Cursul 1

Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţiile fizicii matematice
Fizică, anul II, semestrul I, 2022-2023

Conţinutul cursului

Partea I. Ecuaţii diferenţiale

1. Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi
2. Modele matematice descrise prin ecuaţii diferenţiale
3. Existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru problema Cauchy
4. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

Partea a II-a. Ecuaţii cu derivate parţiale

1. Ecuaţia lui Poisson. Ecuaţia lui Laplace
2. Ecuaţia propagării căldurii
3. Ecuaţia undelor

Bibliografie suplimentară

- Gh. Aniculăesei, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2003.
- S. Aniţa, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Universităţii "Al.I.Cuza", Iaşi, 2003.
- V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.
- V. Barbu, *Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Academiei Române, Bucuresti, 1993.
- Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.
- A. N. Tihonov, A.A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.
- V. S. Vladimirov, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.
- I.I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 1999.

Partea 1

ECUAŢII DIFERENŢIALE

CAPITOLUL 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

1.1. Ecuaţii diferenţiale - introducere

Ecuaţiile diferenţiale au apărut şi s-au dezvoltat din dorinţa de a prezice cu o acurateţe cât mai mare evoluţia sistemelor fizice, chimice, biologice, etc. Caracteristicile fenomenelor, legile după care acestea evoluează au fost transcrise în formă abstractă ca modele matematice. De multe ori aceste modele iau forma unor ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Definiţia 1.1.1. *(1) O ecuaţie diferenţială este o relaţie între o funcţie necumoscută, derivatele ei (ordinare sau parţiale) până la un anumit ordin şi variabila independentă (variabilele independente).*

(2) Ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care apare în ecuaţie se numeşte ordinul ecuaţiei.

Cea mai uzuală clasificare a ecuaţiilor diferenţiale este cea dată de numărul de variabile independente de care depinde funcţia necunoscută:

- ecuaţii diferenţiale ordinare: funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă; în ecuaţie intervin derivate ordinare (obişnuite) ale funcţiei necunoscute în raport cu această variabilă;
- ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale: funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente; în ecuaţie apar efectiv derivate parţiale ale funcţiei necunoscute în raport cu aceste variabile.

Pentru simplitate, pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare se foloseşte denumirea scurtă de "ecuaţii diferenţiale", iar pentru ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale, denumirea de "ecuaţii cu derivate parţiale".

Probabil cel mai cunoscut model de ecuaţie diferenţială (ordinară) este cel dat de principiul al doilea al dinamicii ($\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$):

$$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \tag{1.1}$$

care exprimă legea de mişcare a unui punct material de masă m asupra căruia acţionează o forţă F. Prin $x(t)$, $x'(t)$ şi $x''(t)$ s-au notat, în ordine, poziţia, viteza şi acceleraţia punctului material la momentul t. Ecuaţia (1.1) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea în necunoscuta $x = x(t)$.

Dacă, de exemplu, forţa care acţionează asupra punctului material este greutatea, atunci relaţia (1.1) se scrie sub forma:

$$mx'' = -mg \quad \Leftrightarrow \quad x'' = -g,$$

care prin două integrări conduce la familia de soluţii:

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ fiind constante arbitrare.}$$

Desigur, pentru a individualiza o soluţie din această familie (adică, pentru a fixa valorile constantelor C_1, C_2), va trebui să asociem ecuaţiei două condiţii suplimentare. Precizând, de exemplu, poziţia şi viteza iniţiale ale particulei:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

deducem că poziţia punctului material la momentul t este descrisă de aplicaţia $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$.

O ecuaţie cu derivate parţiale foarte des întâlnită este ecuaţia propagării căldurii într-un corp omogen Ω (asimilat unui deschis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T), T > 0. \tag{1.2}$$

Funcţia necunoscută $u(x,t)$ reprezintă temperatura la momentul t în punctul x al corpului; ω este o constantă strict pozitivă. Densitatea surselor generatoare de căldură din corp în punctul x la momentul t este $f(x,t)$.

Prin Δ se înţelege în acest caz laplaceanul în coordonatele spaţiale:

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Ecuaţia propagării căldurii este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea.

Atunci când distribuţia temperaturii în corp nu depinde de timp (cazul staţionar), ecuaţia (1.2) capătă forma:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

numită ecuaţia lui Poisson. Dacă, în plus, lipsesc şi sursele interioare de căldură ($f = 0$), se obţine ecuaţia lui Laplace:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Observaţia 1.1.1. *Dacă notăm prin $u(x,t)$ concentraţia unui gaz la momentul t în secţiunea x a unui tub şi presupunem coeficientul de difuzie constant, atunci aceeaşi ecuaţie* (1.2) *descrie difuzia gazului în acel tub Ω. De aceea ecuaţia* (1.2) *este cunoscută şi sub numele de ecuaţia difuziei.*

În general, forma unei ecuaţii diferenţiale (ordinare) de ordin n este:

$$F\left(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\right) = 0, \tag{1.3}$$

unde funcţia $x = x(t)$ (t fiind variabila independentă) este necunoscută, iar $F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, neconstantă în raport cu ultima variabilă (altfel ecuaţia (1.3)) ar avea ordinul mai mic ca n).

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei F, ecuaţia (1.3) poate fi rescrisă în forma:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{1.4}$$

(unde $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$), numită *forma normală* a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n.

Observaţia 1.1.2. *Pentru simplitate, atunci când nu este pericol de confuzie, se renunţă la scrierea argumentului funcţiei necunoscute (scriem $x, x', \ldots$ în loc de $x(t), x'(t), \ldots$).*

Definiţia 1.1.2. *O funcţie $x : I_x \to \mathbb{R}$ ($I_x \subseteq \mathbb{R}$ fiind un interval real cu interior nevid - adică I_x nu este $\emptyset$ sau o mulţime cu un singur element) este soluţie a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n* (1.3) *dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

i) $x \in C^n(I_x)$ *(altfel spus, x este derivabilă de n ori, cu derivata de ordin n continuă);*
ii) $\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) \in D(F), \quad \forall t \in I_x$;
iii) $F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0, \quad \forall t \in I_x$.

Definiţia 1.1.3. *O funcţie $x : I_x \to \mathbb{R}$ ($I_x \subseteq \mathbb{R}$ fiind un interval real cu interior nevid) este soluţie a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n în forma normală* (1.4) *dacă sunt verificate condiţiile:*

i) $x \in C^n(I_x)$;
ii) $\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \in D(f), \quad \forall t \in I_x$;
iii) $x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right), \quad \forall t \in I_x$.

O ecuaţie diferenţială de ordin n are o infinitate de soluţii, depinzând de n constante.

Definiţia 1.1.4. *Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte* soluţie generală.

Pentru a extrage din mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale o singură soluţie sunt necesare informaţii în plus despre aceasta.

Uneori modelele matematice apar sub forma unor sisteme de ecuaţii diferenţiale. Considerăm sistemul diferenţial de ordinul întâi:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{array}\right. \tag{1.5}$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date pe un deschis D.

Definiţia 1.1.5. *Prin soluţie a sistemului diferenţial* (1.5) *se înţelege un $n-$uplu de funcţii*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n : I_x \to \mathbb{R}$$

(unde $I_x \subseteq \mathbb{R}$ este un interval real cu interior nevid) care verifică următoarele condiţii:

i) $x_i \in C^1(I_x), \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
ii) $(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in D, \ \forall t \in I_x$;
iii) $x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \ \forall t \in I_x, \ \forall \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Probleme Cauchy

Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi în forma normală, adică o ecuaţie de forma:

$$x' = f(t, x) \tag{1.6}$$

(pentru care vom căuta, aşadar, ca soluţii funcţii x de clasă C^1 definite pe intervale). O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi are o infinitate de soluţii, depinzând de o constantă. Pentru a individualiza o soluţie sunt necesare informaţii suplimentare despre aceasta - de exemplu, să-i precizăm valoarea într-un punct cunoscut.

O *problemă* Cauchy constă în determinarea unei soluţii x a ecuaţiei diferenţiale (1.6), care pentru o valoare dată t_0 a argumentului să ia o valoare dată x_0:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right. \tag{1.7}$$

Date $(t_0, x_0) \in D(f)$, se caută o soluţie $x : I_x \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei, astfel încât $t_0 \in I_x$ şi $x(t_0) = x_0$.

Observaţia 1.1.3. *O problemă* Cauchy *pentru ecuaţia diferenţială de ordin n* (1.4) *are forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) \\ x(t_0) = x_1^0, \ x'(t_0) = x_2^0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{array}\right. \tag{1.8}$$

unde $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D(f)$.

Se urmăreşte găsirea unei soluţii $x : I_x \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei, astfel încât $t_0 \in I_x$ şi

$$x(t_0) = x_1^0, \ x'(t_0) = x_2^0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0.$$

În studiul problemei Cauchy (1.7) se pot pune următoarele subprobleme:

- existenţa soluţiilor;
- unicitatea soluţiei;
- problema aproximării soluţilor, dacă nu se pot calcula efectiv;
- prelungibilitatea soluţiilor;
- comportarea soluţiilor neprelungibile la capătul intervalului maxim de definiţie;
- dependenţa continuă sau diferenţiabilă a soluţiilor de membrul drept f şi de data iniţială x_0, *etc.*

Clasa ecuaţiilor diferenţiale care se pot efectiv rezolva este foarte restrânsă. Ne oprim la:

1.2. Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi

Prin *cuadratură* înţelegem metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale (definite sau nedefinite). Denumirea provine de la un procedeu de calcul al ariei unei figuri plane, foarte utilizat în antichitate, numit cuadrare, deoarece consta în construirea cu rigla şi compasul a unui pătrat având aceeaşi arie cu aceea a figurii respective.

Vom prezenta în continuare opt tipuri de ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi. Primele şase sunt ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi în forma normală.

Soluţiile acestor ecuaţii vor fi exprimate:

- în formă explicită: $x = x(t)$ *sau*
- în formă implicită: $\mathcal{F}(t, x(t)) = 0$ *sau*
- în formă parametrică: $\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p) \end{cases}$, unde p este un parametru.

1.2.1. Ecuaţii cu variabile separabile.

Au **forma generală**:

$$x' = f(t)g(x), \tag{EVS}$$

unde $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ fiind intervale deschise nevide), iar $g(r) \neq 0$, pentru toţi $r \in J$.

Teorema 1.2.1. *În ipotezele de mai sus, soluţia generală a ecuaţiei (EVS) este dată de:*

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right), \text{ pentru orice } t \in I_x, \tag{1.9}$$

unde $t_0 \in I$ este un punct fixat, iar $G : J \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$G(r) = \int_{x_0}^{r} \frac{d\tau}{g(\tau)}, \text{ oricare ar fi } r \in J, \tag{1.10}$$

cu $x_0 \in J$ fixat.

Observaţia 1.2.1. *Dând diverse valori lui t_0, x_0, obţinem diferite soluţii ale (EVS).*

Demonstraţie. Cum $g \neq 0$ pe J şi este continuă, rezultă că g păstrează semn constant pe J. Atunci $\frac{1}{g}$ este continuă şi păstrează semn constant pe J. Fiind continuă, $\frac{1}{g}$ admite primitive pe J. Una dintre aceste primitive este G. Funcţia G este injectivă, deoarece este strict monotonă (derivata ei fiind funcţia cu semn constant $\left.\frac{1}{g}\right)$. Mai mult, $G : J \to$ Im G este şi surjectivă. Prin urmare, G este bijectivă, echivalent, inversabilă, iar inversa ei G^{-1} : Im G $\to$ J. Pe de altă parte, întrucât funcţia f este continuă pe I, este integrabilă pe orice subinterval al lui I. În concluzie, expresia din membrul drept al relaţiei (1.9) are sens (desigur, $x(t)$ va fi definită doar pentru acei t pentru care $\int_{t_0}^{t} f(s)ds \in$ Im G).

Avem de demonstrat:

(1) că funcţia x definită prin (1.9) este o soluţie a ecuaţiei (EVS) (care satisface $x(t_0) = x_0$);
(2) că orice soluţie a ecuaţiei (EVS) are forma (1.9).

Presupunem că x este dat de (1.9). Atunci $G(x(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$, $\forall t \in I_x$. În ambii membri avem funcţii derivabile în raport cu t; derivăm şi obţinem:

$$G'(x(t))x'(t) = f(t),\ \forall t \in I_x \overset{(1.10)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{g(x(t))}x'(t) = f(t),\ \forall t \in I_x,$$

adică (EVS). În plus, din (1.9) rezultă că $x(t_0) = G^{-1}(0) = x_0$ (pentru că (1.10) implică $G(x_0) = 0$).

Invers, fie $x : I_x \to \mathbb{R}$ o soluţie pentru (EVS). În (EVS) se poate împărţi cu $g(x(t))$ pentru că $g \neq 0$ pe J. Rezultă că:

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t),\ \forall t \in I_x.$$

Integrăm membru cu membru de la t_0 la t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,\ \forall t \in I_x.$$

În prima integrală facem schimbarea de variabilă $x(s) = \tau$, notăm $x_0 = x(t_0)$ şi obţinem:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Altfel spus, $G(x(t)) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, conform definiţiei (1.10). Întrucât G este inversabilă, ultima relaţie se rescrie $x(t) = G^{-1}\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right)$. ■

Observaţia 1.2.2. *În aplicaţii practice se întâmplă ca funcţia g să se anuleze. Se constată că zerourile lui g sunt soluţii constante pentru ecuaţia cu variabile separabile şi apoi se aplică rezultatul anterior considerând g restrânsă la intervalele deschise dintre două zerouri consecutive ale ei.*

Cursul 2

Exemplul 1.2.1. *Să se rezolve ecuaţia $x' = 3t^2 e^{2x}$ şi apoi să se găsească soluţiile care satisfac $x(1) = 0$.*

Soluţie. Se rescrie ecuaţia ca[1] $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 e^{2x} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{e^{2x}} = 3t^2 dt \Leftrightarrow e^{-2x}dx = 3t^2 dt$ şi, odată separate variabilele, se integrează:

$$\int e^{-2x}dx = \int 3t^2 dt \Leftrightarrow -\frac{e^{-2x}}{2} = t^3 + C,\ \text{cu } C \in \mathbb{R} \text{ constantă}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} = -2t^3 - 2C \Leftrightarrow -2x = \ln(-2t^3 - 2C) \Leftrightarrow x(t) = -\frac{1}{2}\ln(-2t^3 - 2C),\ \text{cu } C \in \mathbb{R} \text{ constantă}.$$

Ne amintim că funcţia $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, aşadar trebuie precizat că

$$-2t^3 - 2C > 0 \Leftrightarrow t^3 + C < 0 \Leftrightarrow t < -\sqrt[3]{C} \Leftrightarrow t \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{C}\right).$$

Am obţinut astfel soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile considerate.

Punem acum condiţia iniţială $x(1) = 0$. Dând lui t valoarea 1 în expresia soluţiei generale $x(t)$, rezultă $0 = -\dfrac{1}{2}\ln(-2 - 2C) \Leftrightarrow \ln(-2 - 2C) = 0 \Leftrightarrow -2 - 2C = 1 \Leftrightarrow C = -\dfrac{3}{2}$.

În concluzie, unica soluţie a problemei Cauchy este:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\ln(-2t^3 + 3), \quad t \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right).$$

Exemplul 1.2.2. *Să se rezolve problema* Cauchy $\begin{cases} x' = 5\sqrt[5]{x^4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

Soluţie. Rezolvăm mai întâi ecuaţia $x' = 5\sqrt[5]{x^4}$, care este o ecuaţie cu variabile separabile cu o formă particulară: are $f(t) = 1$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Scriem $\dfrac{dx}{dt} = 5\sqrt[5]{x^4}$ şi separăm variabilele.

Dacă $x \neq 0$ (înţelegând prin aceasta că $x(t) \neq 0$ pentru orice t din domeniul său de definiţie), atunci, formal,

$$\frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}} = dt \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\,dx = dt,$$

[1] $x' = \dfrac{dx}{dt}$ este notaţia lui Leibniz.

de unde
$$\int \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\,dx = \int dt \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} = t + C \Leftrightarrow \sqrt[5]{x} = t + C \Leftrightarrow x(t) = (t + C)^5,$$
unde C este o constantă reală.

Pentru ca $x(t) \neq 0$ ar trebui să adăugăm condiţia $t \neq -C$. Se observă însă că, pentru orice alegere a constantei C, funcţia $x_1(t) = (t + C)^5$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ pe toată axa reală. Într-adevăr, pentru orice $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5(t + C)^4 \\ 5\sqrt[5]{x_1^4(t)} &= 5\sqrt[5]{(t + C)^{20}} = 5(t + C)^4. \end{aligned}$$
Cu alte cuvinte, putem *prelungi* soluţia obţinută şi în punctul $t = -C$.

Pe de altă parte, $x_2(t) = 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ este şi ea o soluţie (constantă) a ecuaţiei din enunţ, deoarece $0' = 5\sqrt[5]{0^4}$.

Punem acum condiţia iniţială $x(0) = 0$. Evident, funcţia nulă x_2 verifică această condiţie, iar făcând $t = 0$ în $x_1(t) = (t + C)^5$ obţinem $0 = x_1(0) = C^5$, de unde $C = 0$.

Aşadar, problema Cauchy din enunţ are **mai mult de o soluţie**: $x_1(t) = t^5$ şi $x_2(t) = 0$, ambele definite pe $\mathbb{R}$, sunt soluţii ale ei. De fapt, şi funcţiile $x_3, x_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$x_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^5, & t \geq 0 \end{cases}, \quad x_4(t) = \begin{cases} t^5, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$
sunt soluţii ale problemei Cauchy (se demonstrează uşor că sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$ şi, verifică, evident, problema Cauchy).

1.2.2. Ecuaţii omogene.

Au **forma generală**:
$$x' = h\left(\frac{x}{t}\right), \tag{EO}$$
unde $h : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe intervalul nevid $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $h(r) \neq r$ pentru orice $r \in I$.

Teorema 1.2.2. *În ipotezele de mai sus, soluţia generală a ecuaţiei (EO) este dată de formula*
$$x(t) = tu(t),$$
pentru $t \neq 0$, unde $u = u(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile
$$u' = \frac{1}{t}(h(u) - u). \tag{1.11}$$

Demonstraţie. Din $x(t) = tu(t)$, prin derivare în raport cu t (cu formula produsului), rezultă că
$$x'(t) = u(t) + tu'(t).$$
Atunci ecuaţia (EO) se rescrie $u + tu' = h(u)$, care, pentru $t \neq 0$, este echivalentă cu (1.11). ∎

Exemplul 1.2.3. *Să se rezolve problema* Cauchy*:*
$$\begin{cases} tx' = x - te^{\frac{x}{t}} \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Deoarece t apare la numitor în exponent, trebuie să impunem condiţia $t \neq 0$, adică $t \in (0, \infty)$ sau $t \in (-\infty, 0)$. Cum din condiţia iniţială deducem că domeniul de definiţie al soluţiei îl conţine în mod necesar pe $t = 1$, lucrăm pentru $t \in (0, \infty)$.

Pentru a ne convinge că avem de-a face cu o ecuaţie omogenă, împărţim ecuaţia cu t (ştim deja că $t \neq 0$) şi obţinem
$$x' = \underbrace{\frac{x}{t} - e^{\frac{x}{t}}}_{h\left(\frac{x}{t}\right)}. \tag{1.12}$$

Facem schimbarea de funcţie necunoscută $\dfrac{x}{t} = u \Leftrightarrow x = tu$. Rezultă că $x' = u + tu'$ şi, înlocuind în ecuaţia (1.12), găsim

$$u + tu' = u - e^u \Leftrightarrow tu' = -e^u \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{t} \cdot e^u,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile în funcţia necunoscută $u = u(t)$.

Rezolvăm această ecuaţie. Separăm variabilele:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot e^u \Leftrightarrow e^{-u} du = -\frac{1}{t} dt,$$

apoi integrăm:

$$\int e^{-u} du = -\int \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow -e^{-u} = -\ln t + C, \text{ cu } t > 0,\ C \in \mathbb{R} \text{ constantă}$$

$$\Leftrightarrow e^{-u} = \ln t - C \Leftrightarrow -u = \ln(\ln t - C) \Leftrightarrow u(t) = -\ln(\ln t - C),$$

unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă, $t > 0$, iar pentru ca ln exterior să fie bine definit trebuie să aibă loc şi condiţia $\ln t - C > 0 \Leftrightarrow \ln t > C \Leftrightarrow t > e^C$, deci $t \in \left(e^C, +\infty\right)$.

Pentru a obţine soluţia generală $x = x(t)$ a ecuaţiei omogene (1.12), ne amintim că $x = tu$; prin urmare,

$$x(t) = -t \ln(\ln t - C), \text{ cu } C \in \mathbb{R} \text{ constant, } t \in \left(e^C, +\infty\right). \tag{1.13}$$

În final determinăm soluţia problemei Cauchy din enunţ. Ca să aflăm valoarea constantei C punem condiţia iniţială $x(1) = 0$. Făcând $t = 1$ în soluţia generală (1.13), obţinem

$$0 = x(1) = -\ln(0 - C) \Leftrightarrow \ln(-C) = 0 \Leftrightarrow -C = 1 \Leftrightarrow C = -1.$$

Deci soluţia problemei Cauchy este $x(t) = -t \ln(\ln t + 1)$; intervalul de definiţie al acestei funcţii este dat de condiţiile

$$\begin{cases} t > 0 \\ \ln t + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \ln t > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Observaţia 1.2.3. *O ecuaţie de forma*

$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}$$

este omogenă dacă şi numai dacă f şi g sunt funcţii omogene de acelaşi grad, adică există n astfel încât

$$\begin{cases} f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n f(t,x) \\ g(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n g(t,x) \end{cases} \text{, pentru orice } \lambda > 0.$$

Această ecuaţie se aduce la forma $x' = h\left(\dfrac{x}{t}\right)$ prin simplificarea forţată a lui t^n în membrul drept.

Exemplul 1.2.4. *Să se rezolve ecuaţia $2t^3 x' = x(2t^2 - x^2)$.*

Soluţie. Aducem ecuaţia la forma normală: împărţim cu $2t^3$, presupunând $t \neq 0$; obţinem

$$x' = \frac{2t^2 x - x^3}{2t^3}.$$

Avem $f(t,x) = 2t^2 x - x^3$, $g(t,x) = 2t^3$ şi observăm că

$$\begin{cases} f(\lambda t, \lambda x) = 2(\lambda t)^2 (\lambda x) - (\lambda x)^3 = \lambda^3 (2t^2 x - x^3) = \lambda^3 f(t,x) \\ g(\lambda t, \lambda x) = 2(\lambda t)^3 = 2\lambda^3 t^3 = \lambda^3 g(t,x) \end{cases} \text{, pentru orice } \lambda > 0,$$

deci funcţiile f şi g sunt ambele omogene de grad $n = 3$. Atunci transformăm ecuaţia în:

$$x' = \frac{t^3 \left(\frac{2t^2 x}{t^3} - \frac{x^3}{t^3}\right)}{2t^3} \Leftrightarrow x' = \underbrace{\frac{x}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^3}_{h\left(\frac{x}{t}\right)}$$

şi acum este evident că este o ecuaţie omogenă. Pentru a o rezolva facem schimbarea de funcţie necunoscută $\frac{x}{t} = u \Leftrightarrow x = tu$. Rezultă că $x' = u + tu'$, deci ecuaţia omogenă se rescrie

$$u + tu' = u - \frac{1}{2}u^3 \Leftrightarrow tu' = -\frac{u^3}{2} \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{t} \cdot \frac{u^3}{2},$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile în funcţia necunoscută $u = u(t)$. Separăm variabilele şi apoi integrăm:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}\cdot\frac{u^3}{2} \Rightarrow -\frac{2}{u^3}du = \frac{dt}{t}, \text{ dacă } u \neq 0 \Rightarrow -2\int u^{-3}\,du = \int \frac{dt}{t} \Leftrightarrow -2\cdot\frac{u^{-2}}{-2} = \ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u^2} = \ln|t| + C \Rightarrow u_{1,2}(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\ln|t| + C}}, \text{ cu } C \in \mathbb{R} \text{ constant, } t \neq 0,\ \ln|t| + C > 0.$$

În procesul de integrare am pierdut soluţia constantă $u_3(t) = 0$, cu $t \neq 0$ (este uşor de observat că înlocuind-o în ecuaţia $u' = -\frac{1}{t} \cdot \frac{u^3}{2}$ obţinem că ambii membri sunt 0).

La început am făcut schimbarea de funcţie necunoscută $x = tu$, deci soluţiile ecuaţiei omogene

$$2t^3x' = x(2t^2 - x^2)$$

sunt:

$$x_{1,2}(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{\ln|t| + C}}, \text{ cu } C \in \mathbb{R} \text{ constant, } t \neq 0,\ \ln|t| + C > 0;$$

$$x_3(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \text{ (poate fi prelungită prin continuitate în } t = 0).$$

Exemplul 1.2.5. *Să se rezolve ecuaţia* $x' = \frac{4tx - x^2}{t^2}$.

Soluţie. În primul rând, pentru ca membrul drept al ecuaţiei să fie bine definit trebuie să impunem condiţia $t \neq 0$, prin urmare lucrăm cu $t \in (0, \infty)$ sau cu $t \in (-\infty, 0)$.

Avem $f(t, x) = 4tx - x^2$, $g(t, x) = t^2$ şi observăm că

$$\begin{cases} f(\lambda t, \lambda x) = 4\lambda^2 tx - \lambda^2 x^2 = \lambda^2(4tx - x^2) = \lambda^2 f(t, x) \\ g(\lambda t, \lambda x) = \lambda^2 t^2 = \lambda^2 g(t, x) \end{cases}, \text{ pentru orice } \lambda > 0,$$

deci funcţiile f şi g sunt ambele omogene de grad $n = 2$. Atunci transformăm ecuaţia în:

$$x' = \frac{t^2\left(\frac{4tx}{t^2} - \frac{x^2}{t^2}\right)}{t^2} \Leftrightarrow x' = \underbrace{4 \cdot \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2}_{h\left(\frac{x}{t}\right)}$$

şi acum este evident că este o ecuaţie omogenă. Pentru a o rezolva facem schimbarea de funcţie necunoscută $\frac{x}{t} = u \Leftrightarrow x = tu$. Rezultă că $x' = u + tu'$, deci ecuaţia omogenă se rescrie

$$u + tu' = 4u - u^2 \Leftrightarrow tu' = 3u - u^2 \Leftrightarrow u' = \frac{1}{t} \cdot (3u - u^2),$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile în funcţia necunoscută $u = u(t)$. Separăm variabilele şi apoi integrăm:

$$\frac{du}{dt} = \frac{3u - u^2}{t} \Rightarrow \frac{du}{3u - u^2} = \frac{dt}{t}, \text{ dacă } 3u - u^2 \neq 0 \text{ (adică dacă } u(t) \notin \{0, 3\}) \Rightarrow \int \frac{du}{3u - u^2} = \int \frac{dt}{t}.$$

Dar

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{3u - u^2} &= \int \frac{du}{u(3 - u)} = \frac{1}{3}\int \frac{(3 - u) + u}{u(3 - u)}\,du = \frac{1}{3}\left(\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{3 - u}\right) \\ &= \frac{1}{3}(\ln|u| - \ln|3 - u|) + C_1 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{3 - u}\right| + C_1, \\ \int \frac{dt}{t} &= \ln|t| + C_2, \end{aligned}$$

deci (notând $C_2 - C_1 = C \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = \ln|t| + C \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = 3\ln|t| + 3C \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = \ln|t|^3 + \ln k \Leftrightarrow \ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = \ln k|t|^3,$$

unde $k = e^{3C} > 0$ constant. În baza injectivităţii funcţiei ln, relaţia precedentă este echivalentă cu

$$\left|\frac{u}{3-u}\right| = k|t|^3 \Leftrightarrow \frac{u}{3-u} = \pm kt^3 \Leftrightarrow \frac{u}{3-u} = at^3,$$

unde $a = \pm k \in \mathbb{R}^*$ este constantă. Altfel spus,

$$u = (3-u)at^3 \Leftrightarrow u(1+at^3) = 3at^3$$

şi am obţinut o prima soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile:

$$u_1(t) = \frac{3at^3}{1+at^3}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } t \neq 0,\ 1+at^3 \neq 0$$

(se arată uşor că, deoarece $t \neq 0$, $a \neq 0$, avem $u_1(t) \neq 0$ şi $u_1(t) \neq 3$ pentru orice t din intervalul de definiţie al soluţiei).

În procesul de integrare am pierdut soluţiile particulare constante $u_2(t) = 0$ şi $u_3(t) = 3$, cu $t \neq 0$ (mai precis, $t \in (0,\infty)$ sau $t \in (-\infty, 0)$); se verifică imediat că înlocuind aceste funcţii în ecuaţia $u' = \frac{1}{t}\cdot(3u-u^2)$, ambii membri dau zero.

Amintindu-ne că am făcut substituţia $x = tu$, putem scrie acum soluţiile ecuaţiei omogene iniţiale:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = \frac{3at^4}{1+at^3}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } t \neq 0,\ 1+at^3 \neq 0;\\ &x_2(t) = 0, \quad t \neq 0;\\ &x_3(t) = 3t, \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplul 1.2.6. *Să se rezolve ecuaţia* $x' = -\dfrac{x^2+3tx+4t^2}{4x^2+3tx+t^2}$.

Soluţie. În primul rând, punem condiţia de bună definire $4x^2+3tx+t^2 \neq 0$.
Avem $f(t,x) = -(x^2+3tx+4t^2)$, $g(t,x) = 4x^2+3tx+t^2$ şi observăm că

$$\begin{cases} f(\lambda t, \lambda x) = -(\lambda^2x^2 + 3\lambda^2 tx + 4\lambda^2t^2) = -\lambda^2(x^2+3tx+4t^2) = \lambda^2 f(t,x) \\ g(\lambda t, \lambda x) = 4\lambda^2x^2 + 3\lambda^2tx + \lambda^2t^2 = \lambda^2(4x^2+3tx+t^2) = \lambda^2 g(t,x) \end{cases}, \text{ pentru orice } \lambda > 0,$$

deci funcţiile f şi g sunt ambele omogene de grad $n = 2$. Atunci transformăm ecuaţia în:

$$x' = \frac{-t^2\left(\frac{x^2}{t^2} + \frac{3tx}{t^2} + 4\right)}{t^2\left(\frac{4x^2}{t^2} + \frac{3tx}{t^2} + 1\right)} \Leftrightarrow x' = \underbrace{-\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{t} + 4}{4\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 3\cdot\frac{x}{t} + 1}}_{h\left(\frac{x}{t}\right)},$$

dacă $t \neq 0$ şi acum este evident că avem o ecuaţie omogenă. Pentru a o rezolva facem schimbarea de funcţie necunoscută $\frac{x}{t} = u \Leftrightarrow x = tu$. Rezultă că $x' = u + tu'$, deci ecuaţia omogenă se rescrie

$$u + tu' = -\frac{u^2+3u+4}{4u^2+3u+1} \Leftrightarrow tu' = -\frac{u^2+3u+4+u(4u^2+3u+1)}{4u^2+3u+1} \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{t}\cdot\frac{4u^3+4u^2+4u+4}{4u^2+3u+1}.$$

Am ajuns la o ecuaţie cu variabile separabile. Separăm variabilele:

$$\frac{du}{dt} = -4\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{(u+1)(u^2+1)}{4u^2+3u+1} \Rightarrow \frac{4u^2+3u+1}{(u+1)(u^2+1)}du = -4\cdot\frac{dt}{t}, \text{ dacă } u \neq -1.$$

Integrăm:

$$\int \frac{4u^2+3u+1}{(u+1)(u^2+1)}du = -4\int\frac{dt}{t}. \tag{1.14}$$

Pentru a calcula prima integrală descompunem funcţia în funcţii raţionale simple. Căutăm

$$\frac{4u^2+3u+1}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}, \text{ cu } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Aducând la acelaşi numitor, obţinem

$$\frac{4u^2+3u+1}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{A(u^2+1)+(Bu+C)(u+1)}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{(A+B)u^2+(B+C)u+(A+C)}{(u+1)(u^2+1)},$$

prin urmare $\begin{cases} A+B=4 \\ B+C=3 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=0 \end{cases}$. Aşadar, ecuaţia (1.14) se transformă în:

$$\int \frac{1}{u+1}\,du + 3\int \frac{u}{u^2+1}\,du = -4\int \frac{dt}{t}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u+1| + \frac{3}{2}\ln(u^2+1) = -4\ln|t| + C,\ C \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u+1|(u^2+1)^{\frac{3}{2}}t^4 = C \Leftrightarrow |u+1|(u^2+1)^{\frac{3}{2}}t^4 = e^C \ \Big|^2$$

$$\Leftrightarrow (u+1)^2(u^2+1)^3t^8 = e^{2C} = k > 0 \text{ constant.}$$

Am obţinut o familie de soluţii ale ecuaţiei cu variabile separabile dată în formă implicită:

$$(u_1+1)^2(u_1^2+1)^3t^8 = k > 0, \text{ cu } 4u_1^2+3u_1+1 \neq 0;$$

să mai observăm că, într-adevăr, $u_1 \neq -1$ şi $t \neq 0$, deoarece $k \neq 0$. Deoarece ecuaţia de gradul al doilea $4y^2+3y+1=0$ are discriminantul $\Delta = 9-4\cdot 4 < 0$, ea nu are rădcini reale, deci condiţia $4u_1^2+3u_1+1 \neq 0$ este îndeplinită automat.

Se verifică imediat că ecuaţia cu variabile separabile $tu' = -\dfrac{4u^3+4u^2+4u+4}{4u^2+3u+1}$ are şi soluţia constantă $u_2(t) = -1$, definită pe $\mathbb{R}$ (ambii membri ai ecuaţiei se anulează).

Cum am făcut schimbarea de funcţie necunoscută $x = tu \Leftrightarrow u = \dfrac{x}{t}$, deducem că ecuaţia omogenă are o familie de soluţii date implicit:

$$\left(\frac{x_1}{t}+1\right)^2\left(\left(\frac{x_1}{t}\right)^2+1\right)^3 t^8 = k > 0, \text{ cu } 4\left(\frac{x_1}{t}\right)^2 + 3\frac{x_1}{t} + 1 \neq 0$$

sau, mai simplu,

$$(x_1(t)+t)^2(x_1^2(t)+t^2)^3 = k > 0, \text{ cu } 4x_1(t)^2 + 3tx_1(t) + t^2 \neq 0$$

şi soluţia particulară $x_2(t) = -t$, $t \neq 0$ (pentru $t = 0$ numitorul membrului drept al ecuaţiei se anulează).

1.2.2.1. *Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene.* Fie ecuaţia:

$$x' = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right), \tag{1.15}$$

unde f este o funcţie continuă, a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$, cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + b_1^2 > 0$ şi $a_{21}^2 + a_{22}^2 + b_2^2 > 0$.

Asociem ecuaţiei (1.15) sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}t + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}t + b_2 = 0. \end{cases} \tag{S}$$

Avem următoarele 3 cazuri:

(i) Dacă sistemul (S) este incompatibil (adică nu are soluţii) – ceea ce revine la faptul că există o constantă $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{12} \\ a_{21} = \lambda a_{22} \\ b_1 \neq \lambda b_2, \end{cases}$$

atunci prin schimbarea de funcţie necunoscută $a_{11}x + a_{12}t + b_1 = y$ sau $a_{21}x + a_{22}t + b_2 = y$ ecuaţia (1.15) se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y = y(t)$.

(ii) Dacă sistemul (S) este compatibil nedeterminat (adică are o infinitate de soluţii) – ceea ce revine la faptul că există o constantă $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{12} \\ a_{21} = \lambda a_{22} \\ b_1 = \lambda b_2, \end{cases}$$

atunci ecuaţia (1.15) poate fi rescrisă, echivalent,

$$x' = f\left(\frac{\lambda a_{21}x + \lambda a_{22}t + \lambda b_2}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right) \Leftrightarrow x' = f\left(\frac{\lambda\left(a_{21}x + a_{22}t + b_2\right)}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right) \Leftrightarrow x' = f(\lambda),$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile foarte simplă (x' =constant).

(iii) Dacă sistemul (S) este compatibil determinat, având soluţia unică (t_0, x_0), atunci prin substituţia

$$\begin{cases} x = y + x_0 \\ t = s + t_0, \end{cases} \tag{1.16}$$

ecuaţia (1.15) se transformă într-o ecuaţie omogenă. Într-adevăr,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(y + x_0) = \frac{dy}{dt} + \frac{dx_0}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{d}{dt}(t - t_0) = \frac{dy}{ds}$$

$$f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right) = f\left(\frac{a_{11}(y + x_0) + a_{12}(s + t_0) + b_1}{a_{21}(y + x_0) + a_{22}(s + t_0) + b_2}\right) = f\left(\frac{a_{11}y + a_{12}s + \overbrace{a_{11}x_0 + a_{12}t_0 + b_1}^{=0}}{a_{21}y + a_{22}s + \underbrace{a_{21}x_0 + a_{22}t_0 + b_2}_{=0}}\right)$$

$$= f\left(\frac{a_{11}y + a_{12}s}{a_{21}y + a_{22}s}\right) = f\left(\frac{s\left(a_{11}\frac{y}{s} + a_{12}\right)}{s\left(a_{21}\frac{y}{s} + a_{22}\right)}\right) = f\left(\frac{a_{11}\frac{y}{s} + a_{12}}{a_{21}\frac{y}{s} + a_{22}}\right) = h\left(\frac{y}{s}\right),\ s \neq 0,$$

deci ecuaţia (1.15) poate fi adusă la forma $\dfrac{dy}{ds} = h\left(\dfrac{y}{s}\right)$.

Exemplul 1.2.7. *Să se rezolve ecuaţiile:*
a) $x'(x - t + 2) = t - x - 1$; *b)* $x' = (x - t)^2 + 1$; *c)* $x' = \dfrac{x + t - 2}{x - t - 4}$.

Soluţie. a) Aici funcţia f este funcţia identică. Asociem ecuaţiei diferenţiale sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} x - t + 2 = 0 \\ t - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Deoarece prin adunarea ecuaţiilor acestui sistem obţinem relaţia falsă $1 = 0$, rezultă că acesta este incompatibil, deci suntem în cazul (i). Facem schimbarea de funcţie necunoscută $y = x - t + 2$, de unde $x = y + t - 2$ şi $x' = y' + 1$. Atunci ecuaţia din enunţ devine:

$$(y' + 1)y = t - (y + t - 2) - 1 \Leftrightarrow yy' = 1 - 2y$$

şi este o ecuaţie cu variabile separabile. O rescriem

$$y\frac{dy}{dt} = 1 - 2y \Rightarrow \frac{y}{1 - 2y}\,dy = dt, \text{ dacă } y \neq \frac{1}{2}.$$

Prin urmare,

$$\int \frac{y}{1 - 2y}dy = \int dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{2}\frac{2y - 1 + 1}{1 - 2y}\,dy = t + C \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}\int \frac{(1 - 2y)'}{1 - 2y} = t + C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y}{2} - \frac{1}{4}\ln|1 - 2y| = t + C \Leftrightarrow 2y + \ln|1 - 2y| + 4t = C_1 \text{ constant.}$$

În procesul de integrare a fost pierdută soluţia $y(t) = \dfrac{1}{2}$, $t \in \mathbb{R}$ a ecuaţiei cu variabile separabile (este evident că $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)' = 0 = 1 - 2\cdot\dfrac{1}{2}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$).

Revenind la funcţia necunoscută x, putem concluziona că ecuaţia dată are familia de soluţii dată implicit

$$2(x - t + 2) + \ln|1 - 2(x - t + 2)| + 4t = C_1 \text{ constant}$$

sau, mai simplu,

$$2(x + t + 2) + \ln|2t - 2x - 3| = C_1 \text{ constant}$$

şi soluţia particulară dată explicit $x(t) = \dfrac{1}{2} + t - 2 = t - \dfrac{3}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) În acest caz funcţia $f(r) = r^2 + 1$. Sistemul algebric liniar care ar trebui asociat ecuaţiei diferenţiale este:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

şi este, evident, incompatibil, deci ne aflăm, din nou, în cazul (i). Facem schimbarea de funcţie necunoscută $y = x - t$, de unde $x = y + t$ şi $x' = y' + 1$. Atunci ecuaţia din enunţ se rescrie sub forma ecuaţiei cu variabile separabile:

$$y' + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow y' = y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dt, \text{ dacă } y \neq 0.$$

Prin urmare,

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = t + C \Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{t + C}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constant}, \ t \neq -C.$$

În procesul de integrare a fost pierdută soluţia $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ a ecuaţiei cu variabile separabile (este clar că $0' = 0^2$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$).

Revenind la funcţia necunoscută x, putem concluziona că ecuaţia dată are familia de soluţii

$$x(t) = t - \frac{1}{t + C}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constant}, \ t \neq -C,$$

la care se adaugă soluţia particulară $x(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

c) În primul rând punem condiţia ca $x - t - 4 \neq 0$, care va trebui verificată de fiecare soluţie a ecuaţiei. În acest caz f este funcţia identitate, iar sistemul algebric liniar asociat ecuaţiei diferenţiale,

$$\begin{cases} x + t - 2 = 0 \\ x - t - 4 = 0. \end{cases}$$

Prin adunarea ecuaţiilor din sistem găsim $2x = 6$, de unde $x = 3$ şi, înlocuind în prima ecuaţie a sistemului, obţinem $t = -1$. Deci sistemul are soluţia unică $(x_0, t_0) = (3, -1)$ şi suntem în cazul (iii).

Facem substituţia (1.16), care în acest caz revine la:

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ t = s - 1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Atunci

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(y + 3) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{d}{dt}(t + 1) = \frac{dy}{ds}$$
$$\frac{x + t - 2}{x - t - 4} = \frac{(y + 3) + (s - 1) - 2}{(y + 3) - (s - 1) - 4} = \frac{y + s}{y - s} = \frac{s\left(\frac{y}{s} + 1\right)}{s\left(\frac{y}{s} - 1\right)} = \frac{\frac{y}{s} + 1}{\frac{y}{s} - 1}, \ s \neq 0,$$

deci ecuaţia din enunţ ia forma ecuaţiei omogene

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{y}{s} + 1}{\frac{y}{s} - 1}, \ s \neq 0; \tag{1.18}$$

desigur, condiţia $x - t - 4 \neq 0$ s-a transformat, pe rând, în $y - s \neq 0$ şi apoi $\frac{y}{s} - 1 \neq 0$, cu $s \neq 0$.

Pentru a rezolva ecuaţia omogenă (1.18) facem substituţia $\dfrac{y}{s} = u$, de unde $y = su$ şi $\dfrac{dy}{ds} = u + s\,\dfrac{du}{ds}$. Suntem conduşi la ecuaţia cu variabile separabile

$$u + s\,\frac{du}{ds} = \frac{u+1}{u-1} \Leftrightarrow s\,\frac{du}{ds} = \frac{u+1-u^2+u}{u-1} \Leftrightarrow \frac{u-1}{-u^2+2u+1}\,du = \frac{ds}{s}, \text{ dacă } \; -u^2+2u+1 \neq 0.$$

Prin integrare obţinem

$$\int \frac{u-1}{-u^2+2u+1}\,du = \int \frac{ds}{s} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{\left(u^2-2u-1\right)'}{u^2-2u-1} = \ln|s| + C \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|u^2-2u-1| = \ln|s| + C$$

$$\Leftrightarrow \ln|u^2-2u-1| = -2\ln|s| - 2C \Leftrightarrow \ln|u^2-2u-1| = \ln\frac{1}{s^2} + \ln k \Leftrightarrow \ln|u^2-2u-1| = \ln\frac{k}{s^2},$$

unde $C \in \mathbb{R}$ şi $k = e^C > 0$ sunt constante. Datorită injectivităţii funcţiei ln rezultă că

$$|u^2-2u-1| = \frac{k}{s^2} \Leftrightarrow s^2\left(u^2-2u-1\right) = \pm k \overset{not.}{=} a \in \mathbb{R}^* \text{ constant.}$$

Am obţinut astfel o familie de soluţii date implicit pentru ecuaţia cu variabile separabile, şi anume:

$$s^2\left(u_1^2(s) - 2u_1(s) - 1\right) = a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } \; u_1 \neq 1. \tag{1.19}$$

În cazul când $-u^2+2u+1 = 0$, ceea ce revine la $u_{2,3}(t) = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$, avem două soluţii particulare ale ecuaţiei cu variabile separabile $s\,\dfrac{du}{ds} = \dfrac{-u^2+2u+1}{u-1}$ (este uşor de văzut că înlocuind funcţiile constante u_2 şi u_3 în ecuaţie obţinem $0 = 0$).

Acum revenim, pas cu pas, la funcţia necunoscută iniţială, $x = x(t)$. Deoarece $\dfrac{y}{s} = u$, relaţia (1.19) se rescrie:

$$s^2\left(\frac{y_1^2(s)}{s^2} - 2\,\frac{y_1(s)}{s} - 1\right) = a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } \; y_1(s) \neq s$$

sau, echivalent,

$$y_1^2(s) - 2y_1(s)s - s^2 = a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } \; y_1(s) \neq s.$$

Soluţiile particulare $u_{2,3}$ conduc, folosind relaţia $y = su$, la $y_{2,3}(s) = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)s$.

În final, utilizând formulele (1.17), obţinem pentru ecuaţia iniţială familia de soluţii date implicit:

$$\left(x_1(t) - 3\right)^2 - 2\left(x_1(t) - 3\right)(t+1) - (t+1)^2 = a \in \mathbb{R}^* \text{ constant, } \; x_1(t) - t - 4 \neq 0$$

şi soluţiile particulare $x_{2,3}(t) = 3 + \left(1 \pm \sqrt{2}\right)(t+1) = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)t + 4 \pm \sqrt{2}$, $t \neq -1$ (pentru $t = -1$ se anulează numitorul fracţiei din membrul drept al ecuaţiei).

1.2.3. Ecuaţii liniare de ordinul întâi.

Au **forma generală**:

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{EL}$$

unde $a, b : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ deschis nevid. Dacă $b(t) = 0$, pentru toţi $t \in I$, ecuaţia se numeşte liniară şi omogenă, iar în caz contrar, liniară şi neomogenă.

TEOREMA 1.2.3. *Soluţia generală a ecuaţiei (EL) este dată de* ***formula variaţiei constantelor:***

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds, \; \forall t \in I, \tag{FVC}$$

unde $t_0 \in I$ este fixat, iar $x_0 \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAŢIE. Avem de demonstrat că:

(1) dacă x este dată de (FVC), atunci x verifică (EL) (şi $x(t_0) = x_0$);
(2) dacă x este o soluţie pentru (EL), atunci x este dată de (FVC).

Într-adevăr, din faptul că funcţiile a, b sunt continue pe I, rezultă că $\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$ şi $\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds$ sunt funcţii derivabile pe I (în raport cu t), cu derivata continuă. Ca atare, x dată de (FVC) este o funcţie de clasă C^1 pe I. Derivând în ambii membri în raport cu t relaţia (FVC), se obţine[2]:

$$x'(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)' + \int_{t_0}^{t} \left(e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} \left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right)' b(s)\right) ds + e^{\int_t^t a(\tau)d\tau} b(t)t' - e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} b(t_0)t_0'$$

$$= x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} a(t) + \int_{t_0}^{t} \left(e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} a(t)b(s)\right) ds + b(t) - 0$$

$$= a(t)\left(x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} b(s)ds\right) + b(t) = a(t)x(t) + b(t),\ \forall t \in I.$$

Făcând $t = t_0$ în (FVC), se constată că $x(t_0) = x_0$.

Reciproc, presupunem că $x : I_x \to \mathbb{R}$ ($I_x \subseteq I$ fiind un interval deschis nevid) este o soluţie a (EL). Atunci:

$$x'(s) - a(s)x(s) = b(s),\ \forall s \in I_x. \tag{1.20}$$

Fixăm $t_0 \in I_x$ şi înmulţim ambii membri ai lui (1.20) cu $e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau}$. Rezultă:

$$\frac{d}{ds}\left(x(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau}\right) = b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau},\ \forall s \in I_x.$$

Integrăm de la t_0 la $t \in I_x$ şi în membrul stâng aplicăm formula Leibniz-Newton:

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} - x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t_0} a(\tau)d\tau} = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds,$$

adică, notând $x_0 = x(t_0)$:

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds,$$

de unde:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds\right) \Leftrightarrow x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds$$

$$\Leftrightarrow x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} ds,\ \forall t \in I_x.$$

Deci x verifică (FVC) pe I_x. Din (FVC) rezultă că orice soluţie a (EL) poate fi prelungită ca soluţie a aceleiaşi ecuaţii pe întreg intervalul I. ■

Exemplul 1.2.8. *Să se rezolve problema* Cauchy $\begin{cases} x' - 4t^3x = e^{t^4} \\ x(0) = 2 \end{cases}$.

Soluţie. Se scrie mai întâi ecuaţia în forma normală (EL): $x' = 4t^3x + e^{t^4}$, pentru a nu greşi semnul lui $a(t)$. Identificăm în problema noastră coeficientul $a(t) = 4t^3$ al lui x şi termenul liber $b(t) = e^{t^4}$, ambele fiind funcţii definite pe $\mathbb{R}$. Datele iniţiale sunt $t_0 = 0$, $x_0 = 2$. Conform formulei variaţiei constantelor, soluţia x a problemei Cauchy este definită tot pe $\mathbb{R}$ şi este dată prin:

$$x(t) = 2e^{\int_0^t 4s^3ds} + \int_0^t e^{\int_s^t 4\tau^3d\tau} e^{s^4} ds = 2e^{t^4} + \int_0^t e^{t^4 - s^4} e^{s^4} ds$$

$$= 2e^{t^4} + e^{t^4}\int_0^t ds = 2e^{t^4} + e^{t^4}t = e^{t^4}(t+2),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

[2] Se aplică următoarea formulă de derivare a unei integrale în raport cu un parametru care apare şi în limitele de integrare, şi sub integrală:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{p(t)}^{q(t)} f(s,t)ds\right) = \int_{p(t)}^{q(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)ds + f(q(t),t)q'(t) - f(p(t),t)p'(t).$$

Cursul 3

1.2.4. Ecuaţii Bernoulli.

Au **forma generală**:

$$x' = a(t)x + b(t)x^\alpha, \qquad (EB),$$

unde $a, b : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, neidentic nule şi neproporţionale pe intervalul real nevid I, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Observaţia 1.2.4. *Restricţiile puse asupra datelor a, b, α ne asigură că nu avem de-a face cu o ecuaţie liniară sau cu variabile separabile. Într-adevăr,*

- *dacă a este funcţia identic nulă, atunci ecuaţia (EB) se transformă în ecuaţia cu variabile separabile $x' = b(t)x^\alpha$;*
- *dacă b este funcţia identic nulă, atunci ecuaţia (EB) se transformă în ecuaţia liniară omogenă (sau cu variabile separabile) $x' = a(t)x$;*
- *dacă funcţiile a şi b sunt proporţionale, adică dacă există o constantă $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât*

  $$a(t) = \lambda b(t), \text{ pentru orice } t \in I,$$

  atunci ecuaţia (EB) se transformă în ecuaţia cu variabile separabile $x' = b(t)(\lambda x + x^\alpha)$;
- *dacă $\alpha = 0$, atunci ecuaţia (EB) se transformă în ecuaţia liniară $x' = a(t)x + b(t)$;*
- *dacă $\alpha = 1$, atunci ecuaţia (EB) se transformă în ecuaţia liniară omogenă (sau cu variabile separabile) $x' = (a(t) + b(t))x$.*

Observaţia 1.2.5. *a) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, atunci puterea x^α este bine definită doar pentru $x \neq 0$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, atunci puterea x^α nu este bine definită decât pentru $x > 0$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$, atunci puterea x^α este bine definită doar pentru $x \geq 0$.*

b) Este evident că dacă $\alpha > 0$, atunci funcţia constantă $x(t) = 0$, pentru orice $t \in I$ este o soluţie a ecuaţiei (EB).

Teorema 1.2.4. *În ipotezele de mai sus, funcţia $x = x(t)$ este o soluţie strict pozitivă a ecuaţiei* Bernoulli *(EB) dacă şi numai dacă funcţia $y = y(t)$, definită prin*

$$y = x^{1-\alpha}, \quad \forall t \in I_x \tag{1.21}$$

este o soluţie strict pozitivă a ecuaţiei liniare neomogene

$$y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t). \tag{1.22}$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ ": Presupunem că funcţia strict pozitivă x este o soluţie a ecuaţiei (EB). Facem schimbarea de funcţie necunoscută (1.21) şi exprimăm mai întâi pe x, apoi pe x' cu ajutorul lui y (când derivăm nu uităm că y este o funcţie de t, deci derivăm în raport cu t o funcţie compusă):

$$x = y^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow x' = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{1}{1-\alpha}-1} y' = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y'.$$

Înlocuim x, x' în ecuaţia (EB) şi obţinem:

$$\frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y' = a(t) y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \ \Big| \cdot (1-\alpha) y^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow y' = a(t)(1-\alpha)y + b(t)(1-\alpha),$$

adică y verifică (1.22).

" $\Leftarrow$ ": Presupunem că funcţia strict pozitivă y este o soluţie a ecuaţiei (1.22). Facem schimbarea de funcţie necunoscută (1.21), de unde rezultă că

$$y' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x'.$$

Înlocuind y, y' în (1.22), găsim

$$(1-\alpha)x^{-\alpha}x' = (1-\alpha)a(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t) \ \Big| \cdot \frac{1}{1-\alpha} x^\alpha \Rightarrow (EB).$$

∎

Exemplul 1.2.9. *Să se rezolve problema* Cauchy $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{2(t^2-1)}x + \dfrac{t}{2x} \\ x(0) = 1. \end{cases}$

Soluţie. În primul rând, pentru ca membrul drept al ecuaţiei să fie bine definit, impunem condiţiile

$$\begin{cases} t^2 - 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \pm 1 \\ x(t) \neq 0, \ \forall t \in I_x. \end{cases}$$

Ţinând cont că din condiţia iniţială $x(0) = 1$ rezultă că intervalul de definiţie al soluţiei, I_x, trebuie să conţină punctul 0, deducem că intervalul maxim pe care putem lucra este $t \in (-1, 1)$. Mai mult, tot din condiţia iniţială $x(0) = 1 > 0$ deducem că $x(t) > 0$ pentru orice $t \in I_x$, întrucât dacă x ar lua vreo valoare strict negativă, fiind funcţie continuă ar rezulta că există măcar un punct în care x se anulează, contradicţie.

Avem o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = -1$. Facem schimbarea de funcţie necunoscută

$$y = x^{1-\alpha} = x^2 \quad (\Rightarrow y > 0).$$

Din această expresie scoatem pe x şi apoi îl derivăm (în raport cu t) pentru a-l putea înlocui în ecuaţia Bernoulli. Obţinem $x = \sqrt{y}$ (ştim $x > 0$), de unde rezultă că $x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$.

Acum ecuaţia Bernoulli se transformă în

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = \frac{t}{2(t^2-1)}\sqrt{y} + \frac{t}{2\sqrt{y}}.$$

Înmulţim cu $2\sqrt{y}$ şi ajungem la ecuaţia liniară în necunoscuta $y = y(t)$:

$$y' = \frac{t}{t^2-1}y + t, \quad t \in (-1, 1).$$

Pentru a o rezolva aplicăm formula variaţiei constantelor cu $t_0 = 0$, $y_0 = y(t_0) = y(0) = (x(0))^2 = 1$ (a se vedea condiţia iniţială din problema Cauchy); ţinem cont că $t \in (-1, 1)$, deci $1 - t^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 \cdot e^{\int_0^t \frac{s}{s^2-1}\,ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \frac{\tau}{\tau^2-1}\,d\tau} s\,ds = e^{\frac{1}{2}\ln(1-s^2)|_0^t} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}\ln(1-\tau^2)|_s^t} s\,ds = e^{\frac{1}{2}\ln(1-t^2)} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}\ln\frac{1-t^2}{1-s^2}} s\,ds \\
&= e^{\ln\sqrt{1-t^2}} + \int_0^t e^{\ln\sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}}} s\,ds = \sqrt{1-t^2} + \int_0^t \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}} s\,ds = \sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-t^2}\int_0^t \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\
&= \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\int_0^t (1-s^2)'(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}ds = \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,\left.\frac{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^t \\
&= \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-t^2}\left(\sqrt{1-t^2} - 1\right) = 2\sqrt{1-t^2} - (1-t^2), \quad t \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

Revenind la x, obţinem soluţia problemei Cauchy din enunţ:

$$x(t) = \sqrt{2\sqrt{1-t^2} - (1-t^2)}, \quad t \in (-1, 1).$$

Exemplul 1.2.10. *Să se rezolve ecuaţia* $tx' = 4x + 2t^2\sqrt{x}$.

Soluţie. Prima condiţie pe care o punem este $x \geq 0$, pentru buna definire a radicalului (deci ecuaţia nu poate avea decât soluţii pozitive).

Pentru a-i identifica tipul, aducem ecuaţia la forma normală, împărţind cu t (presupus nenul):

$$x' = \frac{4}{t} \cdot x + 2t\sqrt{x}. \tag{1.23}$$

Acum e clar că ecuaţia (1.23) este de tip Bernoulli, cu $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Observăm imediat că funcţia constantă $x(t) = 0$, cu $t \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei iniţiale (ambii membri se anulează).

În continuare căutăm soluţiile $x > 0$ ale ecuaţiei (1.23). În acest scop facem schimbarea de funcţie necunoscută

$$y = x^{1-\alpha} = \sqrt{x} \quad (\Rightarrow y > 0).$$

Din această expresie scoatem pe x, îl derivăm şi înlocuim în ecuaţia Bernoulli. Obţinem $x = y^2$, de unde rezultă că $x' = 2yy'$; ecuaţia (1.23) se transformă în

$$2yy' = \frac{4}{t} \cdot y^2 + 2ty$$

sau, echivalent, împărţind cu $2y \neq 0$,

$$y' = \frac{2}{t} \cdot y + t, \quad t \neq 0,$$

care este o ecuaţie liniară în funcţia necunoscută $y = y(t)$. Soluţia ei generală este dată de formula variaţiei constantelor:

$$y(t) = y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \frac{2}{s}\, ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t \frac{2}{\tau}\, d\tau} s\, ds.$$

Să presupunem că $t \in (0, \infty)$; rezultă că $t_0, s, \tau \in (0, \infty)$. Observând că

$$\int_{t_0}^{t} \frac{2}{s}\, ds = 2 \ln |s| \Big|_{t_0}^{t} = \ln \frac{t^2}{t_0^2},$$

alegem, pentru uşurinţa calculului, $t_0 = 1 \in (0, \infty)$ şi notăm $y(t_0) = y(1) = C \in \mathbb{R}$. Atunci

$$y(t) = Ce^{\ln t^2} + \int_1^t e^{\ln \frac{t^2}{s^2}} s\, ds = Ct^2 + \int_1^t \frac{t^2}{s^2} \cdot s\, ds = Ct^2 + t^2 \int_1^t \frac{ds}{s} = Ct^2 + t^2 \ln |s| \Big|_1^t = t^2(C + \ln t),$$

unde $t \in (0, \infty)$, C constantă reală, $C + \ln t > 0$.

Procedând analog în cazul $t \in (-\infty, 0)$, dar alegând $t_0 = -1 \in (-\infty, 0)$, obţinem soluţia

$$\widetilde{y}(t) = t^2(\widetilde{C} + \ln(-t)),$$

unde $t \in (-\infty, 0)$, $\widetilde{C}$ constantă reală, $\widetilde{C} + \ln(-t) > 0$.

Revenim la funcţia $x = y^2$ şi găsim soluţiile ecuaţiei Bernoulli:

$$x(t) = t^4(C + \ln t)^2, \quad t \in (0, \infty),\ C \text{ constantă reală, } C + \ln t > 0,$$

$$\widetilde{x}(t) = t^4(\widetilde{C} + \ln(-t))^2, \quad t \in (-\infty, 0),\ \widetilde{C} \text{ constantă reală, } \widetilde{C} + \ln(-t) > 0,$$

care se adaugă soluţiei nule.

1.2.5. Ecuaţii Riccati.

Au **forma generală**:

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t), \tag{ER}$$

unde $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe intervalul real nevid I, cu b, c neidentic nule pe I.

Observaţia 1.2.6. *Dacă b este funcţia identic nulă, atunci ecuaţia (ER) se transformă în ecuaţia liniară $x' = a(t)x + c(t)$, iar dacă c este funcţia identic nulă, atunci ecuaţia (ER) se transformă în ecuaţia* Bernoulli $x' = a(t)x + b(t)x^2$ *cu $\alpha = 2$.*

Nu se cunoaşte o metodă de determinare a soluţiei generale a ecuaţiei Riccati decât atunci când ştim o soluţie particulară a ecuaţiei.

Teorema 1.2.5. *În ipotezele de mai sus, dacă $\varphi : J \to \mathbb{R}$ (unde $J \subseteq I$ este un interval) este o soluţie a ecuaţiei (ER), atunci soluţia generală a ecuaţiei (ER) pe J este dată de $x(t) = y(t) + \varphi(t)$, unde $y = y(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei* Bernoulli

$$y' = (a(t) + 2b(t)\varphi(t))y + b(t)y^2. \tag{1.24}$$

Demonstraţie. Dacă φ este soluţie a ecuaţiei (ER), atunci

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi^2(t) + c(t), \quad \forall t \in J. \tag{1.25}$$

" $\Rightarrow$ ": Dacă x este soluţie a ecuaţiei (ER), atunci prin schimbarea de funcţie necunoscută $x = y + \varphi(t)$ ecuaţia (ER) se transformă în

$$y' + \varphi'(t) = a(t)(y + \varphi(t)) + b(t)\left(y^2 + 2y\varphi(t) + \varphi^2(t)\right) + c(t)$$

$$\Leftrightarrow y' + \varphi'(t) = a(t)y + b(t)y^2 + 2b(t)\varphi(t)y + \left(a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi^2(t) + c(t)\right) \overset{(1.25)}{\Leftrightarrow} (1.24).$$

" $\Leftarrow$ ": Dacă y este soluţie a ecuaţiei (1.24), atunci prin schimbarea de funcţie necunoscută

$$x = y + \varphi(t) \Leftrightarrow y = x - \varphi(t)$$

ecuaţia (1.24) se transformă în

$$x' - \varphi'(t) = (a(t) + 2b(t)\varphi(t))(x - \varphi(t)) + b(t)\left(x^2 - 2x\varphi(t) + \varphi^2(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow x' - \varphi'(t) = a(t)x - a(t)\varphi(t) + 2b(t)\varphi(t)x - 2b(t)\varphi^2(t) + b(t)x^2 - 2b(t)x\varphi(t) + b(t)\varphi^2(t)$$

$$\Leftrightarrow x' - \varphi'(t) = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) - \left(a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi^2(t) + c(t)\right) \overset{(1.25)}{\Leftrightarrow} (ER).$$

■

Exemplul 1.2.11. *Să se rezolve ecuaţia $x' = x^2 - t^2 + 1$, ştiind că admite soluţia particulară $\varphi(t) = t$.*

Soluţie. Ecuaţia este o ecuaţie Riccati ($a(t) = 0$, $b(t) = 1$, $c(t) = -t^2 + 1$). Se verifică uşor că $\varphi(t) = t$ este soluţie a ei (avem $t' = 1 = t^2 - t^2 + 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

Facem schimbarea de funcţie necunoscută $x = y + \varphi(t) = y + t$ şi ecuaţia se transformă în

$$y' + 1 = (y + t)^2 - t^2 + 1 \Leftrightarrow y' = 2ty + y^2,$$

care este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$, în funcţia necunoscută $y = y(t)$.

Ecuaţia Bernoulli admite, evident, soluţia constantă $y_1(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, care corespunde soluţiei $x_1(t) = y_1(t) + t = t$ a ecuaţiei Riccati.

Căutăm soluţiile nenule ale ecuaţiei Bernoulli. Facem schimbarea de funcţie necunoscută[3]

$$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{z^2}z'$$

($y \neq 0 \Rightarrow z \neq 0$). Atunci ecuaţia Bernoulli se rescrie

$$-\frac{1}{z^2}z' = 2t \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \,\Big|\cdot(-z^2) \Rightarrow z' = -2tz - 1.$$

Am ajuns astfel la o ecuaţie liniară în necunoscuta $z = z(t)$. Conform formulei variaţiei constantelor, soluţia ei generală este

$$z(t) = z(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(-2s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t(-2\tau)\,d\tau}(-1)\,ds.$$

Cum

$$\int_{t_0}^{t}(-2s)\,ds = -s^2\Big|_{t_0}^{t} = -t^2 + t_0^2,$$

alegem constanta $t_0 = 0 \Rightarrow z(t_0) = z(0) = C$, constantă reală. Atunci [4]

$$z(t) = Ce^{-t^2} - \int_0^t e^{-t^2+s^2}\,ds = e^{-t^2}\left(C - \int_0^t e^{s^2}\,ds\right).$$

Acum revenim la necunoscuta x. Ştim că $x = y + t = \dfrac{1}{z} + t \Rightarrow x(t) = t + e^{t^2}\left(C - \displaystyle\int_0^t e^{s^2}\,ds\right)^{-1}$, cu $C - \displaystyle\int_0^t e^{s^2}\,ds \neq 0$.

[3] Când ecuaţia Bernoulli avea necunoscuta $x = x(t)$ făceam substituţia $y = x^{1-\alpha}$ pentru a trece la noua funcţie necunoscută, $y = y(t)$. Acum x notează funcţia necunoscută din ecuaţia Riccati şi vrem să trecem de la funcţia necunoscută y la o a treia funcţie necunoscută - pe care o vom numi z.

[4] Deşi în integrala $\displaystyle\int_0^t e^{s^2}\,ds$ integrandul (funcţia de sub integrală) este o funcţie continuă, o compunere de funcţii elementare, valoarea integralei nu se poate exprima prin funcţii elementare.

1.2.6. Ecuaţii cu diferenţiale exacte.

Fie un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (adică o mulţime nevidă, deschisă[5] şi conexă[6]). Fie $g, h : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 pe D, cu $h(t,x) \neq 0$ pentru toţi $(t,x) \in D$.

Definiţia 1.2.1. *O ecuaţie de forma:*

$$x' = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} \tag{1.26}$$

se numeşte cu diferenţială exactă dacă există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -g(t,x) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x) \end{cases}, \text{ pentru orice } (t,x) \in D. \tag{1.27}$$

Într-adevăr, ecuaţia (1.26) se rescrie:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} \Leftrightarrow h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx + \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow dF(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in D.$$

Teorema 1.2.6. *Dacă* (1.26) *este o ecuaţie cu diferenţială exactă, atunci soluţia ei generală este definită implicit de $F(t, x(t)) = C$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ verifică sistemul* (1.27)*, iar C parcurge imaginea lui F, $F(D)$.*

Teorema 1.2.7. *Dacă D este un domeniu simplu conex*[7]*,atunci ecuaţia* (1.26) *este cu diferenţială exactă dacă şi numai dacă*

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial g}{\partial x}(t,x),\ \forall (t,x) \in D.$$

Exemplul 1.2.12. *Să se rezolve ecuaţia*

$$(3t^2x - x^2)x' + 3tx^2 = 0.$$

Soluţie. Folosind notaţia lui Leibniz $x' = \dfrac{dx}{dt}$, rescriem ecuaţia ca

$$(3t^2x - x^2)\frac{dx}{dt} + 3tx^2 = 0$$

şi înmulţind formal cu dt, obţinem

$$\underbrace{(3t^2x - x^2)}_{P(t,x)}dx + \underbrace{3tx^2}_{Q(t,x)}dt = 0.$$

---

[5]O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este deschisă dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru fiecare punct al său, adică odată cu fiecare punct al său, D conţine interiorul unui cerc centrat în acel punct.

[6]Intuitiv, o mulţime este conexă dacă nu este formată din mai multe bucăţi.

Riguros, o mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte conexă dacă nu putem găsi două mulţimi deschise $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ astfel încât $D_1 \cap D \neq \emptyset$, $D_2 \cap D \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 \cap D = \emptyset$ şi $D \subseteq D_1 \cup D_2$.

O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte conexă prin arce dacă orice două puncte din D pot fi unite printr-un arc (drum) conţinut în D, adică dacă $\forall x, y \in D$ $\exists$ o funcţie continuă $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to D$ astfel încât $f(\alpha) = x$, $f(\beta) = y$.

O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este conexă $\Leftrightarrow$ este conexă prin arce.

[7]Intuitiv, un domeniu simplu conex este o mulţime "fără găuri". $\mathbb{R}^n$ şi bilele din $\mathbb{R}^n$ sunt domenii simplu conexe.

Riguros, o mulţime $D \subset \mathbb{R}^n$ este simplu conexă dacă este conexă şi orice două curbe $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to D$ (adică γ_1, γ_2 sunt funcţii continue) pot fi deformate continuu una în alta fără a ieşi din mulţimea D.

Observăm că[8]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,x) = 6tx \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(t,x) = 6tx, \end{cases}$$

deci $\dfrac{\partial P}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(t,x)$, pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, de unde rezultă că ecuaţia este cu diferenţială exactă.

Prin urmare, există o funcţie $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^2, astfel încât[9]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = P = 3t^2x - x^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = Q = 3tx^2. \end{cases} \tag{1.28}$$

Acum alegem una, oarecare, dintre relaţiile din sistemul (1.28) şi o integrăm. Să zicem că alegem a doua relaţie (pare mai simplă). Pentru a ajunge de la $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ la F trebuie să întegrăm în raport cu t (integrăm în variabila în raport cu care am făcut derivarea). Obţinem

$$F(t,x) = \int 3tx^2\,dt = 3x^2 \int t\,dt = 3x^2 \cdot \frac{t^2}{2} + C(x) = \frac{3}{2}x^2t^2 + C(x), \tag{1.29}$$

unde C este o funcţie care joacă rolul ”constantei de integrare” - ea *nu* poate *depinde de variabila în raport cu care am integrat*, dar este posibil să depindă de *cealaltă variabilă*.

Pentru a afla funcţia C utilizăm *relaţia* încă *nefolosită* din sistemul (1.28). Funcţia F trebuie să verifice *ambele* relaţii din sistemul (1.28), deci derivata în raport cu x a funcţiei obţinute de noi în (1.29) ar trebui să dea exact cât scrie în $(1.28)_1$! Aşadar,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) =\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^2t^2 + C(x)\right) = 3t^2x - x^2 \Leftrightarrow 3xt^2 + C'(x) = 3t^2x - x^2 \Leftrightarrow C'(x) = -x^2$$

$$\Rightarrow C(x) = -\frac{x^3}{3} + k,$$

unde k este o constantă reală.

Înlocuind $C(x)$ în (1.29), obţinem

$$F(t,x) = \frac{3}{2}x^2t^2 - \frac{x^3}{3} + k$$

şi, conform teoremei 1.2.6, soluţia generală a ecuaţiei cu diferenţială exactă este $F(t,x)$ =constant, adică are forma implicită

$$\frac{3}{2}x^2t^2 - \frac{x^3}{3} = \text{constant}$$

(pentru simplitate, am mutat constanta k în membrul drept).

Exemplul 1.2.13. *Să se rezolve ecuaţia*

$$(x\cos t - x^2)dt - (2tx - \sin t)dx = 0.$$

[8] P este ”coeficientul” lui dx, deci îl vom deriva în raport cu cealaltă variabilă, t; Q este ”coeficientul” lui dt, deci se derivează în x. Motivul este că, de fapt, funcţiile $\dfrac{\partial P}{\partial t}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ vor fi cele două derivate *mixte* de ordinul al doilea ale lui F.

[9] Pentru ca în membrul stâng al ecuaţiei să avem diferenţiala lui F, $dF(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dt$, trebuie ca ”coeficientul” lui dx din ecuaţie să joace rol de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, iar ”coeficientul” lui dt din ecuaţie să joace rol de $\dfrac{\partial F}{\partial t}$.

Atenţie, luaţi *coeficienţii din ecuaţie* şi nu rezultatele calculului $\dfrac{\partial P}{\partial t}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$!

Soluţie. Deoarece ecuaţia este deja pusă în forma simetrică, facem notaţiile: [10]

$$\underbrace{(x\cos t - x^2)}_{P(t,x)}\,dt \underbrace{-(2tx - \sin t)}_{Q(t,x)}\,dx = 0.$$

Atenţie: Q are semnul MINUS !

În continuare verificăm condiţia de ecuaţie cu diferenţială exactă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \cos t - 2x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -(2x - \cos t) = \cos t - 2x; \end{cases}$$

cum $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$, pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rezultă că ecuaţia este, într-adevăr, cu diferenţială exactă.

Prin urmare, există o funcţie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de clasă C^2, astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -(2tx - \sin t) = \sin t - 2tx \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = x\cos t - x^2. \end{cases} \tag{1.30}$$

Pentru că în exerciţiul trecut am pornit de la $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, în acest exerciţiu să integrăm prima relaţie din sistemul (1.30), cea cu $\dfrac{\partial F}{\partial x}$. Pentru a ajunge de la $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ la F trebuie să integrăm în raport cu x. Obţinem

$$F(t,x) = \int (\sin t - 2tx)\,dx = \sin t \int dx - 2t \int x\,dx = x\sin t - tx^2 + C(t), \tag{1.31}$$

unde C joacă, din nou, rolul ”constantei de integrare”, deci nu depinde de x (am integrat în raport cu x!), dar ar putea depinde de t.

Nu am folosit încă a doua relaţie din sistemul (1.30). Valoarea lui $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ dată de relaţia $(1.30)_2$ ar trebui să fie egală cu derivata parţială a funcţiei F date de (1.31) în raport cu t. Aşadar,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) =\right) \frac{\partial}{\partial t}\big(x\sin t - tx^2 + C(t)\big) = x\cos t - x^2 \Leftrightarrow x\cos t - x^2 + C'(t) = x\cos t - x^2 \Leftrightarrow C'(t) = 0$$

$\Rightarrow C(t) = k$, unde k este o constantă reală.

Înlocuind $C(t)$ în (1.31), obţinem

$$F(t,x) = x\sin t - tx^2 + k$$

şi, conform teoremei 1.2.6, soluţia generală a ecuaţiei cu diferenţială exactă are forma implicită

$$x\sin t - tx^2 = \text{constant}$$

(pentru simplitate, am mutat constanta k în membrul drept).

Urmează două tipuri de ecuaţii care nu mai apar în forma normală $x' = f(t,x)$, ci au forma $x = f(t,x')$. De asemenea, vom vedea că pentru rezolvarea acestor ecuaţii se aplică metoda parametrului (se notează $x' = p$, p parametru), iar soluţiile lor se exprimă în formă parametrică.

[10] Observaţi că, spre deosebire de exerciţiul trecut, acum P este ”coeficientul” lui dt, iar Q, ”coeficientul” lui dx. Ce notaţii alegem pentru cei doi coeficienţi nu are nicio importanţă; trebuie să ţinem minte doar că avem de verificat dacă ”coeficientul” lui dx derivat în t = ”coeficientul” lui dt derivat în x.

1.2.7. Ecuaţii Clairaut.

Au **forma generală**:

$$x = tx' + \psi(x'), \tag{EC}$$

unde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1.

Rezolvare: fie x o soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei (EC). Derivând ecuaţia în raport cu t, obţinem

$$x' = (tx')' + (\psi(x'))' \Leftrightarrow x' = x' + tx'' + \psi'(x')x'' \Leftrightarrow x''(t + \psi'(x')) = 0.$$

Avem următoarele cazuri:

A. Dacă $x'' = 0 \,\Big|\, \int dt \Rightarrow x'(t) = C$, C constant $\Big|\, \int dt \Rightarrow x(t) = \int C\,dt = C\int dt$ $= Ct + D$, unde C, D sunt constante. Verificăm dacă orice x de această formă este soluţie a ecuaţiei (EC). Înlocuim $x(t) = Ct + D$ în ecuaţie şi găsim

$$Ct + D = tC + \psi(C) \Rightarrow D = \psi(C),$$

deci, de fapt, $x(t) = Ct + \psi(C)$, pentru $t \in \mathbb{R}$, unde $C \in \mathbb{R}$ este constantă. Această familie de soluţii poartă numele de *soluţia generală a ecuaţiei* Clairaut şi, din punct de vedere geometric, este o familie de drepte.

B. Dacă $t + \psi'(x') = 0$, notând $x' = p$ (metoda parametrului), rezultă că

$$\begin{cases} t(p) = -\psi'(p) \\ x(p) = -\psi'(p)p + \psi(p), \end{cases}$$

unde $p \in \mathbb{R}$ este un parametru. Am obţinut ecuaţiile parametrice ale unei curbe plane, numită *soluţia singulară a ecuaţiei* Clairaut.

Observaţia 1.2.7. *Din punct de vedere geometric, familia de drepte care dă soluţia generală a unei ecuaţii* Clairaut *coincide cu familia tuturor tangentelor la curba care dă soluţia singulară a ecuaţiei (spunem că soluţia singulară este înfăşurătoarea familiei de drepte care alcătuiesc soluţia generală a ecuaţiei).*

Din acest motiv, ecuaţiile Clairaut *au şi soluţii de clasă C^1, obţinute reunind porţiuni de dreaptă din soluţia generală cu porţiuni de înfăşurătoare (fără a ridica creionul de pe foaie).*

Cursul 4

Exemplul 1.2.14. *Să se rezolve ecuaţia Clairaut $x = tx' - (x')^4$.*

Soluţie. Căutăm soluţii x de clasă C^2 şi derivăm (în raport cu t). Obţinem

$$x' = x' + tx'' - 4(x')^3 x'' \Leftrightarrow x''\left[t - 4(x')^3\right] = 0.$$

Distingem cazurile:

A. Dacă $x'' = 0 \;\Big|\int dt \Rightarrow x'(t) = C$, C constant $\Big|\int dt \Rightarrow x(t) = \int C\,dt = C\int dt$ $= Ct + D$, unde C, D sunt constante. Verificăm dacă orice x de această formă este soluţie a ecuaţiei Clairaut. Înlocuim $x(t) = Ct + D$ în ecuaţie şi găsim

$$Ct + D = tC - C^4 \Rightarrow D = -C^4.$$

Deci constanta D nu este arbitrară! Obţinem următoarea familie de soluţii ale ecuaţiei Clairaut:

$$x(t) = Ct - C^4, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C \in \mathbb{R} \text{ este constantă}$$

(*soluţia generală* a ecuaţiei Clairaut).

B. Dacă $t - 4(x')^3 = 0$, notăm $x' = p$

$$\Rightarrow \begin{cases} t(p) = 4p^3 \\ x(p) = 4p^3 \cdot p - p^4 = 3p^4 \end{cases}, \text{ unde } p \in \mathbb{R} \text{ este un parametru}^{11}.$$

Aceasta se numeşte *soluţia singulară* a ecuaţiei Clairaut (nu depinde de nicio constantă, deci este o funcţie unică). Am obţinut această soluţie în formă parametrică.

Uneori, dacă forma soluţiei singulare nu este foarte complicată, putem scrie soluţia singulară şi în formă explicită sau implicită.

De exemplu, în cazul nostru putem scoate $p = \sqrt[3]{\frac{t}{4}} \Rightarrow x(t) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{t}{4}}\right)^4 = \frac{3t}{4}\sqrt[3]{\frac{t}{4}}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ (forma explicită a soluţiei singulare).

1.2.8. Ecuaţii Lagrange.

Au **forma generală** [12]:

$$x = t\varphi(x') + \psi(x'), \tag{ELg}$$

unde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1, cu $\varphi(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: fie x o soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei (ELg). Derivăm ecuaţia în raport cu t şi obţinem

$$x' = (t\varphi(x'))' + (\psi(x'))' \Leftrightarrow x' = \varphi(x') + t\varphi'(x')x'' + \psi'(x')x''.$$

Notăm $x' = p$ (metoda parametrului) $\Rightarrow x'' = p'$ şi ecuaţia se transformă în

$$p = \varphi(p) + t\varphi'(p)p' + \psi'(p)p' \Leftrightarrow p'[t\varphi'(p) + \psi'(p)] = p - \varphi(p) \Leftrightarrow \frac{dp}{dt}(t)[t\varphi'(p) + \psi'(p)] = p - \varphi(p).$$

Presupunând că $p = p(t)$ este inversabilă şi notând inversa ei cu $t = t(p)$, avem

$$t\varphi'(p) + \psi'(p) = \frac{dt}{dp}(p)[p - \varphi(p)] \Leftrightarrow \frac{dt}{dp}(p) = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Am ajuns la o ecuaţie liniară în funcţia necunoscută $t = t(p)$. Rezolvând această ecuaţie, determinăm $t = t(p, C)$, pentru $p \in \mathbb{R}$, unde C este o constantă reală. Înlocuind $t(p, C)$ şi $x' = p$ în ecuaţia (Elg) iniţială, obţinem soluţia generală a ecuaţiei (ELg) în formă parametrică, dată prin:

$$\begin{cases} t = t(p, C) \\ x = t(p, C)\varphi(p) + \psi(p), \end{cases}$$

cu $p \in \mathbb{R}$ parametru, $C \in \mathbb{R}$ constantă.

---

[11] Pentru a obţine expresia lui $x(p)$ se înlocuieşte expresia lui $t(p)$ şi $x' = p$ în ecuaţia iniţială –în cazul nostru $x = tx' - (x')^4$.

[12] Pentru a le distinge de ecuaţiile Clairaut, să observăm că în membrul drept al ecuaţiilor Clairaut variabila t apare înmulţită cu x', în vreme ce la ecuaţiile Lagrange t se înmulţeşte cu o funcţie de x' *diferită de* x'.

EXEMPLUL 1.2.15. *Să se rezolve ecuaţia* $x = t(1 + x') + (x')^2$.

Soluţie. Este o ecuaţie LAGRANGE ($\varphi(x') = 1 + x' \neq x'$, $\psi(x') = (x')^2$). Căutăm o soluţie a ei de clasă C^2 şi derivăm (în raport cu t). Rezultă că

$$x' = (1 + x') + tx'' + 2x'x'' \Leftrightarrow 0 = 1 + (t + 2x')x''.$$

Notăm $x' = p \Rightarrow x'' = p'$ şi ecuaţia se rescrie

$$0 = 1 + (t + 2p)p' \Leftrightarrow (t + 2p)\frac{dp}{dt} = -1 \Big| \cdot \frac{dt}{dp} \Rightarrow t + 2p = -\frac{dt}{dp} \Leftrightarrow \frac{dt}{dp} = -t - 2p,$$

care este o ecuaţie liniară în funcţia necunoscută $t = t(p)$. Scriem formula variaţiei constantelor (adaptând notaţiile, astfel încât variabila să se numească p, iar funcţia necunoscută să fie t):

$$t(p) = t(p_0)e^{\int_{p_0}^{p}(-1)\,ds} + \int_{p_0}^{p} e^{\int_s^p (-1)\,d\tau}(-2s)\,ds.$$

Cum $\displaystyle\int_{p_0}^{p}(-1)\,ds = -s\Big|_{p_0}^{p} = -p + p_0$, alegem, pentru simplitate, $p_0 = 0 \Rightarrow t(p_0) = t(0) = C$ constant. Atunci

$$\begin{aligned} t(p) &= Ce^{-p} + \int_0^p e^{-p+s}(-2s)\,ds = Ce^{-p} - 2e^{-p}\int_0^p se^s\,ds = Ce^{-p} - 2e^{-p}\left(se^s\Big|_0^p - \int_0^p e^s\,ds\right) \\ &= Ce^{-p} - 2e^{-p}\left(pe^p - e^s\Big|_0^p\right) = Ce^{-p} - 2e^{-p}\left(pe^p - e^p + 1\right) = (C-2)e^{-p} - 2p + 2 = ke^{-p} - 2p + 2; \end{aligned}$$

am renotat, pentru simplitate, $k = C - 2$; k este o constantă reală.

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei LAGRANGE este dată în forma parametrică [13]

$$\begin{cases} t(p) = ke^{-p} - 2p + 2 \\ x(p) = (ke^{-p} - 2p + 2)(1 + p) + p^2, \end{cases}$$

unde $p \in \mathbb{R}$ este un parametru, iar $k \in \mathbb{R}$ este o constantă.

[13] Pentru a obţine expresia lui $x(p)$ se înlocuieşte $t(p)$ calculat mai sus şi $x' = p$ în ecuaţia iniţială –în cazul nostru $x = t(1 + x') + (x')^2$.

CAPITOLUL 2

Existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru problema Cauchy

Deoarece clasa ecuaţiilor diferenţiale pentru care se cunosc metode de determinare a soluţiei generale este foarte restrânsă, s-a pus problema aproximării soluţiilor unei ecuaţii. Dar pentru a aproxima o soluţie trebuie, în primul rând, să fi demonstrat că aceasta există. Iar dacă existenţa este asigurată, ne interesează unicitatea soluţiei, pentru că în caz contrar nu am şti pe care dintre soluţii o aproximăm.

Teorema lui Picard oferă un rezultat de existenţă şi unicitate şi, în acelaşi timp, o metodă de construcţie aproximativă a soluţiei unei probleme Cauchy - *metoda aproximaţiilor succesive*.

2.1. Teorema de existenţă şi unicitate a lui Picard pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi scalare

Fie problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $f : I \times J \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ fiind intervale cu interior nevid), $t_0 \in I$, $x_0 \in J$.

Propoziţia 2.1.1. *Fie $f : I \times J \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $I_0 \subseteq I$ un interval cu interior nevid astfel încât $t_0 \in I_0$. Atunci o funcţie $x : I_0 \to J$ este o soluţie a problemei* Cauchy (2.1) *dacă şi numai dacă x este continuă pe I_0 şi satisface ecuaţia integrală*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall t \in I_0. \tag{2.2}$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$": Dacă x este o soluţie a problemei Cauchy (2.1), atunci x este de clasă C^1 pe I_0, deci continuă. Prin urmare, funcţia

$$s \mapsto f(s, x(s))$$

este continuă pe I_0. În consecinţă, putem integra de la t_0 la t ambii membri ai egalităţii $x'(s) = f(s, x(s))$. Obţinem

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ \forall t \in I_0,$$

adică, ţinând cont de condiţia iniţială din (2.1), are loc (2.2).

"$\Leftarrow$": Dacă x este continuă pe I_0 şi satisface (2.2), atunci $s \mapsto f(s, x(s))$ este continuă pe I_0 şi din (2.2) rezultă că $x \in C^1(I_0)$. Derivând în ambii membri (2.2), obţinem $x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I_0$. Făcând $t = t_0$ în (2.2), deducem că x verifică şi condiţia iniţială a problemei Cauchy (2.1). ■

Aşadar, a rezolva problema Cauchy (2.1) este echivalent cu a rezolva ecuaţia integrală (2.2).

Presupunem că $x_0(\cdot)$ este o funcţie continuă care aproximează soluţia ecuaţiei (2.2). Înlocuind $x(s)$ cu $x_0(s)$ în membrul drept al lui (2.2), obţinem o nouă funcţie,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds.$$

Repetând procedeul, obţinem funcţiile:

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds$$

$$\vdots$$

(2.3) $$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))ds.$$

În practică se ia

(2.4) $$x_0(t) = x_0, \text{ pentru orice } t.$$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit recursiv prin relaţiile (2.3), (2.4) se numeşte *şirul aproximaţiilor succesive*, iar metoda prin care se construieşte acest şir este cunoscută sub numele de *metoda aproximaţiilor succesive a lui* PICARD.

Utilizând această construcţie, se poate demonstra că, în anumite condiţii impuse funcţiei f, problema (2.1) are o soluţie *locală*[1] unică.

TEOREMA 2.1.1. *(de existenţă şi unicitate a lui* PICARD*) Fie $a, b > 0$ şi $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde*

$$\begin{aligned}\Delta &= \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\right\}\\ &= [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b].\end{aligned}$$

Dacă:

(1) f este continuă pe Δ;
(2) f este lipschitziană în raport cu x pe Δ, adică există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L\,|x-y|\,, \quad \text{pentru orice } (t,x), (t,y) \in \Delta,$$

atunci problema CAUCHY (2.1) *admite o soluţie unică x, definită cel puţin pe intervalul $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, unde*

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

iar $M > 0$ este un majorant pentru $|f|$ pe Δ (altfel spus, $|f(t,x)| \le M$, pentru orice $(t,x) \in \Delta$).

Aşadar, $x : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to [x_0-b, x_0+b]$.

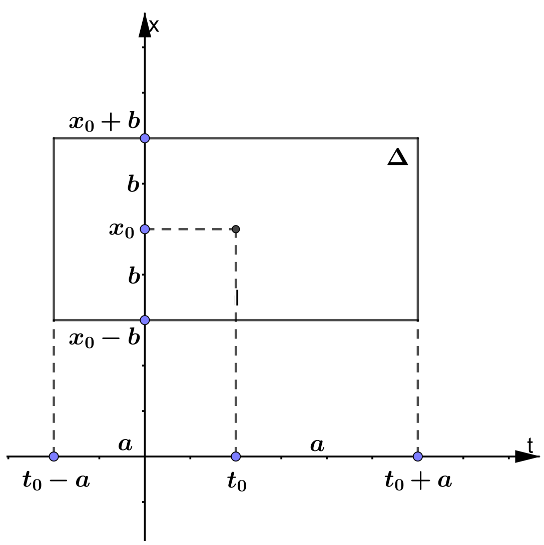

FIGURA 1. $\Delta = [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b]$

OBSERVAŢIA 2.1.1. *Dorim ca intervalul de definiţie al soluţiei x să fie cât mai mare, echivalent, să obţinem un δ cât mai mare, şi atunci ar fi de dorit ca $\dfrac{b}{M}$ să fie cât mai mare, adică M cât mai mic. Cea mai bună alegere este $M = \max\limits_{(t,x)\in\Delta} |f(t,x)|$.*

[1]soluţie definită pe un interval I_0 mai mic (în sensul incluziunii) decât intervalul I corespunzător lui t în domeniul de definiţie al lui f

OBSERVAŢIA 2.1.2. *Prin alte metode soluţia problemei* CAUCHY (2.1) *se poate prelungi la o soluţie definită pe un interval mai mare.*

OBSERVAŢIA 2.1.3. *Uneori este dificil să se arate cu ajutorul definiţiei că o funcţie este lipschitziană. Se poate demonstra (cu ajutorul unei teoreme de medie) că pentru ca această condiţie să fie îndeplinită este suficient ca f să admită derivată parţială* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *mărginită în* Δ sau *ca f să admită derivată parţială* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *continuă în* Δ.

IDEEA DE DEMONSTRAŢIE PENTRU TEOREMA 2.1.1: se consideră şirul aproximaţiilor succesive definit prin (2.3), (2.4) şi se arată că:

(1) acest şir este bine definit; mai precis, se demonstrează prin inducţie matematică că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n(s) - x_0| \leq b,\ \forall s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\,,$$

deci

$$(s, x_n(s)) \in \Delta,\ \forall s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

şi are sens să vorbim despre $f(s, x_n(s))$ (ne amintim că f se presupune definită pe Δ!);

(2) şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi limita lui, x, este soluţie pentru ecuaţia integrală (2.2);

(3) soluţia ecuaţiei integrale (2.2) este unică.

■

EVALUAREA ERORII ÎN APROXIMAREA SOLUŢIEI PRIN METODA LUI PICARD: se arată că

$$|x(t) - x_n(t)| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!}e^{L\delta},\ \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\,,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |x(t) - x_n(t)| = 0$.

EXEMPLUL 2.1.1. *Să se determine un interval pe care există o soluţie unică pentru problema* CAUCHY:

$$\begin{cases} x' = t^3 + x^2 - 1 \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Apoi să se scrie primii trei termeni din şirul aproximaţiilor succesive.

Datele problemei sunt

$$\begin{aligned} &t_0 = 0, \\ &x_0 = 1 \quad \text{şi} \\ &f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(t, x) = t^3 + x^2 - 1. \end{aligned}$$

Datorită faptului că f este definită peste tot, putem alege orice $a, b > 0$. Fie, de exemplu, $a = 1$ şi $b = 2$. Considerăm pe f restricţionată la dreptunghiul

$$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] = [-1, 1] \times [-1, 3].$$

Verificăm ipotezele teoremei lui PICARD. Funcţia f este, într-adevăr, continuă pe Δ (fiind funcţie polinomială) şi lipschitziană în raport cu x pe Δ (deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x$ este o funcţie continuă pe Δ). Prin urmare, conform teoremei 2.1.1, problema CAUCHY (2.5) admite o soluţie unică $x : [-\delta, \delta] \to [-1, 3]$, cu $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{2}{M}\right\}$, unde $M > 0$ este un majorant pentru $|f|$ pe Δ. De exemplu, putem alege $M = 11$, întrucât

$$|f(t, x)| = \left|t^3 + x^2 - 1\right| \leq |t|^3 + x^2 + 1 \leq 1^3 + 3^2 + 1 = 11,\ \forall (t, x) \in \Delta.$$

Aşadar $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{11}\right\} = \frac{2}{11}$. Deci problema CAUCHY (2.5) admite o soluţie unică $x : \left[-\frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right] \to [-1, 3]$.

Primii trei termeni din şirul aproximaţiilor succesive sunt

$$x_0, x_1, x_2 : \left[-\frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right] \to [-1, 3],$$

daţi prin:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 = 1; \\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t f(s, x_0(s))ds = 1 + \int_0^t f(s,1)ds \\
&= 1 + \int_0^t \left(s^3 + 1^2 - 1\right) ds = 1 + \frac{t^4}{4}; \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t f(s, x_1(s))ds = 1 + \int_0^t f\left(s, 1 + \frac{s^4}{4}\right) ds \\
&= 1 + \int_0^t \left[s^3 + \left(1 + \frac{s^4}{4}\right)^2 - 1\right] ds \\
&= 1 + \int_0^t \left(\frac{s^8}{16} + \frac{1}{2}s^4 + s^3\right) ds = \frac{t^9}{144} + \frac{t^5}{10} + \frac{t^4}{4} + 1.
\end{aligned}$$

Soluţia problemei CAUCHY (2.5) nu poate fi determinată exact. Calculând însă cât mai mulţi termeni din şirul aproximaţiilor succesive, o putem aproxima cu o precizie din ce în ce mai bună. ■

EXEMPLUL 2.1.2. *Să se determine un interval pe care există o soluţie unică pentru problema* CAUCHY*:*

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{cases} x' = t^2 + \dfrac{x^2}{t} \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Apoi să se scrie primii trei termeni din şirul aproximaţiilor succesive.

Datele problemei sunt

$$\begin{aligned}
&t_0 = 1, \\
&x_0 = 0 \qquad \text{şi} \\
&f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(t,x) = t^2 + \frac{x^2}{t}.
\end{aligned}$$

Datorită faptului că f nu este definită pentru $t = 0$, suntem nevoiţi să alegem $a \in (0,1)$; în schimb, b poate fi orice număr strict pozitiv. Fie, de exemplu, $a = \frac{1}{2}$ şi $b = 1$. Verificăm ipotezele teoremei lui PICARD pentru f restrâns la dreptunghiul

$$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times [-1, 1].$$

Funcţia f este continuă pe Δ (fiind obţinută prin operaţii cu funcţii polinomiale) şi lipschitziană în raport cu x pe Δ (pentru că $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{2x}{t}$ este continuă pe Δ). Prin urmare, conform teoremei 2.1.1, problema CAUCHY (2.6) admite o soluţie unică $x : [1-\delta, 1+\delta] \to [-1,1]$, cu $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{M}\right\}$, unde $M > 0$ este un majorant pentru $|f|$ pe Δ. De exemplu, putem alege $M = \frac{17}{4}$, întrucât

$$|f(t,x)| = t^2 + \frac{x^2}{t} \le \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1^2}{\frac{1}{2}} = \frac{17}{4}, \;\; \forall (t,x) \in \Delta.$$

Deci $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{17}\right\} = \frac{4}{17}$ şi problema CAUCHY (2.6) admite o soluţie unică $x : \left[\frac{13}{17}, \frac{21}{17}\right] \to [-1,1]$.

Primii trei termeni din şirul aproximaţiilor succesive sunt

$$x_0, x_1, x_2 : \left[\frac{13}{17}, \frac{21}{17}\right] \to [-1, 1],$$

daţi prin:

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x_0 = 0;\\
x_1(t) &= 0 + \int_1^t f(s, x_0(s))ds = \int_1^t f(s,0)ds = \int_1^t s^2 ds = \frac{t^3-1}{3};\\
x_2(t) &= 0 + \int_1^t f(s, x_1(s))ds = \int_1^t f\left(s, \frac{s^3-1}{3}\right) ds\\
&= \int_1^t \left[s^2 + \frac{1}{9s}\left(s^3-1\right)^2\right] ds = \int_1^t \left(s^2 + \frac{s^5}{9} - \frac{2}{9}s^2 + \frac{1}{9s}\right) ds\\
&= \int_1^t \left(\frac{s^5}{9} + \frac{7}{9}s^2 + \frac{1}{9s}\right) ds = \frac{t^6-1}{54} + \frac{7}{27}\left(t^3-1\right) + \frac{1}{9}\ln t.
\end{aligned}$$

■

Cursul 5

2.2. Teorema de existenţă şi unicitate a lui Picard pentru sisteme diferenţiale de ordinul întâi

Fie problema Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n)\\
x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n)\\
\vdots\\
x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n)\\
x_1(t_0) = x_1^0\\
x_2(t_0) = x_2^0\\
\vdots\\
x_n(t_0) = x_n^0,
\end{array}\right. \tag{2.7}$$

cu t_0, x_1^0,..., $x_n^0 \in \mathbb{R}$ fixate.

Teorema 2.2.1. *(Picard) Fie $a, b > 0$ şi*

$$f_1, f_2, \dots, f_n : \Delta \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

unde

$$\Delta = \left\{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |t - t_0| \le a,\ \left|x_i - x_i^0\right| \le b,\ 1 \le i \le n\right\}.$$

Dacă:

(1) $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt continue pe Δ;
(2) $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt lipschitziene în $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pe Δ, adică există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\left|f_j\left(t, x_1, \dots, x_n\right) - f_j\left(t, y_1, \dots, y_n\right)\right| \le L \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|,$$

pentru orice $(t, x_1, \dots, x_n), (t, y_1, \dots, y_n) \in \Delta$ şi pentru orice $1 \le j \le n$,

atunci problema Cauchy (2.7) admite o soluţie unică $(x_1, \dots, x_n)$, cu

$$x_j : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [x_j^0 - b, x_j^0 + b], \quad 1 \le j \le n,$$

unde

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

iar $M > 0$ este un majorant pentru

$$\left\{\left|f_j\left(t, x_1, \dots, x_n\right)\right| \,\middle|\, (t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta,\ 1 \le j \le n\right\}.$$

Observaţia 2.2.1. *O condiţie suficientă ca funcţiile f_j, $1 \leq j \leq n$ să fie lipschitziene în $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe mulţimea Δ este ca f_j, $1 \leq j \leq n$ să admită pe Δ derivate parţiale de ordinul întâi în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ să fie continue pe Δ, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$.*

Ideea de demonstraţie pentru teorema 2.2.1 este aceeaşi cu cea a teoremei 2.1.1: se observă că problema Cauchy (2.7) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii integrale:

$$x_j(t) = x_j^0 + \int_{t_0}^t f_j(s, x_1(s), \ldots, x_n(s))\, ds, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{2.8}$$

se consideră *şirul aproximaţiilor succesive* definit prin:

$$\begin{cases} x_j^k(t) = x_j^0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f_j(s, x_1^{k-1}(s), \ldots, x_n^{k-1}(s))\, ds, \quad 1 \leq j \leq n, \quad k \geq 1 \\ x_j^0(t) = x_j^0, \quad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

şi se demonstrează că acesta converge la o soluţie a sistemului (2.8) (deci, echivalent, a problemei Cauchy (2.7)), soluţie despre care se arată că este unică.

Exemplul 2.2.1. *Să se determine un interval pe care există o soluţie unică pentru problema* Cauchy*:*

$$\begin{cases} x_1' = 2tx_2 - x_1^2 \\ x_2' = tx_1 - 1 \\ x_1(0) = -2 \\ x_2(0) = 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Apoi să se scrie primele trei grupe de termeni din şirul aproximaţiilor succesive.

Datele problemei sunt

$$\begin{array}{l} t_0 = 0, \\ x_1^0 = -2, \\ x_2^0 = 1 \quad \text{şi} \\ f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(t, x_1, x_2) = 2tx_2 - x_1^2,\ f_2(t, x_1, x_2) = tx_1 - 1. \end{array}$$

Datorită faptului că f_1, f_2 sunt definite peste tot, putem alege orice $a, b > 0$. Fie, de exemplu, $a = 1$ şi $b = 3$. Considerăm pe f_1, f_2 restrânse la paralelipipedul

$$\begin{aligned} \Delta &= [t_0 - a, t_0 + a] \times \left[x_1^0 - b, x_1^0 + b\right] \times \left[x_2^0 - b, x_2^0 + b\right] \\ &= [-1, 1] \times [-5, 1] \times [-2, 4]. \end{aligned}$$

Verificăm ipotezele teoremei lui Picard. Funcţiile f_1, f_2 sunt continue pe Δ, deoarece sunt funcţii polinomiale. Din observaţia 2.2.1, pentru a demonstra că aceste funcţii sunt şi lipschitziene în raport cu (x_1, x_2) pe Δ este suficient să remarcăm că

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) &= -2x_1,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 2t, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) &= t,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

sunt bine definite şi continue pe Δ (sunt funcţii polinomiale). Prin urmare, conform teoremei 2.2.1, problema Cauchy (2.9) admite o soluţie unică (x_1, x_2),

$$x_1 : [-\delta, \delta] \to [-5, 1], \quad x_2 : [-\delta, \delta] \to [-2, 4],$$

cu $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{3}{M}\right\}$, unde $M > 0$ este un majorant pentru $|f_1|$, $|f_2|$ pe Δ. Cum

$$|f_1(t, x_1, x_2)| = \left|2tx_2 - x_1^2\right| \leq 2|t||x_2| + x_1^2 \leq 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-5)^2 = 33,\ \forall (t, x_1, x_2) \in \Delta;$$

$$|f_2(t, x_1, x_2)| = |tx_1 - 1| \leq |t||x_1| + 1 \leq 1 \cdot 5 + 1 = 6,\ \forall (t, x_1, x_2) \in \Delta,$$

putem alege $M = 33$. Aşadar $\delta = \min\left\{1, \frac{3}{33}\right\} = \frac{1}{11}$ şi problema Cauchy (2.9) admite o soluţie unică $(x_1, x_2) : \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \to [-5, 1] \times [-2, 4]$.

Primele trei grupe de termeni din şirul aproximaţiilor succesive sunt

$$\left(x_1^0, x_2^0\right), \ \left(x_1^1, x_2^1\right), \ \left(x_1^2, x_2^2\right) : \left[-\frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right] \to [-5,1] \times [-2,4],$$

date prin:

$$\begin{cases} x_1^0(t) = x_1^0 = -2, \\ x_2^0(t) = x_2^0 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^1(t) = -2 + \displaystyle\int_0^t f_1\left(s, x_1^0(s), x_2^0(s)\right) ds = -2 + \int_0^t f_1(s,-2,1)ds \\ \qquad = -2 + \displaystyle\int_0^t (2s-4)ds = t^2 - 4t - 2, \\ x_2^1(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f_2\left(s, x_1^0(s), x_2^0(s)\right) ds = 1 + \int_0^t f_2(s,-2,1)ds \\ \qquad = 1 + \displaystyle\int_0^t (-2s-1)ds = -t^2 - t + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2(t) = -2 + \displaystyle\int_0^t f_1\left(s, x_1^1(s), x_2^1(s)\right) ds \\ \qquad = -2 + \displaystyle\int_0^t f_1(s, s^2-4s-2, -s^2-s+1)ds \\ \qquad = -2 + \displaystyle\int_0^t \left[2s\left(-s^2-s+1\right) - \left(s^2-4s-2\right)^2\right] ds \\ \qquad = -2 + \displaystyle\int_0^t \left(-s^4+6s^3-14s^2-14s-4\right) ds \\ \qquad = -\dfrac{t^5}{5} + \dfrac{3}{2}t^4 - \dfrac{14}{3}t^3 - 7t^2 - 4t - 2, \\ x_2^2(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t f_2\left(s, x_1^1(s), x_2^1(s)\right) ds \\ \qquad = 1 + \displaystyle\int_0^t f_2(s, s^2-4s-2, -s^2-s+1)ds \\ \qquad = 1 + \displaystyle\int_0^t \left[s\left(s^2-4s-2\right) - 1\right] ds \\ \qquad = 1 + \displaystyle\int_0^t \left(s^3-4s^2-2s-1\right) ds = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{4}{3}t^3 - t^2 - t + 1. \end{cases} .$$

■

Problema CAUCHY (2.7) poate fi scrisă într-o formă restrânsă, folosind notaţia vectorială.
Astfel, considerăm pe spaţiul $\mathbb{R}^n$ următoarea normă:

$$\|y\| = \max_{1\le i\le n} |y_i|, \text{ pentru orice } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Spunem că funcţia vectorială $x : I \to \mathbb{R}^n$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$, unde componentele $x_j : I \to \mathbb{R}$, pentru $1 \le j \le n$, sunt funcţii scalare, are o anumită proprietate (continuitate, derivabilitate, integrabilitate) dacă toate funcţiile sale componente au această proprietate. Prin derivata funcţiei x în punctul $t \in I$ înţelegem vectorul

$$x'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\right);$$

definim integrala RIEMANN pentru funcţia x prin:

$$\int_a^b x(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \int_a^b x_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right).$$

Dacă în problema CAUCHY (2.7) notăm prin x funcţia vectorială $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi prin $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ funcţia vectorială $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, atunci problema CAUCHY se rescrie:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

unde $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, iar teorema 2.2.1 se reformulează:

TEOREMA 2.2.2. *Dacă funcţia $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe Δ şi lipschitziană în raport cu variabila x pe Δ, atunci problema* CAUCHY (2.10) *are o soluţie unică $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, iar $M > 0$ este un majorant pentru $\|f\|$ pe Δ (adică $\|f(t, x)\| \leq M$, pentru orice $(t, x) \in \Delta$).*

2.3. Teorema de existenţă şi unicitate a lui Picard pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Considerăm problema CAUCHY:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) \\ x(t_0) = x_1^0,\ x'(t_0) = x_2^0, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{2.11}$$

cu t_0, x_1^0,..., $x_n^0 \in \mathbb{R}$ fixate.

TEOREMA 2.3.1. *(*PICARD*) Fie $a, b > 0$ şi $f : \Delta \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, unde*

$$\Delta = \left\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, |t - t_0| \leq a,\ \left|x_i - x_i^0\right| \leq b,\ 1 \leq i \leq n\right\}.$$

Dacă:

(1) f este continuă pe Δ;
(2) există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_1, \ldots, y_n)| \leq L \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

pentru orice $(t, x_1, \ldots, x_n), (t, y_1, \ldots, y_n) \in \Delta$,

atunci problema CAUCHY (2.11) *admite o soluţie unică $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, unde*

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

iar $M > 0$ este un majorant pentru

$$\{|f(t, x_1, \ldots, x_n)|, |x_2|, |x_3|, \ldots, |x_n| \mid (t, x_1, \ldots, x_n) \in \Delta\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Prin substituţia

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.12}$$

problema CAUCHY (2.11) se transformă în

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Pentru problema CAUCHY (2.13) se aplică teorema 2.2.1. ■

EXEMPLUL 2.3.1. *Să se determine un interval pe care există o soluţie unică pentru problema* CAUCHY*:*

$$\begin{cases} x'' - (t+2)x' = t^2 + x \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Datele problemei sunt

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0,\\
&x_1^0 = 0\\
&x_2^0 = 1 \qquad \text{şi}\\
&f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t,x_1,x_2) = t^2 + x_1 + (t+2)x_2.
\end{aligned}$$

Datorită faptului că f este definită peste tot, putem alege orice $a, b > 0$. Fie, de exemplu, $a = 2$ şi $b = 3$. Considerăm pe f restricţionată la dreptunghiul

$$\begin{aligned}
\Delta &= [t_0 - a, t_0 + a] \times \left[x_1^0 - b, x_1^0 + b\right] \times \left[x_2^0 - b, x_2^0 + b\right]\\
&= [-2,2] \times [-3,3] \times [-2,4].
\end{aligned}$$

Verificăm ipotezele teoremei lui PICARD. Funcţia f este continuă pe Δ, fiind funcţie polinomială. Pentru a arăta că f este lipschitziană în raport cu (x_1, x_2) pe Δ este suficient să observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x_1,x_2) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(t,x_1,x_2) = t+2$$

sunt funcţii bine definite şi continue pe Δ (sunt funcţii polinomiale). Prin urmare, conform teoremei 2.3.1, problema CAUCHY (2.14) admite o soluţie unică $x : [-\delta, \delta] \to [-3,3]$, cu $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{2, \frac{3}{M}\right\}$, unde $M > 0$ este un majorant pentru $|f|$ şi $|x_2|$ pe Δ. Putem alege $M = 23$, întrucât

$$\begin{aligned}
|f(t,x_1,x_2)| &= \left|t^2 + x_1 + (t+2)x_2\right| \le t^2 + |x_1| + (|t|+2)\,|x_2|\\
&\le 2^2 + 3 + (2+2)\cdot 4 = 23, \ \forall (t,x) \in \Delta;\\
|x_2| &\le 4, \ \forall (t,x) \in \Delta.
\end{aligned}$$

Aşadar $\delta = \min\left\{2, \frac{3}{23}\right\} = \frac{3}{23}$. Deci problema CAUCHY (2.5) admite o soluţie unică $x : \left[-\frac{3}{23}, \frac{3}{23}\right] \to [-3,3]$. ■

2.4. Teorema de existenţă a lui Peano. Metoda liniilor poligonale (Euler)

Teorema lui PEANO este un rezultat de *existenţă* pentru soluţia unei probleme CAUCHY. Conform acestei teoreme, dacă f este o funcţie continuă, atunci problema CAUCHY

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

admite soluţie într-o vecinătate a momentului iniţial t_0 (soluţie locală).

Demonstraţia acestei teoreme pune în evidenţă o altă metodă de aproximare a soluţiilor unei probleme CAUCHY, *metoda liniilor poligonale*, datorată lui EULER.

TEOREMA 2.4.1. *Fie* $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$, $a, b > 0$ *şi paralelipipedul* $(n+1)-$*dimensional*

$$\Delta = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \le a, \ \|x - x_0\| \le b\right\}.$$

Fie $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă.*

Atunci problema CAUCHY (2.15) *are cel puţin o soluţie* $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$*, unde*

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

$M > 0$ *fiind un majorant pentru* $\|f\|$ *pe* Δ *(adică* $\|f(t,x)\| \le M$*, pentru orice* $(t,x) \in \Delta$*).*

Observaţia 2.4.1. *La fel ca pentru teorema lui* Picard, *facem observaţia că alegerea optimă pentru* M *este* $M = \max_{(t,x)\in\Delta} \|f(t,x)\|$; *fiind cel mai mic majorant al lui* $\|f\|$ *pe* Δ, *acesta conduce la cea mai mare valoare pentru* δ.

Observaţia 2.4.2. *Simpla continuitate a lui* f *nu este suficientă pentru a asigura* unicitatea soluţiei *problemei* Cauchy, *după cum arată exemplul următor.*

Exemplul 2.4.1. *Problema* Cauchy

$$\begin{cases} x' = 5\sqrt[5]{x^4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

are soluţiile $x(t) = t^5,\ t \in \mathbb{R}$ *şi* $x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ *(şi nu numai – a se revedea Exemplul 1.2.2). Membrul drept,*

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(t,x) = 5\sqrt[5]{x^4},$$

este funcţie continuă, dar nu este lipschitziană în raport cu x *pe niciun dreptunghi*

$$\Delta = [-a,a]\times[-b,b] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Dacă presupunem, în plus, că f este lipschitziană în raport cu x pe Δ, atunci teorema 2.2.2 asigură unicitatea soluţiei problemei Cauchy (2.15). Soluţia poate fi aproximată prin linii poligonale astfel: pentru $k \in \mathbb{N}^*$ considerăm partiţia:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = t_0 + \delta;$$

pentru simplitate presupunem că $t_{i+1} = t_i + \frac{\delta}{k}$, pentru orice $0 \le i \le k-1$ (adică nodurile t_i sunt echidistante). Ecuaţia integrală

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0+\delta], \tag{2.16}$$

care este echivalentă cu problema Cauchy (2.15), se înlocuieşte cu sistemul

$$\begin{cases} \xi_0 = x_0 \\ \xi_{i+1} = \xi_i + (t_{i+1}-t_i)f(t_i,\xi_i), \text{ pentru } 0 \le i \le k-1. \end{cases}$$

Funcţia $y_k : [t_0, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$, dată prin

$$y_k(t) = \xi_i + (t-t_i)f(t_i,\xi_i), \quad \text{pentru } t \in \begin{cases} [t_i, t_{i+1}), \text{ dacă } 0 \le i \le k-2 \\ [t_{k-1}, t_k], \text{ dacă } i = k-1 \end{cases}$$

este suficient de apropiată de unica soluţie $x : [t_0, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$ a ecuaţiei integrale (2.16), pentru k suficient de mare. Se observă că graficul funcţiei y_k este linia poligonală care uneşte punctele (t_0,ξ_0), (t_1,ξ_1),..., (t_k,ξ_k), de unde numele metodei.

Evaluarea erorii: Dacă f este continuă pe Δ şi lipschitziană pe Δ, adică există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \le L(|t-s| + |x-y|), \quad \forall (t,x),(s,y) \in \Delta,$$

atunci are loc următoarea formulă de evaluare a erorii:

$$\|y_k(t) - x(t)\| \le \frac{L(M+1)\delta^2}{k} e^{L\delta}, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^* \text{ şi orice } t \in [t_0, t_0+\delta],$$

unde $M = \max_{(t,x)\in\Delta} \|f(t,x)\|$.

CAPITOLUL 3

Modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale

Cursul 6

Procesul reprezentării fenomenelor din lumea înconjurătoare cu ajutorul instrumentelor matematicii se numeşte *modelare matematică*. Primul pas în acest proces este descrierea în limbaj matematic a comportării fenomenului respectiv. De regulă, pentru ca modelul matematic să nu fie prea complex, pentru ca rezolvarea lui să poată fi abordată cel puţin prin intermediul tehnicii de calcul, se renunţă la o parte din variabilele ("parametrii") ce descriu problema iniţială (cei pe care-i considerăm mai puţin importanţi). Din acest motiv majoritatea modelelor matematice nu constituie copii fidele ale realităţii şi atunci o primă cerinţă care apare este aceea de a demonstra că modelul propus are cel puţin o soluţie (altfel spus, justificarea *consistenţei* modelului). Obţinerea *unicităţii soluţiei* este şi ea deosebit de importantă, pentru că dacă o problemă Cauchy ar avea două soluţii nu s-ar putea preciza care dintre ele descrie corect evoluţia în timp a sistemului studiat.

În multe modele, pentru a putea face uz de noţiuni şi rezultate din analiza matematică, vom înlocui modelul matematic discret (care este cel mai realist) printr-unul continuu diferenţiabil. Mai exact, vom presupune că funcţia necunoscută care descrie evoluţia în timp a unei anumite entităţi (numărul de atomi/molecule dintr-o substanţă, numărul de indivizi dintr-o populaţie, etc.) este de clasă C^1 pe intervalul ei de definiţie – deşi în realitate aceasta ia valori într-o mulţime finită. Din punct de vedere matematic, aceasta revine la a înlocui o funcţie în scară (discontinuă) cu o aproximare a ei de clasă C^1.

Observaţia 3.0.1. *Este interesant de observat că numeroase fenomene distincte admit modele diferenţiale formal identice. Prin urmare din studiul unui singur astfel de model se pot trage concluzii despre modul de evoluţie a mai multor sisteme reale. Acesta este unul din marile avantaje ale ecuaţiilor diferenţiale: marea lor putere de abstractizare.*

3.1. Răcirea (încălzirea) corpurilor

Din fizică este cunoscută legea lui Newton, care afirmă că rata de răcire (încălzire) a suprafeţei unui corp este direct proporţională cu diferenţa dintre temperatura suprafeţei şi cea a mediului înconjurător.

Să considerăm un corp, despre care presupunem că are aceeaşi temperatură în fiecare punct al său. Ştiind temperatura în $°C$, $T_{mediu}(t) \in \mathbb{R}$, a mediului înconjurător la orice moment $t \geq 0$, dorim să determinăm temperatura $T(t)$ (exprimată tot în $°C$) a acestui corp la momentul t.

În conformitate cu legea lui Newton, funcţia $T(t)$ verifică ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi:

$$T'(t) = -k\,[T(t) - T_{mediu}(t)] \tag{3.1}$$

sau

$$T'(t) = -kT(t) + kT_{mediu}(t), \tag{3.2}$$

unde $k > 0$ este o constantă de proporţionalitate, numită constanta de transfer.

Constanta k a fost aleasă strict pozitivă pentru a respecta evoluţia temperaturii cunoscută din realitatea fizică. Într-adevăr, dacă temperatura corpului este mai mare decât temperatura mediului înconjurător ($T(t) > T_{mediu}(t)$), atunci din ecuaţia (3.1) rezultă că $T'(t) < 0$, deci temperatura corpului va descreşte în încercarea de a se apropia de temperatura ambiantă (caz corespunzător procesului de *răcire* a corpurilor); dacă temperatura corpului este sub temperatura mediului înconjurător ($T(t) < T_{mediu}(t)$), atunci (3.1) implică $T'(t) > 0$, adică temperatura corpului va creşte (caz corespunzător procesului de *încălzire* a corpurilor).

Presupunem că la momentul iniţial $t = 0$ temperatura corpului este T_0, informaţie care se traduce prin condiţia CAUCHY:

$$T(0) = T_0. \tag{3.3}$$

Unica soluţie a problemei CAUCHY (3.2)–(3.3) este dată de formula variaţiei constantelor:

$$T(t) = T_0 e^{-kt} + \int_0^t e^{-k(t-s)} k T_{mediu}(s)\, ds, \quad t \geq 0$$

sau

$$T(t) = T_0 e^{-kt} + k e^{-kt} \int_0^t e^{ks} T_{mediu}(s)\, ds, \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

EXEMPLUL 3.1.1. *Un corp cu temperatura de $15°C$ este adus într-o încăpere a cărei temperatură este menţinută la $23°C$. Ştiind că după 10 minute temperatura corpului atinge $18°C$, să se afle după cât timp temperatura corpului va ajunge la $22°C$.*

Este o problemă de încălzire a corpurilor. Primul set de date al problemei este:
-temperatura mediului $T_{mediu}(t) = 23$ pentru orice $t \geq 0$;
-temperatura iniţială a corpului $T_0 = 15$;
-timpul necesar încălzirii $t_1 = 10$;
-temperatura finală a corpului $T(t_1) = 18$.
Aceste informaţii ne permit să determinăm valoarea constantei de transfer $k > 0$, proprie materialului respectiv. Într-adevăr, înlocuind datele în relaţia (3.4) scrisă la momentul $t = t_1$, obţinem:

$$18 = 15e^{-10k} + ke^{-10k} \int_0^{10} 23e^{ks} ds \Leftrightarrow 18 = 15e^{-10k} + 23e^{-10k} e^{ks}\Big|_{s=0}^{s=10}$$

$$\Leftrightarrow 18 = 15e^{-10k} + 23e^{-10k}\left(e^{10k} - 1\right) \Leftrightarrow 8e^{-10k} = 5,$$

de unde

$$e^{-10k} = \frac{5}{8} \text{ sau } -10k = \ln\frac{5}{8}.$$

Aşadar:

$$k = \frac{1}{10}(\ln 8 - \ln 5). \tag{3.5}$$

Timpul t_2 necesar încălzirii corpului de la temperatura iniţială $T_0 = 15$ $(°C)$ la temperatura finală $T(t_2) = 22$ $(°C)$ se află din relaţia (3.4) scrisă pentru $t = t_2$ (din nou, $T_{mediu}(t) = 23$ pentru orice $t \geq 0$):

$$22 = 15e^{-kt_2} + ke^{-kt_2} \int_0^{t_2} 23e^{ks} ds \Leftrightarrow 22 = 15e^{-kt_2} + 23e^{-kt_2} e^{ks}\Big|_{s=0}^{s=t_2}$$

$$\Leftrightarrow 22 = 15e^{-kt_2} + 23e^{-kt_2}\left(e^{kt_2} - 1\right) \Leftrightarrow 8e^{-kt_2} = 1 \Leftrightarrow e^{-kt_2} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow -kt_2 = \ln\frac{1}{8}, \text{ adică } t_2 = -\frac{1}{k}\ln\frac{1}{8} = \frac{1}{k}\ln 8.$$

Înlocuind pe k din relaţia (3.5), rezultă:

$$t_2 = \frac{10\ln 8}{\ln 8 - \ln 5}.$$

Conform tabelelor cu logaritmi, $\ln 5 \simeq 1,6094379124$, $\ln 8 \simeq 2,0794415417$, deci

$$t_2 \simeq \frac{10 \cdot 2,0794415417}{2,0794415417 - 1,6094379124} = \frac{20,794415417}{0,4700036293} \simeq 44,2431 \text{ minute}.$$

Prin urmare, timpul necesar corpului pentru a-şi creşte temperatura de la $18°C$ la $22°C$ este aproximativ

$$44,2431 - 10 = 34,2431 \text{ minute}.$$

Observăm că timpul în care corpul se încălzeşte cu $3°C$, de la $15°C$ la $18°C$, este mai puţin de o treime din timpul necesar aceluiaşi corp pentru a se încălzi cu $4°C$, dar de la $18°C$ la $22°C$. Deducem că pe măsură ce temperatura corpului se apropie de temperatura mediului rata de încălzire scade considerabil.

EXEMPLUL 3.1.2. *Scufundăm un corp într-un mediu a cărui temperatură are valoarea constantă de $10°C$. În 40 de minute corpul se răceşte de la $200°C$ la $100°C$.*

a) Să se calculeze timpul necesar pentru ca acelaşi material să se răcească de la $200°C$ la $100°C$, atunci când temperatura mediului înconjurător este de $5°C$.

b) Să se calculeze timpul de care are nevoie corpul considerat pentru a se răci de la $100°C$ la $10°C$ când mediul este menţinut la temperatura de $5°C$.

Este o problemă de răcire. Pentru a o putea rezolva este necesar să cunoaştem valoarea constantei de transfer $k > 0$. La început avem la dispoziţie următoarele date:

-temperatura mediului $T_{mediu}(t) = 10$ pentru orice $t \geq 0$;

-temperatura iniţială a corpului $T_0 = 200$;

-timpul necesar răcirii $t_1 = 40$;

-temperatura finală a corpului $T(t_1) = 100$.

Înlocuind aceste date în relaţia (3.4) scrisă la momentul $t = t_1$, obţinem:

$$100 = 200e^{-40k} + ke^{-40k} \int_0^{40} 10e^{ks} ds \Leftrightarrow 100 = 200e^{-40k} + 10e^{-40k} e^{ks}\Big|_{s=0}^{s=40}$$

$$\Leftrightarrow 100 = 200e^{-40k} + 10e^{-40k} \left(e^{40k} - 1\right) \Leftrightarrow 190e^{-40k} = 90$$

şi atunci

$$e^{-40k} = \frac{9}{19}, \text{ de unde } k = -\frac{1}{40} \ln \frac{9}{19}.$$

Aşadar

$$k = \frac{1}{40} (\ln 19 - \ln 9). \tag{3.6}$$

a) Dacă temperatura mediului înconjurător este menţinută la valoarea $\tilde{T}_{mediu} = 5$ ($°C$), atunci timpul t_2 necesar răcirii corpului de la temperatura iniţială $T_0 = 200$ ($°C$) la temperatura $T(t_2) = 100$ ($°C$) poate fi aflat din relaţia (3.4) scrisă în $t = t_2$:

$$100 = 200e^{-kt_2} + ke^{-kt_2} \int_0^{t_2} 5e^{ks} ds,$$

unde constanta de transfer k este dată de (3.6). Făcând calculele, deducem:

$$100 = 200e^{-kt_2} + 5e^{-kt_2} e^{ks}\Big|_0^{t_2} \Leftrightarrow 100 = 200e^{-kt_2} + 5e^{-kt_2} \left(e^{kt_2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 95 = 195e^{-kt_2} \Leftrightarrow -kt_2 = \ln \frac{95}{195} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{k} \ln \frac{19}{39}.$$

Înlocuind pe k din (3.6), rezultă:

$$t_2 = \frac{40 (\ln 39 - \ln 19)}{\ln 19 - \ln 9}.$$

Conform tabelelor cu logaritmi, $\ln 9 \simeq 2,1972245773$, $\ln 19 \simeq 2,9444389792$, $\ln 39 \simeq 3,6635616461$, deci

$$t_2 \simeq \frac{40 \cdot 0,7191226669}{0,7472144019} \simeq 38,4962 \text{ minute}.$$

b) Calculăm acum timpul t_3 necesar aceluiaşi material pentru a se răci de la $T_0 = 100$ ($°C$) la $T(t_3) = 10$ ($°C$) când mediul este menţinut tot la temperatura $\tilde{T}_{mediu}(t) = 5$ ($°C$). Relaţia (3.4) devine la momentul

$t = t_3$:

$$\begin{aligned} 10 &= 100e^{-kt_3} + ke^{-kt_3}\int_0^{t_3} 5e^{ks}ds \Leftrightarrow 10 = 100e^{-kt_3} + 5e^{-kt_3}\left(e^{kt_3} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 5 = 95e^{-kt_3} \Leftrightarrow t_3 = -\frac{1}{k}\ln\frac{5}{95}. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$t_3 = \frac{1}{k}\ln 19 = \frac{40\ln 19}{\ln 19 - \ln 9} \simeq \frac{40 \cdot 2,9444389792}{0,7472144019} \simeq 157,6221 \text{ minute}.$$

Se constată că timpul necesar pentru răcirea corpului de la $100°C$ la $10°C$ este de peste 4 ori mai mare decât timpul necesar pentru răcirea corpului de la $200°C$ la $100°C$. Altfel spus, rata de răcire scade considerabil pe măsură ce temperatura corpului se apropie de temperatura mediului.

3.2. Dezintegrarea unei substanţe radioactive

Legea dezintegrării atomilor radioactivi, formulată în anul 1902 de Ernest Rutherford şi Frederick Soddy, afirmă că viteza instantanee de dezintegrare a unui element chimic radioactiv este proporţională cu numărul de atomi radioactivi existenţi la momentul considerat şi nu depinde de alţi factori externi. Altfel spus, dacă notăm cu $x(t)$ numărul de atomi nedezintegraţi la momentul t şi dacă presupunem că x este o funcţie de clasă C^1 pe intervalul $[0, +\infty)$, avem:

$$x' = -ax, \tag{3.7}$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $a > 0$ este o constantă specifică elementului chimic, numită constantă de dezintegrare; ea poate fi determinată experimental cu o precizie suficient de bună. Semnul minus se datorează faptului ca numărul de atomi nedezintegraţi $x(t)$ scade pe măsură ce timpul t creşte (x este o funcţie descrescătoare de t), deci derivata x' este mereu negativă.

Ecuaţia (3.7) este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi omogenă, cu soluţia generală

$$x(t) = x(0)\,e^{-at}, \tag{3.8}$$

pentru $t \geq 0$, unde $x(0) > 0$ reprezintă numărul de atomi nedezintegraţi la momentul iniţial $t = 0$.

Pe acest model simplu se bazează metoda de datare a obiectelor vechi cu izotopul de carbon 14 radioactiv, folosită în arheologie, paleontologie, geologie, oceanografie (oamenii de ştiinţă s-au oprit asupra acestui izotop pentru că toate substanţele organice îl conţin). Această metodă este destul de precisă pentru intervale de timp de până la 10.000 de ani.

Cum se procedează? Avem un obiect de origine organică, a cărui vechime $T_0 > 0$ dorim s-o determinăm. Se cunoaşte (din observaţii practice) numărul de atomi de izotop carbon 14 din obiect la momentul iniţial, $x(0) > 0$, şi se poate afla câţi atomi de carbon 14 conţine obiectul în prezent, adică $x(T_0)$. Conform relaţiei (3.8), avem

$$x(T_0) = x(0)\,e^{-aT_0},$$

de unde

$$e^{-aT_0} = \frac{x(T_0)}{x(0)} \Leftrightarrow -aT_0 = \ln\frac{x(T_0)}{x(0)} \Leftrightarrow T_0 = \frac{1}{a}\ln\frac{x(0)}{x(T_0)}.$$

Din relaţia (3.8) observăm că pentru a determina numărul de atomi nedezintegraţi dintr-un element la un moment dat $t > 0$ trebuie să cunoaştem numărul iniţial de atomi $x(0)$ şi valoarea constantei de dezintegrare a. Este interesant de studiat ce informaţii ne oferă (3.8) dacă nu cunoaştem valorile exacte ale lui $x(0)$ sau a. În primul rând, $x(t)$ nu se anulează la niciun moment finit t pentru că e^{-at} nu se anulează niciodată. De aceea nu este util să studiem ”timpul total de viaţă” pentru o substanţă radioactivă. Totuşi este posibil să determinăm timpul în care orice fracţie particulară din element se dezintegrează.

Drept măsură a vitezei de dezintegrare a unei substanţe radioactive se ia de multe ori *perioada (timpul) de înjumătăţire*, adică timpul necesar pentru dezintegrarea unei jumătăţi din cantitatea de substanţă.

Pentru a determina formula timpului de înjumătăţire T înlocuim $x(T) = \dfrac{x(0)}{2}$ în relaţia :

$$T = \frac{1}{a} \ln \frac{x\,(0)}{x\,(T)}$$

(dedusă din (3.8) ca mai sus). Obţinem

$$T = \frac{\ln 2}{a}, \tag{3.9}$$

de unde deducem că timpul de înjumătăţire depinde doar de constanta de dezintegrare a (adică de elementul chimic considerat).

Mai constatăm că, deoarece

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} \overset{(3.8)}{=} \frac{x\,(0)\,e^{-a(t+T)}}{x\,(0)\,e^{-at}} = e^{-aT} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}, \quad \forall t \geq 0,$$

timpul de înjumătăţire va fi acelaşi pentru orice cantitate dintr-un element chimic dat.

În plus, să observăm că:

$$\begin{aligned}
x(2T) &= x\,(0)\,e^{-2aT} = x\,(0)\left(e^{-aT}\right)^2 = \frac{x(0)}{4};\\
x(3T) &= x\,(0)\,e^{-3aT} = x\,(0)\left(e^{-aT}\right)^3 = \frac{x(0)}{8};\\
&\vdots\\
x(kT) &= \frac{x(0)}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

adică la momentul kT, $k \in N^*$ rămâne nedezintegrată $\dfrac{1}{2^k}$ din cantitatea iniţială de substanţă.

3.3. Oscilatorul liniar armonic

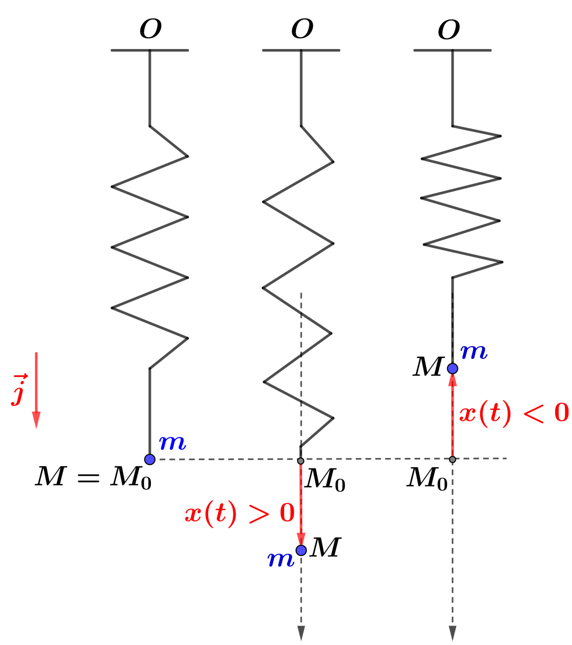

Figura 1. Oscilatorul liniar armonic

Fie o particulă materială M de masă m, suspendată de un punct fix O printr-un resort elastic de masă neglijabilă. La momentul iniţial $t = 0$ sistemul se află în echilibru (greutatea corpului este anulată în efect de o forţă elastică statică); poziţia iniţială M_0 a particulei este sub O (vectorii $\overrightarrow{OM_0}$ şi $\vec{j}$ (versorul vertical) sunt coliniari).

Scoatem sistemul din poziţia de echilibru, astfel încât viteza iniţială $\overrightarrow{v_0}$ a lui M să fie pe direcţia verticalei.

Admitem că, datorită condiţiilor iniţiale, M se va mişca pe verticala prin 0. Fie $x\,(t)$ elongaţia corpului la momentul t (adică deplasarea faţă de poziţia de echilibru M_0). În raport cu poziţia iniţială M_0, vectorul de poziţie al lui M la momentul $t \geq 0$ este $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{j}$, vectorul viteză, $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = x'(t)\vec{j}$ şi vectorul acceleraţie, $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) = x''(t)\vec{j}$.

Considerând rezistenţa mediului neglijabilă, singura forţă necompensată este forţa elastică. Conform legii lui Hooke, aceasta este proporţională cu elongaţia şi se opune mişcării: $\overrightarrow{F_e}(t) = -kx(t)\vec{j}$, unde $k > 0$ este constanta elastică a resortului.

Din legea a doua a lui Newton (legea fundamentală a dinamicii), $m\vec{a}(t) = \overrightarrow{F_e}(t)$ sau, echivalent, $mx''(t)\vec{j} = -kx(t)\vec{j}$, de unde $mx''(t) = -kx(t)$.

Aşadar x verifică ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea liniară cu coeficienţi constanţi:

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \tag{3.10}$$

pe care, cu ajutorul notaţiei $\omega^2 = k/m$, o rescriem

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

Ecuaţia (3.11) poartă numele de *ecuaţia oscilatorului liniar armonic neamortizat.* Vom determina soluţia ei generală în secţiunea 4.5.

Un model mai realist ar trebui să ţină cont şi de rezistenţa mediului; în acest caz mişcarea particulei este frânată şi de o forţă de frecare (datorată vâscozităţii), pe care o vom presupune proporţională cu viteza: $\overrightarrow{F_f}(t) = -\alpha\vec{v}(t) = -\alpha x'(t)\vec{j}$, cu $\alpha > 0$ constant. Atunci legea a doua a lui Newton se scrie:

$$m\vec{a}(t) = \overrightarrow{F_e}(t) + \overrightarrow{F_f}(t)$$

sau, echivalent,

$$mx''(t)\vec{j} = -kx(t)\vec{j} - \alpha x'(t)\vec{j}.$$

Cu alte cuvinte, x verifică ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea liniară cu coeficienţi constanţi:

$$mx''(t) + \alpha x'(t) + kx(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.12}$$

numită *ecuaţia oscilatorului liniar armonic amortizat.*

Dacă, în plus, asupra sistemului acţionează şi o forţă exterioară de modul $F(t)$, atunci ecuaţia (3.12) se transformă în

$$mx''(t) + \alpha x'(t) + kx(t) = F(t), \quad t \geq 0.$$

Atunci când $F(t) = 0$ pentru orice $t \geq 0$, spunem că sistemul are *oscilaţii libere*; în caz contrar, vorbim de *oscilaţii forţate (întreţinute).*

Observaţia 3.3.1. *Înmulţind ecuaţia* (3.10) *cu* $x'(t)$, *rezultă că*

$$mx'(t)x''(t) + kx(t)x'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m(x'(t))^2}{2} + \frac{kx^2(t)}{2}\right)' = 0, \textit{ pentru orice } t,$$

prin urmare

$$\frac{m(x'(t))^2}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} = \textit{constant},$$

relaţie care demonstrează că pentru oscilatorul liniar armonic neamortizat energia totală a particulei se conservă în timp.

Observaţia 3.3.2. *Prin înmulţirea ecuaţiei* (3.12) *cu* $x'(t)$ *rezultă că*

$$mx'(t)x''(t) + \alpha\left(x'(t)\right)^2 + kx(t)x'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m(x'(t))^2}{2} + \frac{kx^2(t)}{2}\right)' = -\alpha(x'(t))^2 \leq 0, \textit{ pentru orice } t,$$

relaţie care arată că în cazul oscilatorului liniar armonic amortizat energia totală a particulei descreşte în timp, adică are loc o pierdere de energie prin frecare.

3.4. Ecuaţia circuitului electric RLC serie

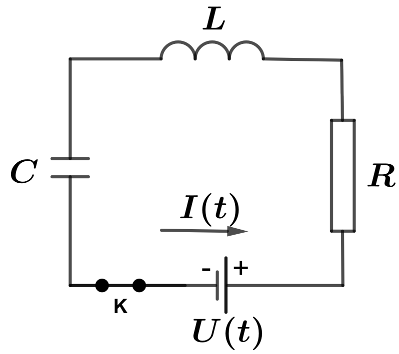

FIGURA 2. Circuitul RLC serie

Fie un circuit electric format dintr-un rezistor cu rezistenţa de R ohmi, o bobină de inductanţă L henry, un condensator de capacitate C farazi şi o sursă de curent care furnizează la momentul $t \geq 0$ o tensiune de $U(t)$ volţi, legate în serie (Figura 2). Acesta se numeşte circuit RLC serie. Notăm cu $I(t)$ intensitatea curentului electric în circuit la momentul $t \geq 0$.

Utilizând legea a doua a lui KIRCHHOFF avem:

$$U(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t),\ t \geq 0,$$

unde, conform legilor curentului electric,

$$u_R(t) = RI(t), \quad u_L(t) = LI'(t), \quad u_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t I(s)ds.$$

Deducem că:

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(s)ds = U(t),\ t \geq 0.$$

Derivând această relaţie, concluzionăm că I este soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul al doilea liniare cu coeficienţi constanţi:

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = U'(t),\ t \geq 0. \tag{3.13}$$

OBSERVAŢIA 3.4.1. *Deşi modelează fenomene fizice diferite, ecuaţia oscilatorului armonic amortizat* (3.12) *şi* (3.13) *au aceeaşi formă, deci se studiază analog.*

3.5. Pendulul matematic (gravitaţional)

Fie, într-un plan fix vertical, un pendul format dintr-o tijă OM subţire şi rigidă, cu lungimea $l > 0$ şi masa neglijabilă, la capătul M al căreia este prinsă o bilă cu raza neglijabilă, de masă $m > 0$ (Figura 3); tija se poate roti în jurul punctului fix O.

Asupra pendulului acţionează forţa de greutate $\overrightarrow{G}$, de modul $G = mg$ (unde g notează acceleraţia gravitaţională) şi, eventual, o forţă de rezistenţă $\overrightarrow{R}$, datorată vâscozităţii mediului.

Dacă A este poziţia de echilibru a pendulului situată sub punctul de sprijin O, atunci poziţia pendulului la un moment $t \geq 0$ poate fi caracterizată prin mărimea unghiului $\varphi(t) = \widehat{AOM}$ (măsurat în radiani). Spaţiul parcurs de extremitatea liberă M între două momente t şi $t + h$ (suficient de apropiate încât punctul să se mişte într-un singur sens de rotaţie) este

$$s(t+h) - s(t) = l\left(\varphi(t+h) - \varphi(t)\right);$$

prin urmare, viteza punctului M la momentul t este

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = l\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = l\varphi'(t).$$

Forţa de greutate se descompune în:

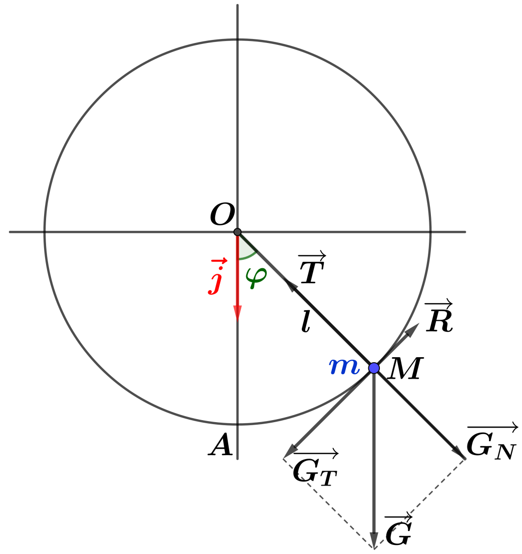

FIGURA 3. Pendulul matematic

- componenta normală $\overrightarrow{G_N}$, având direcţia tijei; această forţă va fi anulată de tensiunea din tijă $\vec{T}$;
- componenta tangenţială $\overrightarrow{G_T}$, având direcţia tangentei la arcul de cerc descris de punctul M; mărimea acestei forţe este $G_T = mg\sin\varphi(t)$.

Forţa de rezistenţă (de frecare) este tangentă la traiectorie, proporţională în modul cu viteza şi se opune mişcării: $\vec{R} = -k^2\vec{v}$.

Conform legii a doua a lui Newton, $m\vec{a} = \vec{G} + \vec{T} + \vec{R}$. Proiectând această relaţie pe tangenta la cercul $C(0,l)$ în punctul M, găsim

$$mv'(t) = -G_T + R = -mg\sin\varphi(t) - k^2v(t), \quad t \geq 0$$

sau, echivalent, ţinând cont de relaţia $v(t) = l\varphi'(t)$,

$$ml\varphi''(t) + k^2l\varphi'(t) + mg\sin\varphi(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Cu notaţiile $\gamma = \dfrac{k^2}{2m} > 0$, $\omega^2 = \dfrac{g}{l} > 0$, această ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea neliniară se rescrie

$$\varphi''(t) + 2\gamma\varphi'(t) + \omega^2\sin\varphi(t) = 0. \tag{3.14}$$

Am obţinut astfel *ecuaţia pendulului matematic (sau gravitaţional) amortizat.*

Dacă vâscozitatea mediului este neglijabilă (coeficientul de amortizare $\gamma = 0$), ecuaţia (3.14) se transformă în ecuaţia neliniară

$$\varphi''(t) + \omega^2\sin\varphi(t) = 0, \tag{3.15}$$

numită *ecuaţia pendulului matematic (sau gravitaţional) neamortizat.*

Atunci când ne interesează doar oscilaţii mici, putem aproxima $\sin\varphi$ prin φ şi găsim *ecuaţia micilor oscilaţii ale pendulului*:

$$\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0;$$

aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea liniară, de acelaşi tip cu ecuaţia oscilatorului armonic (neamortizat).

Energia totală a punctului material M la momentul $t \geq 0$ este $E(t) = E_c(t) + E_p(t)$, unde energia cinetică este

$$E_c(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{ml^2(\varphi'(t))^2}{2},$$

iar energia potenţială, raportată la înălţimea minimă ($M = A$), este

$$E_p(t) = mgh(t) = mg\left(l - l\cos\varphi(t)\right).$$

Prin urmare,

$$E(t) = \frac{ml^2(\varphi'(t))^2}{2} + mg(l - l\cos\varphi(t)), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.16}$$

Să observăm că

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{ml^2}{2} \cdot 2\varphi'(t)\varphi''(t) - mgl(-\sin\varphi(t))\varphi'(t) = ml^2\varphi'(t)\left(\varphi''(t) + \frac{g}{l}\sin\varphi(t)\right) \\ &= ml^2\varphi'(t)\left(\varphi''(t) + \omega^2\sin\varphi(t)\right), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Dacă punctul M verifică ecuaţia pendulului gravitaţional neamortizat (3.15), atunci $E'(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$, adică $E(t)$ =constant, pentru orice $t \geq 0$. Deci *în lipsa amortizării energia totală a pendulului se conservă.*

Dacă punctul M verifică ecuaţia pendulului gravitaţional amortizat (3.14), atunci

$$E'(t) = ml^2\varphi'(t) \cdot (-2\gamma\varphi'(t)) = -2ml^2\gamma(\varphi'(t))^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

adică E este o funcţie descrescătoare de t. Cu alte cuvinte, în prezenţa amortizării energia totală a pendulului scade în timp (*are loc o pierdere (disipare) de energie prin frecare*).

3.6. Prima viteză cosmică

Se consideră un corp de masă m, care se lansează pe verticală, de la suprafaţa Pământului, cu viteza v_0. Prin $x(t)$ notăm altitudinea la care se află corpul la momentul $t \geq 0$; $v(t) = x'(t)$ va fi atunci viteza corpului la momentul $t \geq 0$. Este clar că la momentul iniţial $t_0 = 0$ avem $x(0) = 0$ şi $x'(0) = v_0$. Dorim să aflăm viteza iniţială minimă pentru care corpul nu mai revine pe Pământ.

Considerăm Pământul o sferă de rază R şi presupunem că rezistenţa aerului este 0. Se ştie că forţa de atracţie pe care o exercită planeta asupra corpului aflat la altitudinea x este egală cu $\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}$. Din legea a doua a lui NEWTON găsim ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul al doilea (în necunoscuta $x = x(t)$)

$$mx''(t) = -\frac{mgR^2}{(x(t)+R)^2}, \; t \geq 0. \tag{3.17}$$

Dacă notăm $x' = p$, rezultă că

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot p$$

şi atunci ecuaţia (3.17) se rescrie ca o ecuaţie diferenţială neliniară de ordinul întâi în necunoscuta $p = p(x)$, anume

$$p \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \quad \text{sau, echivalent,} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}p^2\right) = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}.$$

Integrând această ecuaţie de la 0 la x obţinem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}v_0^2 &= -gR^2\int_0^x \frac{1}{(y+R)^2}dy \qquad (p \text{ este o funcţie de } x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gR^2\left(-\frac{1}{y+R}\right)\Big|_0^x \Leftrightarrow p^2 - v_0^2 = \frac{2gR^2}{x+R} - 2gR \\ &\Leftrightarrow p^2 = \frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dacă $p(x) = x'(t) = v(t)$ rămâne mereu diferit de 0, atunci corpul nu se întoarce pe Pământ (în caz contrar ar exista un $t_s > 0$ astfel încât $v(t_s) = 0$ şi la momentul t_s corpul s-ar opri, apoi ar începe coborârea spre Pământ).

Dacă $v_0 \geq \sqrt{2gR}$, atunci viteza va fi permanent pozitivă şi deci corpul nu revine pe Pământ.

Analizând relaţia (3.18), constatăm că dacă $v_0 < \sqrt{2gR}$, atunci în mod necesar corpul revine pe Pământ.

Viteza $v_0 = \sqrt{2gR}$ se numeşte *prima viteză cosmică.*

CAPITOLUL 4

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Cursul 7

Între teoria sistemelor diferenţiale liniare şi a sistemelor algebrice liniare există asemănări Sistemele diferenţiale liniare apar în practică de cele mai multe ori ca "prime aproximări" ale proceselor cu o structură mai complexă.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval real şi $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, funcţii continue. Fie sistemul de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare, cu necunoscutele $x_1(t), \ldots, x_n(t)$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} . \tag{4.1}$$

Pentru a scrie acest sistem într-o formă mai concentrată, introducem, pentru $t \in I$, notaţiile:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ (coloana termenilor liberi)};$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ (matricea sistemului)}.$$

Cu aceste notaţii, sistemul (4.1) se rescrie, echivalent, ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară vectorială:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t). \tag{4.2}$$

Observaţia 4.0.1. *În ecuaţia* (4.2) *vectorul*

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

este vectorul derivatelor componentelor lui $x(t)$.

Dacă $b(t) = 0$ pentru toţi $t \in I$, atunci sistemul (4.2) se numeşte sistem liniar *omogen*, iar în caz contrar (adică dacă există un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât funcţia b_i sa nu fie identic nulă), sistem liniar *neomogen*.

Teorema 4.0.1. *Pentru orice* $t_0 \in I$ *şi orice* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *problema* Cauchy *(PC)* $\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *are o soluţie unică* $x : I \to \mathbb{R}^n$.

În cele ce urmează, prin soluţie a sistemului (4.2) vom înţelege soluţie definită pe întreg intervalul I.

4.1. Sisteme diferenţiale liniare omogene. Spaţiul soluţiilor

Fie sistemul omogen asociat sistemului (4.2):

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{4.3}$$

Are loc următoarea teoremă de structură a mulţimii soluţiilor:

Teorema 4.1.1. *Mulţimea soluţiilor sistemului* <u>omogen</u> (4.3) *este un spaţiu liniar real de dimensiune n (n fiind ordinul matricei $A(t)$).*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S} = \{x : I \to \mathbb{R}^n \mid x \text{ soluţie a lui } (4.3)\}$.

Pentru a demonstra că $\mathcal{S}$ este spaţiu liniar real este suficient să arătăm că $\mathcal{S}$ este subspaţiu liniar al spaţiului

$$C^1(I;\mathbb{R}^n) = \{x : I \to \mathbb{R}^n \mid x \text{ funcţie de clasă } C^1 \text{ pe } I\}$$

(despre care ştim că este spaţiu liniar real).

Evident, $\mathcal{S} \subseteq C^1(I;\mathbb{R}^n)$, deoarece orice soluţie a sistemului (4.3) este, prin definiţie, funcţie de clasă C^1. Aşadar, rămâne de demonstrat că

$$\forall x, y \in \mathcal{S},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \text{are loc } \alpha x + \beta y \in \mathcal{S}.$$

Într-adevăr, $(\alpha x+\beta y)'(t) = \alpha x'(t)+\beta y'(t) \overset{(4.3)}{=} \alpha A(t)x(t)+\beta A(t)y(t) = A(t)[\alpha x(t)+\beta y(t)] = A(t)(\alpha x+\beta y)(t),\ \forall t \in I$. Altfel spus, $\alpha x + \beta y$ este soluţie pentru (4.3), adică $\alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$.

Demonstrăm acum că $\dim \mathcal{S} = n$. Vom construi un izomorfism între $\mathcal{S}$ şi un alt spaţiu real $n-$dimensional, $\mathbb{R}^n$.

Fixăm $t_0 \in I$ şi definim

$$T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n,\ T(x) = x(t_0) \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \mathcal{S}.$$

Pentru a obţine că T este un izomorfism de spaţii liniare, avem de arătat că T este operator liniar bijectiv.

T liniar: Pentru orice $x, y \in \mathcal{S}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, are loc

$$T(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(t_0) = \alpha x(t_0) + \beta y(t_0) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

T injectiv: avem de arătat că dacă $x, y \in \mathcal{S}$ şi $T(x) = T(y)$, atunci $x = y$; altfel spus, dacă x, y sunt soluţii pentru (4.3) şi $x(t_0) = y(t_0)$, atunci $x(t) = y(t)$ în orice $t \in I$. Acest lucru este adevărat, din partea de unicitate a teoremei 4.0.1.

T surjectiv: avem de arătat că pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$ există un $x \in \mathcal{S}$ astfel încât $T(x) = x_0$, echivalent, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$ există o soluţie x a sistemului (4.3) astfel încât $x(t_0) = x_0$. Această relaţie rezultă din partea de existenţă a teoremei 4.0.1.

Cum orice două spaţii liniare izomorfe au aceeaşi dimensiune, rezultă atunci că $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{R}^n = n$.
■

Observaţia 4.1.1. *Teorema 4.1.1 este deosebit de importantă, deoarece afirmă că pentru a scrie orice soluţie a sistemului* (4.3) *este suficient să cunoaştem n soluţii liniar independente ale acestui sistem.*

Într-adevăr, teorema 4.1.1 spune că orice bază din $\mathcal{S}$ are n elemente. Într-un spaţiu liniar finit dimensional, de dimensiune n, o mulţime cu n elemente este bază dacă şi numai dacă este liniar independentă. Pe de altă parte, dacă $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$ formează o bază în $\mathcal{S}$, atunci orice element $x \in \mathcal{S}$ se exprimă <u>în mod unic</u> ca o combinaţie liniară de elementele bazei, adică există şi sunt unice constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \cdots + c_n x^n(t),\ \forall t \in I. \tag{4.4}$$

Definiţia 4.1.1. *Un sistem $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$ care formează o bază în $\mathcal{S}$ se numeşte sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei* (4.3).

O problemă esenţială în studiul sistemului (4.3) este aceea a obţinerii unei baze în mulţimea $\mathcal{S}$ a soluţiilor. Nu se cunoaşte un procedeu general de determinare a unei astfel de baze. În schimb, atunci când matricea A este constantă (cazul sistemelor diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi) există metode pentru construcţia unei baze.

O altă problemă importantă este ca, date n soluţii ale sistemului (4.3), să se găsească condiţii necesare şi suficiente ca acestea să fie liniar independente (adică bază).

În acest scop, fie $x^1, x^2, \ldots, x^n : I \to \mathbb{R}^n$ soluţii ale sistemului (4.3) şi introducem aplicaţia

$$X : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

care în fiecare punct $t \in I$ dă matricea având pe coloane componentele acestor vectori. Mai precis, dacă

$$x^i(t) = \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ x_2^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix}, \text{ pentru } 1 \le i \le n,$$

atunci

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & & & \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} = \text{col}\,\left(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)\right), \ \forall t \in I. \tag{4.5}$$

Definiţia 4.1.2. *Matricea X definită prin* (4.5) *se numeşte matrice asociată sistemului de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$.*

Observaţia 4.1.2. *Din faptul că fiecare coloană a matricei X este soluţie a sistemului* (4.3)*, rezultă că X este soluţie pentru sistemul matriceal*

$$X'(t) = A(t)X(t), \ \forall t \in I. \tag{4.6}$$

Prin $X'(t)$ am notat matricea formată din derivatele elementelor matricei $X(t)$.

Definiţia 4.1.3. *Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei* (4.3) *se numeşte matrice fundamentală a sistemului* (4.3)*.*

Observaţia 4.1.3. *Sistemul* (4.3) *are o infinitate de matrice fundamentale, deoarece spaţiul $\mathcal{S}$ al soluţiilor acestui sistem are o infinitate de baze. Se poate, de fapt, demonstra că orice altă matrice fundamentală a sistemului* (4.3) *se obţine prin înmulţirea lui $X(t)$ cu o matrice constantă **nesingulară** de ordin n (Y este matrice fundamentală pentru sistemul* (4.3) $\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, cu* det $C \neq 0$ *astfel încât $Y(t) = X(t)C$, $t \in I$).*

Propoziţia 4.1.1. *Dacă X este o matrice fundamentală pentru sistemul* (4.3)*, atunci soluţia generală a sistemului* (4.3) *se reprezintă sub forma:*

$$x(t) = X(t)c, \ t \in I, \tag{4.7}$$

unde $c \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant.

Demonstraţie.

$$X(t)c = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & & & \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_1^1(t) + c_2 x_1^2(t) + \cdots + c_n x_1^n(t) \\ c_1 x_2^1(t) + c_2 x_2^2(t) + \cdots + c_n x_2^n(t) \\ \vdots \\ c_1 x_n^1(t) + c_2 x_n^2(t) + \cdots + c_n x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i x_1^i(t) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i x_2^i(t) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i x_n^i(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ x_2^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t), \ \forall t \in I,$$

adică scrierea matriceală a relaţiei (4.4). ■

Definiţia 4.1.4. *Dacă X este matricea asociată unui sistem de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$, determinantul său $W : I \to \mathbb{R}$, $W(t) = det\ X(t)$, $\forall t \in I$, se numeşte wronskianul asociat sistemului de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n$.*

Teorema 4.1.2. *(Liouville) Dacă W este wronkianul unui sistem (nu neapărat fundamental) de n soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ale lui (4.3), atunci*

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr\ A(s) ds},\ \forall t \in I, \tag{4.8}$$

unde $t_0 \in I$ este fixat, iar $tr\ A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$ este urma matricei $A(s)$, $\forall s \in I$.

Pentru a demonstra această teoremă avem nevoie de următorul rezultat auxiliar, care se obţine cu ajutorul definiţiei unui determinant:

Lema 4.1.1. *Dacă $d_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$ sunt funcţii derivabile pe I, atunci funcţia $D : I \to \mathbb{R}$, $D(t) = |d_{ij}(t)|_{n\times n}$, $\forall t \in I$ este derivabilă pe I şi $D'(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(t)$, $\forall t \in I$, unde D_k este determinantul obţinut din D prin înlocuirea elementelor liniei k cu derivatele acestora, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstraţia teoremei 4.1.2. Din lema precedentă rezultă că W este derivabilă pe I; o derivăm.

Pentru claritate, vom detalia demonstraţia în cazul $n = 3$. Are loc

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \left(\begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} \right)' = \begin{vmatrix} \left(x_1^1\right)'(t) & \left(x_1^2\right)'(t) & \left(x_1^3\right)'(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ \left(x_2^1\right)'(t) & \left(x_2^2\right)'(t) & \left(x_2^3\right)'(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ \left(x_3^1\right)'(t) & \left(x_3^2\right)'(t) & \left(x_3^3\right)'(t) \end{vmatrix} \\
&= D_1(t) + D_2(t) + D_3(t).
\end{aligned}$$

Folosind faptul că x^1, x^2, x^3 sunt soluţii pentru sistemul (4.3) şi proprietăţile determinanţilor, rezultă că

$$\begin{aligned}
D_1(t) &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}(t) x_i^1(t) & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}(t) x_i^2(t) & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}(t) x_i^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & x_1^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} + \\
&+ a_{12}(t) \begin{vmatrix} x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} + a_{13}(t) \begin{vmatrix} x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & x_2^3(t) \\ x_3^1(t) & x_3^2(t) & x_3^3(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) W(t)
\end{aligned}$$

(se observă că ultimii doi determinanţi din sumă sunt nuli, având câte două linii identice).

Analog, $D_2(t) = a_{22}(t) W(t)$, $D_3(t) = a_{33}(t) W(t)$.

Deci $W'(t) = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + a_{33}(t)]\, W(t)$, adică

$$W'(t) = [\text{tr } A(t)] W(t),\ \forall t \in I.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară omogenă, de unde rezultă (4.8).

Pentru a face demonstraţia într-o dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare se va proceda asemănător. ∎

Teorema 4.1.3. *Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n$ un sistem de soluţii ale ecuaţiei (4.3). Fie X matricea şi W wronskianul asociate acestui sistem de soluţii. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) matricea X este fundamentală;

ii) $W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$;

iii) există un punct $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) \neq 0$.

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că $i) \Longrightarrow ii) \Longrightarrow iii) \Longrightarrow i)$.

$i) \Longrightarrow ii)$: Dacă X este matrice fundamentală, atunci $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ este un sistem liniar independent de soluţii pentru (4.3). Presupunem prin reducere la absurd că există un punct $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) = 0$. În acest caz sistemul algebric liniar şi omogen $X(t_0)c = 0$, care are determinantul $W(t_0) = 0$, va admite o soluţie nebanală $c_0 = (c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0n}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fie

$$y(t) = X(t)c_0. \tag{4.9}$$

Comparând cu formula (4.7), rezultă că $y(t)$ este soluţie pentru sistemul diferenţial (4.3). În plus, $y(t_0) = X(t_0)c_0 = 0$. Deci problema CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

admite, pe lângă soluţia nulă, soluţia $y(t)$. Din partea de unicitate a teoremei 4.0.1 rezultă că $y(t) = 0$ pentru orice $t \in I$. Înlocuind în (4.9), vom obţine $X(t)c_0 = 0$ pentru un vector $c_0 \neq 0$, adică, echivalent, $\sum_{i=1}^{n} c_{0i}x^i(t) = 0$ pentru orice $t \in I$, ceea ce *contrazice* independenţa sistemului $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$.

$ii) \Longrightarrow iii)$: evident

$iii) \Longrightarrow i)$: Ştim că există un $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) \neq 0$. Presupunem prin reducere la absurd că sistemul $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ este liniar dependent, adică există $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = 0$ pentru orice $t \in I$ sau, echivalent, $X(t)c = 0$ pentru orice $t \in I$. În particular,

$$X(t_0)c = 0. \tag{4.10}$$

Sistemul (4.10) este un sistem algebric liniar şi omogen. De vreme ce admite soluţii nenule, înseamnă că determinantul său este nul: $\det X(t_0) = 0$. Altfel spus, $W(t_0) = 0$ (*contradicţie!*). ■

OBSERVAŢIA 4.1.4. *Echivalenţa $ii) \Longrightarrow iii)$ poate fi stabilită şi prin teorema lui* LIOUVILLE, *folosind faptul că funcţia exponenţială este strict pozitivă.*

OBSERVAŢIA 4.1.5. *Fie $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şi X o matrice fundamentală pentru sistemul* (4.3)*. Atunci unica soluţie a problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

este dată de formula:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0, \quad \forall t \in I, \tag{4.11}$$

unde prin $X^{-1}(t)$ vom nota inversa matricei $X(t)$.

Într-adevăr, din (4.7), avem $x(t) = X(t)c$, $\forall t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$. Impunând condiţia $x(t_0) = x_0$ rezultă că $X(t_0)c = x_0$. Dar, conform teoremei 4.1.3, $i) \Longrightarrow ii)$, $X(t_0)$ este matrice inversabilă şi atunci $c = X^{-1}(t_0)x_0$. Unicitatea rezultă din teorema 4.0.1.

4.2. Sisteme liniare neomogene. Formula variaţiei constantelor

Fie sistemul diferenţial de ordinul întâi liniar, neomogen:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{4.12}$$

unde $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $b : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue (adică $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$, $b(t) = (b_i(t))_{n\times 1}$ şi $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ sunt continue, $1 \leq i, j \leq n$).

Fie sistemul liniar omogen ataşat:

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{4.13}$$

Dacă ştim să rezolvăm sistemul omogen (4.13), oare putem spune ceva despre soluţiile sistemului neomogen (4.12)? Teorema de mai jos dă o metodă de determinare a soluţiei generale a sistemului (4.12) cu ajutorul soluţiei generale a sistemului omogen ataşat (4.13):

Teorema 4.2.1. *Fie X o matrice fundamentală a sistemului omogen (4.13) şi fie $y : I \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului neomogen (4.12). O funcţie $x : I \to \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului neomogen (4.12) $\Leftrightarrow$ x este de forma:*

$$x(t) = X(t)c + y(t), \quad \forall t \in I, \tag{4.14}$$

unde $c \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant.

Altfel spus, soluţia generală a sistemului neomogen (4.12) este dată de suma dintre soluţia generală a sistemului omogen ataşat (4.13) ($X(t)c$) şi o soluţie particulară a lui (4.12) (y).

Observaţia 4.2.1. *O matrice fundamentală se asociază numai unui sistem liniar omogen.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$": Presupunem că x este soluţie pentru sistemul (4.12). Demonstrăm că x este de forma (4.14).

Fie $z : I \to \mathbb{R}^n$, $z(t) = x(t) - y(t)$, $\forall t \in I$. Ca diferenţă a două funcţii derivabile, z este derivabilă pe I şi

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) - y'(t) = A(t)x(t) + b(t) - A(t)y(t) - b(t) \\ &= A(t)(x(t) - y(t)) = A(t)z(t), \ \forall t \in I. \end{aligned}$$

Deci z este soluţie a sistemului omogen (4.13) şi, în conformitate cu relaţia (4.7), ea este de forma $z(t) = X(t)c$, $\forall t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant.

Prin urmare, $x(t) - y(t) = X(t)c$, $\forall t \in I$.

"$\Leftarrow$": Fie x funcţia definită prin (4.14). Arătăm că x este soluţie pentru (4.12).

Cum $X(\cdot)c$ este soluţie a sistemului omogen (4.13) şi y este soluţie pentru (4.12), rezultă că x este derivabilă pe I. Mai mult,

$$\begin{aligned} x'(t) &= X'(t)c + y'(t) = A(t)X(t)c + A(t)y(t) + b(t) \\ &= A(t)[X(t)c + y(t)] + b(t) = A(t)x(t) + b(t), \ \forall t \in I. \end{aligned}$$

Aşadar x verifică (4.12). ■

Teorema 4.2.2. ***(Formula variaţiei constantelor)*** *Fie X o matrice fundamentală a sistemului omogen (4.13). Atunci pentru orice $t_0 \in I$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}^n$, unica soluţie $x : I \to \mathbb{R}^n$ a problemei* Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.15}$$

este dată de:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds, \quad \forall t \in I. \tag{4.16}$$

Demonstraţie. Plecând de la formula (4.7) de la sisteme omogene, vom căuta unica soluţie a problemei Cauchy (4.15) de forma:

$$x(t) = X(t)c(t), \ \forall t \in I, \tag{4.17}$$

unde $c : I \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 pe care intenţionăm să o determinăm. În acest scop impunem condiţia ca x dat de (4.17) să fie soluţie a problemei Cauchy (4.15):

$$X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t), \ \forall t \in I$$

$$\overset{(4.6)}{\Longrightarrow} A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t), \ \forall t \in I,$$

echivalent,

$$X(t)c'(t) = b(t), \ \forall t \in I. \tag{*}$$

Cum $X(t)$ este nesingulară pentru orice $t \in I$, rezultă că

$$c'(t) = X^{-1}(t)b(t), \ \forall t \in I.$$

Integrăm această relaţie în ambii membri de la t_0 la t şi obţinem cu ajutorul formulei LEIBNIZ-NEWTON că

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds.$$

Înlocuind în (4.17), rezultă că

$$x(t) = X(t)c(t_0) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds,\ \forall t \in I,$$

adică, echivalent, comutând $X(t)$ cu integrala (se folosesc liniaritatea integralei şi faptul că $X(t)$ nu depinde de variabila de integrare s),

$$x(t) = X(t)c(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds,\ \forall t \in I. \tag{4.18}$$

Îl vom determina pe $c(t_0)$ punând condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$, care implică

$$x_0 = X(t_0)c(t_0) \Longrightarrow c(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0.$$

Înlocuind în (4.18) deducem (4.16). ∎

OBSERVAŢIA 4.2.2. *Numele de "formula variaţiei constantelor" se datorează faptului că se caută o soluţie particulară a sistemului neomogen înlocuind constanta c ce apare în reprezentarea soluţiei generale a sistemului omogen cu o funcţie ce variază odată cu timpul.*

OBSERVAŢIA 4.2.3. *Formula* (4.18) *ne arată cum poate fi scrisă soluţia generală a sistemului neomogen* (4.12) *utilizând doar o matrice fundamentală a sistemului omogen asociat* (4.13)*:*

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds, \quad \forall t \in I$$

($t_0 \in I$ *fixat*, $c \in \mathbb{R}^n$ *constant*).

OBSERVAŢIA 4.2.4. *Din cele demonstrate până în acest moment rezultă că pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare este suficient să determinăm o matrice fundamentală a sistemului omogen asociat. Pentru sistemele neautonome (cu elementele matricei A depinzând de t) nu există însă o metodă generală de determinare a unei matrice fundamentale.*

În cazul în care elementele matricei A sunt constante (sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi) există mai multe metode de determinare a unei astfel de matrice fundamentale.

4.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare

Aceste ecuaţii au forma:

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t), \tag{4.19}$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue ($I \subseteq \mathbb{R}$ fiind un interval nevid, deschis).

Prin intermediul transformării

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ \vdots \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases}$$

ecuaţia (4.19) poate fi rescrisă, echivalent, sub forma unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare, în necunoscutele $y_1(t), \ldots, y_n(t)$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \ldots - a_1(t)y_n(t) + f(t). \end{cases} \tag{4.20}$$

Sistemul (4.20) este de forma:

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{4.21}$$

unde, pentru $t \in I$:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n;$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Toate consideraţiile făcute anterior pentru sisteme diferenţiale liniare se pot reformula pentru ecuaţia (4.19).

Cursul 8

Definiţia 4.3.1. *Dacă în* (4.19) $f(t) = 0$, *pentru toţi* $t \in I$, *atunci ecuaţia* (4.19) *se numeşte* omogenă, *iar în caz contrar,* neomogenă.

Teorema 4.3.1. *Pentru orice* $t_0 \in I$ *şi orice* $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$*, problema* Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_{01} \\ x'(t_0) = x_{02} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{cases} \tag{4.22}$$

are o soluţie unică $x : I \to \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Cu notaţiile introduse anterior, problema Cauchy (4.22) este echivalentă cu problema Cauchy $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$, despre care ştim că are o soluţie unică definită pe întreg intervalul I (teorema 4.0.1). ∎

4.3.1. Ecuaţii diferenţiale de ordin n liniare omogene. Considerăm ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei (4.19):

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = 0. \tag{4.23}$$

Are loc următoarea teoremă de structură a mulţimii soluţiilor:

Teorema 4.3.2. *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei* <u>*omogene*</u> (4.23) *este un spaţiu liniar real de dimensiune* n *(*n *fiind ordinul ecuaţiei).*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S}_n = \{x : I \to \mathbb{R} \mid x \text{ soluţie pentru } (4.23)\}$.

Se constată că

$$\mathcal{S}_n \subseteq C^n(I; \mathcal{R}) = \{x : I \to \mathbb{R} \mid x \text{ funcţie de clasă } C^n \text{ pe } I\},$$

pentru că orice soluţie a unei ecuaţii diferenţiale de ordin n este în primul rând, prin definiţie, funcţie de clasă C^n. Mai mult, $\mathcal{S}_n$ este chiar subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $C^n(I; \mathcal{R})$, deoarece pentru orice două soluţii ale ecuaţiei (4.23), $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_n$, şi orice doi scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se observă că $\alpha x_1 + \beta x_2$ este, la rândul ei, soluţie a lui (4.23) ($(\alpha x_1 + \beta x_2)^{(k)} = \alpha x_1^{(k)} + \beta x_2^{(k)}$, pentru $0 \le k \le n$, din liniaritatea derivatei de ordin oarecare).

Acum să notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor $y : I \to \mathbb{R}^n$ ale sistemului liniar şi omogen asociat ecuaţiei (4.23):

$$y' = A(t)y. \tag{4.24}$$

Din teorema 4.1.1 ştim că $\mathcal{S}$ este un spaţiu liniar real de dimensiune n, deci pentru a demonstra că dimensiunea lui $\mathcal{S}_n$ este n va fi suficient să găsim un izomorfism între aceste două spaţii liniare. Aplicaţia $T : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}$,

$$T(x) = \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = y \in \mathcal{S}, \ \forall x \in \mathcal{S}_n \tag{4.25}$$

este un astfel de exemplu. Într-adevăr:

T este operator liniar: pentru orice $x, \tilde{x} \in \mathcal{S}_n$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, are loc

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta\tilde{x}) &= \left(\alpha x + \beta\tilde{x}, (\alpha x + \beta\tilde{x})', \ldots, (\alpha x + \beta\tilde{x})^{(n-1)}\right) \\ &= \left(\alpha x + \beta\tilde{x}, \alpha x' + \beta\tilde{x}', \ldots, \alpha x^{(n-1)} + \beta\tilde{x}^{(n-1)}\right) \\ &= \alpha\left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) + \beta\left(\tilde{x}, \tilde{x}', \ldots, \tilde{x}^{(n-1)}\right) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(\tilde{x}); \end{aligned}$$

T este injectiv: ar trebui de arătat că dacă $x, \tilde{x} \in \mathcal{S}$ şi $T(x) = T(\tilde{x})$, atunci $x = \tilde{x}$; dar $T(x) = T(\tilde{x}) \Leftrightarrow \left(x, x', \dots, x^{(n-1)}\right) = \left(\tilde{x}, \tilde{x}', \dots, \tilde{x}^{(n-1)}\right)$, egalitate care, evident, implică $x = \tilde{x}$ (două $n-$uple sunt egale dacă şi numai dacă au componentele situate pe aceleaşi locuri egale);

T este surjectiv: pentru orice $y \in \mathcal{S}$ se cere demonstrată existenţa unui element $x \in \mathcal{S}_n$ verificând $T(x) = y$; ori, dată o soluţie $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ a sistemului liniar şi omogen (4.24) asociat ecuaţiei (4.23), se ia $x = y_1$ (=prima componentă a soluţiei sistemului (4.24) şi este clar că $x \in C^n(I;\mathbb{R})$, iar $T(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Aşadar T este izomorfism, deci $\mathcal{S}_n \cong \mathcal{S}$ şi $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S}_n = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S} = n$. ■

Observaţia 4.3.1. *Teorema 4.3.2 arată că determinarea soluţiei generale a ecuaţiei* (4.23) *revine la determinarea a n soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei. Altfel spus, dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}_n$ sunt liniar independente ($\Leftrightarrow$ bază în $\mathcal{S}_n$), atunci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene* (4.23) *este dată de:*

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t),\ \forall t \in I, \tag{4.26}$$

unde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Definiţia 4.3.2. *Un sistem $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}_n$ care formează o bază în $\mathcal{S}_n$ se numeşte sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei* (4.23).

Definiţia 4.3.3. *Fie n soluţii ale ecuaţiei* (4.23), *$x_1, x_2, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$. Matricea $X : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definită prin*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},\ \forall t \in I \tag{4.27}$$

se numeşte matricea asociată sistemului de soluţii $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}_n$.

Definiţia 4.3.4. *Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei* (4.23) *se numeşte matrice fundamentală a ecuaţiei* (4.23).

Definiţia 4.3.5. *Dacă X este matricea asociată unui sistem de soluţii $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{S}_n$, determinantul său $W : I \to \mathbb{R}$, $W(t) = det\ X(t)$, $\forall t \in I$, se numeşte wronskianul asociat sistemului de soluţii $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

Observaţia 4.3.2. *Deoarece aplicaţia T definită prin* (4.25) *este un izomorfism între $\mathcal{S}_n$ şi $\mathcal{S}$, rezultă că un sistem de soluţii $x_1, x_2, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ ale ecuaţiei* (4.23) *este fundamental dacă şi numai dacă $y^1 = T(x_1), y^2 = T(x_2), \dots, y^n = T(x_n)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen* (4.24) *ataşat sistemului* (4.21). *Această observaţie ne permite să reformulăm rezultatele stabilite pentru sisteme liniare omogene în cazul ecuaţiei diferenţiale de ordin n liniare.*

Teorema 4.3.3. *(*Liouville*) Dacă W este wronkianul unui sistem de n soluţii $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale ecuaţiei* (4.23), *atunci*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds},\ \forall t \in I, \tag{4.28}$$

unde $t_0 \in I$ este fixat.

Demonstraţie. Din teorema 4.1.2,

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}\ A(s)ds},\ \forall t \in I,$$

unde $A(t)$ este matricea sistemului (4.24), matrice care are urma

$$\mathrm{tr}\ A(t) = -a_1(t),\ t \in I$$

(a se vedea la pagina 52 cum a fost introdusă matricea $A(t)$). ■

Observaţia 4.3.3. *Din relaţia* (4.28) *se obţine că dacă $a_1(t) = 0$, $\forall t \in I$, atunci orice sistem de n soluţii ale ecuaţiei* (4.23) *are wronskianul constant pe I: $W(t) = W(t_0)$, $\forall t \in I$.*

TEOREMA 4.3.4. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ un sistem de soluţii ale ecuaţiei* (4.23). *Fie X matricea şi W wronskianul asociate acestui sistem de soluţii. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) matricea X este fundamentală;

ii) $W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$;

iii) există un punct $t_0 \in I$ astfel încât $W(t_0) \neq 0$.

DEMONSTRAŢIE. Este o consecinţă a teoremei 4.1.3. ∎

4.3.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin n liniare neomogene. Metoda variaţiei constantelor.

TEOREMA 4.3.5. *Soluţia generală x a ecuaţiei liniare neomogene* (4.19) *este de forma*

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_p(t),\ t \in I, \tag{4.29}$$

unde x_{omog} este soluţia generală a ecuaţiei omogene (4.23) *asociate ecuaţiei* (4.19), *iar $x_p : I \to \mathbb{R}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene* (4.19).

DEMONSTRAŢIE. Rezultatul urmează din teorema 4.2.1. ∎

Metoda variaţiei constantelor

Presupunem că am putut determina un sistem fundamental de soluţii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru ecuaţia liniară omogenă (4.23); fie $X(t)$ matricea asociată acestui sistem de soluţii (definită prin relaţia (4.27)); desigur, $X(t)$ este o matrice fundamentală.

Conform formulei (4.26), orice soluţie a ecuaţiei omogene (4.23) este de forma

$$x_{omog}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t),\ t \in I,$$

cu $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ constante.

În cazul ecuaţiei neomogene (4.19) vom proceda ca în cazul sistemelor diferenţiale liniare şi vom căuta o soluţie de forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x_i(t), \tag{4.30}$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1. Amintim condiţia

$$X(t)c'(t) = b(t) \tag{*}$$

dedusă la sisteme liniare neomogene pentru determinarea vectorului

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$$

Scriind această condiţie pe larg, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) & + & c_2'(t)x_2(t) & + & \cdots & + & c_n'(t)x_n(t) & = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) & + & c_2'(t)x_2'(t) & + & \cdots & + & c_n'(t)x_n'(t) & = 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ c_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) & + & c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t) & + & \cdots & + & c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) & = 0 \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) & + & c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) & + & \cdots & + & c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) & = f(t). \end{cases} \tag{4.31}$$

Sistemul (4.31) este un sistem algebric liniar şi omogen, cu n ecuaţii şi n necunoscute, anume $c_1'(t)$, $c_2'(t)$,..., $c_n'(t)$. Determinantul acestui sistem este det $X(t) \neq 0$, $\forall t \in I$ (se aplică teorema 4.3.4, ştiind că $X(t)$ este matrice fundamentală). Avem de-a face, aşadar, cu un sistem CRAMER, care va admite o soluţie unică.

După aflarea funcţiilor $c_1'(t)$, $c_2'(t)$,..., $c_n'(t)$, vom determina $c_1(t)$, $c_2(t)$,..., $c_n(t)$ prin integrare; fiecare din funcţiile $c_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, va depinde de câte o constantă reală - în total, n constante. Aceste n constante se pot determina în mod unic din condiţiile iniţiale asociate ecuaţiei (4.19) (obţinem un sistem algebric liniar de n ecuaţii cu n necunoscute, al cărui determinant este det $W(t_0) \neq 0$, deci tot un sistem CRAMER).

OBSERVAŢIA 4.3.4. *O problemă esenţială este problema determinării unui sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei liniare omogene* (4.23). *Această problemă nu poate fi rezolvată explicit în cazul general al ecuaţiilor cu coeficienţi variabili (adică pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dependente de t).*

4.4. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Ecuaţiile diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi reprezintă un caz particular al ecuaţiei (4.19): acela când coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu depind de t. Prezentăm în continuare metode de rezolvare a acestora.

4.4.1. Ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi. Determinarea unui sistem fundamental de soluţii. Ne propunem să determinăm un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \tag{4.32}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Căutăm o soluţie particulară de forma $x_p(t) = e^{\lambda t}$ (cu λ constant). Atunci $x_p'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x_p''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, ..., $x_p^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$ şi înlocuirea în ecuaţia (4.32) conduce la

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0. \tag{4.33}$$

Polinomul

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{4.34}$$

se numeşte *polinomul caracteristic asociat ecuaţiei diferenţiale* (4.32), iar ecuaţia $L(\lambda) = 0$ sau

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4.35}$$

este *ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale* (4.32).

Din teorema fundamentală a algebrei[1] rezultă că ecuaţia (4.35) admite exact n rădăcini complexe, care pot fi simple sau multiple. Fie aceste rădăcini λ_1, de multiplicitate $m_1 \in \mathbb{N}^*$, λ_2, de multiplicitate $m_2 \in \mathbb{N}^*$,..., λ_s, de multiplicitate $m_s \in \mathbb{N}^*$; desigur, $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$, iar

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice (4.35) se numesc *rădăcini caracteristice* sau *autovalori.*

OBSERVAŢIA 4.4.1. *Putem vorbi despre soluţii ale ecuaţiei* (4.32) *definite pe un interval real, dar cu valori complexe. Prin definiţie, o asemenea soluţie este o funcţie $x : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, astfel încât $x \in C^n(J)$ şi*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0, \ \forall t \in J.$$

La fel ca în cazul soluţiilor cu valori reale, se poate arăta că soluţiile complexe sunt definite pe întreg $\mathbb{R}$, iar mulţimea lor are structură de spaţiu liniar $n-$dimensional peste $\mathbb{C}$. De asemenea, se pot introduce (exact în acelaşi mod) noţiunile de sistem fundamental de soluţii, matrice fundamentală, wronskian.

Relaţia (4.33) ne spune că $e^{\lambda t}$ va fi soluţie a ecuaţiei (4.32) dacă şi numai dacă λ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.35). Distingem două situaţii: ecuaţia caracteristică poate avea doar rădăcini simple sau poate admite şi rădăcini multiple.

Cazul A) Dacă ecuaţia caracteristică (4.35) **are n rădăcini distincte** (reale sau complexe) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci funcţiile $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, ..., $x_n(t) = e^{\lambda_n t}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (4.32). Mai mult, ele formează un sistem fundamental de soluţii. Într-adevăr, se aplică teorema 4.3.4, *ii*) $\Rightarrow$ *i*),

[1]Orice polinom neconstant cu coeficienţi în $\mathbb{C}$ are măcar o rădăcină în $\mathbb{C}$.

deoarece wronskianul acestui sistem de soluţii este

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

În calcul am folosit faptul că ultimul determinant este de tip Vandermonde.

În aceste condiţii, soluţia generală a ecuaţiei (4.32) va fi

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

cu $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ constante.

Cazul B) Dacă ecuaţia caracteristică (4.35) **are (şi) rădăcini multiple**, atunci să observăm mai întâi că operatorul diferenţial liniar

$$L(D)(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$$

verifică relaţia

$$\begin{aligned} L(D)\left(y e^{\lambda t}\right) &= e^{\lambda t} \left(y L(\lambda) + \frac{1}{1!} y' L'(\lambda) + \frac{1}{2!} y'' L''(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)} L^{(n)}(\lambda) \right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall y \in C^n \end{aligned} \tag{4.36}$$

(prin $L^{(k)}$ am notat derivata de ordin k a polinomului caracteristic, adică

$$L^{(k)}(\lambda) = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \lambda^{n-k} + (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k) a_1 \lambda^{n-k-1} + \dots).$$

Într-adevăr, fie $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $y \in C^n$ oarecare fixate. Avem

$$L(D)\left(y e^{\lambda t}\right) = \left(y e^{\lambda t}\right)^{(n)} + a_1 \left(y e^{\lambda t}\right)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \left(y e^{\lambda t}\right)' + a_n y e^{\lambda t}.$$

Din regula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii:

$$(yz)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k y^{(k)} z^{(m-k)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} y^{(k)} z^{(m-k)}$$

deducem, pentru $0 \le m \le n$, că

$$\begin{aligned} \left(y e^{\lambda t}\right)^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} y^{(k)} \left(e^{\lambda t}\right)^{(m-k)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} y^{(k)} \lambda^{m-k} e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda^{m-k} y^{(k)}, \end{aligned}$$

prin urmare

$$L(D)\left(y e^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} L_k(\lambda) y^{(k)}, \tag{4.37}$$

unde L_k sunt polinoame de ordin $n-k$, $0 \le k \le n$. Rămâne să arătăm că $L_k(\lambda) = \dfrac{1}{k!}L^{(k)}(\lambda)$. Vom lua în (4.37) $y = e^{\gamma t}$, cu $\gamma \in \mathbb{C}$ oarecare, şi obţinem

$$L(D)\left(e^{(\lambda+\gamma)t}\right) = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n} L_k(\lambda)\gamma^k e^{\gamma t},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.38}$$

Întrucât

$$\begin{aligned} L(D)\left(e^{\alpha t}\right) &= \left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} + a_1\left(e^{\lambda t}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\left(e^{\lambda t}\right)' + a_n e^{\lambda t} \\ &= \lambda^n e^{\lambda t} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_{n-1}\lambda e^{\lambda t} + +a_n e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = e^{\alpha t}L(\alpha),\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

relaţia (4.38) devine

$$e^{(\lambda+\gamma)t}L(\lambda+\gamma) = e^{(\lambda+\gamma)t}\sum_{k=0}^{n} L_k(\lambda)\gamma^k,\ \forall \gamma \in \mathbb{C},$$

adică

$$L(\lambda+\gamma) = \sum_{k=0}^{n} L_k(\lambda)\gamma^k,\ \forall \gamma \in \mathbb{C}.$$

Pe de altă parte, din formula lui Taylor,

$$L(\lambda+\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}L^{(k)}(\lambda)\gamma^k,\ \forall \gamma \in \mathbb{C}.$$

Comparând ultimele două relaţii, deducem

$$L_k(\lambda) = \frac{1}{k!}L^{(k)}(\lambda), \quad \forall 0 \le k \le n,$$

ceea ce încheie demonstraţia. ∎

Fie acum rădăcina λ_1, de multiplicitate $m_1 \le n$, a ecuaţiei caracteristice (4.35). Atunci

$$L(\lambda_1) = L'(\lambda_1) = \cdots = L^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0,\ L^{(m_1)}(\lambda_1) \ne 0.$$

Ecuaţia diferenţială $L(D)\left(ye^{\lambda t}\right) = 0$ se rescrie, folosind relaţia (4.36),

$$\frac{1}{m_1!}L^{(m_1)}(\lambda_1)y^{(m_1)} + \frac{1}{(m_1+1)!}L^{(m_1+1)}(\lambda_1)y^{(m_1+1)} + \cdots + \frac{1}{n!}L^{(n)}(\lambda_1)y^{(n)} = 0.$$

Este uşor de observat că polinoamele de grad (m_1-1) în t sunt soluţii particulare y ale acestei ecuaţii, deoarece au derivatele de ordin mai mare sau egal cu m_1 identic nule. Prin urmare, autovalorii λ_1 de multiplicitate m_1 îi corespunde o soluţie pentru ecuaţia (4.32) de forma

$$e^{\lambda_1 t}\left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m_1-1}t^{m_1-1}\right)$$

(unde $c_0, c_1, \ldots, c_{m_1-1}$ sunt constante) sau, altfel spus, m_1 soluţii de forma

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}.$$

Teorema 4.4.1. *Dacă ecuaţia caracteristică* (4.35) *are rădăcinile (reale sau complexe)* λ_1 *de multiplicitate* m_1, λ_2 *de multiplicitate* $m_2, \ldots$, λ_s *de multiplicitate* m_s, *atunci sistemul de soluţii (cu valori complexe)*

$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}; \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \ldots, & t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}; \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \ldots, & t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \end{array} \tag{4.39}$$

asociat ecuaţiei liniare omogene (4.32) *este fundamental.*

Demonstraţie. Am arătat mai sus că toate funcţiile (4.39) sunt soluţii pentru ecuaţia (4.32), în total $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$ soluţii. Verificăm acum liniara lor independenţă peste $\mathbb{C}$, lucru ce va asigura că ele formează un sistem fundamental de soluţii (a se vedea observaţia 4.3.1).

Considerăm constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n t^{m_s - 1} e^{\lambda_s t} = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Această egalitate se rescrie

$$e^{\lambda_1 t} g_1(t) + e^{\lambda_2 t} g_2(t) + \cdots + e^{\lambda_s t} g_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

unde g_k sunt funcţii polinomiale de grad cel mult m_k, pentru $1 \leq k \leq s$.

Împărţind ambii membri prin $e^{\lambda_1 t} \neq 0$, se obţine

$$g_1(t) + e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} g_2(t) + \cdots + e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} g_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

care devine după $m_1 \geq$grad g_1 derivări

$$e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} h_2(t) + \cdots + e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} h_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $h_2, \ldots, h_s$ sunt funcţii polinomiale cu

$$\text{grad } h_k = \text{grad } g_k, \text{ pentru } 2 \leq k \leq s.$$

Împărţind ambii membri prin $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \neq 0$, rezultă

$$h_2(t) + e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} h_3(t) + \cdots + e^{(\lambda_s - \lambda_2)t} h_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Repetând acest procedeu, se ajunge la

$$e^{(\lambda_s - \lambda_{s-1})t} u_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

unde grad $u_s = \cdots =$grad $h_s =$grad g_s. Întrucât exponenţialele nu se anulează pe $\mathbb{R}$, deducem că $u_s(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, adică $u_s \equiv 0$, şi, prin urmare, $g_s \equiv 0$ (deoarece grad $g_s =$grad $u_s = -\infty$ şi singurul polinom de grad $-\infty$ este polinomul nul). În acest fel am demonstrat că

$$c_{n-m_s+1} = \cdots = c_n = 0.$$

Analog rezultă că $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv 0, \ldots, g_{s-1} \equiv 0$. Atunci

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

ceea ce implică liniara independenţă a sistemului (4.39) şi încheie demonstraţia teoremei. ■

Observaţia 4.4.2. *Atunci când ecuaţia caracteristică* (4.35) *are (şi) rădăcini din* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *în sistemul* (4.39) *vor apărea (şi) funcţii complexe. Pentru a evita această situaţie, se înlocuieşte sistemul fundamental* (4.39) *cu un sistem fundamental alcătuit numai din funcţii reale.*

Mai exact, ştim de la algebră că dacă un polinom cu coeficienţi reali are o rădăcină număr complex, atunci şi complex conjugatul acelui număr va fi rădăcină (de aceeaşi multiplicitate) a polinomului. Aşadar, autovalorile pur complexe vor apare grupate în perechi conjugate de forma $(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$. *Să ne amintim că*

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t}\left(\cos \beta t + i \sin \beta t\right), \\ e^{(\alpha-i\beta)t} &= e^{\alpha t}\left(\cos \beta t - i \sin \beta t\right), \end{aligned}$$

de unde rezultă prin adunare, respectiv scădere, că

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t &= \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}\right), \\ e^{\alpha t} \sin \beta t &= \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\right). \end{aligned}$$

Dacă $\alpha \pm i\beta$ *sunt rădăcini de multiplicitate* m *ale ecuaţiei caracteristice* (4.35), *ne propunem să înlocuim cele* $2m$ *funcţii complexe corespunzătoare acestor autovalori în sistemul fundamental* (4.39), *anume*

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha+i\beta)t}, t e^{(\alpha+i\beta)t}, \ldots, t^{m-1} e^{(\alpha+i\beta)t}, \\ & e^{(\alpha-i\beta)t}, t e^{(\alpha-i\beta)t}, \ldots, t^{m-1} e^{(\alpha-i\beta)t}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

cu funcţiile reale (tot în număr de $2m$)

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{4.41}$$

Întrucât am efectuat operaţii liniare (semisuma, semidiferenţa pe $i = \sqrt{-1}$) între liniile tabloului (4.39), sistemul de funcţii (4.41) va fi alcătuit tot din soluţii ale ecuaţiei (4.32) şi va genera acelaşi subspaţiu liniar peste $\mathbb{C}$ ca şi (4.40).

Procedând în acest fel pentru toate autovalorile pur complexe, vom forma un sistem fundamental de soluţii peste $\mathbb{C}$ pentru ecuaţia (4.32). Aceste soluţii vor fi liniar independente şi peste $\mathbb{R}$, prin urmare dau un sistem fundamental de soluţii, de această dată cu valori reale.

În concluzie, soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene (4.32) va fi o combinaţie liniară de exponenţiale şi expresii de forma (4.41).

Exemplul 4.4.1. *Să se rezolve ecuaţiile:*

a) $x'' - 3x' + 2x = 0$; *b*) $x'' + 5x' = 0$; *c*) $x'' - 6x' + 9x = 0$;
d) $x'' + 2x = 0$; *e*) $x'' + 2x' + 5x = 0$; *f*) $x''' + x'' + 4x' + 4x = 0$;
g) $8x''' + 12x'' + 6x' + x = 0$; *h*) $x^{(4)} + 10x'' + 25x = 0$.

Toate ecuaţiile sunt liniare şi omogene, cu coeficienţi constanţi, având funcţia necunoscută $x = x(t)$. Primele 5 ecuaţii au ordinul 2, următoarele două, ordinul 3, iar ultima, ordinul 4; ne aşteptăm ca pentru fiecare dintre ele sistemul fundamental de soluţii să aibă atâtea elemente cât ordinul ecuaţiei; numărul de constante de care depinde soluţia generală este şi el egal cu ordinul ecuaţiei.

a) Asociem ecuaţiei diferenţiale ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

care are rădăcinile <u>reale distincte</u>

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \begin{array}{l} \nearrow\ \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R} \\ \searrow\ \lambda_2 = 2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Obţinem sistemul fundamental de soluţii $\{e^t, e^{2t}\}$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

b) Ecuaţia caracteristică,

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 5) = 0,$$

are rădăcinile <u>reale distincte</u> $\lambda_1 = 0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = -5 \in \mathbb{R}$. Obţinem sistemul fundamental de soluţii

$$\{e^{0t} = 1, e^{-5t}\},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-5t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

c) Ecuaţia caracteristică,

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0,$$

are rădăcina <u>reală dublă</u> $\lambda_{1,2} = 3 \in \mathbb{R}$. Găsim sistemul fundamental de soluţii $\{e^{3t}, te^{3t}\}$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

d) Asociem ecuaţiei diferenţiale ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + 2 = 0$.
ATENŢIE! *Când scriem ecuaţia caracteristică, x se înlocuieşte cu 1 şi nu cu λ !!*

Ecuaţia caracteristică se rescrie $\lambda^2 = -2$ şi are rădăcinile complex conjugate $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Obţinem sistemul fundamental de soluţii

$$\left\{e^{0t}\cos(\sqrt{2}t), e^{0t}\sin(\sqrt{2}t)\right\} = \left\{\cos(t\sqrt{2}), \sin(t\sqrt{2})\right\}.$$

În concluzie, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1\cos(t\sqrt{2}) + C_2\sin(t\sqrt{2}), \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

e) Scriem ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

care are rădăcinile complex conjugate

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Obţinem sistemul fundamental de soluţii $\{e^{-t}\cos 2t, e^{-t}\sin 2t\}$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1e^{-t}\cos 2t + C_2e^{-t}\sin 2t, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

f) Asociem ecuaţiei diferenţiale ecuaţia caracteristică

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 1) + 4(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

care are rădăcinile

$$\lambda_1 = -1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Obţinem sistemul fundamental de soluţii

$$\{e^{-t}, \cos 2t, \sin 2t\},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

g) Asociem ecuaţiei diferenţiale ecuaţia caracteristică [2]

$$8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (8\lambda^3 + 1) + 6\lambda(2\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda + 1)(4\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 6\lambda(2\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)(4\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^3 = 0,$$

care are rădăcina reală triplă $\lambda_{1,2,3} = -\frac{1}{2}$. Obţinem sistemul fundamental de soluţii

$$\left\{e^{-\frac{t}{2}}, te^{-\frac{t}{2}}, t^2e^{-\frac{t}{2}}\right\},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1e^{-\frac{t}{2}} + C_2te^{-\frac{t}{2}} + C_3t^2e^{-\frac{t}{2}}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

h) Asociem ecuaţiei diferenţiale ecuaţia caracteristică

$$\lambda^4 + 10\lambda^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -5,$$

care are rădăcinile complex conjugate duble

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}, \quad m_{1,2} = 2.$$

Obţinem sistemul fundamental de soluţii

$$\left\{\cos(t\sqrt{5}), \sin(t\sqrt{5}), t\cos(t\sqrt{5}), t\sin(t\sqrt{5})\right\}.$$

[2] $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{5}) + C_2 \sin(t\sqrt{5}) + C_3 t \cos(t\sqrt{5}) + C_4 t \sin(t\sqrt{5}), \text{ pentru } t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Rădăcina ecuaţiei caracteristice	**Funcţii asociate în sistemul fundamental de soluţii**
$\lambda \in \mathbb{R}$ simplă	$e^{\lambda t}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ dublă	$e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ triplă	$e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$
$\pm\beta i \in \mathbb{C}$ simple	$\cos\beta t$, $\sin\beta t$
$\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ simple	$e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$

Observaţia 4.4.3. *Numărul condiţiilor iniţiale care se pun într-o problemă* Cauchy *este egal cu ordinul ecuaţiei (pentru că numărul constantelor din soluţia generală care trebuie determinate este egal cu ordinul ecuaţiei).*

Exemplul 4.4.2. *Să se rezolve problemele* Cauchy*:*

$a)\ \begin{cases} x'' + 16x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$; $\quad b)\ \begin{cases} x'' - 4x = 0 \\ x(0) = 3,\ x'(0) = -2. \end{cases}$

Ecuaţiile sunt liniare şi omogene, cu coeficienţi constanţi, de ordin 2. Pentru a rezolva problema Cauchy mai întâi rezolvăm ecuaţia (ca mai sus), apoi aflăm cele două constante din condiţiile iniţiale.

a) Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -16$ şi are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 4i$, deci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială va fi $\{\cos 4t, \sin 4t\}$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei $x'' + 16x = 0$ este

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

Acum punem condiţia $x(0) = 1$: facem $t = 0$ în soluţia generală şi obţinem

$$1 = x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

Pentru a pune condiţia $x'(0) = 0$ mai întâi derivăm soluţia generală şi apoi facem $t = 0$:

$$x'(t) = -4C_1 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t \overset{t=0}{\Rightarrow} 0 = x'(0) = -4C_1 \sin 0 + 4C_2 \cos 0 \Leftrightarrow 4C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0.$$

La final înlocuim valorile aflate pentru constantele C_1, C_2 în soluţia generală şi concluzionăm că soluţia problemei Cauchy din enunţ este

$$x(t) = \cos 4t, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}.$$

b) Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$ şi are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 2$, deci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială va fi $\left\{e^{2t}, e^{-2t}\right\}$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei $x'' - 4x = 0$ este

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}, \text{ unde } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

Acum punem condiţia $x(0) = 3$: facem $t = 0$ în soluţia generală şi obţinem

$$3 = x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 3.$$

Pentru a pune condiţia $x'(0) = -2$ mai întâi derivăm soluţia generală şi apoi facem $t = 0$:

$$x'(t) = 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t} \overset{t=0}{\Longrightarrow} -2 = x'(0) = 2C_1 - 2C_2.$$

Se formează sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 2C_1 - 2C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 - C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 = 2 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Înlocuind valorile aflate pentru constantele C_1, C_2 în soluţia generală, concluzionăm că soluţia problemei Cauchy din enunţ este

$$x(t) = e^{2t} + 2e^{-2t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 4.4.3. *Să se rezolve: a)* $x'' - 2x' - 3x = 16e^{3t}$; *b)* $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = e^{-2t} \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

Avem două ecuaţii liniare *neomogene*, cu coeficienţi constanţi, de ordin 2. Le vom rezolva prin metoda variaţiei constantelor.

a) Asociem ecuaţia omogenă $x'' - 2x' - 3x = 0$, căreia îi ataşăm ecuaţia caracteristică [3]

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Aceasta are rădăcinile

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} \begin{array}{l} \nearrow\ \lambda_1 = 3 \\ \searrow\ \lambda_2 = -1, \end{array}$$

deci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia *omogenă* [4] este $\left\{e^{3t}, e^{-t}\right\}$.

Căutăm soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene de forma

$$x(t) = C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{-t}, \tag{4.42}$$

unde C_1, C_2 sunt funcţii de clasă C^1 care verifică sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} & +C_2'(t)e^{-t} & = 0 \\ C_1'(t)\left(e^{3t}\right)' & +C_2'(t)\left(e^{-t}\right)' & = 16e^{3t} \end{cases}$$

Acesta se rescrie, echivalent,

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{3t} & +C_2'(t)e^{-t} & = 0 \\ 3C_1'(t)e^{3t} & -C_2'(t)e^{-t} & = 16e^{3t} \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4C_1'(t)e^{3t} = 16e^{3t} \\ C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{-t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t) = 4 \\ C_2'(t) = -4e^{4t}. \end{cases}$$

Integrăm $C_1'(t)$ şi $C_2'(t)$ şi găsim:

$$\begin{cases} C_1(t) = \displaystyle\int 4\,dt = 4t + k_1 \\ C_2(t) = \displaystyle\int \left(-4e^{4t}\right)\,dt = -e^{4t} + k_2, \end{cases}$$

unde k_1, k_2 sunt constante reale.

Înlocuim valorile obţinute pentru $C_1(t)$ şi $C_2(t)$ în relaţia (4.42) şi obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene:

$$x(t) = (4t + k_1)e^{3t} + (-e^{4t} + k_2)e^{-t} = k_1e^{3t} + k_2e^{-t} + (4t - 1)e^{3t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R},$$

unde k_1, k_2 sunt constante reale.

b) Scriem ecuaţia omogenă asociată, $x'' + 6x' + 9x = 0$, şi îi ataşăm ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)^2 = 0,$$

care are rădăcina reală dublă $\lambda_{1,2} = -3$. Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia *omogenă* este $\left\{e^{-3t}, te^{-3t}\right\}$.

---

[3] Ecuaţia caracteristică nu se asociază NICIODATĂ unei ecuaţii liniare *neomogene*; este greşit să scriem $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 16e^{3t}$!

[4] Soluţiile unei ecuaţii liniare neomogene **nu** formează un spaţiu liniar (de exemplu, suma a două soluţii ale ecuaţiei nu e soluţie a ecuaţiei). Prin urmare, nu putem vorbi de bază în mulţimea soluţiilor, adică de un sistem fundamental de soluţii !

Prin urmare, căutăm soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene de forma

$$x(t) = C_1(t)e^{-3t} + C_2(t)te^{-3t}, \tag{4.43}$$

unde C_1, C_2 sunt funcţii de clasă C^1 care verifică sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-3t} + & C_2'(t)te^{-3t} &= 0 \\ -3C_1'(t)e^{-3t} + & C_2'(t)\left(e^{-3t} - 3te^{-3t}\right) &= e^{-2t}. \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie din sistem cu 3 şi adunând-o cu a doua, acesta se rescrie, echivalent,

$$\begin{cases} C_2'(t)e^{-3t} = e^{-2t} \\ C_1'(t)e^{-3t} + C_2'(t)te^{-3t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2'(t) = e^t \\ C_1'(t) = -te^t. \end{cases}$$

Integrăm $C_1'(t)$ şi $C_2'(t)$ şi găsim:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\displaystyle\int te^t\, dt = -te^t + \int e^t\, dt = -te^t + e^t + k_1 \\ C_2(t) = \displaystyle\int e^t\, dt = e^t + k_2, \end{cases}$$

unde k_1, k_2 sunt constante reale.

Înlocuim valorile obţinute pentru $C_1(t)$ şi $C_2(t)$ în relaţia (4.43) şi obţinem soluţia generală a ecuaţiei neomogene:

$$x(t) = \left(-te^t + e^t + k_1\right)e^{-3t} + \left(e^t + k_2\right)te^{-3t} = k_1e^{-3t} + k_2te^{-3t} + e^{-2t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R},$$

unde k_1, k_2 sunt constante reale.

Acum punem condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$ pentru a afla constantele k_1, k_2.

Făcând $t = 0$ în soluţia generală, găsim

$$0 = x(0) = k_1 + k_2 \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow k_1 = -1.$$

Pentru a pune condiţia $x'(0) = -1$, mai întâi derivăm soluţia generală, apoi luăm $t = 0$:

$$x'(t) = -3k_1e^{-3t} + k_2\left(e^{-3t} - 3te^{-3t}\right) - 2e^{-2t} \overset{t=0}{\Longrightarrow} -1 = x'(0) = -3k_1 + k_2(1-0) - 2$$

$$\Leftrightarrow -1 = 3 + k_2 - 2 \Leftrightarrow k_2 = -2.$$

Pentru a finaliza, înlocuim valorile calculate pentru k_1 şi k_2 în soluţia generală şi găsim soluţia problemei Cauchy:

$$x(t) = -e^{-3t} - 2te^{-3t} + e^{-2t}, \text{ pentru } t \in \mathbb{R}.$$

4.4.2. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogene. Determinarea unei soluţii particulare atunci când membrul drept este un cvasipolinom. Considerăm ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi neomogenă

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = f(t), \tag{4.44}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt constante, iar $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă.

Ştim că determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (4.32) asociată lui (4.44) permite rezolvarea ecuaţiei (4.44) prin metoda variaţiei constantelor.

Atunci când membrul drept f al ecuaţiei (4.44) este un cvasipolinom (adică are una din formele (4.45) sau (4.48) de mai jos), se poate afla o soluţie particulară $x_p(t)$ a ecuaţiei *ne*omogene printr-o metodă mai directă, care nu implică nicio integrare. Apoi se aplică teorema 4.3.5.

Cazul A) Dacă funcţia f are forma

$$f(t) = e^{\gamma t}P(t), \quad t \in I, \tag{4.45}$$

unde P este un polinom algebric şi γ este un număr *real*, atunci se caută o soluţie particulară $x_p(t)$ pentru ecuaţia (4.44) de forma

$$x_p(t) = t^l e^{\gamma t}Q(t), \tag{4.46}$$

unde Q este un polinom algebric de acelaşi grad cu P, iar l reprezintă multiplicitatea lui γ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.35) (dacă γ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se ia $l = 0$).

Înlocuindu-l pe $x_p(t)$ în ecuaţia (4.44), se obţine

$$\left(t^l e^{\gamma t}Q(t)\right)^{(n)} + a_1\left(t^l e^{\gamma t}Q(t)\right)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\left(t^l e^{\gamma t}Q(t)\right)' \\ + a_n t^l e^{\gamma t}Q(t) = e^{\gamma t}P(t),$$

relaţie echivalentă, conform formulei (4.36), cu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} L^{(k)}(\gamma)\left(t^l Q(t)\right)^{(k)} = P(t) \tag{4.47}$$

(L notează, din nou, polinomul caracteristic (4.34) al ecuaţiei omogene (4.32) asociate ecuaţiei liniare neomogene (4.44).

Să nu uităm că γ este rădăcină de multiplicitate l a ecuaţiei caracteristice (4.35). De aici rezultă că atunci când $l \geq 1$ au loc

$$L^{(k)}(\gamma) = 0, \text{ pentru } 0 \leq k \leq l-1$$

şi (4.47) poate fi rescrisă

$$\sum_{k=l}^{n} \frac{1}{k!} L^{(k)}(\gamma)\left(t^l Q(t)\right)^{(k)} = P(t),$$

permiţând determinarea coeficienţilor polinomului Q în mod unic, prin identificare.

Cazul B) Dacă funcţia f are forma

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t), \quad t \in I, \tag{4.48}$$

unde P_1, P_2 sunt polinoame algebrice şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci se caută o soluţie particulară $x_p(t)$ pentru ecuaţia neomogenă (4.44) de forma

$$x_p(t) = t^l e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t), \tag{4.49}$$

unde Q_1, Q_2 sunt polinoame algebrice de grad egal cu $\max\{\text{grad } P_1, \text{grad } P_2\}$ şi l este multiplicitatea lui $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.35) (dacă γ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se ia $l = 0$). Obligând funcţia $x_p(t)$ să verifice (4.44), putem determina în mod unic coeficienţii polinoamelor Q_1, Q_2, prin identificare.

Exemplul 4.4.4. *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' - 4x' - 5x = (7t-8)e^{-2t}. \tag{4.50}$$

Ecuaţia (4.50) este o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, de ordinul al doilea, neomogenă. Întrucât membrul drept al ecuaţiei este un cvasipolinom, căutăm soluţia ei generală de forma

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t), \tag{4.51}$$

unde $x_o(t)$ notează soluţia generală ecuaţiei omogene asociate, iar $x_p(t)$ va fi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (4.50).

Ecuaţia liniară omogenă asociată ecuaţiei (4.50) este

$$x'' - 4x' - 5x = 0. \tag{4.52}$$

Pentru a o rezolva îi ataşăm ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \tag{4.53}$$

care are rădăcinile reale distincte

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \ \lambda_1 = 5 \\ \searrow \ \lambda_2 = -1. \end{array}$$

Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (4.52) este $\left\{e^{5t}, e^{-t}\right\}$, iar soluţia ei generală,

$$x_o(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.54}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Încercăm acum să aflăm o soluţie particulară $x_p(t)$ a ecuaţiei neomogene (4.50). Membrul drept al acestei ecuaţii este $f(t) = (7t-8)e^{-2t}$, deci ne situăm în **cazul A)** pentru $\gamma = -2$ (care nu e rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.53) - deci $l = 0$) şi $P(t) = 7t - 8$. Vom căuta soluţia particulară $x_p(t)$ de forma $x_p(t) = t^l e^{\gamma t} Q(t)$, unde grad $Q(t)$=grad $P(t) = 1$. Expresia cea mai generală a unui polinom de gradul I este $Q(t) = at + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Prin urmare,

$$x_p(t) = t^0 e^{-2t}(at + b) = (at + b)e^{-2t}. \tag{4.55}$$

Pentru a determina constantele a, b, impunem ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă (4.50). Vom avea nevoie de

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= ae^{-2t} - 2(at + b)e^{-2t} \\ x_p''(t) &= -2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} + 4(at + b)e^{-2t}; \end{aligned}$$

înlocuind în (4.50) obţinem

$$-4ae^{-2t} + 4(at + b)e^{-2t} - 4\left[ae^{-2t} - 2(at + b)e^{-2t}\right] - 5(at + b)e^{-2t} = (7t - 8)e^{-2t} \;\Big|\; : e^{-2t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -4a + 4(at + b) - 4a + 8(at + b) - 5(at + b) = 7t - 8 \Leftrightarrow (7a - 7)t + 7b - 8a + 8 = 0.$$

Această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice t dintr-un interval cu interior nevid. Singura posibilitate este ca polinomul din membrul stâng să aibă coeficienţii nuli, adică

$$\begin{cases} 7a - 7 = 0 \\ 7b - 8a + 8 = 0. \end{cases}$$

Deducem că $a = 1$ şi $b = 0$ şi întorcându-ne în relaţia (4.55), avem

$$x_p(t) = te^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.56}$$

Înlocuind (4.54), (4.56) în (4.51), scriem soluţia generală a ecuaţiei (4.50):

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} + te^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Exemplul 4.4.5. *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' + x' = 2t + 2. \tag{4.57}$$

Ecuaţia (4.57) este o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, de ordinul al doilea, neomogenă. Întrucât membrul drept al ecuaţiei este un polinom, căutăm soluţia ei generală de forma

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t), \tag{4.58}$$

unde $x_o(t)$ notează soluţia generală ecuaţiei omogene asociate, iar $x_p(t)$ va fi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (4.57).

Ecuaţia liniară omogenă asociată ecuaţiei (4.57) este

$$x'' + x' = 0. \tag{4.59}$$

Pentru a o rezolva îi ataşăm ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \tag{4.60}$$

sau, echivalent,

$$\lambda(\lambda + 1) = 0,$$

care are rădăcinile reale distincte $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = -1$. Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (4.59) este $\left\{e^{0t}, e^{-t}\right\} = \left\{1, e^{-t}\right\}$, iar soluţia ei generală,

$$x_o(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{-t} = C_1 + C_2 e^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.61}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Încercăm acum să aflăm o soluţie particulară $x_p(t)$ a ecuaţiei neomogene (4.57). Membrul drept al acestei ecuaţii este $f(t) = 2t + 2$, deci ne situăm în **cazul A)** pentru $\gamma = 0$ (nu apare nicio exponenţială în $f(t)$!) şi $P(t) = 2t + 2$. În plus, multiplicitatea lui γ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.60) este $l = 1$. Vom căuta soluţia particulară $x_p(t)$ de forma $x_p(t) = t^l e^{\gamma t} Q(t)$, unde $Q(t)$ este un polinom cu

$$\text{grad } Q(t) = \text{grad } P(t) = 1.$$

Expresia cea mai generală a unui polinom de grad 1 este $Q(t) = at + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Prin urmare,

$$x_p(t) = t^1 e^{0t}(at + b) = t(at + b) = at^2 + bt. \tag{4.62}$$

Pentru a determina constantele a, b, impunem ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă (4.57). Vom avea nevoie de

$$x_p'(t) = 2at + b, \quad x_p''(t) = 2a$$

şi înlocuind în (4.57) obţinem

$$2a + 2at + b = 2t + 2 \Leftrightarrow (2a - 2)t + 2a + b - 2 = 0$$

Această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice t dintr-un interval cu interior nevid. Singura posibilitate este ca polinomul din membrul stâng să fie polinomul nul, adică

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + b = 2. \end{cases}$$

Deducem că $a = 1$ şi $b = 0$ şi întorcându-ne în relaţia (4.62), avem

$$x_p(t) = t^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.63}$$

Înlocuind (4.61), (4.63) în (4.58), scriem soluţia generală a ecuaţiei (4.57):

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + t^2, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Exemplul 4.4.6. *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' + 4x' + 4x = \cos 5t. \tag{4.64}$$

Ecuaţia (4.64) este o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, de ordinul al doilea, neomogenă, cu membrul drept un cvasipolinom. Vom căuta soluţia ei generală de forma

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t), \tag{4.65}$$

unde $x_o(t)$ este soluţia generală ecuaţiei omogene asociate, iar $x_p(t)$ va fi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (4.64).

Ecuaţia liniară omogenă asociată ecuaţiei (4.64) este

$$x'' + 4x' + 4x = 0. \tag{4.66}$$

Pentru a o rezolva îi ataşăm ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0, \tag{4.67}$$

care are rădăcina reală dublă $\lambda_{1,2} = -2$. Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (4.66) este $\left\{e^{-2t}, te^{-2t}\right\}$, iar soluţia ei generală,

$$x_o(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.68}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Încercăm acum să aflăm o soluţie particulară $x_p(t)$ a ecuaţiei neomogene (4.64). Membrul drept al acestei ecuaţii este $f(t) = \cos 5t$, deci ne situăm în **cazul B)** pentru $\alpha = 0$ (nu apare nicio exponenţială în $f(t)$!), $\beta = 5$, $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 0$ ($f(t)$ nu-l conţine pe $\sin 5t$!). În plus, $\gamma = \alpha + i\beta = 5i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (4.67), deci luăm $l = 0$. Vom căuta soluţia particulară $x_p(t)$ de forma $x_p(t) = t^l e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$, unde Q_1, Q_2 sunt polinoame de grad cel mult egal cu $\max\{\operatorname{grad} P_1, \operatorname{grad} P_2\} = \max\{0, -\infty\} = 0$, adică polinoame constante; fie $Q_1(t) = a$, $Q_2(t) = b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Prin urmare,

$$x_p(t) = t^0 e^0(a\cos 5t + b\sin 5t) = a\cos 5t + b\sin 5t. \tag{4.69}$$

Pentru a determina constantele a, b, impunem ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă (4.64). Vom avea nevoie de

$$x_p'(t) = -5a\sin 5t + 5b\cos 5t, \quad x_p''(t) = -25a\cos 5t - 25b\sin 5t.$$

Înlocuind în (4.64), obţinem

$$-25a\cos 5t - 25b\sin 5t + 4(-5a\sin 5t + 5b\cos 5t) + 4(a\cos 5t + b\sin 5t) = \cos 5t$$

$$\Leftrightarrow (-21a + 20b - 1)\cos 5t + (-21b - 20a)\sin 5t = 0.$$

Această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice t dintr-un interval cu interior nevid. Singura posibilitate este ca $\sin 5t$ şi $\cos 5t$ să aibă coeficienţii nuli, adică

$$\begin{cases} -21a + 20b = 1 \\ -20a - 21b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{21}{20}b \\ 20b - 21 \cdot \left(-\dfrac{21}{20}\right) b = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{20}{841} \\ a = -\dfrac{21}{841}. \end{cases}$$

Întorcându-ne în relaţia (4.69), am găsit

$$x_p(t) = \frac{1}{841}(-21\cos 5t + 20\sin 5t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.70}$$

Înlocuind (4.68), (4.70) în (4.65), scriem soluţia generală a ecuaţiei (4.64):

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{1}{841}(-21\cos 5t + 20\sin 5t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Observaţia 4.4.4. *Observaţi că, deşi membrul drept al ecuaţiei* (4.64) *nu depinde de* $\sin 5t$*, soluţia particulară* x_p *depinde şi de* $\cos 5t$*, şi de* $\sin 5t$*.*

Exemplul 4.4.7. *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x'' + x = 2\sin t. \tag{4.71}$$

Ecuaţia (4.71) este o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, de ordinul al doilea, neomogenă, cu membrul drept un cvasipolinom. Vom căuta soluţia ei generală de forma

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t), \tag{4.72}$$

unde $x_o(t)$ este soluţia generală ecuaţiei omogene asociate, iar $x_p(t)$ va fi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (4.71).

Ecuaţia liniară omogenă asociată ecuaţiei (4.71) este

$$x'' + x = 0 \tag{4.73}$$

şi are ecuaţia caracteristică ataşată

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1, \tag{4.74}$$

cu rădăcinile complex conjugate $\lambda_{1,2} = \pm i$. Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (4.73) este $\{\cos t, \sin t\}$, iar soluţia ei generală,

$$x_o(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.75}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Încercăm acum să aflăm o soluţie particulară $x_p(t)$ a ecuaţiei neomogene (4.71). Membrul drept al acestei ecuaţii este $f(t) = 2\sin t$, deci ne situăm în **cazul B)** pentru $\alpha = 0$ (nu apare nicio exponenţială în $f(t)$!), $\beta = 1$, $P_1(t) = 0$ ($f(t)$ nu-l conţine pe $\cos t$!), $P_2(t) = 2$. În plus, $\gamma = \alpha + i\beta = i$ este rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice (4.74), deci luăm $l = 1$. Vom căuta soluţia particulară $x_p(t)$ de forma $x_p(t) = t^l e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$, unde Q_1, Q_2 sunt polinoame de grad cel mult egal cu $\max\{\operatorname{grad} P_1, \operatorname{grad} P_2\} = \max\{-\infty, 0\} = 0$, adică polinoame constante; fie $Q_1(t) = a$, $Q_2(t) = b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Prin urmare,

$$x_p(t) = t^1 e^0 (a\cos t + b\sin t) = t(a\cos t + b\sin t). \tag{4.76}$$

Pentru a determina constantele a, b, impunem ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă (4.71). Vom avea nevoie de

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= (a\cos t + b\sin t) + t(-a\sin t + b\cos t) \\ x_p''(t) &= (-a\sin t + b\cos t) + (-a\sin t + b\cos t) + t(-a\cos t - b\sin t). \end{aligned}$$

Înlocuind în (4.71), obţinem

$$2(-a\sin t + b\cos t) + t(-a\cos t - b\sin t) + t(a\cos t + b\sin t) = 2\sin t$$
$$\Leftrightarrow 2b\cos t + (-2a-2)\sin t = 0.$$

Această egalitate trebuie să aibă loc pentru orice t dintr-un interval cu interior nevid. Singura posibilitate este ca $\sin t$ şi $\cos t$ să aibă coeficienţii nuli, adică

$$\begin{cases} 2b = 0 \\ -2a-2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Întorcându-ne în relaţia (4.76), am găsit

$$x_p(t) = -t\cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.77}$$

Înlocuind (4.77), (4.75) în (4.72), scriem soluţia generală a ecuaţiei (4.71):

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Observaţia 4.4.5. *Deşi membrul drept al ecuaţiei* (4.71) *nu depinde de* $\cos t$*, soluţia particulară* x_p *depinde de* $\cos t$*.*

4.5. Oscilatorul liniar armonic. Fenomenul de rezonanţă

Ne amintim (a se vedea secţiunea 3.3) că ecuaţia oscilatorului liniar armonic neamortizat era

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.78}$$

unde $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi, liniară şi omogenă. Asociindu-i ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0,$$

care are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm\omega i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, deducem că un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (4.78) este $\{\cos\omega t, \sin\omega t\}$, iar soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$x(t) = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t, \text{ pentru } t \geq 0, \tag{4.79}$$

unde c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Dacă elongaţia şi viteza particulei la momentul iniţial $t = 0$ sunt cunoscute:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0, \tag{4.80}$$

atunci constantele c_1 şi c_2 iau valorile $c_2 = x_0$ şi $c_1 = \dfrac{v_0}{\omega}$, prin urmare soluţia problemei Cauchy (4.78), (4.80) este

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \quad t \geq 0. \tag{4.81}$$

Dacă $(x_0, v_0) \neq (0,0)$, notăm $a = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} > 0$ şi scriem

$$x_0 = a\sin\varphi, \quad \frac{v_0}{\omega} = a\cos\varphi,$$

unde $\varphi \in [0, 2\pi), \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega x_0}{v_0}, x_0\sin\varphi > 0$. Atunci legea mişcării se reformulează:

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi), \ t \geq 0;$$

o astfel de mişcare poartă numele de *oscilaţie armonică*.

Amintim în continuare o serie de denumiri şi notaţii. Constanta $a > 0$ se numeşte *amplitudinea* mişcării armonice; ea reprezintă valoarea maximă a elongaţiei $x(t)$. Observăm că în cazul oscilatorului armonic neamortizat amplitudinea este constantă, determinată de x_0, v_0 şi ω.

Argumentul funcţiei sinus, $\omega t + \varphi$, se numeşte *faza* mişcării, iar φ, *faza iniţială*. Valoarea $x_0 = a\sin\varphi$ este elongaţia iniţială.

Cel mai mic interval de timp T dintre momentele în care particula ocupă aceeaşi poziţie şi are viteza de acelaşi sens se numeşte *perioada* oscilaţiei; ea este dată de formula

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} > 0.$$

Particula oscilează între valorile extreme a şi $-a$, cu perioada T.

Numărul de perioade în unitatea de timp,

$$\nu = \frac{1}{T},$$

se numeşte *frecvenţă*. În cazul oscilatorului armonic

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Numărul de perioade parcurse în 2π de unităţi de timp se numeşte *pulsaţie*. Mai precis, pulsaţia este

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Constatăm că dacă $x_0 \neq 0$ şi $v_0 = 0$, atunci primul moment t_1 la care $x(t_1) = 0$ este dat de relaţia

$$x_0 \cos \omega t_1 = 0,$$

adică $\omega t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ sau, echivalent,

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}.$$

De aici deducem că particula plasată pe axa verticală, fară viteză iniţială, se deplasează spre origine (care este poziţie de echilibru), unde ajunge în acelaşi interval de timp, egal cu un sfert de perioadă, oricare ar fi poziţia sa iniţială, diferită de origine. Această proprietate a mişcării se numeşte *tautocronism*.

4.5.1. Fenomenul de rezonanţă pentru oscilatorul liniar armonic neamortizat. Considerăm că particula M de masă m se mişcă sub acţiunea cumulată a două forţe: prima elastică ($F_e(x) = -kx$ pentru $x \in \mathbb{R}$) şi cea de-a doua periodică, de forma $F(t) = mf(t)$ pentru $t \in \mathbb{R}$; presupunem forţa de frecare neglijabilă. Mişcarea este descrisă de ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi:

$$mx'' + kx = mf(t)$$

sau, ţinând cont că $\omega^2 = k/m$,

$$x'' + \omega^2 x = f(t). \tag{4.82}$$

Intenţionăm să aflăm soluţia ecuaţiei liniare neomogene (4.82) dacă forţa de întreţinere F are aceeaşi formă cu soluţia ecuaţiei omogene asociate (4.78). Vom constata că în acest caz F contribuie la amplificarea în timp a oscilaţiilor. Acest fenomen se numeşte *fenomen de rezonanţă*.

Să presupunem aşadar că

$$f(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t, \quad \text{pentru } t \in \mathbb{R},$$

unde măcar una dintre constantele $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ nu este zero.

Am arătat că soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (4.82) este (4.79). Pentru a rezolva ecuaţia (4.82) aplicăm metoda variaţiei constantelor. Căutăm soluţia generală a acestei ecuaţii de forma

$$x(t) = C_1(t) \sin \omega t + C_2(t) \cos \omega t, \tag{4.83}$$

unde C_1, C_2 sunt funcţii de clasă C^1 care satisfac sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} C_1'(t) \sin \omega t & + C_2'(t) \cos \omega t & = 0 \\ \omega C_1'(t) \cos \omega t & -\omega C_2'(t) \sin \omega t & = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t. \end{cases} \tag{4.84}$$

Pentru a rezolva acest sistem, înmulţim prima sa ecuaţie cu $\omega \sin \omega t$ şi cea de-a doua prin $\cos \omega t$ şi adunăm relaţiile obţinute. Rezultă că

$$C_1'(t) = \frac{k_1}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t + \frac{k_2}{\omega} \cos^2 \omega t. \tag{4.85}$$

Înlocuind pe $C_1'(t)$ în prima ecuaţie din sistemul (4.84), găsim

$$\left(\frac{k_1}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{k_2}{\omega}\cos^2\omega t\right)\sin\omega t+C_2'(t)\cos\omega t=0,$$

prin urmare

$$C_2'(t)=-\frac{k_1}{\omega}\sin^2\omega t-\frac{k_2}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t. \tag{4.86}$$

Integrăm în (4.85) şi (4.86) şi obţinem

$$\begin{cases} C_1(t)=\dfrac{k_1}{2\omega}\displaystyle\int\sin 2\omega t\,dt+\dfrac{k_2}{2\omega}\displaystyle\int(1+\cos 2\omega t)\,dt=\dfrac{k_1}{2\omega}\cdot\dfrac{-\cos 2\omega t}{2\omega}+\dfrac{k_2}{2\omega}\left(t+\dfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)+a_1\\ C_2(t)=-\dfrac{k_1}{2\omega}\displaystyle\int(1-\cos 2\omega t)\,dt-\dfrac{k_2}{2\omega}\displaystyle\int\sin 2\omega t\,dt=\dfrac{-k_1}{2\omega}\left(t-\dfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)-\dfrac{k_2}{2\omega}\cdot\dfrac{-\cos 2\omega t}{2\omega}+a_2,\end{cases}$$

unde $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ sunt constante.

La final înlocuim $C_1(t)$ şi $C_2(t)$ determinate în formula (4.83) şi avem

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(-\frac{k_1}{4\omega^2}\cos 2\omega t+\frac{k_2}{2\omega}t+\frac{k_2}{4\omega^2}\sin 2\omega t+a_1\right)\sin\omega t+\left(-\frac{k_1}{2\omega}t+\frac{k_1}{4\omega^2}\sin 2\omega t+\frac{k_2}{4\omega^2}\cos 2\omega t+a_2\right)\cos\omega t\\ &= a_1\sin\omega t+a_2\cos\omega t+\frac{t}{2\omega}(k_2\sin\omega t-k_1\cos\omega t)+\frac{k_1}{4\omega^2}(\sin 2\omega t\cos\omega t-\cos 2\omega t\sin\omega t)\\ &+ \frac{k_2}{4\omega^2}(\cos 2\omega t\cos\omega t+\sin 2\omega t\sin\omega t)=a_1\sin\omega t+a_2\cos\omega t+\frac{t}{2\omega}(k_2\sin\omega t-k_1\cos\omega t)\\ &+ \frac{k_1}{4\omega^2}\sin\omega t+\frac{k_2}{4\omega^2}\cos\omega t.\end{aligned}$$

În concluzie, soluţia ecuaţiei (4.82) este

$$x(t)=a_3\sin\omega t+a_4\cos\omega t+\frac{k_2}{2\omega}t\sin\omega t-\frac{k_1}{2\omega}t\cos\omega t, \tag{4.87}$$

unde a_3, a_4 sunt constante reale $\left(a_3=a_1+\dfrac{k_1}{4\omega^2}, a_4=a_2+\dfrac{k_2}{4\omega^2}\right)$.

Se observă că, în vreme ce soluţia (4.79) a ecuaţiei omogene este mărginită pe $\mathbb{R}$ (întrucât $|\sin r|\leq 1$ şi $|\cos r|\leq 1$, pentru orice $r\in\mathbb{R}$), soluţia ecuaţiei neomogene este nemărginită. Într-adevăr,

- dacă $k_2\neq 0$, pentru şirul $t_n=\dfrac{(4n+1)\pi}{2\omega}$, $n\in\mathbb{N}^*$, au loc

$$\begin{cases}\cos\omega t_n=0\\ \sin\omega t_n=1,\end{cases}$$

  deci

$$x(t_n)=a_1+\frac{k_1}{4\omega^2}+\frac{(4n+1)\pi k_2}{4\omega^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}(\operatorname{sgn}\,k_2)\infty;$$

- dacă $k_1\neq 0$, pentru şirul $t_p=\dfrac{2p\pi}{\omega}$, $p\in\mathbb{N}^*$, au loc

$$\begin{cases}\sin\omega t_p=0\\ \cos\omega t_p=1,\end{cases}$$

  deci

$$x(t_p)=a_2+\frac{k_2}{4\omega^2}-\frac{p\pi k_1}{\omega^2}\overset{p\to\infty}{\longrightarrow}(\operatorname{sgn}\,k_1)(-\infty).$$

Faptul că soluţia (4.87) este nemărginită este foarte important, de exemplu, în alegerea materialelor de construcţie pentru structurile supuse unor oscilaţii întreţinute. Aceste materiale trebuie alese astfel încât frecvenţele proprii de oscilaţie să **nu** fie multipli raţionali de frecvenţa forţei de întreţinere a oscilaţiilor.

4.6. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi. Funcţia exponenţială de matrice

Revenim asupra sistemului liniar şi omogen, cu coeficienţi constanţi

$$x'(t) = Ax(t), \tag{4.88}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ne amintim că ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi scalară $x' = ax$, cu $a \in \mathbb{R}$, are soluţia generală $x(t) = Ce^{ta}$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă; pe de altă parte, ştim că funcţia exponenţială se dezvoltă în serie de puteri după formula:

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de unde

$$e^{ta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a^k}{k!}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Acest fapt ne sugerează ca pentru sistemul liniar omogen (4.88) să definim, pe moment doar formal, o candidată pentru titlul de matrice fundamentală prin relaţia:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \mathbb{I}_n + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{4.89}$$

se ştie că $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{de\ k\ ori}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, iar $A^0 = \mathbb{I}_n$ =matricea unitate de ordin n.

Teorema 4.6.1. *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ seria (4.89) este uniform convergentă pe orice interval compact $I \subset \mathbb{R}$ (în sensul normei matriciale $\|A\|_{\mathcal{O}} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$). Mai mult, suma ei e^{tA} este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi*

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A, \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{4.90}$$

Observaţia 4.6.1. *Din prima egalitate din (4.90) rezultă că orice coloană a matricei e^{tA}, privită ca o funcţie de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}^n$, este o soluţie a sistemului liniar omogen (4.88) (comparaţi cu relaţia (4.6) !); altfel spus, e^{tA} este matricea asociată unui sistem de n soluţii ale sistemului omogen (4.88).*

În plus, făcând $t = 0$ în formula (4.89), obţinem că $e^{tA}\big|_{t=0} = e^{0A} = \mathbb{I}_n$, de unde

$$\det e^{0A} = \det \mathbb{I}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

ceea ce, conform teoremei 4.1.3, i) $\Leftrightarrow$ iii), implică faptul că e^{tA} este matrice fundamentală a sistemului (4.88).

Atunci, înlocuind $X(t) = e^{tA}$ în relaţia (4.7), se obţine că soluţia generală a sistemului liniar omogen (4.88) este

$$x(t) = e^{tA}c, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.91}$$

unde $c \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant.

Alte proprietăţi interesante ale matricei e^{tA} sunt conţinute în:

Propoziţia 4.6.1. *a) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA}$, pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$;*

b) dacă $AB = BA$, atunci $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

c) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ (inversa matricei e^{tA} este e^{-tA}) .

OBSERVAŢIA 4.6.2. *Fie problema* CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *este o funcţie continuă,* $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Atunci unica soluţie a acestei probleme este dată de formula variaţiei constantelor* (4.16), *care, scrisă pentru matricea fundamentală* $X(t) = e^{tA}$, *capătă forma*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Conform observaţiei 4.2.3, soluţia generală a sistemului liniar neomogen $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ *este dată de formula:*

$$x(t) = e^{tA}c + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds, \quad \forall t \in I \tag{4.92}$$

($t_0 \in I$ *fixat,* $c \in \mathbb{R}^n$ *constant).*

Pentru a determina matricea fundamentală e^{tA} se poate utiliza următoarea teoremă de structură:

TEOREMA 4.6.2. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *iar* $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, *cu multiplicitatea* m_k, *pentru* $k \in \overline{1,s}$, *sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice* $\det(\lambda \mathbb{I}_n - A) = 0$, *atunci fiecare element al matricei* e^{tA} *are forma*

$$\sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k t}[p_k(t)cos(\beta_k t) + q_k(t)sin(\beta_k t)],$$

unde p_k *şi* q_k, *cu* $k \in \overline{1,s}$, *sunt polinoame algebrice cu coeficienţi reali de grad cel mult* $m_k - 1$.

EXEMPLUL 4.6.1. *Să se rezolve sistemele liniare cu coeficienţi constanţi:*

a) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$; *b)* $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$; *c)* $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t \\ y' = x + 2y \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$; *e)* $\begin{cases} x' = 2x - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x + y - 3z \end{cases}$.

SOLUŢIE. În aceste exerciţii ne propunem să aflăm matricea e^{tA} folosind teorema de structură 4.6.2 şi proprietăţile

$$e^{0A} = \mathbb{I}_n \tag{4.93}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.94}$$

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Scriem ecuaţia caracteristică $\det(\lambda \mathbb{I}_2 - A) = 0$, adică

$$\det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0,$$

care are rădăcina dublă $\lambda_{1,2} = 3$. Prin urmare, matricea e^{tA} are forma

$$e^{tA} = e^{3t}C_1 + te^{3t}C_2, \tag{4.95}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sunt matrici constante.

Folosind proprietăţile (4.93), (4.94), obţinem că $C_1 = \mathbb{I}_2$ şi, respectiv,

$$3e^{3t}C_1 + \left(e^{3t} + 3te^{3t}\right)C_2 = A\left(e^{3t}C_1 + te^{3t}C_2\right)$$

sau, echivalent,

$$e^{3t}(3C_1 + C_2 - AC_1) + te^{3t}(3C_2 - AC_2) = O_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(prin $O_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notăm matricea nulă pătratică de ordin n). Atunci

$$\begin{cases} 3C_1 + C_2 = AC_1 \\ 3C_2 = AC_2. \end{cases}$$

Ţinând cont că $C_1 = \mathbb{I}_2$, deducem din prima relaţie că

$$C_2 = A\mathbb{I}_2 - 3\mathbb{I}_2 = A - 3\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Înlocuind C_1, C_2 în (4.95), avem

$$e^{tA} = e^{3t}\mathbb{I}_2 + te^{3t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{3t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - te^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & e^{3t} + te^{3t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, conform formulei (4.91), soluţia generală a sistemului liniar omogen dat este:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}c = \begin{pmatrix} e^{3t} - te^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & e^{3t} + te^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\left(e^{3t} - te^{3t}\right) + te^{3t}k_2 \\ -te^{3t}k_1 + k_2\left(e^{3t} + te^{3t}\right) \end{pmatrix}$$

sau, altfel spus,

$$\begin{cases} x(t) = k_1\left(e^{3t} - te^{3t}\right) + te^{3t}k_2 \\ y(t) = -te^{3t}k_1 + k_2\left(e^{3t} + te^{3t}\right), \end{cases}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde k_1, k_2 sunt constante reale.

b) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Scriem ecuaţia caracteristică $\det(\lambda\mathbb{I}_2 - A) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0,$$

care are rădăcinile complexe $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Prin urmare, matricea e^{tA} are forma

$$e^{tA} = \cos 2t\ C_1 + \sin 2t\ C_2, \tag{4.96}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sunt matrici constante.

Folosind proprietăţile (4.93), (4.94), obţinem că $C_1 = \mathbb{I}_2$ şi, respectiv,

$$-2\sin 2t\ C_1 + 2\cos 2t\ C_2 = A\left(\cos 2t\ C_1 + \sin 2t\ C_2\right)$$

sau, echivalent,

$$\cos 2t\ (2C_2 - AC_1) - \sin 2t\ (2C_1 + AC_2) = O_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{cases} 2C_2 = AC_1 \\ 2C_1 = -AC_2. \end{cases}$$

Ţinând cont că $C_1 = \mathbb{I}_2$, deducem din prima relaţie că $2C_2 = A\mathbb{I}_2 = A$, adică $C_2 = \frac{1}{2}A$. Înlocuind C_1, C_2 în (4.96), avem

$$e^{tA} = \cos 2t\ \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2}\sin 2t\ A = \cos 2t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin 2t\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -2\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, conform formulei (4.91), soluţia generală a sistemului liniar omogen dat este:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA}c = \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -2\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\cos 2t + \sin 2t) - 2k_2\sin 2t \\ k_1\sin 2t + k_2(\cos 2t - \sin 2t) \end{pmatrix}$$

sau, altfel spus,

$$\begin{cases} x(t) = k_1(\cos 2t + \sin 2t) - 2k_2\sin 2t \\ y(t) = k_1\sin 2t + k_2(\cos 2t - \sin 2t), \end{cases}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde k_1, k_2 sunt constante reale.

c) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Scriem ecuaţia caracteristică $\det(\lambda \mathbb{I}_2 - A) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2 - 1)(\lambda - 2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0,$$

care are rădăcinile reale $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Prin urmare, matricea e^{tA} are forma

$$e^{tA} = e^{3t} C_1 + e^t C_2, \tag{4.97}$$

unde $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sunt matrici constante.

Folosind proprietăţile (4.93), (4.94), obţinem că $C_1 + C_2 = \mathbb{I}_2$ şi, respectiv,

$$3e^{3t} C_1 + e^t C_2 = A \left(e^{3t} C_1 + e^t C_2 \right)$$

sau, echivalent,

$$e^{3t}(3C_1 - AC_1) + e^t(C_2 - AC_2) = O_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{cases} 3C_1 = AC_1 \\ C_2 = AC_2. \end{cases} \tag{4.98}$$

Înmulţind relaţia $C_1 + C_2 = \mathbb{I}_2$ la stânga cu A, deducem că $AC_1 + AC_2 = A$, care, ţinând cont de relaţiile (4.98), se rescrie, $3C_1 + C_2 = A$. Am obţinut, aşadar, sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \mathbb{I}_2 \\ 3C_1 + C_2 = A, \end{cases}$$

care are soluţia

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}(A - \mathbb{I}_2) = \dfrac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ C_2 = \dfrac{1}{2}(3\mathbb{I}_2 - A) = \dfrac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Înlocuind C_1, C_2 în (4.98), avem

$$e^{tA} = e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t} + e^t}{2} & \dfrac{e^{3t} - e^t}{2} \\ \dfrac{e^{3t} - e^t}{2} & \dfrac{e^{3t} + e^t}{2} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sistemul dat este unul neomogen, având coloana termenilor liberi $b(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, prin urmare pentru a-i afla soluţia generală trebuie să scriem formula variaţiei constantelor (4.92), în care vom lua, pentru simplitate, $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} c + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t} + e^t}{2} & \dfrac{e^{3t} - e^t}{2} \\ \dfrac{e^{3t} - e^t}{2} & \dfrac{e^{3t} + e^t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3(t-s)} + e^{t-s}}{2} & \dfrac{e^{3(t-s)} - e^{t-s}}{2} \\ \dfrac{e^{3(t-s)} - e^{t-s}}{2} & \dfrac{e^{3(t-s)} + e^{t-s}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^s \\ 0 \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{k_1\left(e^{3t}+e^t\right)+k_2\left(e^{3t}-e^t\right)}{2} \\ \dfrac{k_1\left(e^{3t}-e^t\right)+k_2\left(e^{3t}+e^t\right)}{2} \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^s\left(e^{3(t-s)}+e^{t-s}\right) \\ e^s\left(e^{3(t-s)}-e^{t-s}\right) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{k_1\left(e^{3t}+e^t\right)+k_2\left(e^{3t}-e^t\right)}{2} \\ \dfrac{k_1\left(e^{3t}-e^t\right)+k_2\left(e^{3t}+e^t\right)}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^t e^s\left(e^{3(t-s)}+e^{t-s}\right) ds \\ \displaystyle\int_0^t e^s\left(e^{3(t-s)}-e^{t-s}\right) ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{k_1\left(e^{3t}+e^t\right)+k_2\left(e^{3t}-e^t\right)}{2} \\ \dfrac{k_1\left(e^{3t}-e^t\right)+k_2\left(e^{3t}+e^t\right)}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t}\displaystyle\int_0^t e^{-2s}\, ds + e^t\int_0^t ds \\ e^{3t}\displaystyle\int_0^t e^{-2s}\, ds - e^t\int_0^t ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{k_1\left(e^{3t}+e^t\right)+k_2\left(e^{3t}-e^t\right)}{2} - e^{3t}\cdot\dfrac{e^{-2t}-1}{2} + te^t \\ \dfrac{k_1\left(e^{3t}-e^t\right)+k_2\left(e^{3t}+e^t\right)}{2} - e^{3t}\cdot\dfrac{e^{-2t}-1}{2} - te^t \end{pmatrix},$$

adică

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{k_1\left(e^{3t}+e^t\right)+k_2\left(e^{3t}-e^t\right)-e^t+e^{3t}+2te^t}{2} \\ y(t) = \dfrac{k_1\left(e^{3t}-e^t\right)+k_2\left(e^{3t}+e^t\right)-e^t+e^{3t}-2te^t}{2}, \end{cases}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde k_1, k_2 sunt constante reale.

d) Scriem matricea sistemului, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi ecuaţia caracteristică asociată acesteia:

$$\det(\lambda\mathbb{I}_3 - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0.$$

Deci rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $\lambda_1 = -1$, de multiplicitate $m_1 = 2$ şi $\lambda_2 = 2$, de multiplicitate $m_2 = 1$.

Atunci căutăm matricea e^{tA} de forma:

$$e^{tA} = e^{-t}C_1 + te^{-t}C_2 + e^{2t}C_3, \tag{4.99}$$

unde $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sunt matrice constante.

Din proprietăţile (4.93) şi (4.94) rezultă că

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ -e^{-t}C_1 + (e^{-t} - te^{-t})C_2 + 2e^{2t}C_3 = A(e^{-t}C_1 + te^{-t}C_2 + e^{2t}C_3), \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ e^{-t}(-C_1 + C_2 - AC_1) - te^{-t}(C_2 + AC_2) + e^{2t}(2C_3 - AC_3) = O_3, \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ AC_1 = C_2 - C_1 \\ AC_2 = -C_2 \\ AC_3 = 2C_3. \end{cases} \tag{4.100}$$

Înmulţind ecuaţia $(4.100)_1$ la stânga cu A, rezultă că $AC_1 + AC_3 = A$. Folosind a doua şi a patra relaţie din sistemul (4.100), această ecuaţie se rescrie

$$C_2 - C_1 + 2C_3 = A. \tag{4.101}$$

Înmulţind ecuaţia $(4.100)_1$ la stânga cu A^2, rezultă că $A^2C_1 + A^2C_3 = A^2$. Folosind ultimele trei relaţii din sistemul (4.100), obţinem

$$\begin{aligned} A^2C_1 &= A(AC_1) = A(C_2 - C_1) = AC_2 - AC_1 = -C_2 - (C_2 - C_1) = C_1 - 2C_2 \\ A^2C_3 &= A(AC_3) = 2AC_3 = 4C_3, \end{aligned}$$

prin urmare ecuaţia $A^2C_1 + A^2C_3 = A^2$ se rescrie, mai simplu,

$$C_1 - 2C_2 + 4C_3 = A^2. \tag{4.102}$$

Acum rezolvăm sistemul format din ecuaţiile $(4.100)_1$, (4.101) şi (4.102):

$$\left\{\begin{array}{rrrl} C_1+ & & C_3 & = \mathbb{I}_3 \\ -C_1+ & C_2+ & 2C_3 & = A \\ C_1- & 2C_2+ & 4C_3 & = A^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \mathbb{I}_3 - C_3 \\ -(\mathbb{I}_3 - C_3) + C_2 + 2C_3 = A \\ (\mathbb{I}_3 - C_3) - 2C_2 + 4C_3 = A^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} C_1 = \mathbb{I}_3 - C_3 \\ C_2 + 3C_3 = A + \mathbb{I}_3 \\ -2C_2 + 3C_3 = A^2 - \mathbb{I}_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \mathbb{I}_3 - C_3 \\ C_2 + 3C_3 = A + \mathbb{I}_3 \\ 3C_2 = A - A^2 + 2\mathbb{I}_3 \end{array}\right. ,$$

adică

$$\left\{\begin{array}{l} C_2 = \dfrac{1}{3}\left(A - A^2 + 2\mathbb{I}_3\right) \\[2ex] C_3 = \dfrac{1}{9}\left(2A + A^2 + \mathbb{I}_3\right) \\[2ex] C_1 = \dfrac{1}{9}\left(8\mathbb{I}_3 - 2A - A^2\right). \end{array}\right. \tag{4.103}$$

Pentru a calcula C_1, C_2, C_3 avem nevoie şi de

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Înlocuind $\mathbb{I}_3$, A şi A^2 în relaţiile (4.103), obţinem:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\[4ex] C_2 = \dfrac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = O_3 \\[4ex] C_3 = \dfrac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

Înlocuind aceste matrice în (4.99), putem concluziona că

$$e^{tA} = e^{-t}C_1 + e^{2t}C_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} \\ \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{2e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} \\ \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{-e^{-t} + e^{2t}}{3} & \dfrac{2e^{-t} + e^{2t}}{3} \end{pmatrix},$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Înlocuind în formula

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \text{ unde } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante,}$$

găsim soluţia sistemului iniţial:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{k_1\left(2e^{-t}+e^{2t}\right)}{3} + \dfrac{k_2\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} + \dfrac{k_3\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} \\ y(t) = \dfrac{k_1\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} + \dfrac{k_2\left(2e^{-t}+e^{2t}\right)}{3} + \dfrac{k_3\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} \\ z(t) = \dfrac{k_1\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} + \dfrac{k_2\left(e^{2t}-e^{-t}\right)}{3} + \dfrac{k_3\left(2e^{-t}+e^{2t}\right)}{3}, \end{cases}$$

pentru $t \in \mathbb{R}$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

e) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, iar ecuaţia caracteristică asociată ei, $\det(\lambda\mathbb{I}_3 - A) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+3) - 1 + (\lambda-1) - (\lambda-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+3) = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = -3$. Deci căutăm matricea e^{tA} de forma:

$$e^{tA} = e^{2t}C_1 + e^{t}C_2 + e^{-3t}C_3, \tag{4.104}$$

unde $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sunt matrice constante.

Din relaţiile (4.93), (4.94) rezultă că

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ 2e^{2t}C_1 + e^{t}C_2 - 3e^{-3t}C_3 = A(e^{2t}C_1 + e^{t}C_2 + e^{-3t}C_3), \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ e^{2t}(2C_1 - AC_1) + e^{t}(C_2 - AC_2) - e^{-3t}(3C_3 + AC_3) = O_3, \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \mathbb{I}_3 \\ AC_1 = 2C_1 \\ AC_2 = C_2 \\ AC_3 = -3C_3. \end{cases} \tag{4.105}$$

Înmulţim ecuaţia $(4.105)_1$ la stânga cu A şi obţinem $AC_1 + AC_2 + AC_3 = A$. Folosind relaţiile $(4.105)_{2-4}$, această ecuaţie se rescrie

$$2C_1 + C_2 - 3C_3 = A. \tag{4.106}$$

Mai departe, înmulţim ecuaţia $(4.105)_1$ la stânga cu A^2 şi găsim $A^2C_1 + A^2C_2 + A^2C_3 = A^2$. Dar, folosind de câte 2 ori fiecare dintre ultimele 3 relaţii din (4.105), rezultă că

$$\begin{aligned} A^2C_1 &= A(AC_1) = A(2C_1) = 2AC_1 = 4C_1 \\ A^2C_2 &= A(AC_2) = AC_2 = C_2 \\ A^2C_3 &= A(AC_3) = A(-3C_3) = -3AC_3 = 9C_3, \end{aligned}$$

de unde

$$4C_1 + C_2 + 9C_3 = A^2. \tag{4.107}$$

Putem acum forma din ecuaţiile $(4.105)_1$, (4.106) şi (4.107) sistemul

$$\begin{cases} C_1 + & C_2 + & C_3 = & \mathbb{I}_3 \\ 2C_1 + & C_2 - & 3C_3 = & A \\ 4C_1 + & C_2 + & 9C_3 = & A^2. \end{cases} \tag{4.108}$$

Scădem prima ecuaţie a sistemului din celelalte două şi rezultă

$$\begin{cases} C_1 - & 4C_3 = & A - \mathbb{I}_3 \\ 3C_1 + & 8C_3 = & A^2 - \mathbb{I}_3. \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu 2 şi adunând-o la a doua, obţinem

$$C_1 = \frac{1}{5}(A^2 + 2A - 3\mathbb{I}_3).$$

Atunci

$$\frac{1}{5}(A^2 + 2A - 3\mathbb{I}_3) - 4C_3 = A - \mathbb{I}_3 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{20}(A^2 - 3A + 2\mathbb{I}_3).$$

În sfârşit,

$$C_2 = \mathbb{I}_3 - C_1 - C_3 = \frac{1}{4}(6\mathbb{I}_3 - A^2 - A).$$

Aflăm $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ şi înlocuim pe $\mathbb{I}_3, A, A^2$ în formulele lui C_1, C_2 şi C_3 de mai sus. Obţinem

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] C_2 = \dfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] C_3 = \dfrac{1}{20}\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -5 & -5 & 20 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Înlocuind aceste matrice în relaţia (4.104), aflăm matricea fundamentală

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{e^{2t}}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{-3t}}{20}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -5 & -5 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{4e^{2t}}{5} + \dfrac{e^t}{4} - \dfrac{e^{-3t}}{20} & -\dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{e^t}{4} - \dfrac{e^{-3t}}{20} & \dfrac{e^{-3t} - e^{2t}}{5} \\ -\dfrac{4e^{2t}}{5} + \dfrac{3e^t}{4} + \dfrac{e^{-3t}}{20} & \dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{3e^t}{4} + \dfrac{e^{-3t}}{20} & \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ \dfrac{e^t - e^{-3t}}{4} & \dfrac{e^t - e^{-3t}}{4} & e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deoarece soluţia sistemului poate fi exprimată ca

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \text{,unde } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante,}$$

rezultă că

$$\begin{cases} x(t) = k_1 \left(\dfrac{4e^{2t}}{5} + \dfrac{e^{t}}{4} - \dfrac{e^{-3t}}{20} \right) + k_2 \left(-\dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{e^{t}}{4} - \dfrac{e^{-3t}}{20} \right) + k_3 \cdot \dfrac{e^{-3t} - e^{2t}}{5} \\ y(t) = k_1 \left(-\dfrac{4e^{2t}}{5} + \dfrac{3e^{t}}{4} + \dfrac{e^{-3t}}{20} \right) + k_2 \left(\dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{3e^{t}}{4} + \dfrac{e^{-3t}}{20} \right) + k_3 \cdot \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{5} \\ z(t) = \dfrac{k_1 \left(e^{t} - e^{-3t} \right)}{4} + \dfrac{k_2 \left(e^{t} - e^{-3t} \right)}{4} + k_3 e^{-3t}, \end{cases}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Partea 2

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

CAPITOLUL 5

Probleme eliptice

Cursul 9

5.1. Formulele lui Green

Fie $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Amintim că, date un punct $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şi un număr $r > 0$, bila deschisă de centru x_0 şi rază r este mulţimea

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\};$$

bila închisă de centru x_0 şi rază r este mulţimea

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\};$$

în sfârşit, sfera de centru x_0 şi rază r este mulţimea

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}.$$

Spunem că o mulţime $V \subset \mathbb{R}^n$ este vecinătate pentru punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dacă există $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset V$.

O mulţime din $\mathbb{R}^n$ se numeşte deschisă dacă este mulţimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său. O mulţime a cărei complementară este deschisă se numeşte închisă.

Fie o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Spunem că punctul $x \in \mathbb{R}^n$ este punct frontieră al lui Ω dacă orice bilă cu centrul în x conţine atât puncte din Ω, cât şi din $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii Ω se numeşte frontiera lui Ω şi se notează cu $\partial\Omega$.

Avem $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ($\overline{\Omega}$ este închiderea (aderenţa) mulţimii Ω, adică mulţimea punctelor aderente lui Ω).

Desigur, $\partial B(x_0, r) = \partial\overline{B}(x_0, r) = S(x_0, r)$.

Definiţia 5.1.1. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă.*

Spunem că o funcţie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este de clasă C^k pe Ω (şi scriem $u \in C^k(\Omega)$) dacă u este derivabilă parţial de ordin k în raport cu toate variabilele pe Ω şi toate derivatele ei parţiale de ordin k sunt continue pe Ω.

Spunem că o funcţie vectorială $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ este de clasă C^k pe Ω dacă $f_i \in C^k(\Omega)$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Definiţia 5.1.2. *O mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ se numeşte varietate cu bord de clasă C^k dacă pentru orice punct $x_0 \in \partial\Omega$ există o vecinătate $U(x_0)$ a punctului şi o funcţie bijectivă $\varphi : U(x_0) \to V$, unde V este o vecinătate a originii din $\mathbb{R}^n$, astfel încât φ şi inversa ei φ^{-1} să fie funcţii de clasă C^k şi să aibă loc relaţiile:*

$$\varphi(U(x_0) \cap \Omega) = V \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n > 0\}$$
$$\varphi(U(x_0) \cap \partial\Omega) = V \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0\}$$
$$\varphi(U(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)) = V \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n < 0\}.$$

Reamintim următorii operatori diferenţiali:

- dacă $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, atunci gradientul lui u este funcţia $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right);$$

- dacă $u:\Omega\to\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2, atunci laplaceanul lui u este funcţia $\Delta u:\Omega\to\mathbb{R}$,

$$\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x).$$

Funcţia $u\in C^2(\Omega)$ se numeşte *armonică* pe Ω dacă $\Delta u(x)=0$, pentru orice $x\in\Omega$.

- dacă $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ este o funcţie de clasă C^1, atunci divergenţa lui f este funcţia $\operatorname{div} f:\Omega\to\mathbb{R}$,

$$\operatorname{div} f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

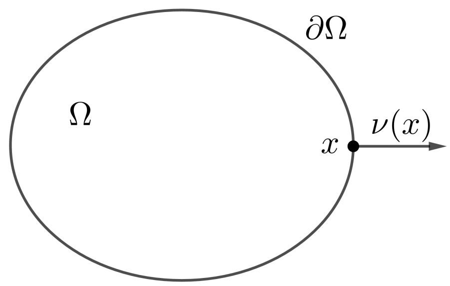

FIGURA 1

Dacă Ω este o mulţime de clasă C^1, $u\in C^1(\overline{\Omega})$ şi $\nu(x)=(\nu_1(x),\nu_2(x),\ldots,\nu_n(x))$ este versorul normalei exterioare la $\partial\Omega$ în punctul $x\in\partial\Omega$ (Figura 1), atunci derivata normală

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)=\nabla u(x)\cdot\nu(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\nu_i(x)$$

(" $\cdot$ " este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$).

TEOREMA 5.1.1 (Teorema lui GAUSS-OSTROGRADSKI, teorema divergenţei). *Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită, de clasă C^1 (pe porţiuni) şi $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$. Dacă $\nu(x)=(\nu_1(x),\nu_2(x),\ldots,\nu_n(x))$ este versorul normalei exterioare la $\partial\Omega$ în punctul $x\in\partial\Omega$, atunci are loc egalitatea*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\,dx=\int_{\partial\Omega} f(x)\cdot\nu(x)\,d\sigma,$$

unde $f(x)\cdot\nu(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\nu_i(x)$ este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 5.1.2 (Formulele lui GREEN). *Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită, de clasă C^1.*

(I) Dacă $u,v\in C^1(\overline{\Omega})$, $v\in C^2(\Omega)$ şi $\Delta v\in C(\overline{\Omega})$, atunci

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx=-\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx+\int_{\partial\Omega}u(x)\frac{\partial v}{\partial\nu}(x)d\sigma. \tag{5.1}$$

(II) Dacă $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ şi $\Delta u,\Delta v\in C(\overline{\Omega})$, atunci

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x)-v(x)\Delta u(x))\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v}{\partial\nu}(x)-v(x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)d\sigma. \tag{5.2}$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru (I) se aplică teorema lui GAUSS-OSTROGRADSKI funcţiei $f=u\nabla v$, ţinând cont de formula $\operatorname{div}(u\nabla v)=u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v$. Formula (II) rezultă scriind (5.1) pentru perechile (u,v) şi (v,u) şi scăzând relaţiile obţinute. ■

Din prima formulă a lui GREEN (5.1) rezultă:

COROLAR 5.1.1 (Teorema lui GAUSS). *Dacă $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ este armonică pe Ω, atunci*

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)d\sigma=0.$$

5.2. Probleme ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Condiţii la frontieră. Condiţii iniţiale

O ecuaţie cu derivate parţiale este o relaţie de forma

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0, \tag{5.3}$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sunt variabilele independente, iar $u = u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este funcţia necunoscută. După cum am precizat în primul capitol, ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care apare în ecuaţie se numeşte ordinul ecuaţiei cu derivate parţiale.

Prin soluţie clasică pentru ecuaţia cu derivate parţiale (5.3) se înţelege o funcţie u definită pe un deschis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, care este continuă împreună cu toate derivatele sale parţiale care apar în ecuaţie şi care verifică ecuaţia (5.3) în toate punctele lui Ω.

Ecuaţia cu derivate parţiale (5.3) se numeşte liniară dacă F este operator liniar în raport cu funcţia necunoscută şi toate derivatele acesteia.

În continuare ne vom ocupa de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare, care modelează fenomene fizice precum propagarea căldurii, difuzia gazelor, propagarea undelor.

Deoarece o ecuaţie cu derivate parţiale poate avea mai multe soluţii (a căror mulţime formează soluţia generală a ecuaţiei), pentru a individualiza o soluţie trebuie să asociem ecuaţiei condiţii suplimentare, care depind de tipul ecuaţiei avute în vedere.

Există două tipuri de condiţii:

- condiţii la frontieră (condiţii la limită), care se referă la variabilele spaţiale şi descriu comportarea soluţiei pe frontiera domeniului Ω;
- condiţii iniţiale, care se referă la variabila timp; acestea se asociază doar ecuaţiilor de evoluţie (în care funcţia necunoscută depinde de timp).

Cele mai importante tipuri de condiţii la limită sut cele de tip Dirichlet, Neumann şi Robin. Problema la limită Dirichlet (respectiv Neumann sau Robin) constă în rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale cu condiţii la frontieră de tip Dirichlet (respectiv Neumann sau Robin). Astfel de probleme se formulează pentru ecuaţii ce descriu fenomene staţionare (independente de timp).

Pentru ecuaţiile de evoluţie se asociază atât condiţii iniţiale, cât şi condiţii la frontieră, obţinându-se astfel probleme mixte.

Exemplificăm tipurile de probleme la limită pentru ecuaţia lui Poisson, $\Delta u = f$.

Problema Dirichlet: dată o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginită şi deschisă, cu frontiera $\partial\Omega$, să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $\varphi \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date.

Problema Neumann: dată o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginită şi deschisă, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1, să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, care să admită derivată normală continuă pe $\partial\Omega$ şi să verifice

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x), & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date.

Problema Robin: dată o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mărginită şi deschisă, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1, să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, care să admită derivată normală continuă pe $\partial\Omega$ şi să verifice

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \alpha(x)u(x) = g(x), & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g, \alpha \in C(\partial\Omega)$, cu $\alpha(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \partial\Omega$, sunt funcţii date.

Probleme la limită exterioare: dacă complementara mulţimii $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este compactă (adică mărginită şi închisă), atunci problemele Dirichlet, Neumann şi Robin pe Ω se definesc ca mai sus, adăugându-se, în plus, condiţii la infinit de forma

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} u(x) = 0 \qquad \text{sau}$$

$$u \text{ mărginită pentru } \|x\| \to +\infty.$$

Completări opţionale la cursul 9

5.3. Soluţia fundamentală a operatorului lui Laplace

Funcţia $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n \|x\|^{n-2}}, & \text{dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & \text{dacă } n = 2 \end{cases} \tag{5.4}$$

se numeşte soluţia fundamentală a operatorului lui Laplace Δ. În formula (5.4) ω_n notează suprafaţa sferei unitate din $\mathbb{R}^n$ ($\omega_2 = 2\pi$ =lungimea cercului unitate din $\mathbb{R}^2$; $\omega_3 = 4\pi$).

Propoziţia 5.3.1. *Funcţia $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ şi $\Delta E(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Demonstraţie. Calculând

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|},$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\|x\|^{2-n}\right) = -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}(2-n)\|x\|^{1-n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) & \\ \qquad = \dfrac{1}{\omega_n}\|x\|^{1-n}\dfrac{x_i}{\|x\|} & , \text{dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\|x\|}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) = \dfrac{1}{\omega_2}\dfrac{1}{\|x\|}\dfrac{x_i}{\|x\|} & , \text{dacă } n = 2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\frac{x_i}{\|x\|^n},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{\|x\|^n} + x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|x\|^{-n}\right)\right) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x\|^n} - n x_i \|x\|^{-n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|)\right)$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x\|^n} - \frac{n x_i}{\|x\|^{n+1}} \cdot \frac{x_i}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x\|^n} - \frac{n x_i^2}{\|x\|^{n+2}}\right),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ şi orice $1 \leq i \leq n$, rezultă că

$$\Delta E(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x\|^n} - \frac{n x_i^2}{\|x\|^{n+2}}\right) = \frac{1}{\omega_n \|x\|^n}\sum_{i=1}^n 1 - \frac{n}{\omega_n \|x\|^{n+2}}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$= \frac{n}{\omega_n \|x\|^n} - \frac{n}{\omega_n \|x\|^{n+2}} \cdot \|x\|^2 = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Se observă că E poate fi derivată parţial de oricâte ori, în raport cu fiecare variabilă x_i, $1 \leq i \leq n$, în orice $x \neq 0$. ∎

Folosind a doua formulă a lui Green, (5.2), rezultă:

Teorema 5.3.1 (Teorema Riemann-Green). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită, de clasă C^1 pe porţiuni şi $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, cu $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$. Atunci:*

$$u(x) = \int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\, dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\, d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega; \tag{5.5}$$

$$\int_\Omega \Delta u(y) E(x-y)\, dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\, d\sigma_y = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \tag{5.6}$$

COROLAR 5.3.1 (Formula de medie pentru funcţii armonice). *Dacă funcţia u este armonică în Ω, atunci pentru orice bilă deschisă $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| < r\}$ cu $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$ are loc relaţia*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma_y, \text{ pentru orice } x \in \Omega. \tag{5.7}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$. Aplicăm formula (5.5) funcţiei u pe $B(x,r)$, ţinând cont că $\Delta u(y) = 0$ pentru orice $y \in B(x,r) \subset \Omega$. Rezultă că

$$u(x) = -\int_{\partial B(x,r)} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y + \int_{\partial B(x,r)} u(y) \frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\, d\sigma_y. \tag{5.8}$$

Din formula (5.4) rezultă că, pentru $y \neq x$,

$$E(x-y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n \|x-y\|^{n-2}}, & \text{dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x-y\|, & \text{dacă } n = 2. \end{cases}$$

Deoarece $\partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| = r\}$, obţinem că pentru $y \in \partial B(x,r)$ are loc

$$E(x-y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}, & \text{dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln r, & \text{dacă } n = 2. \end{cases}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y) = \nabla_y E(x-y) \cdot \nu(y), \quad \forall y \in \partial B(x,r),$$

unde $\nu(y)$ este versorul normalei exterioare la sfera $\partial B(x,r)$ în punctul $y \in \partial B(x,r)$. Cum normala la o sferă într-un punct al sferei are direcţia razei, iar un versor are norma 1, rezultă că

$$\nu(y) = \frac{y-x}{\|y-x\|} = \frac{y-x}{r}, \quad \forall y \in \partial B(x,r),$$

de unde

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial y_i}(x-y) \cdot \frac{y_i - x_i}{r}, \quad \forall y \in \partial B(x,r).$$

Pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, calculăm

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i}(\|x-y\|) &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}\right) \\ &= \frac{2(x_i - y_i) \cdot (-1)}{2\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}} = \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{5.9}$$

şi apoi

$$\frac{\partial E}{\partial y_i}(x-y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\|x-y\|^{2-n}\right) = -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}(2-n)\|x-y\|^{1-n} \cdot \\ \qquad \cdot \dfrac{\partial}{\partial y_i}(\|x-y\|) = \dfrac{1}{\omega_n}\|x-y\|^{1-n} \dfrac{y_i - x_i}{\|x-y\|} & \text{, dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\|x-y\|} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y_i}(\|x-y\|) = \dfrac{1}{\omega_2} \dfrac{1}{\|x-y\|} \dfrac{y_i - x_i}{\|x-y\|} & \text{, dacă } n = 2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Aşadar

$$\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_n} \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^n} \cdot \frac{y_i - x_i}{r} = \frac{1}{\omega_n r^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$$
$$= \frac{1}{\omega_n r^{n+1}} \cdot \|x-y\|^2 = \frac{r^2}{\omega_n r^{n+1}} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}, \quad \forall y \in \partial B(x,r).$$

Prin urmare, relaţia (5.8) se rescrie:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma_y + \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}} \displaystyle\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y, & \text{dacă } n \geq 3 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \ln r \displaystyle\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y, & \text{dacă } n = 2. \end{cases}$$

Folosind şi teorema lui Gauss rezultă concluzia. ■

Vom vedea mai târziu că, de fapt, formula de medie (5.7) este o condiţie necesară şi suficientă ca funcţia u să fie armonică în Ω.

Observaţia 5.3.1. *Dacă funcţia armonică u reprezintă potenţialul unui câmp electric, atunci teorema de medie enunţă următorul principiu din electrostatică: în absenţa unor sarcini electrice valoarea medie a potenţialului pe suprafaţa unei sfere este egală cu valoarea lui în centrul sferei.*

5.4. Funcţia Green

Din formula Riemann-Green rezultă că dacă u este o funcţie armonică, atunci valorile sale pe Ω pot fi exprimate cu ajutorul valorilor sale şi ale derivatei sale normale pe frontiera $\partial\Omega$:

$$u(x) = \int_{\Omega} \underbrace{\Delta u(y)}_{=0} E(x-y)\, dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\, d\sigma_y$$
$$= -\int_{\partial\Omega} \underbrace{E(x-y)}_{\text{cunoscută}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} u(y) \underbrace{\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)}_{\text{cunoscută}}\, d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dar dacă avem de rezolvat o problemă la limită de tip Dirichlet, atunci cunoaştem doar $u|_{\partial\Omega}$, nu şi $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, deci avem nevoie ca în formula de reprezentare a soluţiei să nu mai apară $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$. Acest lucru se face introducând funcţia Green.

Definiţia 5.4.1. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1 pe porţiuni. Numim funcţie* Green *pentru problema* Dirichlet *pe Ω o funcţie $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ care verifică:*

a) $G(x,y) = g(x,y) - E(x-y)$, unde $g : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică pe Ω şi continuă pe $\overline{\Omega}$ ca funcţie de y, iar funcţia $y \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial \nu_y}(x,y)$ este continuă pe $\partial\Omega$;

b) $G(x,y) = 0$, pentru orice $x \in \Omega$ şi orice $y \in \partial\Omega$.

Dacă g este funcţia din definiţia 5.4.1, atunci

$$\Delta_y g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}(x,y) = 0, \quad \forall x, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$$
$$g(x,y) = E(x-y), \qquad \forall x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega$$

şi aceste relaţii determină funcţia g în mod unic. Într-adevăr, dacă ar exista două asemenea funcţii, g_1 şi g_2, atunci, notând $h = g_1 - g_2$, am avea

$$\Delta_y h(x,y) = \Delta_y g_1(x,y) - \Delta_y g_2(x,y) = 0, \qquad \forall x, y \in \Omega$$
$$h(x,y) = g_1(x,y) - g_2(x,y) = E(x-y) - E(x-y) = 0, \quad \forall x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega;$$

atunci, din prima formulă a lui Green, pentru fiecare $x \in \Omega$ fixat,

$$\int_{\Omega} h(x,y) \Delta_y h(x,y) dy = -\int_{\Omega} \|\nabla_y h(x,y)\|^2 dy + \int_{\partial\Omega} h(x,y) \frac{\partial h}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma_y \Leftrightarrow \int_{\Omega} \|\nabla_y h(x,y)\|^2 dy = 0$$

$\Leftrightarrow \nabla_y h(x,y) = 0,\ \forall y \in \Omega \Leftrightarrow \dfrac{\partial h}{\partial y_i}(x,y) = 0,\ \forall i = \overline{1,n},\ \forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega \Leftrightarrow h(x,y) = \text{constant},\ \forall y \in \Omega$

şi, deoarece $h(x,y) = 0$ pentru orice $y \in \partial\Omega$, ar rezulta că $h(x,y) = 0$ pentru orice $x \in \Omega$ şi $y \in \overline{\Omega}$. În consecinţă, $g_1(x,y) = g_2(x,y)$ pentru orice $x \in \Omega$ şi $y \in \overline{\Omega}$.

Aşadar, pentru problema Dirichlet pe Ω există cel mult o funcţie Green. Vom vedea că pentru domenii Ω suficient de regulate există o funcţie g, deci există şi funcţia Green.

Observaţia 5.4.1. *Din definiţia 5.4.1 rezultă că pentru $x \in \Omega$ fixat, $\Delta_y G(x,y) = 0$, $\forall y \in \Omega$.*

Într-adevăr, folosind subpunctul a) din definiţia 5.4.1, obţinem

$$\Delta_y G(x,y) = \underbrace{\Delta_y g(x,y)}_{=0} - \Delta_y E(x-y) = -\Delta_y E(x-y), \quad \forall y \in \Omega.$$

Să calculăm $\Delta_y E(x-y)$ pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega$, $x \neq y$. Am aflat deja la pagina 86:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\|x-y\|) = \frac{y_i - x_i}{\|x-y\|}, \qquad \frac{\partial E}{\partial y_i}(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{y_i - x_i}{\|x-y\|^n}, \quad 1 \le i \le n;$$

atunci

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial y_i^2}(x-y) &= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}(y_i - x_i)\cdot\frac{1}{\|x-y\|^n} + (y_i - x_i)\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\|x-y\|^{-n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x-y\|^n} - n(y_i - x_i)\|x-y\|^{-n-1}\frac{\partial}{\partial y_i}(\|x-y\|)\right) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x-y\|^n} - \frac{n(y_i - x_i)}{\|x-y\|^{n+1}}\cdot\frac{y_i - x_i}{\|x-y\|}\right) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{\|x-y\|^n} - \frac{n(y_i - x_i)^2}{\|x-y\|^{n+2}}\right),
\end{aligned}$$

pentru orice $1 \le i \le n$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}
\Delta_y E(x-y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial y_i^2}(x-y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n} - \frac{n}{\omega_n\|x-y\|^{n+2}}\cdot(y_i - x_i)^2\right) \\
&= \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}\cdot n - \frac{n}{\omega_n\|x-y\|^{n+2}}\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \\
&= \frac{n}{\omega_n\|x-y\|^n} - \frac{n}{\omega_n\|x-y\|^{n+2}}\cdot\|x-y\|^2 = 0,
\end{aligned}$$

de unde $\Delta_y G(x,y) = 0$.

Dacă reuşim să determinăm funcţia Green, atunci putem reprezenta cu ajutorul ei soluţia problemei Dirichlet, după cum arată:

Propoziţia 5.4.1. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1. Dacă $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ şi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este o soluţie a problemei* Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

iar derivata normală $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ este continuă pe frontiera $\partial\Omega$, atunci:

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\,d\sigma_y,\ \forall x \in \Omega, \tag{5.10}$$

unde G este funcţia Green *a problemei* Dirichlet *relativ la Ω.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $x \in \Omega$ scriem formula Riemann-Green:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_\Omega \Delta u(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\,d\sigma_y \\
&= \int_\Omega f(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial E}{\partial \nu_y}(x-y)\,d\sigma_y
\end{aligned}$$

şi a doua formulă a lui Green (5.2) pentru funcţiile u şi $g(x,\cdot)$:

$$\int_\Omega (g(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y g(x,y))\,dy = \int_{\partial\Omega} \left(g(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial g}{\partial \nu_y}(x,y) \right) d\sigma_y$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_\Omega g(x,y)f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} g(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial g}{\partial \nu_y}(x,y)\,d\sigma_y.$$

Scăzând prima relaţie din a doua, obţinem:

$$-u(x) = \int_\Omega (g(x,y) - E(x-y))f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} (g(x,y) - E(x-y))\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,d\sigma_y$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}(g(x,y) - E(x-y))\,d\sigma_y,\ \forall x \in \Omega.$$

Folosind definiţia funcţiei Green pentru problema Dirichlet rezultă concluzia. ■

În continuare dorim să găsim o formulă de reprezentare pentru soluţia problemei Dirichlet asociată ecuaţiei Laplace $\Delta u = 0$ pe domeniul

$$\Omega = B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\},$$

unde $R > 0$. În acest caz, deoarece $f \equiv 0$, formula (5.10) devine

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,R)} \varphi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\,d\sigma_y, \quad \forall x \in B(0,R). \tag{5.11}$$

Avem

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot \nu(y) = \nabla_y G(x,y)\cdot \frac{y}{R},$$

pentru că normala la o sferă are direcţia razei, deci versorul normalei *exterioare* în punctul $y \in \partial B(0,R)$ va fi $\dfrac{y}{\|y\|} = \dfrac{y}{R}$.

Trebuie să determinăm funcţia Green pentru $\Omega = B(0,R)$. O căutăm de forma

$$G(x,y) = -E(x-y) + \alpha E(x^* - y), \tag{5.12}$$

unde $x^* = \dfrac{R^2}{\|x\|^2}x$ (simetricul prin inversiune al punctului x faţă de suprafaţa sferei $B(0,R)$) (Figura 2), iar α este o constantă reală pe care o vom afla din condiţia b) a definiţiei 5.4.1:

$$G(x,y) = 0,\ \text{pentru orice } x \in B(0,R),\ y \in \partial B(0,R).$$

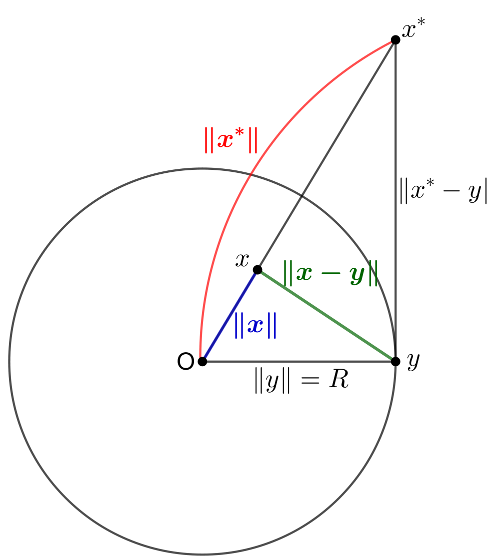

Figura 2

Fie $y \in \partial B(0,R) \Rightarrow \|y\| = R$. Cum

$$\|x^*\| = \frac{R^2}{\|x\|^2}\|x\| \Leftrightarrow \frac{\|x^*\|}{R} = \frac{R}{\|x\|} \Leftrightarrow \frac{\|x^*\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x\|},$$

rezultă că în planul determinat de punctele O, y şi x^* triunghiurile xOy şi yOx^* sunt asemenea. Prin urmare,

$$\frac{R}{\|x\|} = \frac{\|x^* - y\|}{\|x - y\|} \text{ sau, echivalent, } \|x^* - y\| = \frac{R\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Atunci, pentru $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} G(x,y) &= -E(x-y) + \alpha E(x^* - y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n\|x-y\|^{n-2}} - \frac{\alpha}{(n-2)\omega_n\|x^*-y\|^{n-2}} \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \frac{\alpha}{\|x^*-y\|^{n-2}}\right) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \frac{\alpha\|x\|^{n-2}}{R^{n-2}\|x-y\|^{n-2}}\right) \\ &= \frac{1}{(n-2)\omega_n\|x-y\|^{n-2}}\left(1 - \frac{\alpha\|x\|^{n-2}}{R^{n-2}}\right), \end{aligned}$$

deci condiţia $G(x,y) = 0$ pentru $\|y\| = R$ revine la $\alpha = \dfrac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}$.

Prelungind prin continuitate în $x = 0$, se constată că funcţia

$$G(x,y) = \begin{cases} -E(x-y) + \dfrac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}E(x^*-y), & \text{pentru } x \neq 0 \\ -E(y) - \dfrac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}}, & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

este funcţie Green pentru problema Dirichlet pe bila $B(0,R)$.

Observăm că funcţia Green are proprietăţile:

$$G(x,y) = G(y,x) > 0, \quad \forall x, y \in B(0,R). \tag{5.14}$$

Acum calculăm derivata normală $\dfrac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)$, pentru $x \in B(0,R)$, $y \in \partial B(0,R)$. Folosind relaţia (5.12) şi faptul că

$$\frac{\partial E}{\partial y_i}(x-y) = \frac{y_i - x_i}{\omega_n\|x-y\|^n}, \text{ pentru } 1 \leq i \leq n,$$

de unde

$$\begin{aligned} \nabla_y E(x-y) &= \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}(x-y), \frac{\partial E}{\partial y_2}(x-y), \ldots, \frac{\partial E}{\partial y_n}(x-y)\right) = \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n) \\ &= \frac{y-x}{\omega_n\|x-y\|^n} \end{aligned}$$

şi, în mod analog,

$$\nabla_y E(x^* - y) = \frac{y - x^*}{\omega_n\|x^*-y\|^n},$$

avem, pentru $x \neq 0$,

$$G(x,y) = \frac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}E(x^*-y) - E(x-y),$$

prin urmare

$$\begin{aligned}
\nabla_y G(x,y) &= \frac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}\nabla_y E(x^*-y) - \nabla_y E(x-y) = \frac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}\frac{y-x^*}{\omega_n\|x^*-y\|^n} - \frac{y-x}{\omega_n\|x-y\|^n}\\
&= \frac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}}\frac{\|x\|^n}{\omega_n R^n\|x-y\|^n}(y-x^*) - \frac{y-x}{\omega_n\|x-y\|^n} = \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}\left[\frac{\|x\|^2}{R^2}(y-x^*)+(x-y)\right]\\
&= \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}\left[\frac{\|x\|^2}{R^2}\left(y-\frac{R^2}{\|x\|^2}x\right)+(x-y)\right] = \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}\left(\frac{\|x\|^2}{R^2}y-x+x-y\right)\\
&= \frac{1}{\omega_n\|x-y\|^n}\left(\frac{\|x\|^2}{R^2}-1\right)y = \frac{\|x\|^2-R^2}{\omega_n\|x-y\|^n R^2}y.
\end{aligned}$$

În concluzie,

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = \nabla_y G(x,y)\cdot\frac{y}{R} = \frac{1}{R}\nabla_y G(x,y)\cdot y = \frac{1}{R}\frac{\|x\|^2-R^2}{\omega_n\|x-y\|^n R^2}y\cdot y = \frac{1}{R}\frac{\|x\|^2-R^2}{\omega_n\|x-y\|^n R^2}R^2 = \frac{\|x\|^2-R^2}{R\omega_n\|x-y\|^n}.$$

Înlocuind în formula (5.11), obţinem că soluţia problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B(0,R)\\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial B(0,R)\end{cases}$$

poate fi reprezentată prin formula:

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,R)} \varphi(y)\frac{\|x\|^2-R^2}{R\omega_n\|x-y\|^n}\,d\sigma_y,\ \forall x \in B(0,R),$$

adică

$$u(x) = \frac{R^2-\|x\|^2}{R\omega_n}\int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^n}\,d\sigma_y,\ \forall x\in B(0,R). \tag{5.15}$$

Formula (5.15) se numeşte *formula integrală a lui* Poisson. Printr-un proces de aproximare prin funcţii netede se arată că această formulă rămâne adevărată pentru soluţii $u \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ ale problemei Dirichlet.

De fapt, este adevărat şi rezultatul reciproc, adică funcţia u definită prin relaţia (5.15) este soluţie a problemei Dirichlet pe sfera $B(0,R)$. Mai precis, are loc:

Teorema 5.4.1. *Fie $\varphi \in C(\partial B(0,R))$. Atunci funcţia u definită prin*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2-\|x\|^2}{R\omega_n}\displaystyle\int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^n}\,d\sigma_y, & x\in B(0,R)\\ \varphi(x), & x\in\partial B(0,R)\end{cases} \tag{5.16}$$

aparţine spaţiului $C^2(B(0,R)\cap C(\overline{B}(0,R))$ şi este soluţie a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B(0,R)\\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial B(0,R).\end{cases} \tag{5.17}$$

Să remarcăm că această teoremă ne furnizează, de fapt, un rezultat de existenţă pentru soluţia problemei Dirichlet pe un domeniu sferic.

Observaţia 5.4.2. *Teorema 5.4.1 este adevărată şi pe bila deschisă $B(x_0,R) = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\| < R\}$ (unde $x_0\in\mathbb{R}^n$, $R>0$), formula lui* Poisson *având în acest caz forma:*

$$u(x) = \frac{R^2-\|x-x_0\|^2}{R\omega_n}\int_{\partial B(x_0,R)} \frac{\varphi(y)}{\|x-x_0-y\|^n}\,d\sigma_y, \quad \forall x\in B(x_0,R). \tag{5.18}$$

Observaţia 5.4.3. *În cazul $n=2$, când $B(0,R)$ este interiorul cercului centrat în origine, de rază $R>0$ din plan, formula lui* Poisson *are forma*

$$u(x) = \frac{R^2-\|x\|^2}{2\pi R}\int_{\|y\|=R} \frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^2}\,d\sigma_y, \quad \forall x\in B(0,R).$$

5.5. Principiul de maxim pentru operatorul Laplace

TEOREMA 5.5.1 (Principiul de maxim). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică relaţia $\Delta u(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, atunci u are una şi numai una din proprietăţile:*
i) u îşi atinge maximul pe $\overline{\Omega}$ numai pe $\partial\Omega$;
ii) u este constantă pe Ω.

O formulare mai slabă a teoremei precedente este:

TEOREMA 5.5.2 (Principiul de maxim slab). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică relaţia $\Delta u(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, atunci*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Au loc şi:

TEOREMA 5.5.3 (Principiul de minim). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică relaţia $\Delta u(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, atunci u are una şi numai una din proprietăţile:*
i) u îşi atinge minimul pe $\overline{\Omega}$ numai pe $\partial\Omega$;
ii) u este constantă pe Ω.

TEOREMA 5.5.4 (Principiul de minim slab). *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifică relaţia $\Delta u(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, atunci*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

O consecinţă a principiilor de maxim şi minim este:

TEOREMA 5.5.5. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este o funcţie armonică în Ω, atunci*

$$\min_{x \in \partial\Omega} u(x) \leq u(y) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \forall y \in \overline{\Omega}.$$

Un alt principiu de maxim este:

TEOREMA 5.5.6. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă. Fie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, care verifică relaţia $\Delta u(x) + a(x)u(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, unde $a \in C(\overline{\Omega})$ şi $a(x) \leq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Dacă $u(x_0) = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) > 0$, atunci $x_0 \in \partial\Omega$ sau u este constantă pe Ω.*

Cu ajutorul principiului de maxim se poate demonstra o reciprocă a teoremei de medie:

PROPOZIŢIA 5.5.1. *Dacă funcţia u continuă pe Ω are proprietatea că pentru orice $x \in \Omega$ există $\delta = \delta(x) > 0$ astfel încât*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma, \quad \forall r \in (0, \delta),$$

atunci u este armonică în Ω.

Cea mai importantă aplicaţie a principiului de maxim este demonstrarea unicităţii soluţiei pentru problema DIRICHLET.

TEOREMA 5.5.7. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi conexă şi $a \in C(\overline{\Omega})$, cu $a(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$. Dacă $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $\varphi \in C(\partial\Omega)$, atunci problema* DIRICHLET

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x) + a(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5.19}$$

are cel mult o soluţie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. În plus, dacă există, soluţia acestei probleme verifică relaţia

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)| + \alpha \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|, \tag{5.20}$$

unde α este o constantă care nu depinde de f şi φ.

Inegalitatea (5.20) permite demonstrarea unicităţii soluţiei problemei DIRICHLET (5.19). Într-adevăr, dacă această problemă ar admite două soluţii, u_1 şi u_2, atunci diferenţa lor $u = u_1 - u_2$ ar verifica problema DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta u(x) + a(x)u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.21}$$

deci pentru u inegalitatea (5.20) s-ar scrie $\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq 0$, de unde ar rezulta $u(x) = 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, adică $u_1 = u_2$ pe $\overline{\Omega}$.

CAPITOLUL 6

Modele din fizica matematică descrise prin ecuaţii eliptice

6.1. Câmpul termic staţionar

Ecuaţia câmpului termic (ecuaţia propagării căldurii) a fost formulată de Jean Baptiste Joseph FOURIER în lucrarea *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Descriem acest model în cazul câmpului termic staţionar (caz în care temperatura în orice punct al domeniului nu depinde de timp). Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n = 1, 2, 3$ un corp conductor termic de dimensiune n. Notăm prin $u(x)$ temperatura în punctul $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. Conform legii de propagare enunţată de FOURIER, fluxul de căldură care traversează o suprafaţă S din Ω prin punctul $x \in S$ (adică rata cu care căldura este transferată prin S pe unitatea de suprafaţă) este

$$q(x) = -k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \tag{6.1}$$

unde ν este versorul normalei exterioare la suprafaţa S, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ notează derivata normală a funcţiei u în punctul x, iar $k(x)$ este conductivitatea termică a materialului în punctul x.

Fie un element de volum V centrat în x. Dacă $S = \partial V$ este frontiera lui V, atunci din relaţia (6.1) şi formula lui GAUSS-OSTROGRADSKI obţinem că prin suprafaţa S trece cantitatea de căldură

$$Q = -\int_S k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,d\sigma = -\int_S k(x)\nabla u(x)\cdot \nu(x)\,d\sigma = -\int_V \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))\,dx.$$

Pe de altă parte, dacă există o sursă de căldură distribuită pe Ω, cu densitatea $f_0(x)$ în punctul $x \in \Omega$, atunci ea produce în elementul de volum V cantitatea de căldură $\displaystyle\int_V f_0(x)\,dx$. Făcând bilanţul energetic, rezultă că

$$-\int_V \operatorname{div}\,(k(x)\nabla u(x))\,dx = \int_V f_0(x)\,dx.$$

Cum volumul V centrat în x a fost ales arbitrar, se obţine ecuaţia punctuală

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{6.2}$$

Aceasta este *ecuaţia câmpului termic staţionar*.

În cazul particular al unui solid izotropic Ω avem $k(x) \equiv k =$ constant în Ω, prin urmare

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = \operatorname{div}(k\nabla u(x)) = k\operatorname{div}(\nabla u)(x) = k\Delta u(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

iar ecuaţia (6.2) se reduce la ecuaţia lui POISSON

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.3}$$

where $f(x) = \dfrac{f_0(x)}{k}$, $x \in \Omega$.

Acestui model îi putem asocia una din următoarele condiţii la frontieră:

a) Dacă în fiecare punct al frontierei corpului se menţine o temperatură definită printr-o funcţie φ, cu alte cuvinte, dacă se cunoaşte temperatura $\varphi(x)$ în fiecare punct $x \in \partial\Omega$, atunci ecuaţiei (6.3) i se asociază condiţia la limită de tip DIRICHLET:

$$u(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{6.4}$$

şi relaţiile (6.3) şi (6.4) formează o problemă la limită de tip DIRICHLET.

b) Dacă este cunoscut fluxul de căldură g prin frontiera corpului, adică dacă fluxul de căldură prin frontiera $\partial\Omega$ în punctul $x \in \partial\Omega$ este egal cu $g(x)$, atunci avem o condiţie la limită de tip NEUMANN:

$$-k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{6.5}$$

În acest caz (6.3) şi (6.5) formează, desigur, o problemă la limită de tip NEUMANN. În particular, dacă suprafaţa $\partial\Omega$ a corpului este *izolată termic*, ceea ce înseamnă că nu există un flux de căldură prin suprafaţă, obţinem o condiţie la frontieră NEUMANN omogenă:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

c) Dacă prin frontiera $\partial\Omega$ are loc un schimb de căldură conform legii lui NEWTON, care afirmă că fluxul de căldură printr-o suprafaţă este proporţional cu diferenţa de temperatură dintre suprafaţă şi mediul înconjurător:

$$q(x) = \gamma(u(x) - u^\circ), \quad x \in \partial\Omega,$$

unde $q(x)$ notează fluxul de căldură prin punctul $x \in \partial\Omega$, u° este temperatura mediului ambiant, iar γ este constanta de proporţionalitate, atunci, conform legii lui FOURIER (6.1),

$$-k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \gamma(u(x) - u^\circ), \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

adică

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -h(x)(u(x) - u^\circ), \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{6.6}$$

unde $h(x) = \dfrac{\gamma}{k(x)}$ este coeficientul de transfer în punctul $x \in \partial\Omega$. Ecuaţia (6.3) şi condiţia (6.6) formează o problemă la limită de tip ROBIN.

6.2. Ecuaţia staţionară a difuziei

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un mediu tridimensional în care are loc difuzia unui gaz. Notăm prin $u(x)$ concentraţia substanţei difuzate în punctul $x \in \Omega$. Conform primei legi a lui FICK, cantitatea de substanţă care traversează suprafaţa $S \subset \Omega$ este

$$q(x) = -D(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -D(x)\nabla u(x) \cdot \nu(x), \quad x \in S, \tag{6.7}$$

unde $\nu(x)$ este versorul normalei exterioare la S în punctul $x \in S$, iar $D(x)$ notează coeficientul de difuzie (difuzivitatea) gazului în punctul $x \in S$. Procedând ca în secţiunea anterioară, deducem că funcţia u verifică ecuaţia

$$-\operatorname{div}(D(x)\nabla u(x)) = f_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.8}$$

unde f_0 este densitatea surselor interne de gaz. Ecuaţia (6.8) se numeşte *ecuaţia staţionară a difuziei.*

Dacă $D(x) = D \equiv$ constant, atunci ecuaţia (6.8) se reduce la ecuaţia POISSON

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

unde $f(x) = \dfrac{f_0(x)}{D}$, $x \in \Omega$.

Facem observaţia că modelul difuziei îşi găseşte aplicaţii şi în afara fizicii. Aceeaşi ecuaţie (6.8) poate fi folosită pentru a modela şi difuzia unei populaţii biologice de densitate $u(x)$ într-un habitat Ω. În această situaţie, de exemplu, condiţia DIRICHLET omogenă

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

semnifică faptul că frontiera habitatului este inospitalieră, iar condiţia NEUMANN omogenă

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

indică absenţa migraţiei transfrontaliere.

6.3. Potenţialul gravitaţional

Se consideră două particule de mase $m, M > 0$, plasate în punctele P şi, respectiv, Q, astfel încât distanţa $PQ = r > 0$.

Conform legii atracţiei universale a lui Newton, forţa de atracţie gravitaţională este proporţională cu produsul maselor celor două particule şi invers proporţională cu pătratul distanţei PQ, adică $F = \dfrac{kmM}{r^2}$, unde k este constanta atracţiei gravitaţionale. Se obişnuieşte în teoria potenţialului să se rescaleze forţa (să se schimbe unitatea de măsură a forţei) astfel încât $k = 1$; în acest caz $F = \dfrac{mM}{r^2}$.

Dacă $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$, atunci forţa pe unitatea de masă în punctul Q datorată masei m din punctul P se exprimă ca

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}\vec{r} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right);$$

aceasta se numeşte intensitatea câmpului gravitaţional de forţe.

Presupunem că o particulă cu masa unitate se deplasează de la infinit în Q datorită atracţiei exercitate de particula de masă m din punctul P. Lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ este

$$\int_\infty^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\infty^r \nabla\left(\frac{m}{r}\right) d\vec{r} = \frac{m}{r}.$$

Acesta se numeşte potenţialul în punctul Q datorat particulei din P. Notând $V = -\dfrac{m}{r}$, intensitatea câmpului gravitaţional de forţe în punctul P se rescrie

$$\vec{F} = \nabla\left(\frac{m}{r}\right) = -\nabla V.$$

Să considerăm acum mai multe particule de mase $m_1, m_2, \dots, m_n$, aflate la distanţele $r_1, r_2, \dots,$ respectiv r_n de punctul Q. Atunci forţa de atracţie pe unitatea de masă în punctul Q datorată acestui sistem de particule este

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \nabla\left(\frac{m_j}{r_j}\right) = \nabla\left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_j}\right).$$

Lucrul mecanic efectuat de aceste forţe asupra unei particule de masă unitate este

$$\int_\infty^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_j} = -V.$$

Prin urmare, potenţialul satisface ecuaţia

$$\Delta V = -\Delta\left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_j}\right) = -\sum_{j=1}^n \Delta\left(\frac{m_j}{r_j}\right) = 0, \quad r_j \neq 0.$$

În cazul unei distribuţii continue de masă de densitate ρ într-un volum Ω, vom avea

$$V(x, y, z) = \iiint_\Omega \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} dv,$$

unde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ şi punctul Q se presupune exterior corpului. Urmează că

$$\Delta V = 0.$$

Aceasta este ecuaţia lui Laplace sau *ecuaţia potenţialului.* Ea apare şi în probleme legate de potenţiale electrostatice, potenţiale în hidrodinamică şi potenţiale armonice în teoria elasticităţii.

6.4. Câmpul electric staţionar

Fie un corp încărcat electric Ω şi notăm prin $E(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$ câmpul electric în punctul $x \in \Omega$, care este un vector tridimensional.

Potenţialul Φ al câmpului electric E verifică ecuaţia

$$E(x) = -\nabla\Phi(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{6.9}$$

Dacă în domeniul Ω avem o sarcină electrică având în punctul $x \in \Omega$ densitatea $\rho(x)$, atunci

$$\operatorname{div} E(x) = \rho(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{6.10}$$

Într-adevăr, conform legii lui Gauss din electrodinamică, fluxul câmpului electric E printr-o suprafaţă închisă S este egal cu sarcina totală din volumul V mărginit de suprafaţa S ($\partial V = S$), adică

$$\int_S E(x) \cdot \nu(x)\, d\sigma = \int_V \rho(x)\, dx.$$

Dar, din teorema lui Gauss-Ostrogradski,

$$\int_S E(x) \cdot \nu(x)\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} E(x)\, dx$$

şi, prin urmare,

$$\int_V \operatorname{div}\, E(x)\, dx = \int_V \rho(x)\, dx$$

pentru fiecare volum $V \subset \Omega$. Prin trecere la limită rezultă că

$$\lim_{m(V)\to 0} \frac{1}{m(V)} \int_V \operatorname{div}\, E(x)\, dx = \lim_{m(V)\to 0} \frac{1}{m(V)} \int_V \rho(x)\, dx,$$

de unde se obţine ecuaţia (6.10).

Deoarece $\operatorname{div}(\nabla\Phi) = \Delta\Phi$, din relaţiile (6.9) şi (6.10) deducem că Φ verifică ecuaţia Poisson

$$\Delta\Phi(x) = -\rho(x), \ \forall x \in \Omega.$$

În absenţa surselor de sarcini electrice în domeniul Ω, funcţia Φ satisface ecuaţia lui Laplace

$$\Delta\Phi(x) = 0, \ \forall x \in \Omega.$$

6.5. Curgerea potenţială a unui fluid

Presupunem că un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este umplut cu un fluid incompresibil caracterizat în fiecare punct $x \in \Omega$ de vectorul viteză $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$. În anumite condiţii câmpul vitezelor este un câmp vectorial potenţial, adică

$$v(x) = -\nabla\Phi(x), x \in \Omega, \tag{6.11}$$

unde Φ este o funcţie numită potenţialul vitezelor. De exemplu, curgerea fluidelor în medii poroase satisface această proprietate, ecuaţia (6.11) exprimând legea lui Darcy.

Dacă nu există alte surse de fluid, conform ecuaţiei de continuitate avem

$$\operatorname{div} v(x) = 0, \ \forall x \in \Omega,$$

prin urmare potenţialul Φ verifică ecuaţia lui Laplace

$$\Delta\Phi(x) = 0, \ x \in \Omega.$$

6.6. Configuraţii de echilibru pentru membrane elastice

Fie o membrană elastică omogenă, cu densitatea constantă, fixată pe frontiera $\partial\Omega$ a unui domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, asupra căreia acţionează o forţă externă verticală, care are în punctul $x \in \Omega$ densitatea $f(x)$. Configuraţia de echilibru a membranei este descrisă de problema DIRICHLET

$$\begin{cases} \mu\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.12}$$

unde $u(x)$ notează amplitudinea (deplasarea) membranei în punctul $x \in \Omega$, iar μ este o constantă. Dacă membrana are frontiera liberă, atunci condiţia DIRICHLET $(6.12)_2$ se înlocuieşte cu condiţia NEUMANN

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

CAPITOLUL 7

Metoda separării variabilelor pentru ecuaţia lui Laplace

Cursul 10

Pe anumite domenii simple problemele la limită pentru ecuaţia lui LAPLACE pot fi rezolvate prin metoda separării variabilelor. Aceasta este, din punct de vedere istoric, cea mai veche metodă folosită sistematic pentru rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale. Se pare că Daniel BERNOULLI a fost primul care a utiliza-t-o, în jurul anului 1750, în încercarea de a rezolva ecuaţia undelor, dar Jean Baptiste Joseph FOURIER este cel care a fundamentat-o, jumătate de secol mai târziu, şi a folosit-o pentru rezolvarea ecuaţiei căldurii. De aceea această metodă este cunoscută şi sub numele de *metoda lui* FOURIER. Lucrarea lui FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, publicată în 1822 în *Les Mémoires de l'Académie des Sciences*, este unul dintre primele exemple de aplicare a analizei matematice în fizică.

La baza metodei separării variabilelor se află ideea căutării unei soluţii pentru ecuaţia cu derivate parţiale în care variabilele să fie separate (de exemplu, $u(x,y) = X(x) + Y(y)$, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ etc.), ceea ce permite înlocuirea ecuaţiei cu derivate parţiale cu un set de ecuaţii diferenţiale ordinare; în final soluţia problemei la limită (sau mixte) se reprezintă sub forma unei serii trigonometrice.

Pentru a putea aplica unei probleme metoda separării variabilelor, aceasta trebuie să satisfacă anumite condiţii. În primul rând, problema trebuie să fie *liniară* şi anumite părţi ale sale (ecuaţia cu derivate parţiale sau o parte dintre condiţiile la limită) să fie *omogene*. Acest lucru permite aplicarea principiului superpoziţiei pentru a construi soluţia generală ca o combinaţie liniară a unor soluţii fundamentale.

În al doilea rând, *domeniul* în care este enunţată problema trebuie să fie unul particular, astfel încât, după alegerea unui sistem de coordonate convenabil, variabilele să poată fi separate. Pentru ecuaţia lui LAPLACE cele mai cunoscute sisteme de coordonate din plan ($\mathbb{R}^2$) şi spaţiu ($\mathbb{R}^3$) în care se poate efectua separarea variabilelor sunt coordonatele carteziene (rectangulare), polare în plan, sferice şi cilindrice.

7.1. Problema lui Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe un dreptunghi

Fie $a, b > 0$. Ne propunem să rezolvăm problema la limită (Figura 1):

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x), & x \in (0,a) \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = \varphi(y), & y \in (0,b), \end{cases} \tag{7.1}$$

unde $f, g \in C^1([0,a])$, $h, \varphi \in C^1([0,b])$ sunt funcţii date.

Pentru a aplica metoda separării variabilelor avem nevoie de *condiţii la frontieră omogene (nule) pe două laturi opuse ale frontierei*. Descompunem problema (7.1) în două subprobleme. Astfel, observăm că soluţia problemei (7.1) poate fi scrisă, conform principiului superpoziţiei, ca suma $u = u_1 + u_2$, unde u_1 şi u_2 sunt soluţiile problemelor:

$$\begin{cases} \Delta u_1(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_1(x,0) = f(x),\ u_1(x,b) = g(x), & x \in (0,a) \\ u_1(0,y) = u_1(a,y) = 0, & y \in (0,b) \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \Delta u_2(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_2(x,0) = u_2(x,b) = 0, & x \in (0,a) \\ u_2(0,y) = h(y),\ u_2(a,y) = \varphi(y), & y \in (0,b). \end{cases}$$

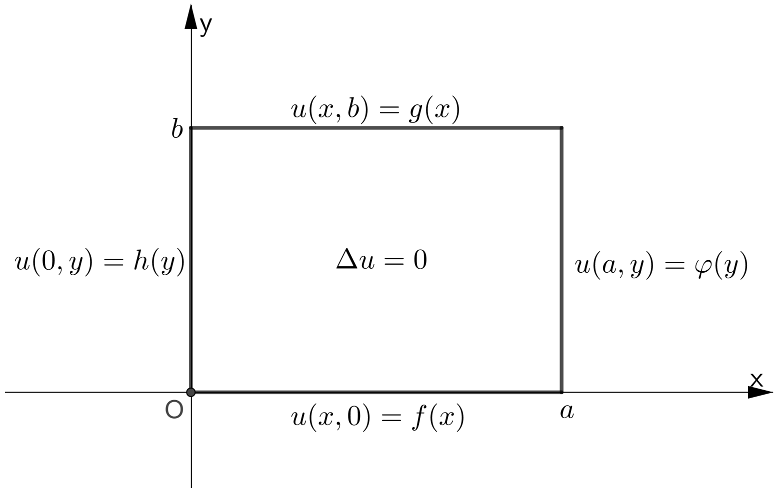

FIGURA 1

Deoarece cele două probleme se rezolvă asemănător, prezentăm doar soluţia primei probleme. Pentru simplitate, renotăm u_1 cu u. Aşadar, în continuare rezolvăm problema la limită (Figura 2):

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x), & x \in [0,a] \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & y \in [0,b], \end{array}\right. \tag{7.2}$$

unde $f, g \in C^1([0,a])$, cu $f(0) = f(a) = 0$, $g(0) = g(a) = 0$ sunt funcţii cunoscute.

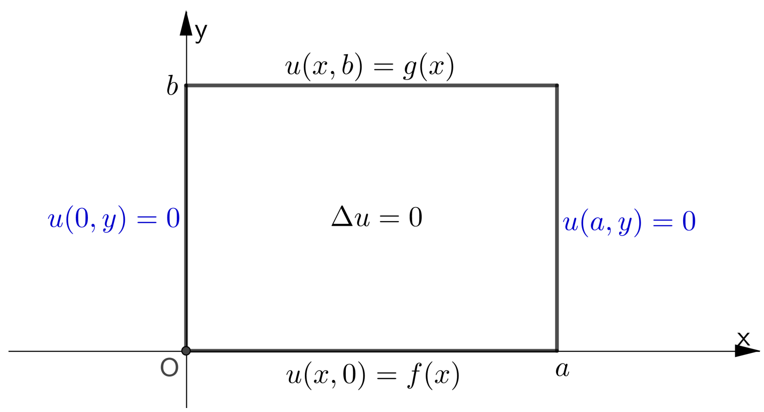

FIGURA 2

Pentru început, căutăm o soluţie a problemei (7.2) cu variabile separate, de forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b). \tag{7.3}$$

Facem observaţia că dacă măcar una din funcţiile f şi g nu este funcţia nulă, atunci u nu poate fi funcţia identic nulă, deoarece n-ar putea satisface condiţia la frontieră $u(x,0) = f(x)$, pentru $x \in [0,a]$ sau $u(x,b) = g(x)$, pentru $x \in [0,a]$. Prin urmare, X nu este funcţia nulă pe $(0,a)$ şi nici Y nu este funcţia nulă pe $(0,b)$.

Înlocuim u dat de (7.3) în ecuaţia lui Laplace,

$$\Delta u(x,y) = 0,\ x \in (0,a),\ y \in (0,b) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,\ x \in (0,a),\ y \in (0,b)$$

şi obţinem

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Leftrightarrow -X''(x)Y(y) = X(x)Y''(y) \mid : X(x)Y(y) \not\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b). \tag{7.4}$$

Deoarece membrul stâng al ecuaţiei (7.4) depinde numai de variabila x şi nu de y, în vreme ce membrul drept al aceleiaşi ecuaţii depinde numai de variabila y şi nu de x, rezultă că ambii membri sunt constanţi:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),$$

unde λ este o constantă reală. Am obţinut, astfel, că funcţiile X şi, respectiv, Y verifică ecuaţiile diferenţiale ordinare:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,a); \tag{7.5}$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad y \in (0,b). \tag{7.6}$$

Mai departe, obligăm funcţia u dată de (7.3) să verifice condiţiile la frontieră *nule* pe două laturi *opuse* ale domeniului.

Din $u(0,y) = 0$ pentru $y \in [0,b]$ rezultă, făcând $x = 0$ în relaţia (7.3), că $X(0)Y(y) = 0$, pentru orice $y \in [0,b]$. Cum Y nu este funcţia constantă nulă pe $(0,b)$, rezultă că $X(0) = 0$.

Analog, din $u(a,y) = 0$ pentru $y \in [0,b]$ rezultă, luând $x = a$ în relaţia (7.3), că $X(a)Y(y) = 0$, pentru orice $y \in [0,b]$. Întrucât Y nu este funcţia constantă nulă pe $(0,b)$, rezultă că $X(a) = 0$.

Aşadar, funcţia X verifică problema Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Problema (7.7) admite soluţii nenule pentru

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{7.8}$$

şi aceste soluţii sunt:

$$C_k \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ k \in \mathbb{N}^*, \tag{7.9}$$

unde C_k sunt constante reale nenule. Valorile λ_k, unde $k \in \mathbb{N}^*$, se numesc *autovalorile*, iar soluţiile (7.9) corespunzătoare lor, *autofuncţiile problemei* Sturm-Liouville (7.7). Facem observaţia că, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, soluţiile problemei (7.7) corespunzătoare lui λ_k formează un spaţiu liniar de dimensiune unu,

$$\left\{ C_k \sin\frac{k\pi x}{a} \;\middle|\; C_k \in \mathbb{R} \right\},$$

generat de $\left\{\sin\frac{k\pi x}{a}\right\}$.

Pentru simplitate, luăm

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{7.10}$$

Înlocuind λ_k din (7.8) în ecuaţia (7.6), aceasta se transformă în:

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \quad y \in (0,b)\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Aceasta este o ecuaţie diferentţială de ordinul al doilea liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi. Pentru a o rezolva îi asociem ecuaţia caracteristică $r^2 - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 = 0$, care are rădăcinile reale distincte $r_{1,2} = \pm\frac{k\pi}{a}$. Prin urmare, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia în Y_k este $\left\{e^{\frac{k\pi y}{a}}, e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right\}$, iar soluţia generală a acestei ecuaţii,

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}, \quad y \in (0,b),\ k \in \mathbb{N}^*, \tag{7.11}$$

unde A_k, B_k sunt constante, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

Înlocuind X_k din (7.10) şi Y_k din (7.11) în formula (7.3), obţinem

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ k \in \mathbb{N}^*,$$

unde A_k, B_k sunt constante, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru a verifica cele două condiţii la frontieră rămase, căutăm în continuare soluţia problemei (7.2) sub forma unei serii:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b), \tag{7.12}$$

unde A_k, B_k sunt constante, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

Să remarcăm că, deoarece toate funcţiile u_k, $k \in \mathbb{N}^*$ satisfac:

$$\begin{cases} \Delta u_k(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u_k(0,y) = u_k(a,y) = 0, & y \in [0,b], \end{cases}$$

şi funcţia u va satisface:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b) \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & y \in [0,b]. \end{cases}$$

Vom afla constantele A_k, B_k, $k \in \mathbb{N}^*$ din condiţiile la frontieră încă nefolosite:

$$u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x), \quad x \in [0,a].$$

Mai întâi, făcând $y = 0$ în (7.12), obţinem:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{a}\left(A_k e^0 + B_k e^0\right), \quad x \in [0,a],$$

adică

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k)\sin\frac{k\pi x}{a}, \quad x \in [0,a].$$

Înmulţind această relaţie cu $\sin\frac{n\pi x}{a}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixat, şi integrând de la 0 la a în raport cu x, rezultă că:

$$\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{k\pi x}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a (A_k+B_k)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left((A_k+B_k)\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right). \tag{7.13}$$

Dar

$$\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă } k \neq n \\ \frac{a}{2}, \text{ dacă } k = n, \end{cases}$$

(cu alte cuvinte, $\left\{\sin\frac{k\pi x}{a}\ \middle|\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ este un sistem ortogonal). Prin urmare relaţia (7.13) se rescrie:

$$\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = (A_n + B_n)\frac{a}{2},$$

de unde

$$A_n + B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Dar $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, aşadar, renotând n cu k, avem

$$A_k + B_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{7.14}$$

Mai departe, făcând $y = b$ în (7.12), obţinem:

$$g(x) = u(x,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right), \quad x \in [0,a].$$

Înmulţind şi această relaţie cu $\sin\dfrac{n\pi x}{a}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixat, şi integrând de la 0 la a în raport cu x, rezultă că:

$$\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \int_0^a \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a \left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx\right). \tag{7.15}$$

Folosind din nou proprietatea de ortogonalitate pentru $\sin\frac{k\pi x}{a}$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că relaţia (7.15) se rescrie:

$$\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = \left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\frac{a}{2},$$

de unde

$$A_n e^{\frac{n\pi b}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Dar $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, aşadar, renotând n cu k, avem

$$A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{7.16}$$

Acum rezolvăm sistemul algebric liniar (7.14), (7.16):

$$\begin{cases} A_k + B_k = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \\ A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_k = -A_k + \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \\ A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + \left(-A_k + \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\right)e^{-\frac{k\pi b}{a}} = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B_k = -A_k + \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \\ A_k\left(e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right) + \dfrac{2e^{-\frac{k\pi b}{a}}}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx \end{cases}$$

$$(7.17) \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = \dfrac{2}{a\left(e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)} \left(\displaystyle\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\right) \\ B_k = \dfrac{2}{a\left(e^{-\frac{k\pi b}{a}} - e^{\frac{k\pi b}{a}}\right)} \left(\displaystyle\int_0^a g(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx - e^{\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx\right), \end{cases}$$

pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

În final, înlocuim A_k, B_k din (7.17) în relaţia (7.12) şi avem soluţia problemei la limită (7.2):

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\left(\frac{e^{\frac{k\pi y}{a}}}{e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}}\left(\int_0^a g(z)\sin\frac{k\pi z}{a}\,dz - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a f(z)\sin\frac{k\pi z}{a}\,dz\right)\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\frac{k\pi y}{a}}}{e^{-\frac{k\pi b}{a}} - e^{\frac{k\pi b}{a}}}\left(\int_0^a g(z)\sin\frac{k\pi z}{a}\,dz - e^{\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a f(z)\sin\frac{k\pi z}{a}\,dz\right)\right), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b).$$

7.2. Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson pe un dreptunghi

Pe domenii simple, soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson poate fi obţinută cu ajutorul soluţiei problemei Dirichlet corespuzătoare pentru ecuaţia lui Laplace.

Astfel, fie problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson într-un domeniu bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Soluţia ecuaţiei lui Poisson $\Delta u(x,y) = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$ poate fi scrisă ca $u = v + w$, unde v este o soluţie particulară a ecuaţiei lui Poisson, iar w este soluţia ecuaţiei omogene asociate, care este exact ecuaţia lui Laplace; altfel spus, $\Delta w(x,y) = 0$, $\Delta v(x,y) = f(x,y)$, pentru $(x,y) \in \Omega$. Dacă putem calcula v, atunci w va fi soluţia problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ w(x,y) = -v(x,y) + \varphi(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

De obicei, atunci când f este un polinom de gradul n se caută v ca un polinom de grad $n+2$ cu coeficienţi nedeterminaţi (urmând să-i determinăm în mod convenabil).

Exemplul 7.2.1. *Să se rezolve problema:*

$$(7.18) \qquad \begin{cases} \Delta u(x,y) = -2, & x \in (0,a),\ y \in (0,b), \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = 0, & x \in [0,a] \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & y \in [0,b]. \end{cases}$$

Fie $u = v + w$, unde v se caută de forma $v(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$, cu A, B, C, D, E, F constante reale. Înlocuind v în ecuaţia Poisson $(7.18)_1$, obţinem

$$-2 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(B + 2Dx + Ey) + \frac{\partial}{\partial y}(C + Ex + 2Fy) = 2D + 2F.$$

Cel mai simplu mod de a satisface relaţia $2D + 2F = -2 \Leftrightarrow D + F = -1$ este să alegem $D = -1$ şi $F = 0$. Restul coeficienţilor sunt arbitrari şi, pentru simplitate, îi luăm pe toţi zero, cu excepţia lui B; alegem $B = a$, deci $v(x,y) = ax - x^2$. În acest mod v se anulează pe laturile $x = 0$ şi $x = a$, astfel încât condiţiile la limită omogene (nule) pe aceste laturi vor fi conservate.

Atunci $w = u - v$ verifică problema Dirichlet pentru ecuaţia Laplace:

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = \Delta u(x,y) - \Delta v(x,y) = -2 - (-2) = 0, & x \in (0,a),\ y \in (0,b), \\ w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 0 - (ax - x^2) = -(ax - x^2), & x \in [0,a] \\ w(x,b) = u(x,b) - v(x,b) = 0 - (ax - x^2) = -(ax - x^2), & x \in [0,a] \\ w(0,y) = u(0,y) - v(0,y) = 0 - 0 = 0, & y \in [0,b] \\ w(a,y) = u(a,y) - v(a,y) = 0 - 0 = 0, & y \in [0,b], \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0, & x \in (0,a),\ y \in (0,b), \\ w(x,0) = w(x,b) = x^2 - ax, & x \in [0,a] \\ w(0,y) = w(a,y) = 0, & y \in [0,b]. \end{cases}$$

Ca în secţiunea 7.1, se obţine că funcţia care verifică

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0, & x \in (0,a),\ y \in (0,b), \\ w(0,y) = w(a,y) = 0, & y \in [0,b] \end{cases}$$

este

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),$$

unde A_k, B_k sunt constante reale, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

Cerând ca w să satisfacă condiţiile la frontieră neomogene

$$\begin{aligned} w(x,0) = x^2 - ax &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi x}{a}, \\ w(x,b) = x^2 - ax &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \end{aligned}$$

obţinem, conform relaţiei (7.17),

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2}{a\left(e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)} \left(\displaystyle\int_0^a g(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx - e^{-\frac{k\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx \right) \\ B_k = \dfrac{2}{a\left(e^{-\frac{k\pi b}{a}} - e^{\frac{k\pi b}{a}}\right)} \left(\displaystyle\int_0^a g(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx - e^{\frac{k\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx \right), \end{cases}$$

pentru $k \in \mathbb{N}^*$, unde $f(x) = g(x) = x^2 - ax$, pentru $x \in [0,a]$. Altfel spus,

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2\left(1 - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)}{a\left(e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)} \displaystyle\int_0^a (x^2 - ax) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx \\ B_k = \dfrac{2\left(1 - e^{\frac{k\pi b}{a}}\right)}{a\left(e^{-\frac{k\pi b}{a}} - e^{\frac{k\pi b}{a}}\right)} \displaystyle\int_0^a (x^2 - ax) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx. \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Cum, pentru $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^a (x^2 - ax) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx &= -\frac{a}{k\pi} \int_0^a (x^2 - ax) \left(\cos \frac{k\pi x}{a} \right)' dx \\ &= -\frac{a}{k\pi} \left((x^2 - ax) \cos \frac{k\pi x}{a} \Big|_0^a - \int_0^a (2x - a) \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx \right) \\ &= \left(\frac{a}{k\pi} \right)^2 \int_0^a (2x - a) \left(\sin \frac{k\pi x}{a} \right)' dx \\ &= \left(\frac{a}{k\pi} \right)^2 \left((2x - a) \sin \frac{k\pi x}{a} \Big|_0^a - \int_0^a 2 \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{a}{k\pi} \right)^3 \cos \frac{k\pi x}{a} \Big|_0^a = 2 \left(\frac{a}{k\pi} \right)^3 (\cos k\pi - 1), \end{aligned}$$

adică

$$\int_0^a (x^2 - ax) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k \text{ par} \\ -\dfrac{4a^3}{\pi^3 k^3}, & \text{pentru } k \text{ impar}, \end{cases}$$

rezultă că $A_k = B_k = 0$ pentru k par, iar pentru k impar,

$$\begin{cases} A_k = -\dfrac{8a^2}{\pi^3 k^3}\dfrac{1-e^{-\frac{k\pi b}{a}}}{e^{\frac{k\pi b}{a}} - e^{-\frac{k\pi b}{a}}} \\ B_k = -\dfrac{8a^2}{\pi^3 k^3}\dfrac{1-e^{\frac{k\pi b}{a}}}{e^{-\frac{k\pi b}{a}} - e^{\frac{k\pi b}{a}}}. \end{cases}$$

În concluzie, soluţia problemei Dirichlet (7.18) pentru ecuaţia Poisson este

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v(x,y) + w(x,y) = ax - x^2 - \\ &- \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^3}\left(\frac{\left(1-e^{-\frac{(2p+1)\pi b}{a}}\right)e^{\frac{(2p+1)\pi y}{a}}}{e^{\frac{(2p+1)\pi b}{a}} - e^{-\frac{(2p+1)\pi b}{a}}} + \frac{\left(1-e^{\frac{(2p+1)\pi b}{a}}\right)e^{-\frac{(2p+1)\pi y}{a}}}{e^{-\frac{(2p+1)\pi b}{a}} - e^{\frac{(2p+1)\pi b}{a}}}\right)\sin\frac{(2p+1)\pi x}{a}, \end{aligned}$$

pentru $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$.

7.3. Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe un paralelipiped dreptunghic

Ne propunem să rezolvăm ecuaţia lui Laplace pe un domeniu paralelipipedic cu laturile de lungimi $a, b, c > 0$:

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z) = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c). \tag{7.19}$$

Ataşăm ecuaţiei condiţiile la frontieră de tip Dirichlet:

$$\begin{cases} u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0, & y \in [0,b],\ z \in [0,c] \\ u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0, & x \in [0,a],\ z \in [0,c] \\ u(x,y,0) = f(x,y),\ u(x,y,c) = 0, & x \in [0,a],\ y \in [0,b]. \end{cases} \tag{7.20}$$

Aplicăm metoda separării varibilelor. Căutăm, pentru început, o soluţie nenulă de forma

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c). \tag{7.21}$$

Înlocuind această funcţie în ecuaţia lui Laplace (7.19), obţinem

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c)$$

Împărţind această relaţie prin $X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0$, rezultă că

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c),$$

de unde

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)}.$$

Cum membrul stâng al acestei egalităţi depinde numai de x, în vreme ce membrul ei drept este independent de x, deducem că ambii membri sunt egali cu o constantă, adică

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda,$$

cu $\lambda \in \mathbb{R}$ constantă. Mai departe, din

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda$$

rezultă că

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda.$$

Deoarece membrul stâng al acestei egalităţi depinde de y, dar nu de z, în vreme ce membrul ei drept depinde de z, dar nu de y, rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă, adică

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = \mu,$$

unde $\mu \in \mathbb{R}$ constantă. Astfel am obţinut trei ecuaţii diferenţiale ordinare, şi anume:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, a);$$

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \quad y \in (0, b);$$

$$Z''(z) - (\lambda + \mu)Z(z) = 0, \quad z \in (0, c).$$

Acum folosim cele două perechi de condiţii la frontieră *nule* pe feţe *opuse* ale paralelipipedului. Astfel, înlocuind u din (7.21) în relaţiile $u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0$, pentru $y \in [0, b]$, $z \in [0, c]$, deducem că

$$X(0)Y(y)Z(z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0, \quad \forall y \in [0, b],\ z \in [0, c],$$

de unde, ţinând cont că $Y \not\equiv 0$ şi $Z \not\equiv 0$ (altfel $u \equiv 0$), obţinem că $X(0) = X(a) = 0$.

Analog, înlocuind u din (7.21) în relaţiile $u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0$, pentru $x \in [0, a]$, $z \in [0, c]$, deducem că

$$X(x)Y(0)Z(z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0, \quad \forall x \in [0, a],\ z \in [0, c],$$

de unde, ţinând cont că $X \not\equiv 0$ şi $Z \not\equiv 0$ (altfel $u \equiv 0$), obţinem că $Y(0) = Y(b) = 0$.

Cuplând acum condiţiile obţinute în capetele intervalelor $[0, a]$ şi $[0, b]$ cu ecuaţiile corespunzătoare, găsim:

- problema Sturm-Liouville în X:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0, a) \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}$, unde $x \in [0, a]$, $k \in \mathbb{N}^*$;

- problema Sturm-Liouville în Y:

$$\begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0, & y \in (0, b) \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}$, pentru $y \in [0, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cum, pentru $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda + \mu = \lambda_k + \mu_n = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

ecuaţia în Z se transformă în

$$Z''_{kn}(z) - \left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) Z_{kn}(z) = 0, \quad z \in (0, c),\ k, n \in \mathbb{N}^*.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi, care are ecuaţia caracteristică asociată $r^2 - \left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) = 0$, cu rădăcinile reale distincte

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Prin urmare, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială este

$$\left\{ e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z}, e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z} \right\},$$

iar soluţia ei generală,

$$Z_{kn}(y) = A_{kn} e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z} + B_{kn} e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z}, \quad z \in (0, c),\ k, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde A_{kn}, B_{kn} sunt constante reale, pentru $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Înlocuind X_k, Y_n şi Z_{kn} obţinute mai sus în formula (7.21), obţinem

$$u_{kn}(x,y,z) = X_k(x)Y_n(y)Z_{kn}(z) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}z} + B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}z}\right),$$

pentru $(x,y,z) \in (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$, unde A_{kn}, B_{kn} sunt constante reale, pentru $k,n \in \mathbb{N}^*$.

În continuare căutăm soluţia problemei la limită (7.19)-(7.20) de forma

$$\begin{aligned}(7.22)\qquad u(x,y,z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(x,y,z)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}z} + B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}z}\right),\end{aligned}$$

pentru $(x,y,z) \in (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$, unde A_{kn}, B_{kn} sunt constante reale, pentru $k,n \in \mathbb{N}^*$.

Facem observaţia că funcţia u dată prin (7.22) satisface relaţiile:

$$\begin{cases}\Delta u(x,y,z) = 0, & x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c)\\ u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0, & y \in [0,b],\ z \in [0,c]\\ u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0, & x \in [0,a],\ z \in [0,c],\end{cases}$$

deoarece fiecare funcţie u_{kn}, cu $k,n \in \mathbb{N}^*$, satisface aceste relaţii.

Rămâne să punem asupra funcţiei u condiţiile:

$$u(x,y,0) = f(x,y),\ u(x,y,c) = 0,\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],$$

din care vom afla coeficienţii A_{kn}, B_{kn}, $k,n \in \mathbb{N}^*$.

Făcând $z = 0$ în relaţia (7.22), obţinem că

$$f(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}+B_{kn}\right), \quad x \in [0,a],\ y \in [0,b].$$

Înmulţind această relaţie cu $\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$, unde $l,m \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixate, şi apoi integrând pe intervalul $[0,a]$ în raport cu x şi pe intervalul $[0,b]$ în raport cu y, rezultă că:

$$\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}+B_{kn}\right)\right)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{kn}+B_{kn}\right)\left(\int_0^a\int_0^b\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{kn}+B_{kn}\right)\left(\int_0^a\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi x}{a}\,dx\right)\left(\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dy\right),$$

care, în baza proprietăţii de ortogonalitate pentru sistemele $\left\{\sin\frac{k\pi x}{a}\ \middle|\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ şi $\left\{\sin\frac{n\pi y}{b}\ \middle|\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, conduce la:

$$\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy = \left(A_{lm}+B_{lm}\right)\frac{a}{2}\frac{b}{2}$$

sau, echivalent,

$$A_{lm}+B_{lm} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy.$$

Dar $l,m \in \mathbb{N}^*$ erau oarecare, deci

$$(7.23)\qquad A_{kn}+B_{kn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy, \quad k,n \in \mathbb{N}^*.$$

Făcând acum $z = c$ în relaţia (7.22), obţinem că

$$0 = u(x,y,c) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c} + B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}\right),$$

pentru $x \in [0,a],\ y \in [0,b]$. Înmulţind această relaţie cu $\sin\dfrac{l\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi y}{b}$, unde $l,m \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixate, şi apoi integrând pe intervalul $[0,a]$ în raport cu x şi pe intervalul $[0,b]$ în raport cu y, rezultă că:

$$\int_0^a\int_0^b 0\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left(\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left(A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}+B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}\right)\right)\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{k=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}+B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}\right)\left(\int_0^a\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{l\pi x}{a}\,dx\right)\left(\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dy\right),$$

care, în baza proprietăţii de ortogonalitate pentru sistemele $\left\{\sin\dfrac{k\pi x}{a}\ \middle|\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$ şi $\left\{\sin\dfrac{n\pi y}{b}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, conduce la:

$$\left(A_{lm}e^{\sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c}+B_{lm}e^{-\sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c}\right)\frac{a}{2}\frac{b}{2}=0,$$

adică

$$A_{lm}e^{\sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c}+B_{lm}e^{-\sqrt{\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}c}=0.$$

Cum $l,m\in\mathbb{N}^*$ erau oarecare, am obţinut, de fapt, că

$$A_{kn}e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}+B_{kn}e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}c}=0,\quad k,n\in\mathbb{N}^*$$

sau, echivalent,

(7.24)
$$B_{kn} = -A_{kn}e^{2c\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}},\quad k,n\in\mathbb{N}^*.$$

Cuplând relaţiile (7.23) şi (7.24), obţinem sistemul liniar algebric:

$$\begin{cases} A_{kn}+B_{kn} = \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \\ B_{kn} = -A_{kn}e^{2c\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}, \end{cases}$$

de unde rezultă că

(7.25)
$$A_{kn} = \frac{4}{ab\left(1-e^{2c\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}\right)}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$B_{kn} = -A_{kn}e^{2c\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}},$$

pentru $k,n\in\mathbb{N}^*$.

În concluzie, soluţia formală a problemei Dirichlet (7.19) - (7.20) pentru ecuaţia lui Laplace pe paralelipipedul $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ este

$$u(x,y,z) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}A_{kn}\left(e^{\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}z}-e^{(2c-z)\sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}\right),$$

unde coeficienţii A_{kn}, cu $k,n\in\mathbb{N}^*$, sunt daţi de formula (7.25).

Cursul 11

7.4. Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe domenii circulare

Pentru a rezolva prin metoda separării variabilelor probleme la limită pentru ecuaţia lui Laplace pe domenii circulare avem nevoie de câteva preliminarii.

7.4.1. Ecuaţii Euler. O ecuaţie diferenţială liniară de ordin n cu coeficienţi variabili de forma

$$a_0 t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t y' + a_n y = f(t), \tag{7.26}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ poartă numele de ecuaţie Euler.

Teorema 7.4.1. *Prin substituţiile* $\begin{cases} t = e^s \\ y(t) = z(s), \end{cases}$ *pentru* $t \in (0, \infty)$ *şi* $s \in \mathbb{R}$, *ecuaţia* Euler (7.26) *se transformă într-o ecuaţie diferenţială liniară de acelaşi ordin* n, *cu coeficienţi constanţi, în funcţia necunoscută* $z = z(s)$.

Demonstraţie. Observăm, mai întâi, că funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\varphi(s) = e^s$ este de clasă C^1 şi bijectivă, deci inversabilă, cu inversa $\varphi^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(t) = \ln t$, care este, la rândul ei, o funcţie de clasă C^1.

Încercăm să exprimăm primele câteva derivate ale lui y în raport cu t cu ajutorul noii funcţii z şi al derivatelor ei în noua variabilă, s. Avem:

$$t = e^s \Leftrightarrow s = \ln t \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^s} = e^{-s}$$

şi atunci, notând $\dfrac{d}{ds} = \dot{}$, $\dfrac{d^2}{ds^2} = \ddot{}$, rezultă că:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dz}{ds} \cdot e^{-s} = e^{-s} \dot{z}(s);$$

$$y''(t) = (y')'(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{dy'}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\dot{z}(s)\right) \cdot e^{-s} = \left(-e^{-s}\dot{z}(s) + e^{-s}\ddot{z}(s)\right) e^{-s} = e^{-2s}(\ddot{z}(s) - \dot{z}(s)).$$

Aceste rezultate ne sugerează să demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia:

$$P(k): \quad y^{(k)}(t) = e^{-ks}\left(c_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2k}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{kk}\frac{d^k z}{ds^k}(s)\right), \text{ pentru } k = \overline{1, n},$$

unde $c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{kk}$ sunt constante reale.

$P(1)$ este adevărată ($c_{11} = 1$). Presupunem $P(k)$ adevărată pentru un $k \in \overline{1, n-1}$ oarecare fixat şi demonstrăm:

$$P(k+1): \quad y^{(k+1)}(t) = e^{-(k+1)s}\left(c_{1,k+1}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2,k+1}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{k+1,k+1}\frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}}(s)\right),$$

unde $c_{1,k+1}, c_{2,k+1}, \ldots, c_{k+1,k+1}$ sunt constante reale. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)}(t) &= \left(y^{(k)}\right)'(t) = \frac{dy^{(k)}}{dt} = \frac{dy^{(k)}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
&\overset{P(k)}{=} \frac{d}{ds}\left(e^{-ks}\left(c_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2k}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{kk}\frac{d^k z}{ds^k}(s)\right)\right) \cdot e^{-s} \\
&= \left(-ke^{-ks}\left(c_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2k}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{kk}\frac{d^k z}{ds^k}(s)\right) + \right. \\
&\left. + e^{-ks}\left(c_{1k}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + c_{2k}\frac{d^3 z}{ds^3}(s) + \cdots + c_{k-1,k}\frac{d^k z}{ds^k}(s) + c_{kk}\frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}}(s)\right)\right) \cdot e^{-s} \\
&= e^{-(k+1)s}\left(-kc_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + (-kc_{2k} + c_{1k})\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + (-kc_{kk} + c_{k-1,k})\frac{d^k z}{ds^k}(s) + c_{kk}\frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}}(s)\right) \\
&= e^{-(k+1)s}\left(c_{1,k+1}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2,k+1}\frac{d^2 z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{k+1,k+1}\frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}}(s)\right),
\end{aligned}$$

unde $c_{1,k+1} = -kc_{1k}$, $c_{i,k+1} = -kc_{ik} + c_{i-1,k}$, cu $i \in \overline{2,k}$, $c_{k+1,k+1} = c_{kk}$ sunt, la rândul lor, constante reale. Aşadar $P(k+1)$ este adevărată.

Deoarece $P(1)$ este adevărată şi $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ pentru orice $k \in \overline{1, n-1}$, rezultă că propoziţia $P(k)$ este adevărată pentru orice $k \in \overline{1,n}$.

Acum, fiecare termen de forma $t^k a_{n-k} y^{(k)}(t)$, cu $k \in \overline{1,n}$ din ecuaţia Euler (7.26) poate fi înlocuit cu

$$(e^s)^k\, a_{n-k} e^{-ks} \left(c_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2k}\frac{d^2z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{kk}\frac{d^kz}{ds^k}(s) \right) = a_{n-k} \left(c_{1k}\frac{dz}{ds}(s) + c_{2k}\frac{d^2z}{ds^2}(s) + \cdots + c_{kk}\frac{d^kz}{ds^k}(s) \right),$$

$a_n y(t)$ se înlocuieşte cu $a_n z(s)$, iar membrul drept $f(t)$, cu $f(e^s)$. Obţinem tot o ecuaţie diferenţială liniară de ordin n, dar cu coeficienţi constanţi, în necunoscuta $z = z(s)$. ■

Desigur, dacă ecuaţia Euler este omogenă ($f \equiv 0$), ea se transformă într-o ecuaţie cu coeficienţi constanţi omogenă, iar dacă ecuaţia Euler este neomogenă ($f \not\equiv 0$), atunci ecuaţia cu coeficienţi constanţi va fi şi ea neomogenă.

După rezolvarea ecuaţiei cu coeficienţi constanţi, se revine la variabila t, amintindu-ne că $y(t) = z(s)$ şi că $s = \ln t$. Astfel obţinem soluţia generală a ecuaţiei Euler.

Observaţia 7.4.1. *În mod similar se demonstrează că, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ecuaţiile de forma*

$$(\alpha t + \beta)^n a_0 y^{(n)} + (\alpha t + \beta)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + (\alpha t + \beta) a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad \text{unde } \alpha t + \beta > 0,$$

se transformă prin substituţia $\begin{cases} \alpha t + \beta = e^s \\ y(t) = z(s) \end{cases}$ *în ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi în funcţia necunoscută $z = z(s)$.*

Exemplul 7.4.1. *Să se rezolve ecuaţia $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$, unde $t > 0$.*

Ecuaţia este de tip Euler, deoarece în fiecare termen ordinul de derivare al funcţiei necunoscute coincide cu puterea variabilei t. Facem substituţia

$$\begin{cases} t = e^s,\ s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow s = \ln t,\ t > 0 \\ y(t) = z(s) \end{cases}$$

şi rescriem y, y', y'' cu ajutorul lui z şi al derivatelor sale în raport cu noua variabilă s:

$$y(t) = z(s), \quad y'(t) = e^{-s}\dot{z}(s), \quad y''(t) = e^{-2s}(\ddot{z}(s) - \dot{z}(s)).$$

Folosind şi $t = e^s$, ecuaţia Euler se transformă în:

$$(e^s)^2 e^{-2s}(\ddot{z} - \dot{z}) + 5e^s e^{-s}\dot{z} + 4z = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} - \dot{z} + 5\dot{z} + 4z = 0 \Leftrightarrow \ddot{z} + 4\dot{z} + 4z = 0.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi. Îi asociem ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0$, care are rădăcina reală dublă $\lambda_{1,2} = -2$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei cu coeficienţi constanţi este

$$z(s) = C_1 e^{-2s} + C_2 s e^{-2s}, \quad s \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante. Deoarece $y(t) = z(s)$, $t = e^s \Leftrightarrow s = \ln t$ şi $e^{as} = (e^s)^a = t^a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei Euler este

$$y(t) = C_1 t^{-2} + C_2 (\ln t) t^{-2} = \frac{C_1 + C_2 \ln t}{t^2}, \quad t > 0,$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

7.4.2. Expresia laplaceanului în coordonate polare în plan. Pentru simplitatea calculelor, în acest paragraf vom nota derivatele parţiale cu indici scrişi în dreapta jos.

Coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct din plan şi coordonatele sale polare (r, θ) sunt legate prin relaţiile:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi). \tag{7.27}$$

Laplaceanul unei funcţii u de clasă C^2, depinzând de două variabile, este dat în coordonate carteziene prin formula

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y). \tag{7.28}$$

Dorim să obţinem forma laplaceanului dupa schimbarea de variabile (7.27).

Din (7.27) rezultă că

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2, \quad \frac{y}{x} = \text{tg } \theta,$$

de unde găsim relaţiile:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \ \theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}. \tag{7.29}$$

Prin regula de derivare a funcţiilor compuse rezultă că:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x,\\
u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y;\\
u_{xx} &= (u_x)_x = (u_r r_x)_x + (u_\theta\theta_x)_x = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta\theta_{xx}\\
&= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x)\, r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\,\theta_x + u_\theta\theta_{xx},\\
u_{yy} &= (u_y)_y = (u_r r_y)_y + (u_\theta\theta_y)_y = (u_r)_y r_y + u_r r_{yy} + (u_\theta)_y \theta_y + u_\theta\theta_{yy}\\
&= (u_{rr} r_y + u_{r\theta}\theta_y)\, r_y + u_r r_{yy} + (u_{\theta r} r_y + u_{\theta\theta}\theta_y)\,\theta_y + u_\theta\theta_{yy}.
\end{aligned}$$

Derivând parţial relaţiile (7.29), rezultă că:

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2};$$

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{r^2-x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = (-y)\left(-2r^{-3} r_x\right) = \frac{2xy}{r^4};$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}, \quad \theta_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2};$$

$$r_{yy} = \frac{r - y r_y}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} = \frac{r^2-y^2}{r^3} = \frac{x^2}{r^3}, \quad \theta_{yy} = x\left(-2r^{-3} r_y\right) = -\frac{2xy}{r^4}.$$

Acum înlocuim aceste relaţii în formulele lui u_{xx} şi u_{yy} de mai sus; ne amintim că u este o funcţie de clasă C^2, ceea ce implică $u_{r\theta} = u_{\theta r}$. Obţinem

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \left(\frac{x}{r}u_{rr} - \frac{y}{r^2}u_{r\theta}\right)\frac{x}{r} + \frac{y^2}{r^3}u_r + \left(\frac{x}{r}u_{r\theta} - \frac{y}{r^2}u_{\theta\theta}\right)\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{2xy}{r^4}u_\theta\\
&= \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - \frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r - \frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{2xy}{r^4}u_\theta\\
&= \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r + \frac{2xy}{r^4}u_\theta;\\
u_{yy} &= \left(\frac{y}{r}u_{rr} + \frac{x}{r^2}u_{r\theta}\right)\frac{y}{r} + \frac{x^2}{r^3}u_r + \left(\frac{y}{r}u_{r\theta} + \frac{x}{r^2}u_{\theta\theta}\right)\frac{x}{r^2} - \frac{2xy}{r^4}u_\theta\\
&= \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + \frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r + \frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} - \frac{2xy}{r^4}u_\theta\\
&= \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r - \frac{2xy}{r^4}u_\theta.
\end{aligned}$$

În final adunăm ultimele două relaţii şi concluzionăm că

$$u_{xx} + u_{yy} = \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right)u_{rr} + \left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4}\right)u_{\theta\theta} + \left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3}\right)u_r = \frac{r^2}{r^2}u_{rr} + \frac{r^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{r^2}{r^3}u_r,$$

adică expresia laplaceanului în coordonate polare este:

$$\Delta u(r,\theta) = u_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}u_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(r,\theta), \quad \text{pentru } r \in (0,\infty),\ \theta \in [0, 2\pi).$$

7.4.3. Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe discul de rază $a > 0$. Ne propunem să rezolvăm prin metoda separării variabilelor problema DIRICHLET:

$$\text{(7.30)}\qquad \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega = B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < a^2\} \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega = \partial B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = a^2\}, \end{cases}$$

unde g este o funcţie dată, continuă pe cercul $\partial\Omega$.

Datorită formei particulare a domeniului Ω, este convenabil să rescriem problema în coordonate polare în plan:

$$\text{(7.31)}\qquad \begin{cases} \Delta u(r,\theta) = u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & r \in (0,a),\ \theta \in \mathbb{R} \\ u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta), & r \in (0,a),\ \theta \in \mathbb{R} \\ u(a,\theta) = f(\theta), & \theta \in [0,2\pi), \end{cases}$$

unde funcţia $f(\theta) = g(a\cos\theta, a\sin\theta)$ este continuă, nenulă şi periodică, de perioadă 2π.

Condiţiile de periodicitate $(7.31)_2$ sunt naturale, deoarece coordonatele polare (r,θ) şi $(r,\theta+2\pi)$ corespund aceluiaşi punct din plan, prin urmare funcţia u trebuie să ia în ele aceeaşi valoare.

Căutăm, pentru început, o soluţie neidentic nulă a problemei $(7.31)_1$–$(7.31)_2$ cu variabile separate, de forma

$$\text{(7.32)}\qquad u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \not\equiv 0.$$

Din condiţia ca funcţia u dată de relaţia (7.32) să verifice ecuaţia lui LAPLACE $(7.31)_1$ rezultă că

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0 \Leftrightarrow (r^2R''(r) + rR'(r))\Theta(\theta) = -R(r)\Theta''(\theta)\ \Big|\ : R(r)\Theta(\theta) \not\equiv 0$$

$$\text{(7.33)}\qquad \Rightarrow \frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}, \quad r \in (0,a),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Cum membrul stâng al relaţiei (7.33) depinde de variabila r, dar nu de θ, în vreme ce membrul drept depinde de variabila θ, dar nu de r, pentru a avea egalitate în orice (r,θ) rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă reală λ:

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}, \quad r \in (0,a),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Am găsit astfel ecuaţiile diferenţiale:

$$\text{(7.34)}\qquad r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad r \in (0,a)$$

$$\text{(7.35)}\qquad \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind pe u dat de (7.32) în condiţia de periodicitate $(7.31)_2$, obţinem

$$R(r)\Theta(\theta+2\pi) = R(r)\Theta(\theta),\ r \in (0,a),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Cum R nu poate fi funcţia identic nulă (pentru că ar rezulta $u \equiv 0$), deducem că Θ trebuie să fie o funcţie periodică, de perioadă 2π:

$$\text{(7.36)}\qquad \Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, conform relaţiilor (7.35) şi (7.36), funcţia Θ verifică problema STURM-LIOUVILLE periodică:

$$\text{(7.37)}\qquad \begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, & \theta \in \mathbb{R} \\ \Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta), & \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dorim să determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât această problemă să admită soluţii nenule (pentru că dacă $\Theta \equiv 0$, atunci $u \equiv 0$). Cum (7.35) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi, îi asociem ecuaţia caracteristică:

$$\text{(7.38)}\qquad \alpha^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = -\lambda.$$

Avem de discutat trei cazuri: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ şi $\lambda > 0$.

I. Dacă $\lambda < 0$, atunci ecuaţia (7.38) are rădăcinile reale distincte $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, prin urmare soluţiile neidentic nule ale ecuaţiei $(7.37)_1$ sunt

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

unde c_1, c_2 sunt constante reale, nu ambele zero. O astfel de funcţie nu convine, deoarece nu este periodică.

II. Dacă $\lambda = 0$, ecuaţia diferenţială $(7.37)_1$ devine $\Theta''(\theta) = 0$ şi are soluţiile nenule

$$\Theta(\theta) = c_3 + c_4\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

unde c_3, c_4 sunt constante reale, nu ambele nule. Cerând funcţiei Θ să verifice condiţia de periodicitate $(7.37)_2$, obţinem

$$c_3 + c_4(\theta + 2\pi) = c_3 + c_4\theta,\ \theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\pi c_4 = 0 \Leftrightarrow c_4 = 0.$$

Aşadar $\lambda_0 = 0$ este autovaloare pentru problema Sturm-Liouville (7.37) şi autofuncţiile corespunzătoare ei sunt constantele nenule. Spaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_0 = 0$ este un spaţiu liniar real unidimensional, generat de funcţia constantă 1.

III. Dacă $\lambda > 0$, atunci ecuaţia caracteristică (7.38) are rădăcinile $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$, prin urmare soluţiile nenule ale ecuaţiei $(7.37)_1$ sunt de forma

$$\Theta(\theta) = c_5 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_6 \sin(\sqrt{\lambda}\theta),$$

unde c_5, c_6 sunt constante reale, nu ambele nule. Punând condiţia de periodicitate $(7.37)_2$,obţinem

$$c_5 \cos\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + c_6 \sin\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) = c_5 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_6 \sin(\sqrt{\lambda}\theta), \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Deoarece funcţiile sinus şi cosinus sunt periodice, de perioadă principală 2π, deducem că $2\pi\sqrt{\lambda}$ trebuie să fie un multiplu natural nenul ($\lambda > 0$) al perioadei principale. În consecinţă, $2\pi\sqrt{\lambda} = 2\pi n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, deci autovalorile λ ale problemei Sturm-Liouville (7.37) sunt în acest caz

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, autofuncţiile corespunzătoare lui λ_n sunt

$$\Theta_n(\theta) = c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta,$$

unde c_{5n} şi c_{6n} sunt constante reale, nu ambele nule. Observăm că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, mulţimea

$$\{c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta \mid c_{5n}, c_{6n} \in \mathbb{R}\}$$

a soluţiilor problemei Sturm-Liouville (7.37) este un spaţiu liniar real bidimensional, având baza

$$\{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

În concluzie, valorile acceptabile ale lui λ sunt $\lambda_n = n^2$, cu $n \in \mathbb{N}$. Le înlocuim în ecuaţia Euler (7.34) şi aceasta se rescrie

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0, \quad r \in (0, a),\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.39}$$

După cum am văzut în paragraful 7.4.1, pentru a rezolva ecuaţia Euler (7.39) se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} r = e^s \\ R_n(r) = z_n(s) \end{cases};$$

avem $r \in (0, a) \Leftrightarrow s = \ln r \in (-\infty, \ln a)$. Deoarece

$$R_n'(r) = e^{-s}\dot{z}_n(s), \quad R_n''(r) = e^{-2s}\left(\ddot{z}_n(s) - \dot{z}_n(s)\right),$$

ecuaţia (7.39) se transformă în

$$e^{2s}e^{-2s}\left(\ddot{z}_n(s) - \dot{z}_n(s)\right) + e^s e^{-s}\dot{z}_n(s) - n^2 z_n(s) = 0, \quad s \in (-\infty, \ln a)$$

sau, echivalent,

$$\ddot{z}_n(s) - n^2 z_n(s) = 0, \quad s \in (-\infty, \ln a), \tag{7.40}$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi în funcţia necunoscută $z_n = z_n(s)$. Acesteia i se asociază ecuaţia caracteristică

$$\beta^2 - n^2 = 0, \tag{7.41}$$

având rădăcinile $\beta_{1,2} = \pm n \in \mathbb{R}$.

Dacă $n = 0$ (ceea ce corespunde lui $\lambda_0 = 0$), atunci 0 este rădăcină dublă a ecuaţiei caracteristice (7.41), deci soluţia generală a ecuaţiei (7.40) este

$$z_0(s) = A_0 + B_0 s, \quad s \in (-\infty, \ln a), \text{ unde } A_0, B_0 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante;}$$

revenind la variabila r, obţinem pentru ecuaţia EULER (7.39) soluţiile

$$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r, \quad r \in (0, a), \text{ unde } A_0, B_0 \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (7.40) este

$$z_n(s) = A_n e^{ns} + B_n e^{-ns}, \quad s \in (-\infty, \ln a), \text{ unde } A_n, B_n \in \mathbb{R} \text{ sunt constante;}$$

revenind la variabila $r = e^s$, obţinem pentru ecuaţia EULER (7.39) soluţiile

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad r \in (0, a), \text{ unde } A_n, B_n \in \mathbb{R} \text{ sunt constante.}$$

Mai departe înlocuim în formula (7.32) funcţiile Θ_n, R_n, cu $n \in \mathbb{N}$, aflate mai sus. Pentru $n = 0$ găsim

$$u_0(r, \theta) = (A_0 + B_0 \ln r) c_3,$$

unde A_0, B_0, c_3 sunt constante reale. Deoarece $\lim\limits_{r \searrow 0} \ln r = -\infty$, în vreme ce u_0 ar trebui să fie continuă în origine, deci mărginită în vecinătatea lui $r = 0$, suntem obligaţi să luăm $B_0 = 0$. Aşadar, pentru $\lambda = 0$, singurele soluţii acceptabile sunt constantele (nenule).

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem

$$u_n(r, \theta) = \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\left(c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta\right),$$

unde A_n, B_n, c_{5n}, c_{6n} sunt constante reale. Deoarece $\lim\limits_{r \searrow 0} r^{-n} = \infty$, în vreme ce u_n ar trebui să fie mărginită în vecinătatea lui $r = 0$, suntem obligaţi să luăm $B_n = 0$, prin urmare

$$u_n(r, \theta) = A_n r^n \left(c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta\right) = r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right),$$

unde $a_n = A_n c_{5n}$ şi $b_n = A_n c_{6n}$ sunt constante, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Rămâne să impunem să fie verificată condiţia la frontieră $(7.31)_3$. În acest scop vom căuta în continuare soluţia generală a problemei (7.31) sub forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta), \quad r \in [0, a), \ \theta \in [0, 2\pi),$$

adică

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad r \in [0, a), \ \theta \in [0, 2\pi), \tag{7.42}$$

unde constanta $a_0 = A_0 c_3$ corespunde soluţiei u_0 (pentru $\lambda_0 = 0$), iar a_n, b_n sunt, la rândul lor, constante reale.

Făcând $r = a$ în relaţia (7.42) şi folosind $(7.31)_3$, rezultă că

$$u(a, \theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

prin urmare a_0, $a^n a_n$ şi $a^n b_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ sunt coeficienţii FOURIER ai lui f, adică:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \tag{7.43}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{7.44}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{7.45}$$

Înlocuind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ în relaţia (7.42) şi schimbând variabila de integrare din θ în τ, rezultă că

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\left[\left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau\right)\cos n\theta + \left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau\,d\tau\right)\sin n\theta\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi} f(\tau)(\cos n\tau\cos n\theta + \sin n\tau\sin n\theta)d\tau\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n(\theta-\tau)\,d\tau, \quad r\in[0,a),\ \theta\in[0,2\pi),
\end{aligned}$$

adică

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\theta-\tau)\right]d\tau, \quad r\in[0,a),\ \theta\in[0,2\pi) \tag{7.46}$$

(integrala şi seria comută datorită convergenţei uniforme a seriei).

Cum $r\in[0,a)$, avem $\dfrac{r}{a} = \rho\in[0,1)$. Ne amintim că

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R},$$

de unde rezultă că $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$ (şi că $\left|e^{i\alpha}\right| = \left|e^{-i\alpha}\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$), penru orice $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci, pentru $\rho\in[0,1)$,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left[e^{in(\theta-\tau)} + e^{-in(\theta-\tau)}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho e^{i(\theta-\tau)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho e^{-i(\theta-\tau)}\right)^n.$$

Am obţinut două serii geometrice. Cum suma unei serii geometrice este

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pentru } |x|<1,$$

rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}, \quad \text{pentru } |x|<1;$$

aşadar, întrucât

$$\left|\rho e^{i(\theta-\tau)}\right| = |\rho|\left|e^{i(\theta-\tau)}\right| = |\rho| < 1 \text{ şi } \left|\rho e^{-i(\theta-\tau)}\right| = |\rho|\left|e^{-i(\theta-\tau)}\right| = |\rho| < 1,$$

deducem că

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\tau) &= 1 + \frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}}\\
&= \frac{\left[1-\rho e^{i(\theta-\tau)}\right]\left[1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}\right] + \rho e^{i(\theta-\tau)}\left[1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}\right] + \rho e^{-i(\theta-\tau)}\left[1-\rho e^{i(\theta-\tau)}\right]}{\left[1-\rho e^{i(\theta-\tau)}\right]\left[1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}\right]}\\
&= \frac{1-\rho e^{i(\theta-\tau)} - \rho e^{-i(\theta-\tau)} + \rho^2 + \rho e^{i(\theta-\tau)} - \rho^2 + \rho e^{-i(\theta-\tau)} - \rho^2}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)} - \rho e^{-i(\theta-\tau)} + \rho^2}\\
&= \frac{1-\rho^2}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)} - \rho e^{-i(\theta-\tau)} + \rho^2} = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}.
\end{aligned}$$

Înlocuind în formula (7.46) şi ţinând cont că $\rho = \dfrac{r}{a}$, obţinem că

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 - 2\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos(\theta-\tau) + \left(\frac{r}{a}\right)^2}f(\tau)\,d\tau,$$

adică

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}f(\tau)\,d\tau = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\tau)}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}\,d\tau. \tag{7.47}$$

Relaţia (7.47) este formula integrală a lui Poisson pentru cerc.

Într-adevăr, dacă punctul $z \in B(0,a)$ are coordonatele polare (r,θ), unde $r \in [0,a)$, $\theta \in [0,2\pi)$, iar punctul $w \in \partial B(0,a)$ are coordonatele polare (a,τ), unde $\tau \in [0,2\pi)$, atunci $\|z\| = r$, $\|w\| = a$ şi, conform teoremei cosinusului (a se vedea figura 3),

$$\|z-w\|^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \tau).$$

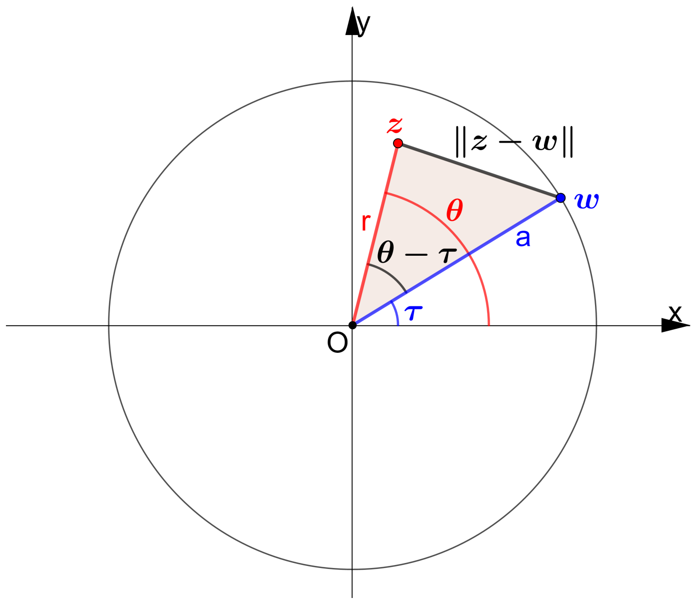

Figura 3

Prin urmare, relaţia (7.47) poate fi rescrisă:

(7.48) $$u(z) = \frac{\|w\|^2 - \|z\|^2}{2\pi a} \int_{\partial B(0,a)} \frac{g(w)}{\|z-w\|^2}\, d\sigma_w$$

(ne amintim că $f(\tau) = g(a\cos\tau, a\sin\tau) = g(w)$, iar elementul de arc $d\sigma_w = ad\tau$)

Pentru $r = 0$, formula integrală Poisson (7.47) devine

$$u(0,\theta) = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\tau)}{a^2}\, d\tau$$

sau, echivalent,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau$$

şi se reobţine:

Teorema 7.4.2 (Teorema de medie). *Dacă funcţia u este armonică pe interiorul unui cerc, atunci valoarea lui u în centrul cercului este egală cu media valorilor lui u pe cerc.*

7.4.4. Metoda separării variabilelor pentru problema Dirichlet pe exteriorul unui cerc. În această secţiune vom afla soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe exteriorul unui cerc.

Dacă Ω notează interiorul cercului centrat în origine, de rază $a > 0$, problema Dirichlet exterioară cere să se afle funcţia $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \cup C(\overline{\Omega})$, care verifică ecuaţia lui Laplace în exteriorul discului $\overline{\Omega}$, atunci când se cunoaşte valoarea lui u pe cerc; cu alte cuvinte, funcţia u verifică problema la limită:

(7.49) $$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > a^2\} \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = a^2\} \\ u(x,y) \text{ mărginită} & \text{pentru } \|(x,y)\| \to \infty, \end{cases}$$

g fiind o funcţie dată, continuă pe cercul $\partial\Omega$.

Trecând la coordonate polare în plan, putem rescrie problema (7.49) astfel:

$$(7.50) \qquad \begin{cases} \Delta u(r,\theta) = u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & r > a,\ \theta \in \mathbb{R} \\ u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta), & r > a,\ \theta \in \mathbb{R} \\ u(a,\theta) = f(\theta), & \theta \in [0,2\pi) \\ u \text{ mărginită pentru } r \to \infty, & \end{cases}$$

unde funcţia $f(\theta) = g(a\cos\theta, a\sin\theta)$ este continuă, nenulă şi periodică, de perioadă 2π. Şi în cazul acestei probleme condiţiile de periodicitate $(7.50)_2$ sunt naturale.

Pentru rezolvarea problemei (7.50) aplicăm metoda separării variabilelor. Vom căuta o soluţie neidentic nulă de forma (7.32). Obligând-o să verifice ecuaţia $(7.31)_1$ şi condiţia de periodicitate $(7.31)_2$, ajungem tot la problema Sturm-Liouville periodică (7.37) şi la ecuaţia Euler (7.34), ultima însă pe intervalul $r > a$.

Procedând similar, obţinem soluţiile:

$$u_0(r,\theta) = (A_0 + B_0 \ln r)c_3, \quad r > a,\ \theta \in \mathbb{R},$$

unde A_0, B_0, c_3 sunt constante reale, şi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(r,\theta) = \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)(c_{5n}\cos n\theta + c_{6n}\sin n\theta), \quad r > a,\ \theta \in \mathbb{R},$$

unde A_n, B_n, c_{5n}, c_{6n} sunt constante reale.

Pentru a fi satisfăcută condiţia $(7.50)_4$ este nevoie ca $B_0 = 0$ şi $A_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deoarece acum $\lim\limits_{r\to\infty} \ln r = +\infty$ şi $\lim\limits_{r\to\infty} r^n = +\infty$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare,

$$u_0(r,\theta) = A_0 c_3 \overset{not.}{=} a_0 \text{ constant}, \quad r > a,\ \theta \in \mathbb{R},$$

$$u_n(r,\theta) = B_n r^{-n}(c_{5n}\cos n\theta + c_{6n}\sin n\theta) = \frac{1}{r^n}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta), \quad r > a,\ \theta \in \mathbb{R},$$

unde $a_n = B_n c_{5n}$, $b_n = B_n c_{6n}$ sunt constante reale, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Ca să fie îndeplinită şi condiţia la frontieră $(7.50)_3$, în continuare vom căuta soluţia problemei (7.50) de forma

$$(7.51) \qquad u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) \quad r > a,\ \theta \in \mathbb{R},$$

unde a_n, cu $n \in \mathbb{N}$ şi b_n, cu $n \in \mathbb{N}^*$, sunt constante reale.

Făcând $r = a$ în formula (7.51), condiţia la limită $(7.50)_3$ revine la

$$(u(a,\theta) =)\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0,2\pi),$$

de unde se obţin coeficienţii

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau \\ a_n &= \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ b_n &= \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau d\tau, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Înlocuind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ în relaţia (7.51), găsim

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{r^n}\left[\left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau\right)\cos n\theta + \left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau\,d\tau\right)\sin n\theta\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\tau)(\cos n\tau\cos n\theta + sinn\tau\sin n\theta)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\cos n(\theta-\tau)\right]d\tau, \quad r>a,\ \theta\in[0,2\pi). \end{aligned}$$

Comparând această relaţie cu (7.46), se poate vedea că singura diferenţă dintre problema exterioară şi problema interioară este că $\left(\dfrac{r}{a}\right)^n$ este înlocuită de $\left(\dfrac{a}{r}\right)^n$, unde $\rho = \dfrac{a}{r} \in (0,1)$. În consecinţă, rezultatul final este de forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2}{1-2\cdot\frac{a}{r}\cdot\cos(\theta-\tau)+\left(\frac{a}{r}\right)^2}f(\tau)\,d\tau, \quad r>a,\ \theta\in[0,2\pi)$$

sau, echivalent,

$$u(r,\theta) = \frac{r^2-a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\tau)}{r^2-2ar\cos(\theta-\tau)+a^2}\,d\tau, \quad r>a,\ \theta\in[0,2\pi).$$

7.4.5. Metoda separării variabilelor pentru problema Dirichlet pe o coroană circulară. Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe coroana circulară cuprinsă între cercurile de raze r_1 şi r_2, cu $0<r_2<r_1$, se formulează astfel:

$$(7.52)\qquad \begin{cases} \Delta u(r,\theta) = u_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}u_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & r_2<r<r_1,\ \theta\in\mathbb{R} \\ u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta), & r_2<r<r_1,\ \theta\in\mathbb{R} \\ u(r_1,\theta) = f(\theta),\ u(r_2,\theta) = g(\theta) & \theta\in[0,2\pi), \end{cases}$$

unde f şi g sunt funcţii continue, periodice, de perioadă 2π.

Folosim din nou metoda separării variabilelor. Căutăm pentru problema (7.52) o soluţie neidentic nulă de forma (7.32). Impunând ca aceasta să verifice ecuaţia $(7.52)_1$ şi condiţia de periodicitate $(7.52)_2$, obţinem tot problema Sturm-Liouville periodică (7.37) şi ecuaţia Euler (7.34), cea de-a doua pentru $r\in(r_2,r_1)$.

Procedând analog, găsim soluţiile:

$$u_0(r,\theta) = (A_0 + B_0\ln r)c_3, \quad r\in(r_2,r_1),\ \theta\in\mathbb{R},$$

unde A_0, B_0, c_3 sunt constante reale şi, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n(r,\theta) = \left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)(c_{5n}\cos n\theta + c_{6n}\sin n\theta), \quad r\in(r_2,r_1),\ \theta\in\mathbb{R},$$

unde A_n, B_n, c_{5n}, c_{6n} sunt constante reale.

Pentru a putea pune şi condiţiile la frontieră $(7.52)_3$, mai departe căutăm soluţia problemei (7.52) sub forma seriei

$$(7.53)\quad u(r,\theta) = a_0 + b_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right)\cos n\theta + \left(c_n r^n + d_n r^{-n}\right)\sin n\theta\right], \quad r\in(r_2,r_1),\ \theta\in\mathbb{R},$$

unde am notat $a_0 = A_0c_3$, $b_0 = B_0c_3$ $a_n = A_nc_{5n}$, $b_n = B_nc_{5n}$, $c_n = A_nc_{6n}$, $d_n = B_nc_{6n}$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$, toate acestea fiind constante reale.

Acum luăm, pe rând, $r=r_1$ şi $r=r_2$ în formula (7.53) şi înlocuim în cele două relaţii $(7.52)_3$. Obţinem:

$$(u(r_1,\theta) =)\ a_0 + b_0\ln r_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n r_1^n + b_n r_1^{-n}\right)\cos n\theta + \left(c_n r_1^n + d_n r_1^{-n}\right)\sin n\theta\right] = f(\theta), \quad \theta\in[0,2\pi),$$

prin urmare coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relaţiile:

$$a_0 + b_0 \ln r_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \tag{7.54}$$

$$a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau d\tau \tag{7.55}$$

$$c_n r_1^n + d_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau d\tau; \tag{7.56}$$

apoi

$$(u(r_2,\theta) =)\ a_0 + b_0\ln r_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n r_2^n + b_n r_2^{-n}\right)\cos n\theta + \left(c_n r_2^n + d_n r_2^{-n}\right)\sin n\theta\right] = g(\theta), \quad \theta\in[0,2\pi),$$

aşadar coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfac şi:

$$a_0 + b_0 \ln r_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)d\tau \tag{7.57}$$

$$a_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau d\tau \tag{7.58}$$

$$c_n r_2^n + d_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau d\tau. \tag{7.59}$$

Rezolvând sistemele de câte două ecuaţii cu două necunoscute (7.54) şi (7.57),(7.55) şi (7.58),(7.56) şi (7.59), găsim:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi(\ln r_2 - \ln r_1)}\left(\ln r_2\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau - \ln r_1\int_0^{2\pi} g(\tau)\,d\tau\right), \tag{7.60}$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi(\ln r_1 - \ln r_2)}\left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau - \int_0^{2\pi} g(\tau)\,d\tau\right), \tag{7.61}$$

$$a_n = \frac{r_1^n r_2^n}{\pi\left(r_1^{2n} - r_2^{2n}\right)}\left(\frac{1}{r_2^n}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau - \frac{1}{r_1^n}\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau\,d\tau\right),\ n\in\mathbb{N}^*, \tag{7.62}$$

$$b_n = \frac{r_1^n r_2^n}{\pi\left(r_2^{2n} - r_1^{2n}\right)}\left(r_2^n\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau - r_1^n\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos n\tau\,d\tau\right),\ n\in\mathbb{N}^*, \tag{7.63}$$

$$c_n = \frac{r_1^n r_2^n}{\pi\left(r_1^{2n} - r_2^{2n}\right)}\left(\frac{1}{r_2^n}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau\,d\tau - \frac{1}{r_1^n}\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau\,d\tau\right),\ n\in\mathbb{N}^*, \tag{7.64}$$

$$d_n = \frac{r_1^n r_2^n}{\pi\left(r_2^{2n} - r_1^{2n}\right)}\left(r_2^n\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin n\tau\,d\tau - r_1^n\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin n\tau\,d\tau\right),\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{7.65}$$

Prin urmare, soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe coroana circulară este dată de relaţia (7.53), unde coeficienţii se calculează prin formulele (7.60)–(7.65).

CAPITOLUL 8

Ecuaţia propagării căldurii

Cursul 12

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$. Fie $T > 0$ (finit sau infinit). Ecuaţia propagării căldurii are forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T),$$

unde $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ este laplaceanul în raport cu variabilele spaţiale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi t este variabila timp; $\omega > 0$ este o constantă, iar f este o funcţie dată. Această ecuaţie modelează, de asemenea, procese de difuzie.

Notăm

$$Q_T = \Omega \times (0,T), \qquad \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T);$$

desigur, Σ_T este frontiera laterală a domeniului cilindric Q_T.

Deoarece ecuaţia căldurii este o ecuaţie de evoluţie (adică funcţia necunoscută depinde de timp), ecuaţiei i se ataşează, pe lângă condiţii pe frontiera Σ_T, şi **o condiţie iniţială** pe Ω (o condiţie pentru $t = 0$). Ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{8.1}$$

împreună cu condiţia Dirichlet omogenă (nulă)

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \tag{8.2}$$

şi cu condiţia iniţială (condiţia Cauchy)

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8.3}$$

unde $f : Q_T \to \mathbb{R}, u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, formează o problemă mixtă pentru ecuaţia căldurii. Condiţia la limită (8.2) poate fi înlocuită printr-o condiţie Dirichlet neomogenă:

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \Sigma_T,$$

printr-o condiţie de tip Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T, \tag{8.4}$$

unde $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ notează derivata normală a funcţiei u, sau printr-o condiţie de tip Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \alpha u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T. \tag{8.5}$$

unde $\alpha > 0$.

Se numeşte soluţie clasică a problemei mixte (8.1) - (8.3) o funcţie $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, aparţinând spaţiului

$$C^{2,1}(Q_T) = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{Q_T}),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(Q_T),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times (0,T)); \quad i,j = 1, \ldots, n \right\}$$

şi verificând ecuaţia (8.1) pe Q_T, condiţia la frontieră (8.2) şi condiţia iniţială (8.3).

Observăm că problema având condiţii la limită de tip Dirichlet neomogene

$$
(8.6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ u(x,t) = \varphi(x,t), & (x,t) \in \Sigma_T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}
$$

se reduce la o problemă de forma (8.1) – (8.3) dacă notăm $u = \bar{u} + v$, unde $v \in C^{2,1}(Q_T)$ verifică $v = \varphi$ pe Σ_T (dacă o asemenea funcţie există).

Demonstraţia existenţei unei soluţii clasice pentru problema mixtă (8.1) - (8.3) este dificilă. Vom construi prin metoda separării variabilelor (metoda lui Fourier) o soluţie formală a acestei probleme în cazul $n = 1$.

8.1. Propagarea căldurii într-o bară unidimensională. Metoda lui Fourier - cazul omogen

Se dă o bară omogenă de lungime $a > 0$, suficient de subţire încât căldura să se distribuie în mod egal de-a lungul secţiunii transversale la fiecare moment t. Presupunem că suprafaţa barei este izolată termic, astfel încât nu există pierderi de căldură prin frontieră. Rezultă că distribuţia de temperatură în bară satisface problema mixtă

$$
(8.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in (0,a),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a]. \end{cases}
$$

Mai întâi căutăm pentru problema

$$
(8.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in (0,a),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(a,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}
$$

o soluţie cu variabilele separate, de forma

$$
u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0.
$$

Înlocuind u în ecuaţia $(8.8)_1$ obţinem

$$
X(x)T'(t) - \omega^2 X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(x)T'(t) = \omega^2 X''(x)T(t)
$$

sau, echivalent, prin împărţire cu $\omega^2 X(x)T(t) \not\equiv 0$,

$$
(8.9) \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)}, \quad x \in (0,a),\ t > 0.
$$

Deoarece membrul stâng din relaţia (8.9) depinde de x, dar nu de t, în vreme ce membrul ei drept depinde de t, dar nu de x, rezultă că ambii membri ai ecuaţiei sunt egali cu o constantă reală, pe care o notăm $-\lambda$:

$$
\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}.
$$

Prin urmare, obţinem ecuaţiile diferenţiale:

$$
(8.10) \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,a),
$$

$$
(8.11) \qquad T'(t) + \lambda \omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0.
$$

Din condiţiile la frontieră *omogene* $(8.8)_2$ obţinem că $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ şi $u(a,t) = X(a)T(t) = 0$, pentru orice $t \geq 0$, ceea ce implică $X(0) = X(a) = 0$ (fiindcă $T \not\equiv 0$, în caz contrar rezultând $u \equiv 0$). Ataşând aceste condiţii ecuaţiei (8.10) ajungem la problema Sturm-Liouville

$$
\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}
$$

pentru care ne interesează soluţiile $X \not\equiv 0$ (dacă $X \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$!). Autovalorile acestei probleme sunt

$$
(8.12) \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^*.
$$

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, autofuncţiile problemei Sturm-Liouville sunt

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \text{ unde } C_k \neq 0 \text{ sunt constante;}$$

pentru simplitate vom lua $C_k = 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Pe de altă parte, înlocuind $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}^*$ din (8.12) în (8.11), obţinem

$$T_k'(t) + \left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad t > 0, \ k \in \mathbb{N}^*,$$

sau, echivalent,

$$T_k'(t) = -\left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 T_k(t), \quad t > 0, \ k \in \mathbb{N}^*,$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară omogenă şi are, conform formulei variaţiei constantelor, soluţia generală

$$T_k(t) = T_{0k} e^{-\left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 t}, \tag{8.13}$$

cu $T_{0k} \neq 0$ constantă, pentru $k \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, soluţiile nebanale pentru ecuaţia căldurii $(8.8)_1$ care satisfac cele două condiţii la frontieră $(8.8)_2$ sunt

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) = T_{0k} e^{-\left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

unde $T_{0k} \neq 0$ este o constantă arbitrară.

Deoarece problema (8.7) este liniară, conform principiului superpoziţiei putem căuta o soluţie formală a problemei sub forma seriei

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{0k} e^{-\left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{a}. \tag{8.14}$$

Funcţia dată de formula (8.14) satisface condiţia iniţială $(8.7)_3$ dacă

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{0k} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a). \tag{8.15}$$

Această relaţie este adevărată dacă u_0 poate fi dezvoltată în serie Fourier de sinusuri:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a), \tag{8.16}$$

coeficienţii ei Fourier $(u_{0k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ obţinându-se din relaţia

$$u_{0k} = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} \, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Comparând (8.15) şi (8.16), rezultă că

$$T_{0k} = u_{0k} = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} \, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{8.17}$$

În concluzie, soluţia formală a problemei mixte (8.7) este

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a} \int_0^a u_0(y) \sin \frac{k\pi y}{a} \, dy \right) e^{-\left(\frac{k\pi\omega}{a}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in [0,a], \ t \geq 0. \tag{8.18}$$

Caracterul formal al soluţiei (8.18) privine din acceptarea faptului că funcţia dată de (8.18) verifică problema (8.8) pentru că fiecare termen al seriei (8.18) este soluţie a acestei probleme. Acest lucru nu este mereu adevărat, dar este adevărat când atât seria (8.18), cât şi seriile obţinute prin derivarea termenilor acesteia de două ori în raport cu x, respectiv o dată în raport cu t sunt uniform convergente. Se poate demonstra, de exemplu, că dacă u_0 este continuă în $[0,a]$, cu $u_0(0) = u_0(a) = 0$ şi u_0' este continuă pe porţiuni în $(0,a)$, atunci soluţia formală (8.18) este chiar soluţie clasică a problemei (8.7).

8.2. Cazul neomogen

În continuare determinăm prin metoda lui Fourier o soluţie formală pentru problema mixtă neomogenă:

$$
\text{(8.19)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x \in (0,a),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a]. \end{cases}
$$

Dorim ca această soluţie să aibă o formă analoagă cu aceea a soluţiei din cazul omogen. De aceea o căutăm de forma:

$$
\text{(8.20)} \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t), \quad x \in (0,a),\ t > 0,
$$

unde $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sunt autofuncţiile problemei Sturm-Liouville:

$$
\text{(8.21)} \qquad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}
$$

Ştim că această problemă are autovalorile

$$
\text{(8.22)} \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^*,
$$

cărora le corespund autofuncţiile

$$
\text{(8.23)} \qquad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in [0,a],\ k \in \mathbb{N}^*.
$$

Observaţie. Deoarece $X_k(0) = X_k(a) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că funcţia u dată prin formula (8.20) verifică:

$$
u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{X_k(0)}_{=0} T_k(t) = 0, \quad t \geq 0
$$

$$
u(a,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{X_k(a)}_{=0} T_k(t) = 0, \quad t \geq 0;
$$

prin urmare condiţiile la frontieră $(8.19)_2$ sunt satisfăcute.

Presupunem că funcţiile f şi u_0 sunt dezvoltabile în serii Fourier de sinusuri:

$$
\text{(8.24)} \qquad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ t > 0,
$$

unde coeficienţii Fourier $f_k(t)$ sunt daţi de relaţia:

$$
\text{(8.25)} \qquad f_k(t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*,
$$

respectiv

$$
\text{(8.26)} \qquad u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_{0k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),
$$

unde coeficienţii Fourier u_{0k} se calculează prin formula:

$$
\text{(8.27)} \qquad u_{0k} = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.
$$

Obligând funcţia u dată de (8.20) să verifice ecuaţia $(8.19)_1$, obţinem

$$
\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k'(t) - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k''(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) f_k(t)
$$

$$\overset{(8.21)_1}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k'(t) - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\lambda_k X_k(x)\right) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) f_k(t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left(T_k'(t) + \omega^2 \lambda_k T_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) f_k(t), \quad x \in (0,a),\ t > 0,$$

de unde se obţine şirul de ecuaţii:

(8.28) $$T_k'(t) + \omega^2 \lambda_k T_k(t) = f_k(t), \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte, obligând funcţia u dată de (8.20) să verifice condiţia iniţială $(8.19)_3$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_{0k},$$

prin urmare

(8.29) $$T_k(0) = u_{0k}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Cuplând ecuaţia de ordinul întâi liniară şi neomogenă (8.28) (a se vedea secţiunea 1.2.3) cu condiţia iniţială (8.29), obţinem pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ problema Cauchy:

$$\begin{cases} T_k'(t) + \omega^2 \lambda_k T_k(t) = f_k(t), & t > 0 \\ T_k(0) = u_{0k}. \end{cases}$$

Pentru a o rezolva aplicăm formula variaţiei constantelor cu $t_0 = 0$. Rescriem problema Cauchy cu ecuaţia în forma normală:

$$\begin{cases} T_k'(t) = -\omega^2 \lambda_k T_k(t) + f_k(t), & t > 0 \\ T_k(0) = u_{0k} \end{cases}$$

şi obţinem soluţia problemei Cauchy dată prin:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= u_{0k} e^{\int_0^t (-\omega^2 \lambda_k)\, ds} + \int_0^t e^{\int_s^t (-\omega^2\lambda_k)\, d\tau} f_k(s)\, ds = u_{0k} e^{-\omega^2 \lambda_k s|_0^t} + \int_0^t e^{-\omega^2 \lambda_k \tau|_s^t} f_k(s)\, ds \\ &= u_{0k} e^{-\omega^2 \lambda_k t} + \int_0^t e^{-\omega^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s)\, ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Înlocuind λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$ din (8.22), putem scrie:

(8.30) $$T_k(t) = u_{0k} e^{-\left(\frac{\omega k \pi}{a}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2 (t-s)} f_k(s)\, ds, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Introducând X_k din (8.23) şi T_k din (8.30) în (8.20), obţinem expresia finală a soluţiei formale a problemei (8.19):

(8.31) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{0k} e^{-\left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2 (t-s)} f_k(s)\, ds \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ t > 0,$$

unde f_k şi u_{0k}, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se calculează prin formulele (8.25), respectiv (8.27).

Observaţia 8.2.1. *Cazul problemei mixte cu condiţii la frontieră* Dirichlet neomogene*:*

(8.32) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x \in (0,a),\ t > 0 \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(a,t) = \mu_2(t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a] \end{cases}$$

poate fi redus la rezolvarea unei probleme mixte cu condiţii Dirichlet *omogene prin schimbarea de funcţie necunoscută:*

(8.33) $$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{a}(\mu_2(t) - \mu_1(t))x + \mu_1(t).$$

Cum s-a ajuns la această formulă? Dorim să scădem din funcţia u o funcţie w astfel încât

$$w(0,t) = \mu_1(t),\ w(a,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \tag{8.34}$$

dar funcţia diferenţă $v = u - w$ să continue să verifice ecuaţia propagării căldurii. În acest scop cerem funcţiei w să satisfacă $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0$, pentru $x \in (0,a)$, $t > 0$. Integrând această ecuaţie de două ori în raport cu x găsim

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ \Big| \int dx \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = C_1(t) \ \Big| \int dx \Rightarrow w(x,t) = C_1(t) \int dx = C_1(t)x + C_2(t).$$

Din condiţiile (8.34) obţinem

$$\begin{cases} C_1(t)\cdot 0 + C_2(t) = \mu_1(t) \\ C_1(t)a + C_2(t) = \mu_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(t) = \mu_1(t) \\ C_1(t)a + \mu_1(t) = \mu_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(t) = \mu_1(t) \\ C_1(t) = \dfrac{1}{a}(\mu_2(t) - \mu_1(t)). \end{cases}$$

Prin urmare, $w(x,t) = \dfrac{1}{a}(\mu_2(t) - \mu_1(t))x + \mu_1(t)$, pentru $x \in (0,a)$, $t > 0$.

Înlocuind $u = v + w$ în problema mixtă (8.32), rezultă că funcţia v verifică problema mixtă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \underbrace{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)}_{=0} \right) = f(x,t), & x \in (0,a),\ t > 0 \\ v(0,t) + \underbrace{w(0,t)}_{=\mu_1(t)} = \mu_1(t),\ v(a,t) + \underbrace{w(a,t)}_{=\mu_2(t)} = \mu_2(t), & t \geq 0 \\ v(x,0) + w(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \underbrace{f(x,t) - \dfrac{1}{a}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t))x - \mu_1'(t)}_{=g(x,t)}, & x \in (0,a),\ t > 0 \\ v(0,t) = v(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = \underbrace{u_0(x) - \dfrac{1}{a}(\mu_2(0) - \mu_1(0))x - \mu_1(0)}_{=v_0(x)}, & x \in [0,a]. \end{cases}$$

Soluţia formală a acestei probleme este

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{0k} e^{-\left(\frac{\omega k \pi}{a}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\omega k \pi}{a}\right)^2 (t-s)} g_k(s)\, ds \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ t > 0, \tag{8.35}$$

unde g_k şi v_{0k}, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se calculează prin formulele:

(8.36)

$$g_k(t) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x,t) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx = \frac{2}{a} \int_0^a \left[f(x,t) - \frac{1}{a}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t))x - \mu_1'(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*,$$

respectiv

$$v_{0k} = \frac{2}{a} \int_0^a v_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx = \frac{2}{a} \int_0^a \left[u_0(x) - \frac{1}{a}(\mu_2(0) - \mu_1(0))x - \mu_1(0) \right] \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{8.37}$$

În concluzie, soluţia formală a problemei (8.32) este

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{0k} e^{-\left(\frac{\omega k \pi}{a}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\omega k \pi}{a}\right)^2 (t-s)} g_k(s)\, ds \right) \sin \frac{k\pi x}{a}$$

$$+ \frac{1}{a}(\mu_2(t) - \mu_1(t))x + \mu_1(t), \quad x \in (0,a),\ t > 0,$$

unde g_k şi v_{0k}, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ sunt date de formulele (8.36) şi (8.37).

8.3. Propagarea căldurii într-o placă dreptunghiulară

EXEMPLUL 8.3.1. *Fie o placă dreptunghiulară foarte subţire (astfel încât poate fi considerată bidimensională), având lungimea a şi lăţimea b, perfect izolată pe laturile $x = 0$ şi $x = a$ şi cu laturile $y = 0$ şi $y = b$ menţinute la temperatura nulă. Dacă nu există surse interne de căldură şi distribuţia iniţială de temperatură este $u_0 = u_0(x, y)$, atunci temperatura $u = u(x, y, t)$ satisface problema mixtă:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) - \omega^2 \Delta u(x,y,t) = 0, & x \in (0,a), \quad y \in (0,b), \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y,t) = 0, & y \in [0,b], \quad t \geq 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & x \in [0,a], \quad t \geq 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,a], \quad y \in [0,b]. \end{cases} \tag{8.38}$$

Desigur, Δ este laplaceanul în raport cu coordonatele spaţiale:

$$\Delta u(x,y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0.$$

Căutăm, pentru început, o soluţie neidentic nulă cu variabilele separate, de forma

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0.$$

Obligându-l pe u să verifice ecuaţia $(8.38)_1$, obţinem

$$U(x,y)T'(t) - \omega^2 \Delta U(x,y)T(t) = 0 \Leftrightarrow U(x,y)T'(t) = \omega^2 \Delta U(x,y)T(t),$$

de unde, prin împărţire cu $\omega^2 U(x,y)T(t) \not\equiv 0$, găsim

$$\frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)} = \frac{\Delta U(x,y)}{U(x,y)}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0. \tag{8.39}$$

Deoarece membrul drept al relaţiei (8.39) depinde de x, y şi nu de t, în vreme ce membrul ei stâng depinde de t, dar nu de x sau y, rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă pe care o numim $-\lambda$:

$$\frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)} = \frac{\Delta U(x,y)}{U(x,y)} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Ajungem astfel la ecuaţia diferenţială:

$$T'(t) + \lambda \omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{8.40}$$

şi ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\Delta U(x,y) + \lambda U(x,y) = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b), \tag{8.41}$$

numită ecuaţia lui HELMHOLTZ.

Pentru ecuaţia lui HELMHOLTZ căutăm, de asemenea, o soluţie neidentic nulă cu variabilele separate; fie aceasta

$$U(x,y) = X(x)Y(y), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b).$$

Înlocuind U în ecuaţia (8.41), obţinem

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b).$$

Împărţind această relaţie prin $X(x)Y(y) \not\equiv 0$, rezultă că

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),$$

de unde

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda.$$

Cum membrul stâng al acestei egalităţi depinde de x, dar nu de y în vreme ce membrul ei drept depinde de y, dar nu de x, deducem că ambii membri sunt egali cu o constantă, adică

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = \mu \in \mathbb{R}.$$

Astfel am obţinut încă două ecuaţii diferenţiale ordinare, şi anume:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in (0, a);$$

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \quad y \in (0, b).$$

Ataşăm acestor ecuaţii condiţii în capetele intervalelor $[0, a]$ şi $[0, b]$ obţinute din condiţiile la frontieră *omogene* (nule) $(8.38)_{2,3}$. Mai precis, înlocuind $u(x, y, t) = U(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$ în relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y, t) = 0, \quad y \in [0, b], \ t \geq 0$$

obţinem $X'(0)Y(y)T(t) = X'(a)Y(y)T(t) = 0$, pentru $y \in [0, b]$, $t \geq 0$, de unde, ţinând cont că $Y \not\equiv 0$ şi $T \not\equiv 0$ (altfel $u \equiv 0$), obţinem că $X'(0) = X'(a) = 0$.

Analog, înlocuind u în relaţiile

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \ x \in [0, a], \ t \geq 0,$$

deducem că $X(x)Y(0)T(t) = X(x)Y(b)T(t) = 0$, pentru $x \in [0, a], \ t \geq 0$, de unde, ţinând cont că $X \not\equiv 0$ şi $T \not\equiv 0$ (altfel $u \equiv 0$), obţinem că $Y(0) = Y(b) = 0$.

Cuplând acum condiţiile obţinute în capetele intervalelor cu ecuaţiile corespunzătoare, găsim:

- problema Sturm-Liouville în X:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, & x \in (0, a) \\ X'(0) = X'(a) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\mu_k = \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2$, cu $k \in \mathbb{N}$, şi autofuncţiile corespunzătoare $X_k(x) = \cos\dfrac{k\pi x}{a}$, unde $x \in [0, a]$, $k \in \mathbb{N}$;

- problema Sturm-Liouville în Y:

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, & y \in (0, b) \qquad (\text{unde } \nu = \lambda - \mu) \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\nu_n = \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $Y_n(y) = \sin\dfrac{n\pi y}{b}$, pentru $y \in [0, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă atunci că

$$\lambda = \lambda_{kn} = \mu_k + \nu_n = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*, \tag{8.42}$$

iar soluţiile ecuaţiei Helmholtz în condiţiile date sunt

$$U_{kn}(x, y) = X_k(x)Y_n(y) = \cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0, a), \ y \in (0, b), \ k \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum λ are forma (8.42), ecuaţia (8.40) se rescrie:

$$T'_{kn}(t) + \left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 T_{kn}(t) = 0, \quad t > 0, \ k \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

sau, echivalent,

$$T'_{kn}(t) = -\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 T_{kn}(t), \quad t > 0, \ k \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi omogenă. Conform formulei variaţiei constantelor, soluţia ei generală este

$$T_{kn}(t) = T_{0,kn}e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 t},$$

pentru $t > 0, \ k \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}^*$, unde $T_{0,kn}$ este o constantă reală.

Aşadar, soluţiile nebanale pentru ecuaţia căldurii $(8.38)_1$ care satisfac cele patru condiţii la frontieră $(8.38)_{2,3}$ sunt

$$u_{kn}(x, y, t) = U_{kn}(x, y)T_{kn}(t) = T_{0,kn}e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 t}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0, a), \ y \in (0, b), \ t > 0,$$

pentru $k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$, unde $T_{0,kn} \neq 0$ sunt constante.

Deoarece problema (8.38) este liniară, conform principiului superpoziţiei putem căuta o soluţie formală a problemei sub forma seriei

(8.43)
$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{0,kn} e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 t} \cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0.$$

Constantele $T_{0,kn}$, pentru $k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*$, se află din condiţia iniţială $(8.38)_4$. Presupunem că funcţia u_0 are descompunerea în serie FOURIER dublă

$$u_0(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{0,kn}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b), \tag{8.44}$$

unde coeficienţii FOURIER $u_{0,kn}$ sunt daţi de formulele:

$$\begin{aligned} u_{0,0n} &= \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^* \\ u_{0,kn} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } k,n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Făcând $t = 0$ în (8.43) şi folosind condiţia iniţială $(8.38)_4$, obţinem

$$u_0(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{0,kn}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b).$$

Comparând cu (8.44), deducem că $T_{0,kn} = u_{0,kn}$, pentru $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, soluţia formală a problemei mixte (8.38) este

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{0,kn} e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\omega^2 t}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0,$$

unde $u_{0,kn}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ se calculează prin formulele (8.45).

EXEMPLUL 8.3.2. *Dacă există şi o sursă de căldură cu densitatea $f = f(x,y,t)$, atunci problema devine*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) - \omega^2\Delta u(x,y,t) = f(x,y,t), & x \in (0,a), \quad y \in (0,b), \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y,t) = 0, & \qquad\qquad\quad y \in [0,b], \quad t \geq 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & x \in [0,a], \qquad\qquad\quad t \geq 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,a], \quad y \in [0,b]. \end{cases} \tag{8.46}$$

Etapele găsirii unei soluţii formale sunt:

- prin analogie cu cazul problemei mixte omogene se caută soluţia de forma:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0; \tag{8.47}$$

această funcţie satisface condiţiile la frontieră $(8.46)_{2,3}$;

- descompunem şi funcţiile f şi u_0 în serie FOURIER dublă:

$$f(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0, \tag{8.48}$$

unde coeficienţii FOURIER $f_{kn}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt daţi de relaţiile:

$$\begin{aligned} f_{0n}(t) &= \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y,t)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^* \\ f_{kn}(t) &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y,t)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } k,n \in \mathbb{N}^*; \end{aligned} \tag{8.49}$$

(8.50) $$u_0(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{0,kn}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\ x\in(0,a),\ y\in(0,b),$$

unde coeficienţii FOURIER $u_{0,kn}$, $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt daţi de relaţiile:

(8.51) $$\begin{aligned} u_{0,0n} &= \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } n\in\mathbb{N}^* \\ u_{0,kn} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad \text{pentru } k,n\in\mathbb{N}^*; \end{aligned}$$

- obligând funcţia u dată de relaţia (8.47) să verifice ecuaţia $(8.46)_1$ şi condiţia iniţială $(8.46)_4$, obţinem că T_{kn}, $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ verifică problema CAUCHY:

$$\begin{cases} T'_{kn}(t)+\omega^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}(t) \\ T_{kn}(0)=u_{0,kn} \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} T'_{kn}(t)=-\omega^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)+f_{kn}(t) \\ T_{kn}(0)=u_{0,kn}, \end{cases}$$

unde λ_{kn} sunt date de (8.42). Ecuaţia satisfăcută de T_{kn} fiind o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă, soluţia acestei probleme CAUCHY se calculează prin formula variaţiei constantelor:

$$\begin{aligned} T_{kn}(t) &= u_{0,kn}e^{-\omega^2\lambda_{kn}t}+\int_0^t e^{-\omega^2\lambda_{kn}(t-s)}f_{kn}(s)\,ds \\ &= u_{0,kn}e^{-\omega^2\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]t}+\int_0^t e^{-\omega^2\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right](t-s)}f_{kn}(s)\,ds, \quad t>0,\ k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^*; \end{aligned}$$

- înlocuind T_{kn} în (8.47), obţinem expresia finală a soluţiei formale a problemei (8.46):

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{u_{0,kn}e^{-\omega^2\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]t}+\int_0^t e^{-\omega^2\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right](t-s)}f_{kn}(s)\,ds\right\}\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

pentru $x\in(0,a),\ y\in(0,b),\ t>0$, unde f_{kn} şi $u_{0,kn}$, pentru $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$, se calculează prin formulele (8.49), respectiv (8.51).

8.4. Propagarea căldurii într-un paralelipiped dreptunghic

Considerăm problema propagării căldurii într-un corp paralelipipedic tridimensional. Presupunem că feţele corpului sunt menţinute la temperatura de zero grade, că nu avem surse interne de căldură, dar la momentul iniţial corpul este încălzit la temperatura $u_0=u_0(x,y,z)$. Cu alte cuvinte, avem de rezolvat problema:

(8.52) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)-\omega^2\Delta u(x,y,z,t)=0, & x\in(0,a), & y\in(0,b), & z\in(0,c), & t>0 \\ u(0,y,z,t)=u(a,y,z,t)=0, & & y\in[0,b], & z\in[0,c], & t\ge 0 \\ u(x,0,z,t)=u(x,b,z,t)=0, & x\in[0,a], & & z\in[0,c], & t\ge 0 \\ u(x,y,0,t)=u(x,y,c,t)=0, & x\in[0,a], & y\in[0,b], & & t\ge 0 \\ u(x,y,z,0)=u_0(x,y,z), & x\in[0,a], & y\in[0,b], & z\in[0,c]. & \end{cases}$$

Din nou, Δ este laplaceanul în raport cu coordonatele spaţiale:

$$\Delta u(x,y,z,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z,t)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z,t) \quad x\in(0,a),\ y\in(0,b),\ z\in(0,c),\ t>0.$$

Căutăm o soluţie neidentic nulă cu variabilele separate, de forma

(8.53) $$u(x,y,z,t)=U(x,y,z)T(t),\ x\in(0,a),\ y\in(0,b),\ z\in(0,c),\ t>0.$$

Înlocuind u în ecuaţia $(8.52)_1$, obţinem

$$U(x,y,z)T'(t)-\omega^2\Delta U(x,y,z)T(t)=0,\ x\in(0,a),\ y\in(0,b),\ z\in(0,c),\ t>0$$

sau, echivalent,

$$\frac{\Delta U(x,y,z)}{U(x,y,z)} = \frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)},\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c),\ t > 0.$$

Cum membrul stâng al acestei relaţii depinde de x, y, z, dar nu de t, în vreme ce membrul drept depinde de t, dar nu de x, y, z, înseamnă că ambii membri sunt egali cu o constantă pe care o notăm cu $-\lambda$:

$$\frac{\Delta U(x,y,z)}{U(x,y,z)} = \frac{T'(t)}{\omega^2 T(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

Se separă astfel ecuaţia diferenţială ordinară:

$$T'(t) + \lambda\omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{8.54}$$

şi ecuaţia cu derivate parţiale de tip Helmholtz:

$$\Delta U(x,y,z) + \lambda U(x,y,z) = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c). \tag{8.55}$$

În continuare căutăm soluţia ecuaţiei Helmholtz cu variabilele separate, de forma

$$U(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0.$$

Înlocuind U în (8.55), obţinem

$$X''(x)Y(y)Z(z)+X(x)Y''(y)Z(z)+X(x)Y(y)Z''(z)+\lambda X(x)Y(y)Z(z) = 0,\ x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c).$$

Împărţind această relaţie prin $X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0$, rezultă că

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c),$$

de unde

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda.$$

Cum membrul stâng al acestei egalităţi depinde numai de x, în vreme ce membrul ei drept este independent de x, deducem că ambii membri sunt egali cu o constantă, pe care o notăm μ:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = \mu \in \mathbb{R}.$$

Mai departe, din

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = \mu$$

rezultă că

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda - \mu.$$

Deoarece membrul stâng al acestei egalităţi depinde de y, dar nu de z, în vreme ce membrul ei drept depinde de z, dar nu de y, rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă, pe care o notăm cu ν:

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda - \mu = \nu \in \mathbb{R}.$$

Astfel am obţinut trei ecuaţii diferenţiale ordinare, şi anume:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in (0,a);$$

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \quad y \in (0,b);$$

$$Z''(z) + (\lambda - \mu - \nu)Z(z) = 0, \quad z \in (0,c).$$

Acum folosim condiţiile la frontieră *omogene* (nule) $(8.52)_{2,3,4}$. Astfel, înlocuind

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

în relaţiile $u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0$, pentru $y \in [0,b]$, $z \in [0,c]$, $t \geq 0$, deducem că

$$X(0)Y(y)Z(z)T(t) = X(a)Y(y)Z(z)T(t) = 0, \quad \forall y \in [0,b],\ z \in [0,c],\ t \geq 0,$$

de unde, ţinând cont că $Y \not\equiv 0$, $Z \not\equiv 0$, $T \not\equiv 0$ (altfel $u \equiv 0$), obţinem că $X(0) = X(a) = 0$.

Analog, înlocuind u în relaţiile $u(x,0,z,t)=u(x,b,z,t)=0$, pentru $x\in[0,a]$, $z\in[0,c]$, $t\geq 0$, deducem că

$$X(x)Y(0)Z(z)T(t)=X(x)Y(b)Z(z)T(t)=0, \quad \forall x\in[0,a],\ z\in[0,c],\ t\geq 0,$$

de unde, ţinând cont că $X\not\equiv 0$, $Z\not\equiv 0$ şi $T\not\equiv 0$ (altfel $u\equiv 0$), obţinem că $Y(0)=Y(b)=0$.

În sfârşit, înlocuind u în relaţiile $u(x,y,0,t)=u(x,y,c,t)=0$, pentru $x\in[0,a]$, $y\in[0,b]$, $t\geq 0$, deducem că

$$X(x)Y(y)Z(0)T(t)=X(x)Y(y)Z(c)T(t)=0, \quad \forall x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ t\geq 0,$$

de unde, ţinând cont că $X\not\equiv 0$, $y\not\equiv 0$, $T\not\equiv 0$ (altfel $u\equiv 0$), obţinem că $Z(0)=Z(c)=0$.

Cuplând acum condiţiile obţinute în capetele intervalelor $[0,a]$, $[0,b]$ şi $[0,c]$ cu ecuaţiile corespunzătoare, găsim:

- problema Sturm-Liouville în X:

$$\begin{cases} X''(x)+\mu X(x)=0, & x\in(0,a)\\ X(0)=X(a)=0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\mu_k=\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2$, cu $k\in\mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $X_k(x)=\sin\dfrac{k\pi x}{a}$, unde $x\in[0,a]$, $k\in\mathbb{N}^*$;

- problema Sturm-Liouville în Y:

$$\begin{cases} Y''(y)+\nu Y(y)=0, & y\in(0,b)\\ Y(0)=Y(b)=0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\nu_m=\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$, cu $m\in\mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $Y_m(y)=\sin\dfrac{m\pi y}{b}$, pentru $y\in[0,b]$, $m\in\mathbb{N}^*$;

- problema Sturm-Liouville în Z:

$$\begin{cases} Z''(z)+\gamma Z(z)=0, & y\in(0,c) \qquad (\text{unde } \gamma=\lambda-\mu-\nu)\\ Z(0)=Z(c)=0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\gamma_n=\left(\dfrac{n\pi}{c}\right)^2$, cu $n\in\mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $Z_n(z)=\sin\dfrac{n\pi z}{c}$, pentru $z\in[0,c]$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Aşadar,

$$\lambda=\lambda_{kmn}=\mu_k+\nu_m+\gamma_n=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2,\ k,m,n\in\mathbb{N}^*, \tag{8.56}$$

iar soluţiile ecuaţiei Helmholtz în condiţiile date au forma

$$U_{kmn}(x,y,z)=\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}, \quad k,m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Înlocuind λ_{kmn} din (8.56) în ecuaţia (8.54), aceasta se transformă în:

$$T'_{kmn}(t)+\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right]\omega^2T_{kmn}(t)=0,\ t>0,\ k,m,n\in\mathbb{N}^*.$$

Această ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară omogenă are, conform formulei variaţiei constantelor, soluţia generală

$$T_{kmn}(t)=T_{0,kmn}e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right]\omega^2t}, \quad t>0, \tag{8.57}$$

unde $T_{0,kmn}$ este o constantă reală.

Revenind cu $U_{kmn}(x,y,z)$ şi $T_{kmn}(t)$ în formula (8.53), obţinem soluţiile

$$u_{kmn}(x,y,z,t)=U_{kmn}(x,y,z)T_{kmn}(t)=T_{0,kmn}e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right]\omega^2t}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c},$$

pentru $x\in(0,a)$, $y\in(0,b)$, $z\in(0,c)$, $t>0$, $k,m,n\in\mathbb{N}^*$, unde $T_{0,kmn}$ sunt constante reale.

Mai departe, soluţia formală a ecuaţiei căldurii se caută de forma

$$(8.58)\qquad \begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kmn}(x,y,z,t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{0,kmn} e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right]\omega^2 t} \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}, \end{aligned}$$

pentru $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$, $z \in (0,c)$, $t > 0$, unde $T_{0,kmn}$, $k,m,n \in \mathbb{N}^*$ sunt constante reale.

Coeficienţii $T_{0,kmn}$ se calculează din condiţia iniţială

$$u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c).$$

Ei au valorile

$$T_{0,kmn} = \frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c u_0(x,y,z)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\,dxdydz,\ k,m,n \in \mathbb{N}^*.$$

8.5. Modele din fizica matematică descrise de ecuaţia propagării căldurii

8.5.1. Propagarea căldurii. Considerăm un corp conductor termic $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cu $n = 1,2,3$. Notăm prin $u(x,t)$ temperatura în punctul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ la momentul $t \geq 0$. Fie $\rho(x)$, $c(x)$ şi $k(x)$ densitatea, căldura specifică şi, respectiv, coeficientul de conducţie termică în punctul $x \in \Omega$. Fie $F(x,t)$ şi $q(x,t)$ densitatea surselor de căldură şi, respectiv, fluxul de căldură în punctul $x \in \Omega$ la momentul t.

Conform legii lui Fourier, în intervalul de timp $(t, t+dt)$, prin suprafaţa $d\sigma$ trece cantitatea de căldură

$$(8.59)\qquad dq = -k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\,d\sigma dt = -k(x)\nabla_x u(x,t)\cdot\nu(x)\,d\sigma dt,$$

unde $\nu(x)$ este versorul normalei exterioare în punctul x la suprafaţa $d\sigma$.

Fie acum un subdomeniu (deschis) arbitrar $V \subset \Omega$, cu frontiera S. Din relaţia (8.59) şi din formula Gauss-Ostrogradski rezultă că în intervalul de timp $(t, t+dt)$ prin S trece cantitatea de căldură

$$Q = -dt\int_S k(x)\nabla_x u(x,t)\cdot\nu(x)\,d\sigma = -dt\int_V \mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x,t))\,dx.$$

Pe de altă parte, sursa de densitate F produce în V cantitatea de căldură

$$Q_1 = dt\int_V F(x,t)\,dx.$$

Cum cantitatea de căldură necesară pentru a face temperatura din volumul V să varieze de la $u(x,t)$ la $u(x,t+dt)$ este

$$Q_2 = dt\int_V c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx,$$

iar, conform bilanţului energetic, $Q_2 = Q_1 - Q$, rezultă că

$$\int_V \left(c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x,t)) - F(x,t)\right)dx = 0,$$

pentru orice t dintr-un interval de timp $(0,T)$ dat. Cum V este arbitrar, se obţine ecuaţia punctuală

$$(8.60)\qquad c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \mathrm{div}_x(k(x)\nabla_x u(x,t)) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

care descrie dinamica temperaturii în conductorul Ω.

Dacă Ω este un mediu omogen şi izotrop (adică dacă c, ρ, k sunt constante), atunci ecuaţia (8.60) se reduce la

$$(8.61)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2\Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T,$$

unde $\omega^2 = \dfrac{k}{\rho c}$ şi $f = \dfrac{F}{c\rho}$.

Ecuaţiei (8.61) i se asociază o condiţie pe frontiera Σ_T şi o condiţie iniţială.

Dacă se cunoaşte distribuţia de temperatură pe frontieră, condiţia la limită este de tip DIRICHLET:

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ (x,t) \in \Sigma_T.$$

Dacă este cunoscut fluxul de căldură g_1 în fiecare punct $(x,t) \in \Sigma_T$, atunci, conform legii lui FOURIER,

$$-k\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g_1(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T,$$

deci se obţine condiţia la frontieră de tip NEUMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T,$$

unde $g = -\frac{1}{k}g_1$. În sfârşit, dacă se cunoaşte temperatura u° a mediului exterior şi schimbul de căldură prin suprafaţa $\partial\Omega$ se face după legea lui NEWTON, atunci se obţine condiţia la frontieră de tip ROBIN:

$$-k\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u - u^\circ) \text{ pe } \Sigma_T,$$

unde h notează coeficientul de transfer termic.

Condiţia iniţială

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

furnizează distribuţia de temperatură în Ω la momentul iniţial $t = 0$.

8.5.2. Ecuaţia difuziei. Fie $u = u(x,t)$ concentraţia unei substanţe gazoase care difuzează într-un mediu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$; procesul de difuzie are loc dinspre zonele cu concentraţie mai mare spre zonele cu concentraţie mai mică. Din legea FICK-NERNST, masa de gaz care trece prin elementul de suprafaţă $d\sigma$ în intervalul temporal $(t, t + dt)$ este

$$dQ = -D(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)d\sigma dt,$$

unde $D(x)$ notează coeficientul de difuzie în punctul $x \in \Omega$. Dacă $V \subset \Omega$ este un volum arbitrar, de frontieră S, atunci variaţia masei substanţei difuzate în V în intervalul de timp $(t, t + dt)$ este dată de

$$\delta Q = -dt\int_S D(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\,d\sigma = -dt\int_V \operatorname{div}_x(D(x)\nabla_x u(x,t))\,dx.$$

Cum variaţia masei datorată variaţiei de concentraţie de la $u(x,t)$ la $u(x, t + dt)$ este

$$dt\int_V c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx,$$

unde $c(x)$ este coeficientul de porozitate în punctul $x \in \Omega$, obţinem că

$$\int_V \operatorname{div}_x(D(x)\nabla_x u(x,t))\,dx = \int_V c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

pentru orice volum $V \subset \Omega$. Prin urmare,

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \operatorname{div}_x(D(x)\nabla_x u(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{8.62}$$

Pentru c şi D constante, ecuaţia (8.62) se reduce la ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Condiţiile la frontieră şi iniţiale au forme şi interpretări similare cu cele din cazul ecuaţiei propagării căldurii.

Aceeaşi ecuaţie poate descrie dinamica populaţiei într-un habitat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sau difuzia neutronilor într-un reactor nuclear. Astfel, dacă se consideră o masă de material fisionabil care ocupă un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ şi în această masă se introduce o sursă de neutroni, aceasta poate conduce, în anumite condiţii, la o reacţie în lanţ. Într-o variantă simplificată a modelului se presupune că mişcarea neutronilor în Ω este analoagă procesului de difuzie (în realitate intervin şi fenomene de transport care complică modelul).

Atunci, notând cu $N(x,t)$ densitatea de neutroni în punctul $x \in \Omega$ la momentul t, avem, prin analogie cu ecuaţia difuziei,

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x,t) = D(x)\Delta N(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q_T, \tag{8.63}$$

unde $D(x)$ este difuzivitatea neutronică în punctul $x \in \Omega$.

Dacă presupunem că în proces apare şi o sursă de neutroni proporţională cu densitatea de neutroni, ecuaţia (8.63) se transformă în

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x,t) = D(x)\Delta N(x,t) + \alpha N(x,t), \quad \forall (x,t) \in Q_T,$$

căreia i se asociază condiţii iniţiale şi la limită.

Controlul unui reactor nuclear revine atunci la aflarea condiţiilor în care soluţia N a problemei mixte nu descreşte la 0 pentru $t \to \infty$.

CAPITOLUL 9

Ecuaţia undelor

Cursul 13

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ o mulţime deschisă şi mărginită şi $T > 0$ (finit sau infinit). Ecuaţia undelor are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ t \in (0,T),$$

unde, la fel ca în cazul ecuaţiei propagării căldurii, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ notează laplaceanul în raport cu variabilele spaţiale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, iar t este variabila timp; $\omega > 0$ este o constantă şi reprezintă viteza de propagare.

Din punct de vedere fizic, ecuaţia undelor modelează fenomenele de vibraţie ale mediilor elastice omogene sub acţiunea unei forţe distribuite, de densitate $f = f(x,t)$; ea apare şi în descrierea propagării câmpului electromagnetic, a luminii şi a altor procese ondulatorii.

Similar cu ecuaţia propagării căldurii, notăm $Q_T = \Omega \times (0,T)$ şi $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Întrucât şi ecuaţia undelor este o ecuaţie de evoluţie (funcţia necunoscută depinde de timp), ecuaţiei i se ataşează, pe lângă condiţii pe frontiera Σ_T, şi **două condiţii iniţiale** pe Ω (condiţii pentru $t = 0$). Ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{9.1}$$

împreună cu condiţia Dirichlet omogenă (nulă)

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \tag{9.2}$$

şi cu condiţiile iniţiale (condiţiile Cauchy)

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{9.3}$$

unde $f : Q_T \to \mathbb{R}, u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date, formează o problemă mixtă de tip Dirichlet-Cauchy pentru ecuaţia undelor. Condiţia la limită (9.2) poate fi înlocuită printr-o condiţie Dirichlet neomogenă:

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \ (x,t) \in \Sigma_T,$$

unde φ este o funcţie cunoscută, printr-o condiţie de tip Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T, \tag{9.4}$$

unde g este o funcţie dată şi $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ notează derivata normală a funcţiei u, sau printr-o condiţie de tip Robin:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \alpha u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_T. \tag{9.5}$$

unde g este o funcţie dată şi $\alpha > 0$.

Se numeşte soluţie clasică a problemei mixte (9.1) - (9.3) o funcţie $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, cu $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{Q_T})$, astfel încât u verifică ecuaţia (9.1) pe Q_T, condiţia la frontieră (9.2) şi condiţiile iniţiale (9.3).

Dacă $n = 1$ şi $\Omega = (0,a) \subset \mathbb{R}$, atunci ecuaţia (9.1) se transformă în

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad x \in (0,a), \ t \in (0,T)$$

şi se numeşte *ecuaţia corzii vibrante*, deoarece modelează mişcările de amplitudine mică ale unei corzi elastice, care oscilează în jurul poziţiei de echilibru Ox; coarda are extremităţile în punctele $x = 0$ şi $x = a$.

Dacă asupra corzii acţionează o forţă externă verticală, având densitatea $f(x,t)$ în punctul $x \in (0,a)$ la momentul $t > 0$, dacă $u_0 = u_0(x)$ şi $u_1 = u_1(x)$ notează amplitudinea iniţială (adică la momentul $t = 0$) şi, respectiv, viteza iniţială ale corzii, iar coarda este fixată rigid în capetele $x = 0$ şi $x = a$, atunci mişcarea sa este descrisă de problema mixtă CAUCHY-DIRICHLET:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x \in (0,a),\ t > 0 \\
u(0,t) = 0,\ u(a,t) = 0, & t \geq 0 \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a] \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in [0,a].
\end{array}
\right.
\tag{9.6}
$$

În continuare ne propunem să determinăm, cu ajutorul metodei separării variabilelor, o soluţie formală pentru problema mixtă (9.6). Când datele problemei au un grad suficient de regularitate, se poate demonstra că soluţia formală este chiar soluţie clasică.

9.1. Rezolvarea ecuaţiei corzii vibrante cu metoda lui Fourier. Cazul omogen

Considerăm problema mixtă

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in (0,a),\ t > 0 \\
u(0,t) = 0,\ u(a,t) = 0, & t \geq 0 \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a] \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in [0,a].
\end{array}
\right.
\tag{9.7}
$$

Căutăm pentru problema omogenă

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in (0,a),\ t > 0 \\
u(0,t) = 0,\ u(a,t) = 0, & t > 0
\end{array}
\right.
\tag{9.8}
$$

o soluţie cu variabilele separate, având forma

$$
u(x,t) = X(x)T(t), \quad x \in (0,a),\ t > 0. \tag{9.9}
$$

Constatăm că funcţia u nu poate fi identic nulă, fiindcă dacă $u_0 \not\equiv 0$ sau $u_1 \not\equiv 0$, atunci nu ar putea fi satisfăcută măcar una dintre condiţiile iniţiale $(9.7)_{3,4}$. Prin urmare, $X \not\equiv 0$ şi $T \not\equiv 0$.

Obligând funcţia u dată de (9.9) să verifice ecuaţia $(9.8)_1$, găsim

$$
X(x)T''(t) - \omega^2 X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(x)T''(t) = \omega^2 X''(x)T(t), \quad x \in (0,a),\ t > 0.
$$

Împărţind prin $\omega^2 X(x)T(t) \not\equiv 0$, avem

$$
\frac{T''(t)}{\omega^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad x \in (0,a),\ t > 0. \tag{9.10}
$$

Cum membrul stâng din relaţia (9.10) depinde de variabila t, dar nu de x, în vreme ce membrul ei drept depinde de variabila x, dar nu de t, pentru a avea egalitate trebuie ca ambii membri să fie constanţi în (x,t). Fie $-\lambda$ valoarea acestei constante. Rezultă că T şi X verifică ecuaţiile diferenţiale de ordinul al doilea liniare şi omogene, cu coeficienţi constanţi:

$$
T''(t) + \lambda\omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{9.11}
$$

$$
X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,a).
$$

Mai departe, obligându-l pe u dat de (9.9) să satisfacă condiţiile la limită *omogene* (adică nule)) $(9.8)_2$ rezultă (similar cu ecuaţia propagării căldurii) că $X(0) = X(a) = 0$.

Se observă acum că funcţia X verifică problema STURM-LIOUVILLE:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\
X(0) = X(a) = 0.
\end{array}
\right.
$$

Aceasta are soluţiile nenule (autofuncţiile)

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in [0, a],\ k \in \mathbb{N}^* \tag{9.12}$$

corespunzătoare autovalorilor

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{9.13}$$

Înlocuind valorile $\lambda = \lambda_k$ din (9.13) în ecuaţia (9.11), aceasta se rescrie

$$T_k''(t) + \left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{9.14}$$

Pentru a rezolva această ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi, îi asociem ecuaţia caracteristică[1] $r^2 + \left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2 = 0$, care are rădăcinile complex conjugate $r_{1,2} = \pm\frac{\omega k\pi}{a} i$. Prin urmare, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (9.14) este

$$\left\{\cos\frac{\omega k\pi t}{a}, \sin\frac{\omega k\pi t}{a}\right\},$$

iar soluţia generală a acesteia,

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\omega k\pi t}{a} + B_k \sin\frac{\omega k\pi t}{a}, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*,$$

unde A_k, B_k sunt constante reale.

Aşadar, soluţiile de forma (9.9) ale problemei (9.8) sunt

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{\omega k\pi t}{a} + B_k \sin\frac{\omega k\pi t}{a}\right) \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0, a),\ t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Întrucât problema (9.8) este liniară, conform principiului superpoziţiei şi suma seriei

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\omega k\pi t}{a} + B_k \sin\frac{\omega k\pi t}{a}\right) \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0, a),\ t > 0 \tag{9.15}$$

este soluţie a acestei probleme.

Pentru a afla constantele A_k, B_k, punem condiţia ca funcţia definită de (9.15) să verifice şi condiţiile iniţiale $(9.7)_{3,4}$. Făcând $t = 0$ în (9.15) avem:

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{a},\ x \in [0, a]. \tag{9.16}$$

Derivând (9.15) în raport cu t şi luând $t = 0$, obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-A_k \frac{\omega k\pi}{a} \sin\frac{\omega k\pi t}{a} + B_k \frac{\omega k\pi}{a} \cos\frac{\omega k\pi t}{a}\right) \sin\frac{k\pi x}{a} \overset{t=0}{\Longrightarrow}$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\omega k\pi}{a} \sin\frac{k\pi x}{a},\ x \in [0, a]. \tag{9.17}$$

Dacă funcţiile u_0 şi u_1 pot fi dezvoltate în serie Fourier de sinusuri:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin\frac{k\pi x}{a},\ x \in [0, a], \tag{9.18}$$

unde coeficienţii $(u_{0k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de formulele

$$u_{0k} = \frac{2}{a}\int_0^a u_0(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\, dx,\ k \in \mathbb{N}^*, \tag{9.19}$$

[1] Întrucât litera λ este deja folosită, vom nota necunoscuta din ecuaţia caracteristică prin r.

respectiv

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} \sin \frac{k\pi x}{a},\ x \in [0,a], \tag{9.20}$$

unde coeficienţii $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de formulele

$$u_{1k} = \frac{2}{a}\int_0^a u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx,\ k \in \mathbb{N}^*, \tag{9.21}$$

atunci, din unicitatea dezvoltării în serie FOURIER şi perechile de relaţii (9.16) – (9.18) şi (9.17) – (9.20) rezultă că $A_k = u_{0k}$, $B_k = \dfrac{a}{\omega k\pi} u_{1k}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, *soluţia formală* a problemei (9.7)este funcţia

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{0k} \cos \frac{\omega k \pi t}{a} + \frac{a}{\omega k \pi} u_{1k} \sin \frac{\omega k \pi t}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in (0,a),\ t>0, \tag{9.22}$$

unde u_{0k} şi u_{1k} se află din relaţiile (9.19) şi, respectiv, (9.21).

Caracterul formal al soluţiei (9.22) provine din acceptarea faptului că suma seriei este soluţie a problemei (9.8) fiindcă toţi termenii seriei au această proprietate. Acest lucru nu este adevărat, în general, ci doar în anumite condiţii de regularitate asupra datelor problemei. De exemplu, dacă $u_0 \in C^2([0,a])$, $u_0(0) = u_0(a) = 0$, $u_0''(0) = u_0''(a) = 0$, $u_1 \in C^1([0,a])$, $u_1(0) = u_1(a) = 0$, atunci soluţia formală (9.22) este chiar soluţie clasică a problemei (9.7).

9.2. Rezolvarea ecuaţiei corzii vibrante cu metoda lui Fourier. Cazul neomogen

Fie acum problema mixtă cu condiţii DIRICHLET omogene pentru ecuaţia neomogenă a corzii vibrante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x \in (0,a),\ t>0 \\ u(0,t) = 0,\ u(a,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,a] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in [0,a]. \end{cases} \tag{9.23}$$

Prin analogie cu cazul omogen, căutăm pentru problema (9.23) o soluţie de forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t), \quad x \in (0,a),\ t>0, \tag{9.24}$$

unde $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt autofuncţiile problemei STURM-LIOUVILLE:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{9.25}$$

Această problemă are autovalorile

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^*, \tag{9.26}$$

cărora le corespund autofuncţiile

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad x \in [0,a],\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{9.27}$$

OBSERVAŢIE. Întrucât $X_k(0) = X_k(a) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că funcţia u dată prin formula (9.24) satisface:

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{X_k(0)}_{=0} T_k(t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(a,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{X_k(a)}_{=0} T_k(t) = 0, \quad t \geq 0;$$

altfel spus, u îndeplineşte condiţiile la frontieră $(9.23)_2$.

Aşadar deocamdată

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{a},\quad x\in(0,a),\ t>0. \tag{9.28}$$

Presupunem că datele problemei, funcţiile f, u_0 şi u_1, sunt dezvoltabile în serii FOURIER de sinusuri:

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)f_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{a},\quad x\in(0,a),\ t>0,$$

unde coeficienţii FOURIER $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de relaţia:

$$f_k(t)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx,\quad t>0,\ k\in\mathbb{N}^*; \tag{9.29}$$

apoi

$$u_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)u_{0k}=\sum_{k=1}^{\infty}u_{0k}\sin\frac{k\pi x}{a},\quad x\in[0,a],$$

unde coeficienţii FOURIER $(u_{0k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi prin:

$$u_{0k}=\frac{2}{a}\int_0^a u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx,\quad k\in\mathbb{N}^*; \tag{9.30}$$

în sfârşit,

$$u_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)u_{1k}=\sum_{k=1}^{\infty}u_{1k}\sin\frac{k\pi x}{a},\quad x\in[0,a],$$

unde coeficienţii FOURIER $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ se calculează prin formula:

$$u_{1k}=\frac{2}{a}\int_0^a u_1(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx,\quad k\in\mathbb{N}^*. \tag{9.31}$$

Înlocuind funcţia u dată de (9.24) în ecuaţia $(9.23)_1$, obţinem

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k''(t)-\omega^2\sum_{k=1}^{\infty}X_k''(x)T_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)f_k(t)\\
\overset{(9.25)_1}{\Leftrightarrow}\ &\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k''(t)-\omega^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\lambda_kX_k(x)\right)T_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)f_k(t)\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left(T_k''(t)+\omega^2\lambda_kT_k(t)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)f_k(t),\quad x\in(0,a),\ t>0.
\end{aligned}$$

Din unicitatea descompunerii în serie FOURIER rezultă şirul de ecuaţii:

$$T_k''(t)+\omega^2\lambda_kT_k(t)=f_k(t),\quad t>0,\ k\in\mathbb{N}^*$$

sau, echivalent, conform relaţiei (9.26),

$$T_k''(t)+\left(\frac{\omega k\pi}{a}\right)^2T_k(t)=f_k(t),\quad t>0,\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte, înlocuind expresia (9.24) a funcţiei u în condiţiile iniţiale $(9.23)_{3,4}$, obţinem

$$\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(0)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)u_{0k},$$

prin urmare

$$T_k(0)=u_{0k},\quad k\in\mathbb{N}^*,$$

respectiv

$$\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k'(0)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)u_{1k},$$

adică

$$T_k'(0) = u_{1k}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Aşadar coeficienţii T_k, $k \in \mathbb{N}^*$ verifică problema CAUCHY

$$\begin{cases} T_k''(t) + \left(\dfrac{\omega k\pi}{a}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad t > 0 \\ T_k(0) = u_{0k} \\ T_k'(0) = u_{1k}. \end{cases} \tag{9.32}$$

Aflăm soluţia problemei CAUCHY (9.32) prin metoda variaţiei constantelor. Deoarece ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei liniare şi neomogene, cu coeficienţi constanţi $(9.32)_1$ este exact ecuaţia (9.14) şi are sistemul fundamental de soluţii $\left\{\cos\dfrac{\omega k\pi t}{a}, \sin\dfrac{\omega k\pi t}{a}\right\}$, căutăm soluţia ecuaţiei $(9.32)_1$ de forma

$$T_k(t) = C_1(t)\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + C_2(t)\sin\frac{\omega k\pi t}{a}, \tag{9.33}$$

unde C_1, C_2 sunt funcţii de clasă C^1. Derivatele acestora verifică sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos\dfrac{\omega k\pi t}{a} + C_2'(t)\sin\dfrac{\omega k\pi t}{a} = 0 \\ -\dfrac{\omega k\pi}{a}C_1'(t)\sin\dfrac{\omega k\pi t}{a} + \dfrac{\omega k\pi}{a}C_2'(t)\cos\dfrac{\omega k\pi t}{a} = f_k(t). \end{cases} \tag{9.34}$$

Înmulţim prima ecuaţie din sistemul (9.34) cu $-\dfrac{\omega k\pi}{a}\cos\dfrac{\omega k\pi t}{a}$ şi pe a doua cu $\sin\dfrac{\omega k\pi t}{a}$ şi le adunăm. Rezultă că

$$-\frac{\omega k\pi}{a}C_1'(t) = f_k(t)\sin\frac{\omega k\pi t}{a},$$

de unde

$$C_1'(t) = -\frac{a}{\omega k\pi}f_k(t)\sin\frac{\omega k\pi t}{a}.$$

Integrând această relaţie de la 0 la t obţinem[2]

$$C_1(t) - C_1(0) = -\frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds.$$

Dar, făcând $t = 0$ în relaţia (9.33) şi utilizând condiţia iniţială $(9.32)_2$, găsim $C_1(0) = T_k(0) = u_{0k}$. Prin urmare,

$$C_1(t) = u_{0k} - \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds.$$

Mai departe, înlocuind $C_1'(t)$ în prima ecuaţie din sistemul (9.34), rezultă relaţia

$$C_2'(t) = \frac{a}{\omega k\pi}f_k(t)\cos\frac{\omega k\pi t}{a},$$

pe care o integrăm de la 0 la t şi obţinem

$$C_2(t) - C_2(0) = \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\cos\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds.$$

Pentru a afla $C_2(0)$ derivăm relaţia (9.33):

$$T_k'(t) = C_1'(t)\cos\frac{\omega k\pi t}{a} - C_1(t)\frac{\omega k\pi}{a}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + C_2'(t)\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + C_2(t)\frac{\omega k\pi}{a}\cos\frac{\omega k\pi t}{a},$$

facem $t = 0$ şi, folosind condiţia iniţială $(9.32)_3$, găsim $u_{1k} = T_k'(0) = C_1'(0) + C_2(0)\dfrac{\omega k\pi}{a}$. Dar, făcând $t = 0$ şi în expresia lui $C_1'(t)$, obţinem $C_1'(0) = 0$. În concluzie, $C_2(0) = \dfrac{a}{\omega k\pi}u_{1k}$, iar

$$C_2(t) = \frac{a}{\omega k\pi}u_{1k} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\cos\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds.$$

[2]Conform formulei LEIBNIZ-NEWTON, $\displaystyle\int_0^t F'(s)ds = F(s)\Big|_0^t = F(t) - F(0)$.

Înlocuind $C_1(t)$ şi $C_2(t)$ calculate mai sus în formula (9.33) a lui $T_k(t)$, avem

$$\begin{aligned}
T_k(t) &= \left(u_{0k} - \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds\right)\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \left(\frac{a}{\omega k\pi}u_{1k} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\cos\frac{\omega k\pi s}{a}\,ds\right)\sin\frac{\omega k\pi t}{a}\\
&= u_{0k}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}u_{1k}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\left(-\sin\frac{\omega k\pi s}{a}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \cos\frac{\omega k\pi s}{a}\sin\frac{\omega k\pi t}{a}\right)ds\\
&= u_{0k}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}u_{1k}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\omega k\pi(t-s)}{a}\,ds, \quad t>0, k\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Ducând această funcţie în (9.28), găsim soluţia formală a problemei (9.23):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{0k}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}u_{1k}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{\omega k\pi(t-s)}{a}\,ds\right)\sin\frac{k\pi x}{a}, \tag{9.35}$$

pentru $x\in(0,a)$, $t>0$, unde f_k, u_{0k}, u_{1k}, $k\in\mathbb{N}^*$ se calculează prin formulele (9.29) – (9.31).

Dacă u_0, u_1 şi f verifică proprietăţi de regularitate care asigură faptul că seria (9.35) ce defineşte soluţia formală, precum şi seriile derivatelor până la ordinul al doilea în raport cu t şi x sunt absolut şi uniform convergente, se poate arăta (prin verificare directă) că soluţia formală dată de relaţia (9.35) este chiar soluţia clasică a problemei mixte (9.23).

Observaţia 9.2.1. *Problema mixtă cu condiţii la limită* Dirichlet *neomogene*

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x\in(0,a),\ t>0\\
u(0,t)=\mu_1(t),\ u(a,t)=\mu_2(t), & t\ge 0\\
u(x,0)=u_0(x), & x\in[0,a]\\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x), & x\in[0,a].
\end{cases} \tag{9.36}$$

se reduce la o problemă cu condiţii la limită Dirichlet *omogene prin transformarea*

$$v(x,t) = u(x,t) - \mu_1(t) - \frac{x}{a}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Pentru a găsi această transformare raţionăm ca la ecuaţia propagării căldurii: vrem să scădem din funcţia u o funcţie w astfel încât

$$w(0,t)=\mu_1(t),\ w(a,t)=\mu_2(t), \quad t\ge 0,$$

dar funcţia diferenţă $v=u-w$ să verifice tot ecuaţia undelor, motiv pentru care cerem funcţiei w să satisfacă $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)=0$, pentru $x\in(0,a)$, $t>0$; evident, se obţine aceeaşi funcţie

$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{a}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$$

ca în capitolul precedent.

Mai departe,

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{a}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right];$$

înlocuind în (9.36) şi ţinând cont că

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \mu_1'(t) + \frac{x}{a}\left[\mu_2'(t)-\mu_1'(t)\right], \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = \mu_1''(t) + \frac{x}{a}\left[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)\right], \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)=0,$$

obţinem că funcţia v verifică problema mixtă:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + \mu_1''(t) + \dfrac{x}{a}\left[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)\right] - \omega^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), & x\in(0,a), t>0\\
v(0,t)+\mu_1(t)=\mu_1(t),\ v(a,t)+\mu_2(t)=\mu_2(t), & t\ge 0\\
v(x,0)+\mu_1(0)+\dfrac{x}{a}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right] = u_0(x), & x\in[0,a]\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)+\mu_1'(0)+\dfrac{x}{a}\left[\mu_2'(0)-\mu_1'(0)\right] = u_1(x), & x\in[0,a]
\end{cases}$$

sau, mai simplu scris,

$$\text{(9.37)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = g(x,t), & x \in (0,a),\ t > 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in [0,a] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x), & x \in [0,a], \end{cases}$$

unde am notat

$$g(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{a}\left[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right], \quad x \in (0,a), t > 0,$$

$$v_0(x) = u_0(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{a}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right], \quad x \in [0,a],$$

$$v_1(x) = u_1(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{a}\left[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right] \quad x \in [0,a].$$

Prin urmare, soluţia formală a problemei mixte (9.37) este

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(v_{0k}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}v_{1k}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t g_k(s)\sin\frac{\omega k\pi(t-s)}{a}\,ds\right)\sin\frac{k\pi x}{a},$$

pentru $x \in (0,a)$, $t > 0$, unde

$$\text{(9.38)} \qquad g_k(t) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x,t)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{(9.39)} \qquad v_{0k} = \frac{2}{a}\int_0^a v_0(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{(9.40)} \qquad v_{1k} = \frac{2}{a}\int_0^a v_1(x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

În final, soluţia formală a problemei mixte (9.36) este

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(v_{0k}\cos\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}v_{1k}\sin\frac{\omega k\pi t}{a} + \frac{a}{\omega k\pi}\int_0^t g_k(s)\sin\frac{\omega k\pi(t-s)}{a}\,ds\right)\sin\frac{k\pi x}{a}$$

$$+\mu_1(t) + \frac{x}{a}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right], \quad x \in (0,a),\ t > 0.$$

Exemplu. Să se rezolve problema mixtă:

$$\text{(9.41)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in (0,\pi), \quad t > 0 \\ u(0,t) = \alpha,\ u(\pi,t) = \beta t^2, & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0, & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt constante.

Deoarece condiţiile la limită $(9.41)_2$ sunt neomogene, vom scădea din funcţia u o funcţie w cu proprietăţile:

$$w(0,t) = \alpha,\ w(\pi,t) = \beta t^2, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in (0,\pi),\ t > 0.$$

Rezolvăm mai întâi ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0 \ \Big|\int dx \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = C_1(t)\ \Big|\int dx \Rightarrow w(x,t) = C_1(t)\int dx = C_1(t)x + C_2(t), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0.$$

Impunând condiţiile la fromtieră neomogene, găsim

$$\begin{cases} w(0,t)=\alpha \\ w(\pi,t)=\beta t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t)\cdot 0 + C_2(t)=\alpha \\ C_1(t)\pi + C_2(t)=\beta t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(t)=\alpha \\ C_1(t)\pi+\alpha=\beta t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(t)=\alpha \\ C_1(t)=\dfrac{1}{\pi}(\beta t^2-\alpha). \end{cases}$$

Prin urmare, $w(x,t)=\dfrac{1}{\pi}(\beta t^2-\alpha)x+\alpha$, pentru $x\in(0,a)$, $t>0$.

Fie $v=u-w$. Scriem problema mixtă verificată de funcţia w. Înlocuind $u=v+w$ în problema mixtă (9.41), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)=0, & x\in(0,\pi), \quad t>0 \\ v(0,t)+w(0,t)=\alpha,\ v(\pi,t)+w(\pi,t)=\beta t^2, & \qquad\qquad t>0 \\ v(x,0)+w(x,0)=0, & x\in(0,\pi) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)+\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0)=0, & x\in(0,\pi) \end{cases}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)+\dfrac{2\beta x}{\pi}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)-0=0, & x\in(0,\pi), \quad t>0 \\ v(0,t)+\alpha=\alpha,\ v(\pi,t)+\beta t^2=\beta t^2, & \qquad\qquad t>0 \\ v(x,0)+\alpha-\dfrac{\alpha x}{\pi}=0, & x\in(0,\pi) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)+0=0, & x\in(0,\pi), \end{cases}$$

de unde obţinem că v este soluţia problemei mixte cu condiţii la limită omogene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)=-\dfrac{2\beta x}{\pi}, & x\in(0,\pi), \quad t>0 \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0, & \qquad\qquad t>0 \\ v(x,0)=\dfrac{\alpha x}{\pi}-\alpha, & x\in(0,\pi), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=0 & x\in(0,\pi). \end{cases} \tag{9.42}$$

Rezolvăm această problemă. Scriem problema STURM-LIOUVILLE:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & x\in(0,\pi) \\ X(0)=X(\pi)=0, \end{cases} \tag{9.43}$$

care are autovalorile

$$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{\pi}\right)^2=k^2,\text{ unde } k\in\mathbb{N}^*, \tag{9.44}$$

cărora le corespund autofuncţiile

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{\pi}=\sin kx, \quad x\in[0,\pi],\ k\in\mathbb{N}^*. \tag{9.45}$$

Aşadar, trebuie să căutăm pentru problema (9.42) o soluţie de forma

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin kx, \quad x\in(0,\pi),\ t>0, \tag{9.46}$$

Acum dezvoltăm în serie FOURIER datele problemei: membrul drept al ecuaţiei, $g(x,t)=-\dfrac{2\beta x}{\pi}$, cu $x\in(0,\pi)$, $t>0$ şi datele iniţiale $v_0(x)=\dfrac{\alpha x}{\pi}-\alpha$, $v_1(x)=0$, cu $x\in(0,\pi)$.

Avem

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\sin kx, \quad x\in(0,\pi),\ t>0,$$

unde coeficienţii FOURIER $(g_k(t))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de relaţia:

$$\begin{aligned} g_k(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x,t)\sin kx\,dx = -\frac{4\beta}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin kx\,dx = \frac{4\beta}{\pi^2}\int_0^\pi x\left(\frac{\cos kx}{k}\right)' dx \\ &= \frac{4\beta}{\pi^2}\left[x\,\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx\,dx\right] = \frac{4\beta}{\pi^2}\left[\frac{\pi\cos k\pi}{k} - \frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^\pi\right], \end{aligned}$$

adică

$$g_k(t) = \frac{4\beta(-1)^k}{k\pi},\quad t>0,\ k\in\mathbb{N}^*. \tag{9.47}$$

Mai departe,

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^\infty v_{0k}\sin kx,\quad x\in(0,\imath),$$

unde coeficienţii FOURIER $(v_{0k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi prin:

$$\begin{aligned} v_{0k} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\alpha x}{\pi}-\alpha\right)\sin kx\,dx = \frac{2\alpha}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin kx\,dx - \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\pi \sin kx\,dx \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi^2}\cdot\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{2\alpha}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k}\bigg|_0^\pi = \frac{2\alpha(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{2\alpha\left((-1)^k-1\right)}{k\pi}, \end{aligned}$$

adică, ţinând cont că $(-1)^{k+1}+(-1)^k = (-1)^k(-1+1)=0$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$,

$$v_{0k} = -\frac{2\alpha}{k\pi},\quad k\in\mathbb{N}^*. \tag{9.48}$$

În sfârşit,

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^\infty v_{1k}\sin kx,\quad x\in(0,\pi),$$

unde coeficienţii FOURIER $(v_{1k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ se calculează prin formula:

$$v_{1k} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_1(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 0\cdot\sin kx\,dx = 0,\quad k\in\mathbb{N}^*. \tag{9.49}$$

Funcţiile T_k, $k\in\mathbb{N}^*$ verifică problema CAUCHY

$$\begin{cases} T_k''(t) + \omega^2\lambda_k T_k(t) = g_k(t), & t>0 \\ T_k(0) = v_{0k} \\ T_k'(0) = v_{1k}, \end{cases}$$

adică, ţinând cont că $\omega=1$ şi înlocuind λ_k, $g_k(t)$, v_{0k}, v_{1k} din relaţiile (9.44), (9.47) – (9.49),

$$\begin{cases} T_k''(t) + k^2T_k(t) = \dfrac{4\beta(-1)^k}{k\pi}, & t>0 \\ T_k(0) = -\dfrac{2\alpha}{k\pi} \\ T_k'(0) = 0. \end{cases} \tag{9.50}$$

Ecuaţia $(9.50)_1$ este o ecuaţie diferenţială liniară şi neomogenă, cu coeficienţi constanţi. Soluţia ei generală are forma

$$T_k(t) = T_k^o(t) + T_k^p(t),\quad t>0,\ k\in]Ns,$$

unde T_k^o este soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate,

$$T_k''(t) + k^2T_k(t) = 0, \tag{9.51}$$

iar T_k^p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(9.50)_1$.

Deoarece ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei (9.51) este $r^2+k^2=0$ şi are rădăcinile $r_{1,2}=\pm ik$, rezultă că un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (9.51) este $\{\cos kt, \sin kt\}$, iar soluţia generală a acesteia,

$$T_k^o(t) = A_k\cos kt + B_k\sin kt,\quad t>0, \tag{9.52}$$

unde $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ sunt constante. Mai departe, fiindcă membrul drept al ecuaţiei neomogene $(9.50)_1$ este un polinom constant, iar $\gamma = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (a se vedea pagina 64), căutăm o soluţie particulară pentru $(9.50)_1$ de forma $T_k^p(t) = c_k$ constantă. Obligând-o să verifice $(9.50)_1$, obţinem

$$0 + k^2 c_k = \frac{4\beta(-1)^k}{k\pi} \Rightarrow c_k = \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi},$$

adică

$$T_k^p(t) = \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{9.53}$$

Adunând (9.52) şi (9.53), obţinem că soluţia generală a ecuaţiei $(9.50)_1$ este

$$T_k(t) = T_k^o(t) + T_k^p(t) = A_k \cos kt + B_k \sin kt + \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*, \tag{9.54}$$

unde $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ sunt constante, pe care le vom afla din condiţiile iniţiale $(9.50)_{2,3}$. Mai precis, făcând $t = 0$ în (9.54) găsim

$$T_k(0) = A_k + \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi} = -\frac{2\alpha}{k\pi},$$

de unde $A_k = -\dfrac{2\alpha}{k\pi} - \dfrac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}$. Derivând (9.54) şi luând $t = 0$, găsim

$$T_k'(t) = -A_k k \sin kt + B_k k \cos kt \overset{t=0}{\Longrightarrow} T_k'(0) = B_k k = 0 \overset{k\in\mathbb{N}^*}{\Longrightarrow} B_k = 0.$$

Aşadar soluţia problemei Cauchy (9.50) este

$$T_k(t) = \left(-\frac{2\alpha}{k\pi} - \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}\right)\cos kt + \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}, \quad t > 0,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

În final, înlocuind T_k în formula (9.46), obţinem soluţia formală a problemei mixte (9.42):

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2\alpha}{k\pi} - \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}\right)\cos kt + \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}\right] \sin kx, \quad x \in (0,\pi),\ t > 0.$$

În concluzie, soluţia formală a problemei mixte (9.41) este:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \frac{1}{\pi}(\beta t^2 - \alpha)x + \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2\alpha}{k\pi} - \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}\right)\cos kt + \frac{4\beta(-1)^k}{k^3\pi}\right] \sin kx,$$

pentru $x \in (0,\pi),\ t > 0$.

9.3. Membrana vibrantă

Fie o membrană elastică de lungime a şi lăţime b şi notăm cu $u(x,y,t)$ deplasarea faţă de poziţia de echilibru (aflată în planul xOy) a punctului $(x,y) \in (0,a) \times (0,b)$ la momentul $t \geq 0$. Ne propunem să aflăm soluţia formală a problemei mixte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) - \omega^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)\right) = 0, & x \in (0,a), \quad y \in (0,b), \quad t > 0 \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, & y \in [0,b], \quad t \geq 0 \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & x \in [0,a], \quad t \geq 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & x \in [0,a], \quad y \in [0,b] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u_1(x,y). & x \in [0,a], \quad y \in [0,b] \end{cases} \tag{9.55}$$

Căutăm pentru problema $(9.55)_{1,2,3}$ o soluţie neidentic nulă, cu variabilele separate, de forma

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t), \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ t > 0. \tag{9.56}$$

Obligând funcţia u să verifice ecuaţia $(9.55)_1$, obţinem

$$U(x,y)T''(t) - \omega^2 \Delta U(x,y)T(t) = 0 \Leftrightarrow U(x,y)T''(t) = \omega^2 \Delta U(x,y)T(t),$$

de unde, prin împărţire cu $\omega^2 U(x,y)T(t) \not\equiv 0$, rezultă

$$\frac{\Delta U(x,y)}{U(x,y)} = \frac{T''(t)}{\omega^2 T(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

(membrul stâng al acestei ecuaţii nu depinde de t, iar membrul ei drept nu depinde de x, y, deci ambii membri trebuiau să fie egali cu o constantă, pe care am notat-o $-\lambda$). Astfel suntem conduşi la o ecuaţie diferenţială ordinară de ordin doi liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi:

$$T''(t) + \lambda\omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{9.57}$$

şi o ecuaţie cu derivate parţiale de tip Helmholtz:

$$\Delta U(x,y) + \lambda U(x,y) = 0, \quad 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b. \tag{9.58}$$

Căutăm o soluţie nebanală a ecuaţiei (9.58) de forma

$$U(x,y) = X(x)Y(y), \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b).$$

Obligând-o să verifice ecuaţia Helmholtz, găsim, la fel cum am procedat în secţiunea 8.3, ecuaţiile diferenţiale ordinare

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in (0,a) \quad \text{şi } Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0,\ y \in (0,b). \tag{9.59}$$

Punând condiţiile la limită $(9.55)_{2,3}$ asupra funcţiei $u(x,y,t) = U(x,y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$ şi ţinând cont că funcţiile X, Y, T nu pot fi identic nule (altfel $u \equiv 0$), rezultă că $X(0) = X(a) = 0$, respectiv $Y(0) = Y(b) = 0$. Cuplând acum condiţiile obţinute în capetele intervalelor cu ecuaţiile corespunzătoare, obţinem:

- problema Sturm-Liouville în X:

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\mu_k = \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2$, cu $k \in \mathbb{N}$, şi autofuncţiile corespunzătoare $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{a}$, unde $x \in [0,a]$, $k \in \mathbb{N}^*$;

- problema Sturm-Liouville în Y:

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, & y \in (0,b) \qquad (\text{unde } \nu = \lambda - \mu) \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

care are autovalorile $\nu_n = \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, şi autofuncţiile corespunzătoare $Y_n(y) = \sin\dfrac{n\pi y}{b}$, pentru $y \in [0,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă atunci că

$$\lambda = \lambda_{kn} = \mu_k + \nu_n = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad k,n \in \mathbb{N}^*, \tag{9.60}$$

iar soluţiile ecuaţiei Helmholtz în condiţiile date sunt

$$U_{kn}(x,y) = X_k(x)Y_n(y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ k,n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru uşurinţa calculelor, fie

$$\alpha_{kn} = \sqrt{\lambda_{kn}} = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad k,n \in \mathbb{N}^*. \tag{9.61}$$

Cum $\lambda = \lambda_{kn} = \alpha_{kn}^2$, ecuaţia (9.57) se rescrie:

$$T''_{kn}(t) + (\omega\alpha_{kn})^2 T_{kn}(t) = 0, \quad t > 0,\ k,n \in \mathbb{N}^* \tag{9.62}$$

şi are ecuaţia caracteristică asociată $r^2 + (\omega\alpha_{kn})^2 = 0$, cu rădăcinile caracteristice $r_{1,2} = \pm\omega\alpha_{kn} i \in \mathbb{C}$. Prin urmare, un sistem fundamental de soluţii asociat ecuaţiei (9.62) este $\{\cos(\omega\alpha_{kn}t), \sin(\omega\alpha_{kn}t)\}$, iar soluţia ei generală,

$$T_{kn}(t) = A_{kn}\cos(\omega\alpha_{kn}t) + B_{kn}\sin(\omega\alpha_{kn}t), \quad t > 0,\ k,n \in \mathbb{N}^*, \tag{9.63}$$

unde A_{kn}, B_{kn} sunt constante reale.

Înlocuind $U_{kn}(x,y)$ şi $T_{kn}(t)$ în relaţia (9.56), obţinem soluţiile fundamentale

$$u_{kn}(x,y,t) = U_{kn}(x,y)T_{kn}(t) = [A_{kn}\cos(\omega\alpha_{kn}t) + B_{kn}\sin(\omega\alpha_{kn}t)]\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

pentru $x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ k,n \in \mathbb{N}^*$.

În continuare căutăm soluţia problemei mixte (9.55) sub forma seriei duble:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{kn}\cos(\alpha_{kn}\omega t) + B_{kn}\sin(\alpha_{kn}\omega t)]\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b), \tag{9.64}$$

unde A_{kn}, B_{kn}, cu $n,k \in \mathbb{N}^*$ sunt constante reale. Acestea se află din condiţiile iniţiale $(9.55)_{4,5}$. Astfel, făcând $t=0$ în (9.64), obţinem

$$u_0(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{kn}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),$$

aşadar

$$A_{kn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad k,n \in \mathbb{N}^*. \tag{9.65}$$

Mai departe, derivăm (9.64) în raport cu t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[-A_{kn}\alpha_{kn}\omega\sin(\alpha_{kn}\omega t) + B_{kn}\alpha_{kn}\omega\cos(\alpha_{kn}\omega t)]\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b)$$

şi apoi facem $t=0$, obţinând

$$u_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{kn}\alpha_{kn}\omega\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b).$$

Rezultă că

$$B_{kn} = \frac{4}{ab\alpha_{kn}\omega}\int_0^a\int_0^b u_1(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy, \quad k,n \in \mathbb{N}^*. \tag{9.66}$$

În concluzie, soluţia formală a problemei mixte (9.55) este dată de formula (9.64), unde coeficienţii A_{kn}, B_{kn}, $k,n \in \mathbb{N}^*$ se calculează prin formulele (9.65), (9.66), iar α_{kn} sunt daţi de (9.61).

9.4. Propagarea undelor într-un corp tridimensional

Propagarea undelor datorate unei perturbări iniţiale într-un corp tridimensional este descrisă de problema mixtă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t) - \omega^2\Delta u(x,y,z,t) = 0, & x \in (0,a), & y \in (0,b), & z \in (0,c), & t > 0 \\ u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0, & & y \in [0,b], & z \in [0,c], & t \geq 0 \\ u(x,0,z,t) = u(x,b,z,t) = 0, & x \in [0,a], & & z \in [0,c], & t \geq 0 \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,c,t) = 0, & x \in [0,a], & y \in [0,b], & & t \geq 0 \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & x \in [0,a], & y \in [0,b], & z \in [0,c] & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = u_1(x,y,z), & x \in [0,a], & y \in [0,b], & z \in [0,c], & \end{cases} \tag{9.67}$$

unde $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Căutăm pentru problema $(9.67)_{1-4}$ o soluţie neidentic nulă, cu variabilele separate, de forma,

$$u(x,y,z,t) = U(x,y,z)T(t) \not\equiv 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b),\ z \in (0,c),\ t > 0. \tag{9.68}$$

Înlocuind u în ecuaţia $(9.67)_1$, obţinem $U(x,y,z)T''(t) - \omega^2\Delta U(x,y,z)T(t) = 0$, care se rescrie, echivalent,

$$\frac{\Delta U(x,y,z)}{U(x,y,z)} = \frac{T''(t)}{\omega^2 T(t)} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

(membrul stâng al acestei ecuaţii nu depinde de t, iar membrul ei drept nu depinde de variabilele spaţiale x, y, z, deci ambii membri sunt egali cu o constantă, pe care am notat-o $-\lambda$). Se separă astfel o ecuaţie diferenţială ordinară de ordin doi, liniară şi omogenă, cu coeficienţi constanţi, anume

$$T''(t) + \lambda\omega^2 T(t) = 0, \quad t > 0, \tag{9.69}$$

şi o ecuaţie cu derivate parţiale de tip Helmholtz:

$$\Delta U(x, y, z) + \lambda U(x, y, z) = 0, \quad x \in (0, a),\ y \in (0, b),\ z \in (0, c). \tag{9.70}$$

Căutăm pentru ecuaţia Helmholtz (9.70) o soluţie neidentic nulă, cu variabilele separate, de forma

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \not\equiv 0.$$

Înlocuind

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

în condiţiile la frontieră $(9.67)_{2-4}$, găsim

$$X(0) = X(a) = 0,\ Y(0) = Y(b) = 0,\ Z(0) = Z(c) = 0.$$

Procedând ca în secţiunea 8.4, obţinem

$$\lambda = \lambda_{kmn} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2, \tag{9.71}$$

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{c},$$

unde $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci soluţiile fundamentale ale ecuaţiei Helmholtz (9.70) iau forma

$$U_{kmn}(x, y, z) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}, \quad k, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum ecuaţia (9.69) are ecuaţia caracteristică $r^2 + \lambda\omega^2 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\omega i \in \mathbb{C}$, deci soluţia generală $T(t) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\omega t\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\omega t\right)$, unde A, B sunt constante, rezultă că putem căuta soluţia problemei mixte (9.67) sub forma seriei

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{kmn}\cos\left(\sqrt{\lambda_{kmn}}\omega t\right) + B_{kmn}\sin\left(\sqrt{\lambda_{kmn}}\omega t\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}, \tag{9.72}$$

pentru $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$, $z \in (0, c)$, $t > 0$, unde A_{kmn}, B_{kmn} sunt constante reale, pentru $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ şi se află din condiţiile iniţiale $(9.67)_{5,6}$ (facem $t = 0$ în (9.72) şi în (9.72) derivată în t), găsindu-se pentru ei valorile

$$A_{kmn} = \frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c u_0(x, y, z)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\,dxdydz$$

$$B_{kmn} = \frac{8}{abc\sqrt{\lambda_{kmn}}\omega}\int_0^a\int_0^b\int_0^c u_1(x, y, z)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\,dxdydz.$$

Aşadar, soluţia formală a problemei mixte (9.67) este dată de seria (9.72), unde coeficienţii A_{kmn}, B_{kmn}, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ sunt calculaţi mai sus, iar λ_{kmn} sunt date de relaţia (9.71).

9.5. Coarda vibrantă. Model matematic

Fie o coardă flexibilă, de lungime a, fixată la capete, care în poziţia de echilibru ia forma unui segment de dreaptă. Presupunem că la momentul $t = 0$ coarda este scoasă din poziţia de echilibru, care coincide cu direcţia axei Ox, şi începe să vibreze.

Fie $u(x, t)$ amplitudinea (abaterea corzii de la poziţia de echilibru) în punctul de abscisă x, la momentul t; altfel spus, $u(x, t)$ este deplasarea verticală a punctului de pe coardă aflat la distanţa x de origine la momentul t.

Pentru simplitate lucrăm în următoarele ipoteze:

a) Deplasările corzii se află în acelaşi plan (xOu), iar direcţia deplasării este perpendiculară pe axa Ox; rezultă că fenomenul poate fi descris printr-o singură funcţie $u(x, t)$, care caracterizează deplasarea verticală a corzii.

b) Coarda este flexibilă şi elastică, adică tensiunile care apar în coardă sunt orientate mereu după tangentele la profilul ei instantaneu şi coarda nu se opune la flexiune.
c) Nu există elongaţii ale niciunui segment al corzii, deci, conform legii lui HOOKE, mărimea tensiunii $T(x,t)$ este constantă: $|T(x,t)| = T_0$, pentru orice $x \in (0,a)$ şi orice $t > 0$.
d) Forţele exterioare precum rezistenţa aerului şi greutatea corzii sunt neglijabile.
e) Panta $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ în fiecare punct al corzii (deplasate) este neglijabilă, de unde rezultă că amplitudinea u este mică în raport cu lungimea corzii.

Alegem un arc oarecare $\overset{\frown}{M_1M_2}$ de pe coardă, punctele M_1 şi M_2 având coordonatele (x,u) şi, respectiv, $(x+\Delta x, u+\Delta u)$. Notăm cu T_1 şi T_2 tensiunile în M_1 şi, respectiv, M_2 care, conform ipotezei b), acţionează pe direcţiile tangentelor la arcul $\overset{\frown}{M_1M_2}$ în cele două puncte. Notăm cu Δs lungimea arcului $\overset{\frown}{M_1M_2}$ şi cu $\rho(x)$ densitatea liniară de masă a corzii în punctul de abscisă x. Întrucât fiecare punct al corzii se mişcă doar pe direcţia normală la axa Ox, rezultă că tensiunile T_1 şi T_2 au componentele orizontale egale, adică $-T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0$ sau $T_1\cos\alpha_1 = T_2\cos\alpha_2 = T_0 =$ constant, unde am notat $T_i = |T_i|$, $i = 1,2$.

Componenta verticală a forţei de tensiune ce acţionează asupra elementului de arc Δs este

$$-T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 =$$
$$= T_0(-\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) = T_0\left[-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)\right].$$

Din legea a doua a lui NEWTON rezultă că pentru echilibru suma forţelor ce acţionează asupra elementului de arc Δs trebuie să fie nulă. Deci

$$T_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] = \rho(x)\Delta s\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\overline{x},t),$$

unde $\overline{x}$ este abscisa centrului de masă a lui Δs. Deoarece $\Delta s \cong \Delta x$, împărţind ambii membri ai egalităţii de mai sus cu Δs şi trecând la limită cu $\Delta x \to 0$ obţinem

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t). \tag{9.73}$$

Dacă asupra corzii acţionează o forţă externă de densitate $f_0(x,t)$, atunci ecuaţia (9.73) se transformă în

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f_0(x,t), \quad x \in (0,a),\ t > 0. \tag{9.74}$$

Dacă presupunem că $\rho(x) \equiv \rho =$ constant, atunci ecuaţia (9.74) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \quad x \in (0,a),\ t > 0, \tag{9.75}$$

unde $\omega^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, $f = \dfrac{f_0}{\rho}$.

Cum capetele corzii sunt fixate, ecuaţiei (9.75) i se asociază condiţiile la limită de tip DIRICHLET

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{9.76}$$

La acestea se adaugă condiţiile iniţiale, care precizează forma şi viteza corzii la momentul iniţial:

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,a). \tag{9.77}$$

Ecuaţia undelor modelează şi propagarea liniară a sunetului.

APPENDIX A

Derivate şi integrale pentru funcţii de o variabilă

A.1. Derivate pentru funcţii de o singură variabilă

Tabelul 1: Tabelul de derivare al funcţiilor elementare

	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	**Domeniul de derivabilitate**
1.	$c,\ c \in \mathbb{R}$ constantă	0	$\mathbb{R}$
2.	$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
3.	$x^\alpha,\ $ cu $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	cel puţin $(0,\infty)$
4.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
5.	$a^x,\ $ cu $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
6.	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,\infty)$
7.	$\log_a x$, cu $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$(0,\infty)$
8.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
9.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
10.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
11.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	**Domeniul de derivabilitate**
12.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
13.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
14.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$
15.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$

Reguli de derivare:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(f-g)' = f' - g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (g \neq 0)$;
- în particular, dacă c este o constantă, $(f+c)' = f'$ şi $(cf)' = cf'$;
- $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$;
- $(f^g)' = \left(e^{\ln f^g}\right)' = \left(e^{g \ln f}\right)' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = f^g \cdot \left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right) = \left(gf^{g-1}\right) f' + \left(f^g \ln f\right) g'$;
- regula lui Leibniz de derivare a produsului a două funcţii: dacă $m \in \mathbb{N}^*$ şi f, g sunt derivabile de m ori, atunci produsul fg este derivabil de m ori şi

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(k)} g^{(m-k)}.$$

A.2. Primitive

Peste tot în cele ce urmează J reprezintă un interval real, iar $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

Tabelul 2: Tabel de integrale nedefinite

	Funcţia	$\displaystyle\int \mathbf{f(x)dx}$
1.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$

	Funcţia	$\int \mathbf{f(x)dx}$
2.	$f : J \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha,\ \text{cu } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$
3.	$f : J \subseteq \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + \mathcal{C}$
4.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$	$e^x + \mathcal{C}$
5.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a^x,\ \text{cu } a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$
6.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-a, a\} \to \mathbb{R},\ \text{unde } a \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + \mathcal{C}$
7.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2},\ \text{unde } a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$
8.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
9.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$\sin x + \mathcal{C}$
10.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
11.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$

	Funcţia	$\int \mathbf{f(x)dx}$
12.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert + \mathcal{C}$
13.	$f : J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\ln \lvert \sin x \rvert + \mathcal{C}$
14.	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, cu $a \in \mathbb{R}^*$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \mathcal{C}$
15.	$f : J \to \mathbb{R}$, cu $J \subseteq (-\infty, -a)$ sau $J \subseteq (a, \infty)$, unde $a > 0$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + \mathcal{C}$
16.	$f : J \subseteq (-a, a) \to \mathbb{R}$, cu $a > 0$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + \mathcal{C}$

Teorema A.2.1. *Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive şi $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Atunci funcţiile $f + g$ şi λf admit de asemenea primitive şi au loc relaţiile:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Teorema A.2.2. ***(Formula de integrare prin părţi)***

Dacă $f, g : J \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci funcţiile fg, $f'g$ şi fg' admit primitive şi

$$\int f(x)g'(x)dx = fg - \int f'(x)g(x)dx.$$

Teorema A.2.3. ***(prima metodă de schimbare de variabilă)*** *Fie I, J intervale reale şi*

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

funcţii cu proprietăţile:

i) φ este derivabilă pe I;

ii) f admite primitive; fie F o primitivă a sa.

Atunci funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive şi

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F \circ \varphi + \mathcal{C}.$$

TEOREMA A.2.4. ***(a doua metodă de schimbare de variabilă)*** *Fie I, J intervale reale şi*

$$I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

funcţii cu proprietăţile:

i) φ este bijectivă, derivabilă, cu derivata nenulă pe I;

ii) funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive; fie H o primitivă a sa.

Atunci funcţia f admite primitive şi

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1} + \mathcal{C}.$$

TEOREMA A.2.5. ***(Formula lui*** LEIBNIZ-NEWTON*) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bibliografie

[1] Gh. Aniculăesei, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2003.
[2] Gh. Aniculăesei, S. Aniţa, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2001.
[3] Gh. Aniculăesei, *Ecuaţii parabolice şi hiperbolice. Note de curs.*
[4] S. Aniţa, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2003.
[5] T. Apostol. *Calculus.* John Wiley & Sons, New York, 1967.
[6] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.
[7] V. Barbu, *Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1993.
[8] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.
[9] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4^{th} edition, Birkhäuser, Boston, 2007.
[10] M. Necula, *Ecuaţii diferenţiale, curs, anul II, Facultatea de Matematică.*
[11] I. I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, MatrixRom, Bucureşti, 1999.