TUDOR-FLORIN PINTILIE 19.01.2021.
FIZICĂ, ANUL II

Examen Mecanică Analitică

— Subiectul I —

1) $\mathrm{div}(r^n \vec{r}) = \nabla(r^n \vec{r}) = r^n \nabla \vec{r} + \vec{r}\, \nabla r^n = r^n \,\mathrm{div}\, \vec{r} + \vec{r}\, \mathrm{grad}\, r^n$

Dar $\mathrm{div}\, \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$

Iar $\mathrm{grad}\, r = \vec{u_i} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \vec{u_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \vec{u_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_k x_k} =$

$= \vec{u_i} \frac{2 x_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}}{2\sqrt{x_k x_k}} = \frac{x_k \delta_{ki}}{r} \vec{u_i} = \frac{x_i \vec{u_i}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{u_r}$

$\Rightarrow \mathrm{div}(r^n \vec{r}) = 3r + \vec{r}\, \vec{u_r}$

2) $\mathrm{rot}(r\vec{r}) = \nabla \times (r\vec{r}) = r \nabla \times \vec{r} + (\nabla r) \times \vec{r} = r\, \mathrm{rot}\, \vec{r} + (\mathrm{grad}\, r) \times \vec{r}$

Am calculat mai sus că:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{grad}\, r = \vec{u_r} \\ &\mathrm{rot}\, \vec{r} = \vec{u_i}\, \varepsilon_{ijk} \partial_j x_k = \vec{u_i}\, \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{rot}(r\vec{r}) = \underbrace{r\, \mathrm{rot}\, \vec{r}}_{=0} + \underbrace{(\mathrm{grad}\, r)}_{=\vec{u_r}} \times \vec{r} = \vec{u_r} \times \vec{r}$

~~3) Trebuie să demonstrez că: rot[f(r) r⃗] ≠ 0~~

~~rot[f(r) r⃗] = f(r) rot r⃗ + grad f(r) × r⃗~~

3) Trebuie să demonstrez că: $rot[f(r)\vec{r}]=0$

$$rot[f(r)\vec{r}] = \underbrace{f(r)\, rot\, \vec{r}}_{=0} + grad\, f(r) \times \vec{r}$$

$rot\, \vec{r} = 0$

-Subiectul II-

1.) Păi dacă avem un sistem cu N p.m. ce este supus unui nr. de p legături, înseamnă, mai întâi de toate, că sistemul va avea $3N-p=\underline{\underline{n}}$ grade de libertate. Vom avea atâtea coordonate generalizate câte grade de libertate avem.
(Ex: Dacă avem $n=1$ => că vom avea o singură coordonată generalizată; $q^1=\theta$, de exemplu).
De asemenea, gradele de libertate ne spun și câte impulsuri poate avea sistemul.
In ceea ce privește ecuațiile canonice ale lui Hamilton, pentru a obține ecuațiile de mișcare le putem scrie pe cele două bine-cunoscute:

$$\boxed{\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}}$$

$$\boxed{\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}}$$

2.

$$H = p_{j\alpha}\dot{q}^{j} - L$$

Deci trebuie să aflăm mai întâi "L":

$$L = T - V; \quad T = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}\sin\theta\right)^2; \quad V = -\frac{k}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{u_r} - r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}\sin\theta\right)^2 + \frac{k}{r}$$

$$H = p_{j}\dot{q}^{j}_{\alpha} - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}\vec{u_r} - r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}\sin\theta\right)^2 + \frac{k}{r}\right]$$

Variabilele ciclice sunt foarte importante în rezolvarea problemelor pentru că ne conduc la integrale prime. De exemplu dacă q_j este o coordonată ciclică $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$, adică este o constantă a mișcării: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ $(j = \overline{1,n})$ $\Rightarrow$ impulsul generalizat conjugat coordonatei generalizate.

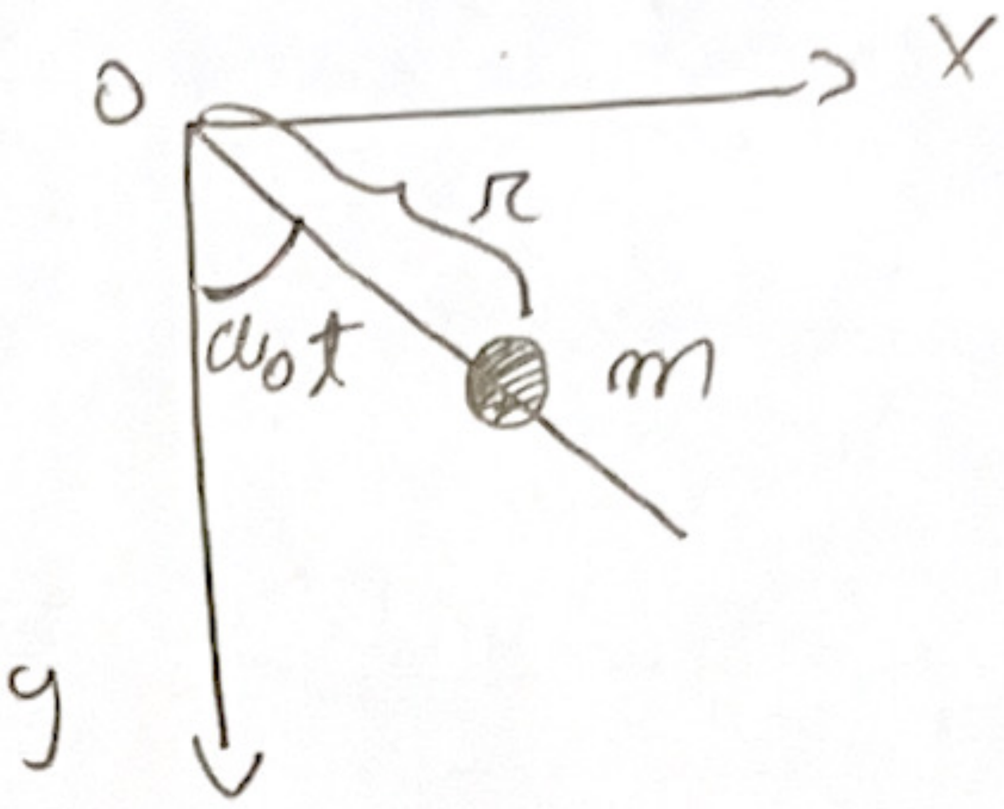
În cazul de mai sus φ reprezintă, de exemplu, o coordonată ciclică și atunci ne va conduce la o integrală primă:

$$p_\varphi = m r^2\dot{\varphi}\vec{u_\varphi}\sin\theta = \text{const.}$$

3)

$f_1(z_1) = z = 0$

$f_2(x, y) = x + y - l = 0$



$3 - 2 = 1$ grad de libertate

$q^1 = r;$

$L = T - V;\quad T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2;\quad V = -mgr \sin \omega t$

$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgr \sin \omega t$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0}$$

$\frac{\partial L}{\partial r} = mg \sin \omega t;\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$

$m\ddot{r} - mg \sin \omega t = 0 \Rightarrow m\ddot{r} = mg \sin \omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{r} = g \sin \omega t \Rightarrow \boxed{\ddot{r} - g \sin \omega t = 0}$

$r(t) = A \sin \omega t - \frac{g}{2\omega_0^2} \sin \omega t$

$r(0) = 0$ și $\dot{r}(0) = 0$: $\quad r(t) = A \sin \omega t - \frac{g}{2\omega_0^2} \sin \omega t$

$\cancel{r(t) = }$

– Subiectul III –

1) $(\vec{p}, r^m)$, $\vec{p}$ – vectorul impuls

2) $(\vec{r}, p^m)$, $\vec{r}$ – vector de poziție

---

1) $(\vec{P}_a, r^m_j) = \underbrace{\frac{\partial \vec{P}_a}{\partial x_k}}_{=0} \frac{r^m_j}{\partial P_k} - \underbrace{\frac{\partial P_a}{\partial P_k}}_{\delta_{ak}} \underbrace{\frac{\partial r^m_j}{\partial x_k}}_{\delta_{jk}} = \cancel{\ } - \delta_{ak}\delta_{jk} = -\delta_{aj}$

2) $(\vec{r}, p^m) = \varepsilon_{ijk}(x_j, P_k) = \varepsilon_{ijk}\left[\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_m}}_{\delta_{jm}} \underbrace{\frac{\partial P_k}{\partial P_m}}_{\delta_{km}} - \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial P_m} \frac{\partial P_k}{\partial x_m}}_{=0}\right] =$

$= \varepsilon_{ijk}\,\delta_{jm}\,\delta_{km} = \varepsilon_{ijk}\,\delta_{jk}$

Contracție după "m"

~~2) $(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{3} x_j (P_a, x_j) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j P_k = 0$~~