función $f(x)$ es continua en todo los reales, además $f(0) = 1$ y $f(1) = -\frac{2}{3}$. como se tiene un cambio de signo el teorema de Bolzano garantiza que existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Ejemplo 2

Ejercicio

En ciertas ocasiones, los ingenieros aerospaciales deben calcular las trayectorias de proyectiles, como cohetes. Un problema parecido tiene que ver con la trayectoria de una pelota que se lanza. Dicha trayectoria está definida por las coordenadas (x, y), como se ilustra en la figura. Calcule el ángulo inicial θ_0, apropiado si la velocidad inicial $v_0 = 20m/s$ y la distancia x al catcher es de $35m$. Obsérvese que la pelota sale de la mano del lanzador con una elevación $y_0 = 2m$, y el catcher la recibe a 1 m. Exprese el resultado final en grados.
La trayectoria se modela con la ecuación

$$y = \tan(\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + y_0$$


y
x
v_o
θ

Ejercicios

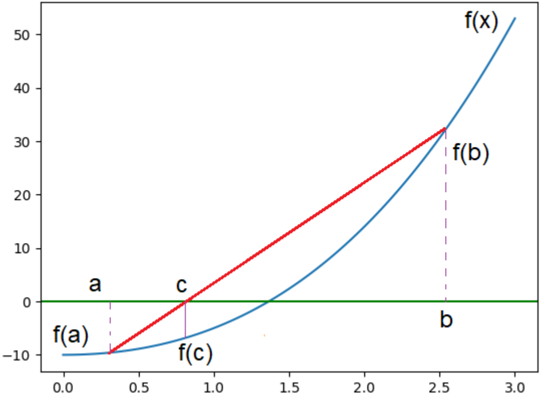
Use el método de bisección para encontrar una solución exacta dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas, ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que el error absoluto sea menor a 10^{-5} ?.

1. $x - 2^{-x} = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
2. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
3. $2x\cos(2x) - (x+1)^2$ $-3 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq x \leq 0$
4. $x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $0.2 \leq x \leq 0.3$ y $0.5 \leq x \leq 1$

Tabla de Contenido

Posición falsa

El método de posición falsa se basa en el teorema de valor intermedio. Supongamos que f es una función continúa en el intervalo $[a, b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos. De acuerdo al teorema de valor intermedio, existe al menos un número $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.



Posición Falsa

A partir de la gráfica, usando triángulos semejantes, se estima que:

$$\begin{aligned} \frac{f(a)}{c-a} &= -\frac{f(b)}{b-c} \\ \frac{f(a)}{c-a} &= \frac{f(b)}{c-b} \end{aligned}$$

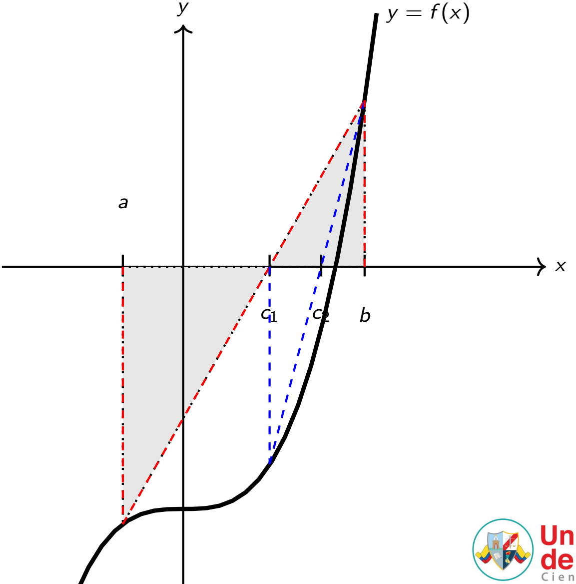
despejando c.

$$c = b - f(b)\frac{(a-b)}{f(a)-f(b)}$$

Y aplicamos nuevamente el teorema de Bolzano haciendo una división del intervalo. si $f(a)f(c) < 0$, entonces $\alpha \in [a, c]$, si no $\alpha \in [c, b]$,
Este proceso se repite hasta que se cumpla una o múltiples de las siguientes condiciones para una tolerancia ε dada.

$$\begin{cases} \text{Numero máximo de iteraciones N.} \\ |f(c_n)| < \varepsilon \\ |c_n - c_{n-1}| < \varepsilon \end{cases}$$

Posición falsa



Ejemplo:

Ejemplo

Usando el método de la posición falsa hallar una raíz para la ecuación $x - 2^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$ con una tolerancia $\varepsilon = 10^{-5}$

Ejemplo

Una partícula parte del reposo sobre un plano inclinado uniforme, cuyo ángulo θ cambia con una tasa constante de

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0$$

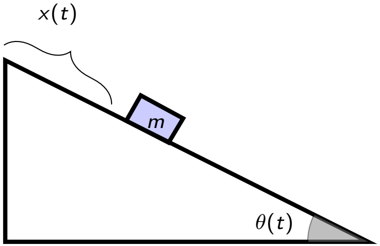
Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

suponga que la partícula se desplazo 1.7 pies en 1 segundo. Encuentre con una exactitud de 10^{-5}, la tasa ω a la que θ cambia. Suponga que $g = 32,17 pies/s^2$

1. Usando el método de la bisección. Determine el numero de iteraciones necesarias si la exactitud es de 10^{-5}. Y calcule la aproximación.
2. Usando el método de la posición falsa.

Representación gráfica del ejercicio



Ejercicio

Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r (ver figura 2). Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen V de agua es:

$$V = L\left[\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2 sin^{-1}\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

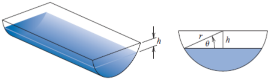


Figure: Abrevadero

Suponga que $L = 10$ pies, $r = 1$ pie y que $V = 10\ pies^3$. Determine la profundidad del agua del abrevadero hasta 0.001 pies.

Tabla de Contenido

Newton

Es uno de los métodos mas usados por facilidad, velocidad de convergencia y estabilidad. Su dificultad radica en el calculo de la derivada y si se presentan raíces repetidas. Se deduce del teorema de Taylor al tomar el polinomio de grado 1

Definición

Sea $f \in C^2[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ una aproximación de α tal que $|\alpha - x_0| \approx 0$, y α un cero de $f(x)$ y tal que $f'(x_0) \neq 0$. Si se considera el polinomio de Taylor de grado 1 alrededor de de x_0

El polinomio de grado 1 alrededor de x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x - x_0)^2 \quad \text{con} \quad \xi(x) \quad \text{entre} \quad x_0 \quad \text{y} \quad x \tag{2}$$

Al evaluar α en la ecuación 2 a α, entonces $f(\alpha) = 0$ se tiene

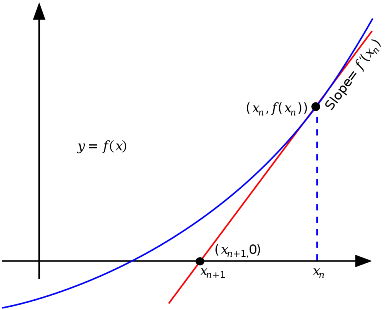
$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{f''(\xi(\alpha))}{2!}(\alpha - x_0)^2 \tag{3}$$

con $\xi(\alpha)$ entre x_0y α. Como $|\alpha - x_0| \approx 0$, entonces se toma que $(\alpha - x_0)^2 = 0$, reemplazando estas condiciones en la ecuación 3 da como resultado

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) \tag{4}$$

y despejando α de la ecuación 38 se tiene

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5}$$



El método de Newton-Raphson entonces se define de la ecuación 5 generando una sucesión así:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{para} \quad n \geq 1 \tag{6}$$

con x_0 arbitrario "muy cercano" a la raíz α.

Ejercicio

¿La suma de dos números es 20. Si a cada uno se le suma su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es de 155.55. Determine los dos números con una exactitud de 10^{-4}?.

Tabla de Contenido

Secante

El método de la secante es una variación del método de Newton-Raphson, si la derivada es difícil de calcular o compleja se puede optar por cambiar la derivada por una aproximación de la derivada. La primera derivada en x_n para $f(x)$ se define como

$$f'(x_n) = \lim_{x \longrightarrow x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \tag{7}$$

si asumimos que $x_{n-1} \approx x_n$ muy cercanos pero diferentes, entonces la ecuación 7 se puede aproximar por

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} \tag{8}$$

al reemplazar la ecuación 8 en la ecuación 6 se tiene la iteración para el método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

al organizar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \quad \text{para } n \geq 2. \tag{9}$$

con x_0, x_1 cercanos a la raíz α. La ecuación 9 se puede ver como $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$.

Ejemplo

Ejemplo

Hallar el primer cero positivo para $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ usando el método de la secante con una exactitud de 10^{-5}.

Ejercicio

El volumen V del líquido contenido en un tanque esférico de radio r está relacionado con la profundidad h del líquido por

$$V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}$$

Determine h para $r = 1m$ y $V = 0.75m^3$.

- Soluciones usando el método de Bisección con $tol = 10^{-6}$
- Soluciones usando el método de Falsa posición con $tol = 10^{-6}$
- Soluciones usando el método de Newton con $tol = 10^{-6}$
- Soluciones usando el método de la Secante con $tol = 10^{-6}$

Ejercicio

La velocidad vertical de un cohete se calcula con la fórmula que sigue:

$$v = u \ln\left(\frac{m_o}{m_o - qt}\right) - gt$$

donde v es a velocidad vertical, u es la velocidad con la que se expele el combustible, en relación con el cohete, m_o es la masa inicial del cohete en el momento $t = 0$, q es la tasa de consumo de combustible, y g aceleración de la gravedad hacia abajo $9.81 m/s^2$. Si $u = 2000 m/s$, $m_o = 150000 kg$ y $q = 2700 kg/s$, calcule el momento en que $v = 750 m/s$ **Sugerencia: El valor de t se encuentra entre 10s y 50s**. Calcule el resultado de modo que esté dentro de 0.1% del valor verdadero.

Ejercicio

En ingeniería oceanográfica, la ecuación de una ola estacionaria reflejada en un puerfto está dada por $\lambda = 16$, $t = 12$, $v = 48$:

$$h = h_0 \left[\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi tv}{\lambda}\right) + e^{-x} \right]$$

Resuelva para el valor positivo más bajo positivo más bajo de x, si $h = 0.6h_0$

Método	Valores iniciales	Velocidad de convergencia	Estabilidad	Exactitud	Amplitud de aplicación	Complejidad de programación	Comentarios
Directo	—	—	—	—	Limitada		
Gráfico	—	—	—	Pobre	Raíces reales	—	Puede tomar más tiempo que el método numérico
Bisección	2	Lenta	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
Falsa posición	2	Lenta/media	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
FP modificado	2	Media	Siempre	Buena	Raíces reales	Fácil	
Iteración de punto fijo	1	Lenta	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	
Newton-Raphson	1	Rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Requiere la evaluación de $f'($
Newton-Raphson modificado	1	Rápida para raíces múltiples; media para una sola	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Requiere la evaluación de $f''(x)$ y $f'(x)$
Secante	2	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	Los valores iniciales no tiene que acotar la raíz
Secante modificada	1	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	General	Fácil	
Müller	2	Media a rápida	Posiblemente divergente	Buena	Polinomios	Moderada	
Bairstow	2	Rápida	Posiblemente divergente	Buena	Polinomios	Moderada	