Teoría de Números

1. Divisibilidad

1. Probar que para todo natural n, $n^5 - n$ es divisible entre 30.

2. Si p es un primo mayor 3, prueba que

$$24 \mid p^2 - 1.$$

3. Probar que para cualquier entero n la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible.

4. Si n es un entero positivo mayor que 1 tal que $2^n + n^2$ es un número primo, demuestra que $n \equiv 3 \mod 6$.

5. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre cada uno de los números del 1 al 9.

6. ¿Cuál es el máximo común divisor de los números $p^4 - 1$, donde p es un primo mayor que 5?

7. Sea n un número entero positivo. Demuestre que si a y b son números enteros mayores que 1 tales que $2^n - 1 = ab$, entonces $ab - (a - b) - 1$ puede ser escrito como $2^{2m}k$ para algún entero impar k y algún entero positivo m.

2. Congruencias

1. Prueba el criterio de divisibilidad de:

- 3, la suma de dígitos del número es múltiplo de 3.
- 11, la suma de los dígitos en posiciones impares menos los dígitos en posiciones pares es múltiplo de 11.

2. Demuestra que para toda n entera sucede que

$$3804 \mid (n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$$

3. Sean x, y, z tres números enteros. Demuestra que si $7 \mid x^3 + y^3 + z^3$, entonces 7 divide a alguno de los tres enteros.

4. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

b) $11 \mid 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$

5. Probar que no existe ningún entero que al elevarlo al cuadrado el resultado termine en 181 (es decir, que éstas sean las tres cifras de la derecha en la notación decimal del número elevado al cuadrado).

6. Probar que si en un triángulo rectángulo los lados a, b y c son números enteros, entonces el producto abc es múltiplo de 30.

7. Prueba que $(n-1)^2 \mid n^k - 1$ si y solo si $n - 1 \mid k$.