1 Indicaciones

a) Este cuaderno de trabajo ha sido diseñado para fortalecer su comprensión de los conceptos clave a través de problemas resueltos de evaluaciones anteriores, así como para fomentar la práctica activa y autónoma.
b) Trate de resolver los problemas por sí mismo antes de ver la solución del problema.

2 Evaluaciones en Aula

2.1 Evaluación en Aula 1

Modelo 1

Pregunta 1

Dado los tres vectores :

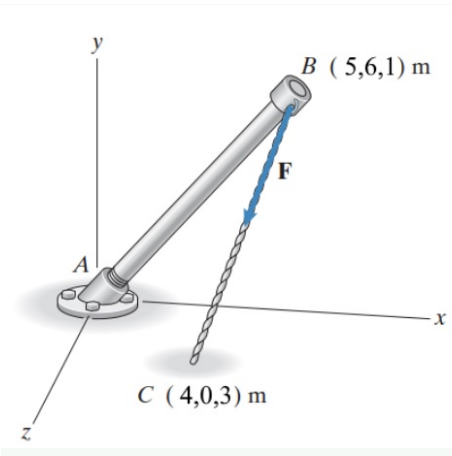
$$\vec{A} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{B} = -5\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$\vec{C} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

Realiza las siguientes operaciones :
(a) Calcule el vector unitario correspondiente a $\vec{A}$ +$\vec{B}$
(b) Calcule el módulo del vector $\vec{A}$- $\vec{C}$
(c) Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en sexagesimal.
(d) Calcule el vector que representa la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la suma de los vectores $\vec{B}$+$\vec{C}$

Solución ▼ [0001]

Pregunta 2

Si la tensión del cable es representado por el módulo de la fuerza F=50N, calcule la fuerza F en términos de los vectores unitarios i, j y k.

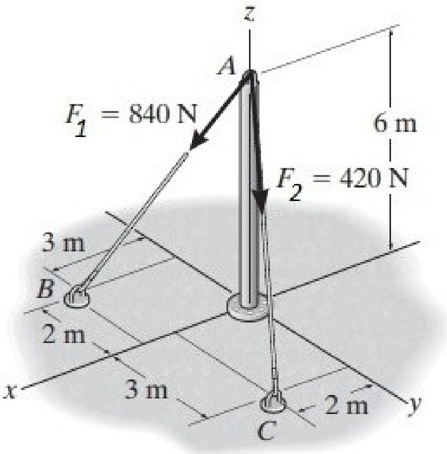


Solución ▼ [0002]

Modelo 2

Pregunta 3

El poste se mantiene en su posición mediante dos cables. Si el vector fuerza $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de cada cable actúa sobre el poste tal como se muestra en la figura :



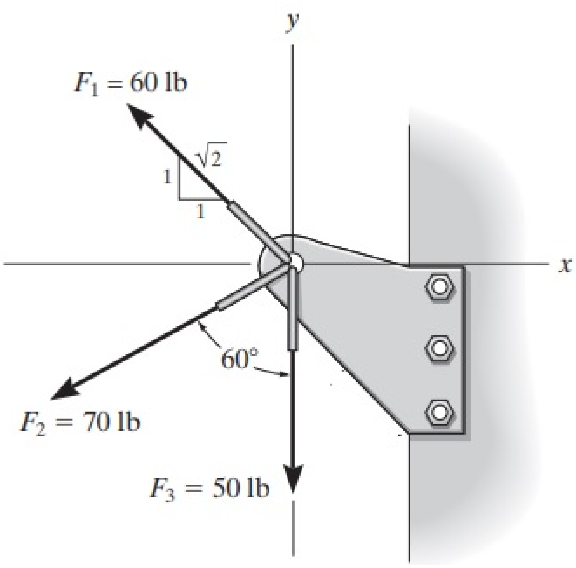
(a) Calcule los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ y sus respectivos vectores unitarios.

(b) Determine los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (Redondee a dos decimales)

Solución ▼ [0003]

Pregunta 4

Se tienen los vectores fuerza $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ que actúan sobre la ménsula como se muestra en la figura :



(a) Determine la magnitud del vector resultante.

(b) Calcule la dirección del vector resultante medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

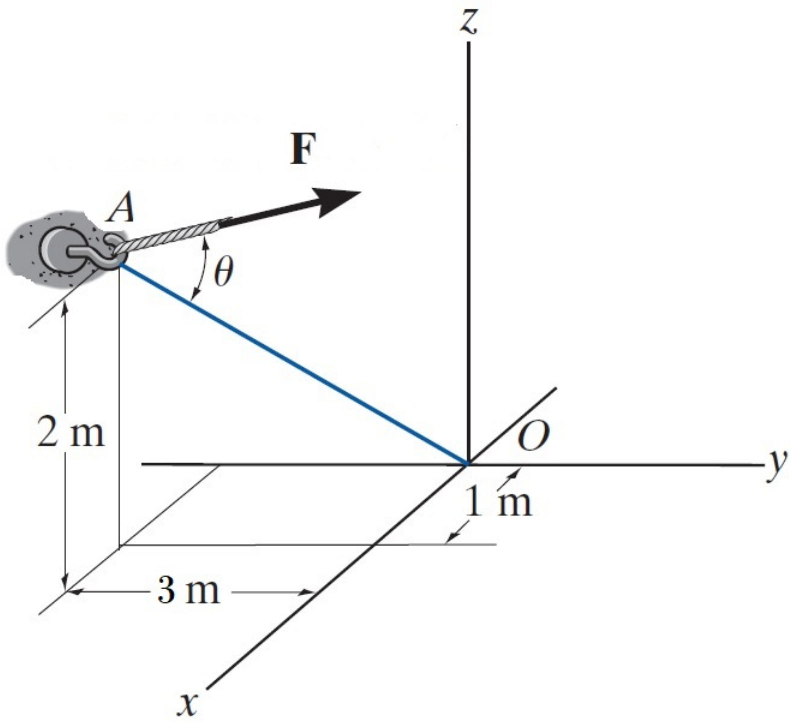
Solución ▼ [0004]

2.2 Evaluación en Aula 2

Modelo 1

Pregunta 5

Se tiene una fuerza $F = -6i + 9j + 3k$ N. Determinar :



a) La componente del vector F en la dirección del vector $\overrightarrow{OA}$

b) La proyección del vector F en la dirección del vector $\overrightarrow{OA}$

Solución ▼ [0005]

Pregunta 6

Dados los puntos $A = (1,2,1)$, $B = (-1,3,2)$ y $C = (2,-1,4)$. Determinar la ecuación del plano que forman los tres puntos A, B y C. Dar como respuesta :

a) Ecuación vectorial del plano.

b) Ecuación cartesiana del plano.

Solución ▼ [0006]

Pregunta 7

Dados los vectores $\overrightarrow{a} = -2i + 5j + 3k$, $\overrightarrow{b} = i + j + 4k$ y $\overrightarrow{c} = 3i + j + 2k$

a) ¿Son cooplanares los vectores ? Justificar su respuesta.

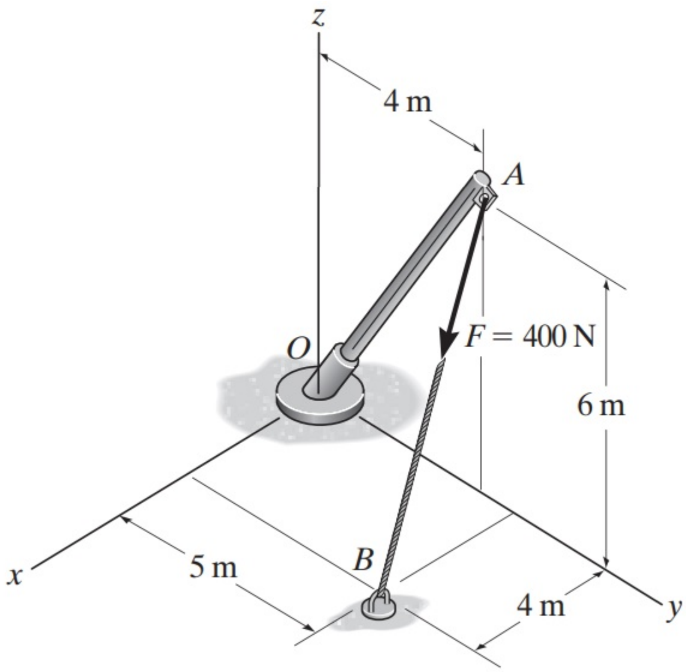
b) En caso (a) sea falso, ¿cuál es el volumen del paralelepípedo que generan los vectores ?

Solución ▼ [0007]

Modelo 2

Pregunta 8

Se tiene un vector $\vec{F}$ cuya magnitud es 400N. Determinar :



a) La componente del vector $\vec{F}$ proyectado a lo largo del tubo.
b) La proyección del vector $\vec{F}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{AO}$

Solución ▼ [0008]

Pregunta 9

Encuentre la ecuación del plano que pasa por el origen y los puntos $A = (3,-2,1)$ y $B = (1,1,1)$. Dar como respuesta :

a) Ecuación vectorial del plano.
b) Ecuación cartesiana del plano $AX + BY + CZ + D = 0$.

Solución ▼ [0009]

Pregunta 10

Dados los vectores $\overrightarrow{u} = 2i + 1j$, $\overrightarrow{v} = -i + 3j + 5k$ y $\overrightarrow{w} = 4i + 6j - 2k$

a) ¿Son cooplanares los vectores ? Justificar su respuesta.
b) En caso (a) sea falso, ¿cuál es el volumen del paralelepípedo que generan los vectores ?

Solución ▼ [0010]

2.3 Evaluación en Aula 3

Modelo 1

Pregunta 11

La posición del vuelo de un ave (metros) está dada por el vector

$$C: \quad \vec{r}(t) = 3\ sen(t)\mathbf{i} + 3cos(t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k} \tag{1}$$

(a) Calcula las componentes normal y tangencial de la aceleración.

(b) Escribe los vectores tangente unitario y normal unitario.

(c) Organiza tus resultados anteriores y escribe el vector aceleración en términos de los resultados anteriores.

(d) Calcula la longitud de la trayectoria recorrida en metros por el ave luego de 10 segundos que inició el vuelo.

Solución ▼ [0011]

Pregunta 12

La densidad de un material en un punto $P(x,y,z)$ del espacio está dado por Φ y se describe mediante la siguiente función :

$$\Phi(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z} \tag{2}$$

(a) Calcula las derivadas parciales de Φ con respecto a x, y y z, es decir, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, y $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

(b) Considere la superficie $\Phi(x,y,z) = 3$, si a esta superficie se corta con el plano $y = 3$ se forma la curva C_1, luego con el plano $x = 1$ se forma la curva C_2. Encuentra las pendientes de las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto $P(1,3,1)$.

(c) Encuentra la superficie de nivel de $\Phi(x,y,z)$ que pasa por el punto $P(2,1,1)$.

Solución ▼ [0012]

Modelo 2

Pregunta 13

La posición de una partícula (metros) está dada por el vector

$$C: \quad \vec{r}(t) = b\,cos(t)\mathbf{i} + b\,sen(t)\mathbf{j} + \sqrt{1-b^2}\,t\,\mathbf{k} \tag{3}$$

si $b = 1/2$.

(a) Calcula las componentes normal y tangencial de la aceleración.

(b) Determine los vectores tangente unitario y normal unitario.

(c) Organiza tus resultados anteriores y escribe el vector aceleración.

(d) Para todo $-1 < b < 1$, calcula la longitud de la trayectoria recorrida en metros por la partícula en los primeros 5 minutos.

Solución ▼ [0013]

Pregunta 14

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es

$$P(x,y) = 500\left(\frac{2}{5}x^{-0.4} + \frac{3}{5}y^{-0.4}\right)^{-5/2}$$

donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital.

(a) Calcula las derivadas parciales de P con respecto a x y y , es decir, $\frac{\partial P}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$.

(b) Evalúe $\frac{\partial P}{\partial x}$ cuando $x = 500$ y $y = 1000$ e interprete el resultado.

(c) Suponiendo que la función de producción está definida como : $P(x,y) = 2^{2x-y}$, dibuje las curvas de nivel cuando $c = 4$, $c = 16$ y $c = 64$.

Solución ▼ [0014]

2.4 Evaluación en Aula 4

Modelo 1

Pregunta 15

El área de una superficie de una estructura metálica es modelado mediante la ecuación $z = f(x,y) = 5x^2 - 4y$. Después de unos años de uso se decide medir el área de la superficie metálica y obtenemos que el x mide 10m con un error de medición de ± 0.002m y y mide 6m con un error de medición de ± 0.006m. Calcule el error absoluto y error relativo en la medición del área f.

Solución ▼ [0015]

Pregunta 16

La temperatura de cierta superficie está definido por :

$$f(x,y) = \sin(2x)\cos(y)$$

a) Hallar la derivada direccional de $f(x,y)$ en $P(\pi,0)$ en dirección de $Q(\frac{\pi}{2},\pi)$.

b) A partir del punto $P(\pi,0)$, ¿En qué dirección la razón de cambio de temperatura aumenta más rapidamente ? y ¿Cuál es el valor máximo ?

Solución ▼ [0016]

2.5 Evaluación en Aula 5

Modelo 1

Pregunta 17

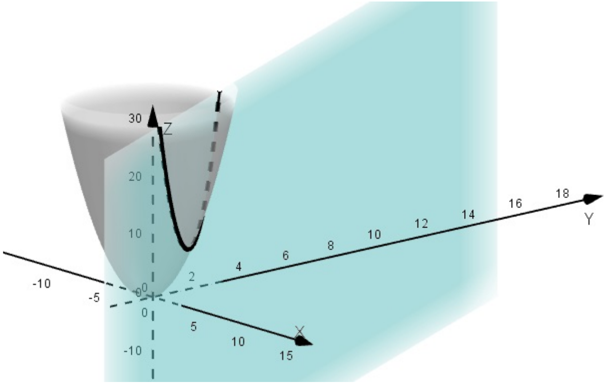
Para un cultivo de regadío, se ha dispuesto dos dispositivos A y B, que gradúan el caudal de ingreso x_1 cm^3/hr y x_2 cm^3/hr respectivamente. Cada uno de estos dispositivos genera un costo f_1 y f_2 que dependen de los caudales de ingreso, además, el caudal total de ingreso al cultivo debe ser de 3 cm^3/hr.

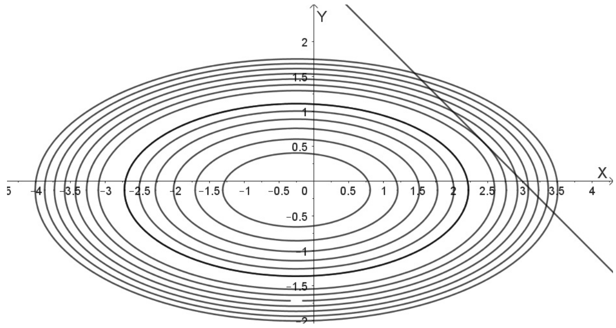
$$\begin{aligned} &\text{Costo de dispositivo A :} \quad f_1(x_1) = x_1^2 + 0.5\,x_1 \quad \text{dólares/hr} \\ &\text{Costo de dispositivo B :} \quad f_2(x_2) = 4x_2^2 + x_2 \quad \text{dólares/hr} \end{aligned}$$

El objetivo es determinar los caudales óptimos que deben ingresar al cultivo que minimice el costo total, garantizando un eficiente cultivo de regadío.

1. Identifica los datos, las variables del problema
2. Identifica la función objetivo y la restricción o condición.
3. Describe con tus propias palabras que se solicita en el problema.
4. Resolver el problema, paso a paso, planteando las ecuaciones necesarias.

5. Verifica la solución obtenida en las siguientes gráficas correspondientes a la función objetivo y su restricción.





6. ¿Habría un mínimo si no hubiera restricción ? Si existiera, ¿ cuál sería ?. Justifica con cálculo.

Solución ▼ [0019]

Modelo 2

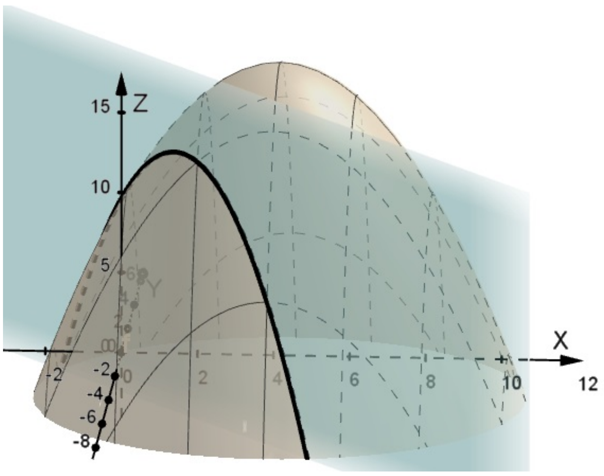
Pregunta 18

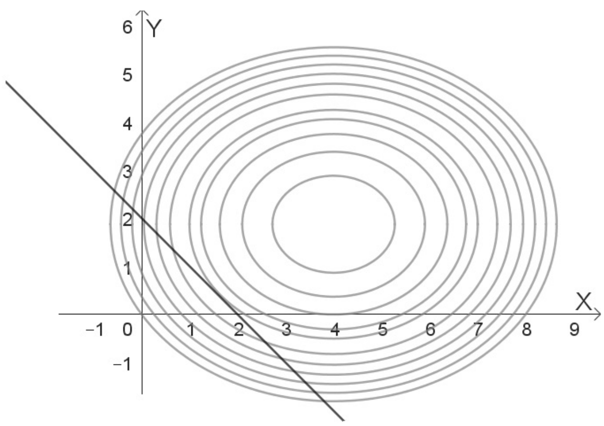
Para un tipo de tejido se determina utilizar x_1 kg de algodón y x_2 kg de poliéster, el tejido debe tener un peso de 2 kg. Se sabe que estos materiales a usar generan una ganancia que está en función del peso que se usa del algodón y poliéster, dados por :

$$\begin{array}{ll} \text{Ganancia por el algodón :} & f_1(x_1) = 4 + 4x_1 - 0.5\,x_1^2 \quad \text{dólares} \\ \text{Ganancia por el poliéster :} & f_2(x_2) = 2 + 3x_2 - 0.8x_2^2 \quad \text{dólares} \end{array}$$

El objetivo es determinar la cantidad óptima de material que debe utilizarse para el tejido, para maximizar la ganancia total, garantizando una eficiente producción de tejido.

1. Identifica los datos, las variables del problema
2. Identifica la función objetivo y la restricción o condición.
3. Describe con tus propias palabras que se solicita en el problema.
4. Resolver el problema, paso a paso, planteando las ecuaciones necesarias.
5. Verifica la solución obtenida en las siguientes gráficas correspondientes a la función objetivo y su restricción.





6. ¿Habría un máximo si no hubiera restricción ? Si existiera, ¿ cuál sería ?. Justifica con cálculo.

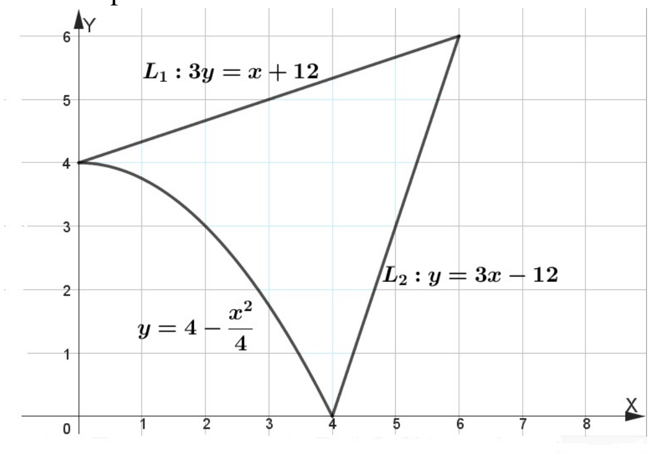
Solución ▼ [0020]

2.6 Evaluación en Aula 6

Modelo 1

Pregunta 19

Se tiene la siguiente pieza de un rompecabezas :

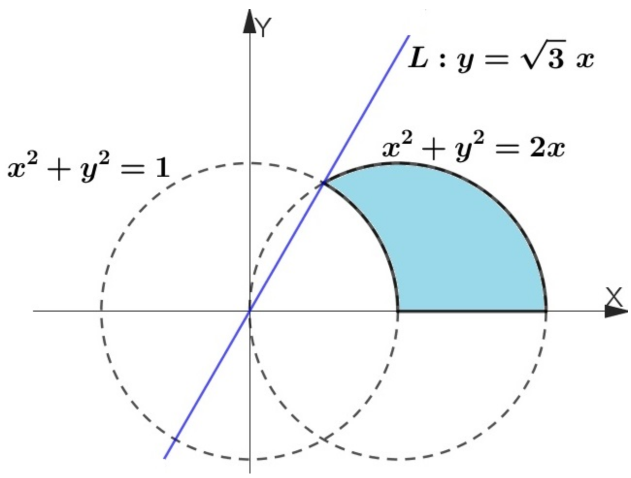


a. (3 puntos) Descomponer la pieza en regiones simples para poder hallar su área.
b. (4 puntos) Usar integrales dobles para poder calcular el área de la pieza.
c. (1 puntos) Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dadas con respecto a gráfico planteado en el problema.

Solución ▼ [0021]

Pregunta 20

Una región del plano XY está limitada por las curvas de las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2x$ y las rectas $y=\sqrt{3}x$ e $y=0$, como se muestra en la figura.



a. (3 puntos) Describir la región sombreada en coordenadas polares para hallar el área.

b. (3 puntos) Usar integrales dobles en coordenadas polares y calcular la masa $M = \iint_R \rho(x,y)dA$ de la región sombreada, si la densidad en cualquier punto está dado por $\rho(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ kg/m^3$

c. (1 puntos) Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dobles con respecto a gráfico planteado en el problema.

Solución ▼ [0022]

Pregunta 21

a. (2 puntos) Dada la sucesión : $x_n = \dfrac{n}{n+3}$ Describa los tres primeros términos de la sucesión ¿Es convergente ?

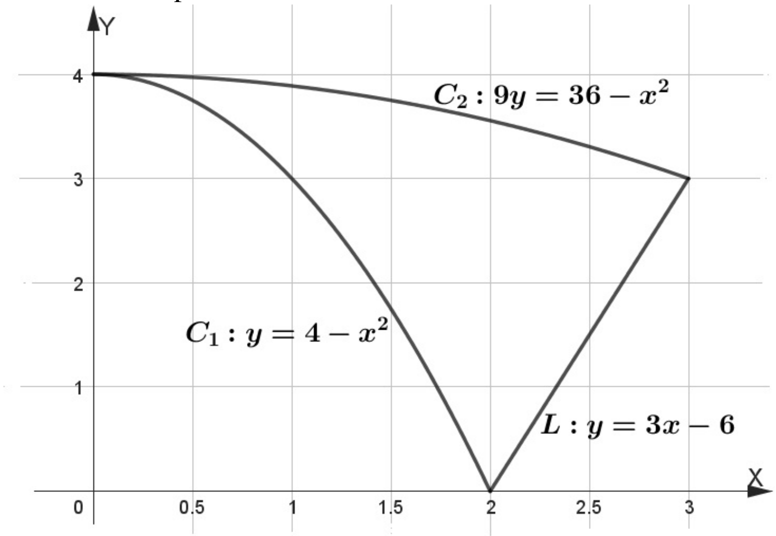
b. (3 puntos) Se tiene la serie : $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{7^n})$, describa como son los términos de la serie. ¿Es convergente ?

Solución ▼ [0023]

Modelo 2

Pregunta 22

Se tiene la siguiente pieza de un rompecabezas :



a. Descomponer la pieza en regiones simples para poder hallar su área.

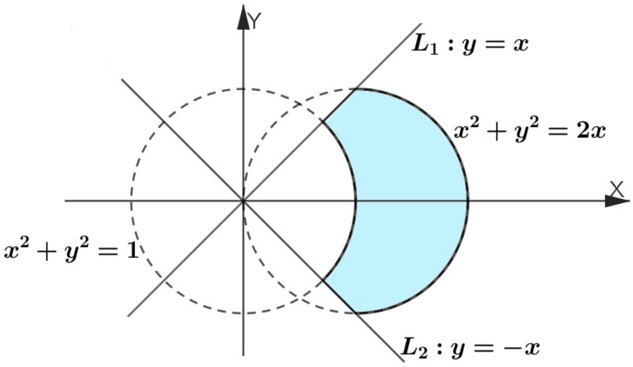
b. Usar integrales dobles para poder calcular el área de la pieza.

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dadas con respecto a gráfico planteado en el problema.

Solución ▼ [0024]

Pregunta 23

Una región del plano XY está limitada por las curvas de las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2x$ y las rectas $y=x$ e $y=-x$, como se muestra en la figura.



a. Describir la región sombreada en coordenadas polares para hallar el área.

b. Usar integrales dobles en coordenadas polares y calcular la masa $M = \iint_R \rho(x,y)dA$ de la región sombreada, si la densidad en cualquier punto está dado por $\rho(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}\, kg/m^3$.

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dobles con respecto a gráfico planteado en el problema.

Solución ▼ [0025]

Pregunta 24

a. Dada la sucesión : $x_n = \dfrac{n+4}{n^2+3}$ Describa los tres primeros términos de la sucesión. ¿Es convergente ?

b. Se tiene la serie : $\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{4}{2^{n+1}})$, describa como son los términos de la serie. ¿Es convergente ?

Solución ▼ [0026]

3 Tareas Semanales

3.1 Tarea Semanal 1

Modelo 1

Pregunta 25

El módulo del vector A es 9 y sus cosenos directores son proporcionales a los números 2, 2 y -1.

a) Hallar $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, si el $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

b) Hallar un vector unitario en la dirección del vector $\vec{S}$

c) ¿Qué ángulos forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

Solución ▼ [0027]

Pregunta 26

Hallar la ecuación de la recta que es paralela a los planos

$$P_1 : 3x + 12y - 3z - 5 = 0$$
$$P_2 : 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

y que intersecta a las rectas

$$L_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$$
$$L_2 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Solución ▼ [0028]

Pregunta 27

Sean las rectas $L_1 = \mathscr{L}((5,2),\overrightarrow{(1,-1)})$ y $L_2 = \mathscr{L}((4,6),\overrightarrow{(1,2)})$. Si $L_1 \cap L_2 = \{Q\}$, determinar la ecuación de la recta L que pasa por Q y es ortogonal a la recta L_3 que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(3,8)$.

Solución ▼ [0029]

Pregunta 28

Una de las diagonales de un rombo está contenida en la recta $\mathscr{L}_1 = \{(a-1,5a-6)+t(a-3,1)\}$ y uno de los lados del mismo está contenido en $\mathscr{L}_2 = \{(-4a,a-2)+s(3a,a+1)\}$. Si $a>0$ y $M=(3a+1,6a)$ es el punto de intersección de las diagonales del rombo, encuentre los vértices y el área de dicho rombo.

Solución ▼ [0030]

Pregunta 29

Determine los vectores a y b en $\mathbb{R}^2$ de modo que verifique las condiciones siguientes :

i) $a+b^{\perp} = (-1,5)$.
ii) $(a^{\perp}+b) \perp (-5,3)$.
iii) $(a+b) \parallel (1,-1)$.

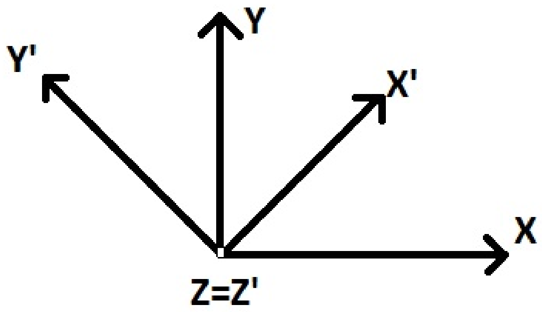
Solución ▼ [0031]

Modelo 2

Pregunta 30

Se tiene el sistema de coordenadas XYZ donde los vectores unitarios son $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$. En este S.C. los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son : $\vec{A} = 30\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+16\hat{k}$ y $\vec{B} = -20\hat{\imath}-15\hat{\jmath}+8\hat{k}$. Si el sistema de coordenadas es girado 45° alrededor del eje Z como se muestra en la figura tenemos el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'Z'$.

a) Determine los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el nuevo sistema.
b) Verifique la invariancia de $\vec{A}\cdot\vec{B}$.
c) Verifique la invariancia $\vec{A}\times\vec{B}$.



Solución ▼ [0032]

Pregunta 31

Sean $(a<x<b)$ respectivamente las coordenadas de los puntos A, X y B de un eje. Se dice que el punto X divide al segmento AB en media y extrema razón (división aúrea) cuando se cumple

$$\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{d(X,B)}{d(A,X)}$$

suponiendo que X divide al segmento en media y extrema razón, calcule x en función de a y b.

Solución ▼ [0033]

Pregunta 32

Si M y N son puntos de trisección del lado BC del triángulo ABC y $\overline{AN} = m\overline{AC} + n\overline{AB}$, calcular :

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

Solución ▼ [0034]

Pregunta 33

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Demostrar :

i) Si $u + v + w = 0$, entonces $u \times v = v \times w = w \times u$.

ii) Si $u \times v = v \times w = w \times u \neq 0$, entonces $u + v + w = 0$.

Solución ▼ [0035]

Pregunta 34

Para que valores de a las rectas r y s no son alabeadas, donde : $r : x = y = z - a$ y $s : \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{a}$.

Solución ▼ [0036]

3.2 Tarea Semanal 2

Modelo 1

Pregunta 35

Para representar vectores en éste curso, usamos la notación en forma de tupla. Por ejemplo, un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, lo podemos representar mediante $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$. Ésta representación nos es útil en matemáticas y física para describir magnitudes que tienen dirección y magnitud en un espacio tridimensional. Ésta notación, se puede relacionar directamente con la notación matricial, el cual es una herramienta poderosa en el Álgebra Lineal y en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

En el contexto de la notación matricial, un vector en $\mathbb{R}^3$ como $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ se puede representar de manera equivalente como una matriz columna

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

Las matrices y vectores columnas permiten una manipulación algebraica más estructurada y sistemática de los vectores en comparación con la notación en forma de tupla.

En Álgebra Lineal, existe un método para encontrar un conjuto de vectores perpendiculares enre sí (conjunto de vectores ortogonales) a partir de un conjunto de vectores no coplanarios cualesquiera, dicho método es conocido como el proceso de Gram-Schmidt.

En el espacio $\mathbb{R}^3$, consideremos el conjunto de tres vectores no coplanarios $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

El Proceso de Gram-Schmidt para transformar este conjunto de vectores en un conjunto ortogonal : $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ consiste en los siguientes pasos :

Paso 1 : Escogemos arbitrariamente uno de los vectores dados. Por ejemplo

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

Paso 2 : Calculamos los vectores $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ usando la fórmula de proyección ortogonal y luego haciendo la diferencia correspondiente :

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$

A partir de lo anterior, responda lo siguiente :

a) Esboce la idea geométrica de los pasos 1 y 2 del proceso de Gram-Schmidt.

b) Dado el siguiente conjunto de vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

¿Son coplanarios ?¿Cómo relaciona el concepto de independecia lineal con la idea de vectores coplanarios ?

c) Si los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ no son coplanarios. Encuentre un conjunto de vectores ortogonales que genere el mismo espacio generado por los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$. Justifique, ¿por qué este nuevo conjunto de vectores ortogonales genera el mismo espacio que los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$?

d) Decimos que un conjunto de vectores son ortonormales cuando además de ser un conjunto ortogonal, cada uno de los vectores son unitarios. Encuentre un conjunto de vectores ortogonales que genere el mismo espacio generado por los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$. Justifique, ¿por qué este nuevo conjunto de vectores ortonormales genera el mismo espacio que los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$?

Solución ▼ [0037]

Pregunta 36

Dada la siguiente función vectorial que representa el vector posición de una particula en el espacio $\vec{r}(t) = \alpha t\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\beta t^2 + \alpha)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\gamma t^3 + \beta)\hat{\boldsymbol{k}}$, donde α, β, γ, son constantes y solo β es positiva. Sí se sabe que para $t = 1$ el modulo de la velocidad es $2\sqrt{29}$ y la recta tangente a la trayectoria de la partícula en ese instante es $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{3}$. Hallar el vector unitario tangencial y normal de la aceleración.

Solución ▼ [0038]

3.3 Tarea Semanal 3

Modelo 1

Pregunta 37

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2.$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección del máximo incremento de temperatura.

Solución ▼ [0039]

Pregunta 38

Considera la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ y la superficie S dada por $f(x, y, z) = 1$. Además, se define $x = u + v$, $y = u - v$ y $z = uv$.

a) Usando la regla de la cadena, calcula $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$

b) Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $(1, -1, -1)$.

c) Calcula el gradiente de f en el punto $(2, -1, -3)$ y utilízalo para encontrar la dirección de mayor crecimiento de f en ese punto. ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento ?

Solución ▼ [0040]

Pregunta 39

Los consumos per cápita (en galones) de diferentes tipo de leche en Estados Unidos de 1999 a 2005 se muestran en la tabla. El consumo de leche light y descremada, leche baja en grasas y leche entera se representa por las variables x, y y z, respectivamente. (*Fuente : U.S Department of Agriculture*)

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
x	1.4	1.4	1.4	1.6	1.6	1.7	1.7
y	7.3	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.9
z	6.2	6.1	5.9	5.8	5.6	5.5	5.6

Un modelo para los datos está dado por $z = -0.92x + 1.03y + 0.02$.

a) Hallar la diferencial total del modelo.

b) Se prevé en la industria lechera que en años futuros el consumo per cápita de leche light y descremada será de 1.9 ± 0.25 galones y que el consumo per cápita de leche baja en grasas será 7.5 ± 0.25 galones. Utilizar dz para estimar los máximos errores de propagación y relativo en el pronóstico de consumo de leche entera.

Solución ▼ [0041]

Pregunta 40

Sean tres cargas eléctricas, dos positivas y una negativa, cuyas magnitudes son de $q = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}$; ubicadas en $A(0,0)$, $B(3,1)$ y $C(3,-1)$. Definimos el potencial eléctrico generado en un punto $P(x,y)$ del espacio como la suma de los potenciales de cada carga en P :

$$V(x,y) = -\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{9}{\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}} + \frac{9}{\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}}, \tag{4}$$

medido en voltios. Si nos alejamos lo suficiente, es decir para $x \gg 10$ y $y \gg 10$, el potencial eléctrico luce como

$$V(x,y) \approx \frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{5}$$

(a) Calcula $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ en el punto $(2,3)$. ¿Qué podemos decir del comportamiento del potencial en este punto?

(b) Calcula $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ en el punto $(100,100)$. ¿Qué podemos decir del comportamiento del potencial en este punto?

(c) Dibuja algunas curvas de nivel para el potencial en (5) para los puntos lejanos a las tres cargas.

Solución ▼ [0042]

4 Exámenes

4.1 Exámenes Parciales

Modelo 1

Pregunta 41

Se desea encontrar la posición y la aceleración de una partícula en el tiempo t, $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}''(\mathbf{t})$, respectivamente. Se sabe que la velocidad $\mathbf{v}(t) =< -sen(t) - 1; 3 - 3e^{-t}; 6 >$ y la posición inicial es $\mathbf{r}(0) =< 2; 4; -1 >$.
Con estos resultados determina

a) Determina la posición de la partícula en el tiempo t

b) Indica la componentes normal y tangencial de la aceleración en el tiempo $t = 0$.

c) Si la curvatura en el tiempo t de la curva esta definida por

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

¿Cuál es la curvatura en el tiempo 0 ? .

Solución ▼ [0043]

Pregunta 42

La temperatura en un punto (x, y) está dada por :

$$T(x, y) = 200e^{-x^2-3y^2}$$

donde T se mide en °C y x, y en centimetros.

a) Determine la razón de cambio de temperatura en el punto $P(2, -1)$ en dirección al punto $(3, -3)$.

b) ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en P ?

c) Determine la razón de incremento máxima en P.

Solución ▼ [0044]

Pregunta 43

La relación entre la cantidad de luz absorbida por una muestra, A, la concentración de las especies que absorben la luz, C, la distancia (longitud del camino) que recorre la luz a través de la muestra, l, y la absortividad molar de las especies que absorben la luz, ε esta dada por la ley de Beer–Lambert. Esta ley proporciona la siguiente relación

$$\varepsilon = \frac{A}{l.C} \qquad (6)$$

Supongamos que tenemos una concentración de $13,7\,(\pm 0,3)$ moles/L, una longitud de camino de $1,0$ cm y una absorción de $0,172807.(\pm 0,000008)$.

a) Determine la absortividad molar esperada.

b) Determine la incertidumbre (o error de propagación) de la absortividad molar esperada

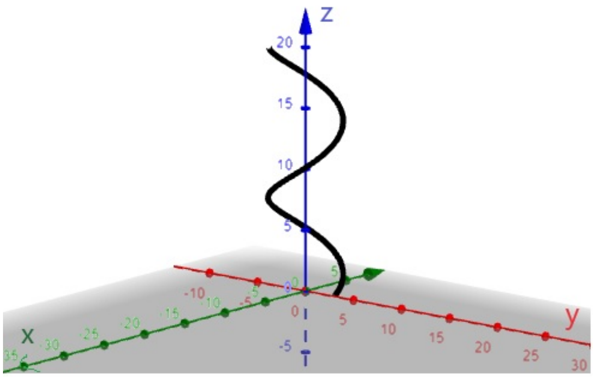
c) Determine la incertidumbre relativa de la absortividad molar esperada

Solución ▼ [0045]

Modelo 2

Pregunta 44

Una persona pasea en una montaña rusa llamada "Montaña Emocionante". El movimiento de la persona en un determinado trayecto de la montaña rusa se puede modelar por la curva descrita por la siguiente ecuación $\vec{r} = 3cos(t)i + 3sen(t)j + \sqrt{7}tk$, donde t es el tiempo medido en segundos y r(t) es el vector de posición de la persona en metros.



a) Determine el vector unitario tangencial $\widehat{\mathbf{T}}$ y el vector unitario normal $\widehat{\mathbf{N}}$ para cualquier instante de tiempo.

b) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto $t = \frac{\pi}{6}$.

c) Use la información del vector unitario normal hallado en el ítem (a) y halle la ecuación cartesiana del plano perpendicular a dicho vector en un instante determinado (Sugerencia : usar el mismo instante de tiempo que se usó en el ítem (b)). Demuestre que dicho plano es paralelo al al vector $\langle 1, -\sqrt{3}, 0 \rangle$.

Solución ▼ [0046]

Pregunta 45

Para determinar la elevación del penacho, (elevación promedio de sustancias gasesosas emitidas por los procesos y actividades industriales) se utiliza la ecuación de Briggs dado por :

$$H = \frac{1.6F^{1/3}d^{2/3}}{U} \tag{7}$$

Donde H representa la elevación del penacho (m), F es el parámetro del flujo por flotación (m^4/s^3), d es la distancia aguas abajo a partir de la cota máxima de la elevación del penacho(m), y U representa la velocidad del viento en la boca de la chimenea (m/s).

Supongamos que los valores de F, d y U son 684 m^4/s^3 , 807 metros y 5 m/s respectivamente y los errores en la medición de F, d y U fueron de 0.01, 0.02 y 0.03 respectivamente.

a) Determine la elevación del penacho.

b) Estime el error propagado de la elevación del penacho.

c) Estime el error porcentual en la medición del penacho.

Solución ▼ [0047]

Pregunta 46

Un alpinista se encuentra explorando una región montañosa con un terreno que tiene una elevación variable. La elevación del terreno está modelada por la siguiente expresión :

$$E(x,y) = 200 - x^2 - y^2$$

Donde $E(x,y)$ es la elevación del terreno en metros sobre el nivel del mar, x es la distancia en metros hacia el este y y es la distancia en metros hacia el norte.

a) Grafique tres curvas de nivel y bosqueje la superficie $E(x,y)$.

b) Determine la dirección desde el punto de coordenadas (10,5) donde el terreno cambia más rápidamente ?

c) ¿Cuál es la tasa máxima de elevación desde el punto de coordenadas (10,5) que puedes encontrar en esta región montañosa

Solución ▼ [0048]

4.2 Exámenes Finales

Modelo 1

Pregunta 47

La superficie de cierto lago en el norte del Perú puede ser representada por una región D en el plano xy tal que la profundidad del lago (en metros) en el punto (x,y) está definida por :

$$f(x,y) = 200 + x^2y - x^2 - y^2.$$

a) Si un nadador novato se encuentra en el punto $(1,-2)$ ¿En qué dirección debe nadar para que la profundidad aumente más rápidamente ? y ¿Qué tan rápido varía la profundidad en esa dirección ?

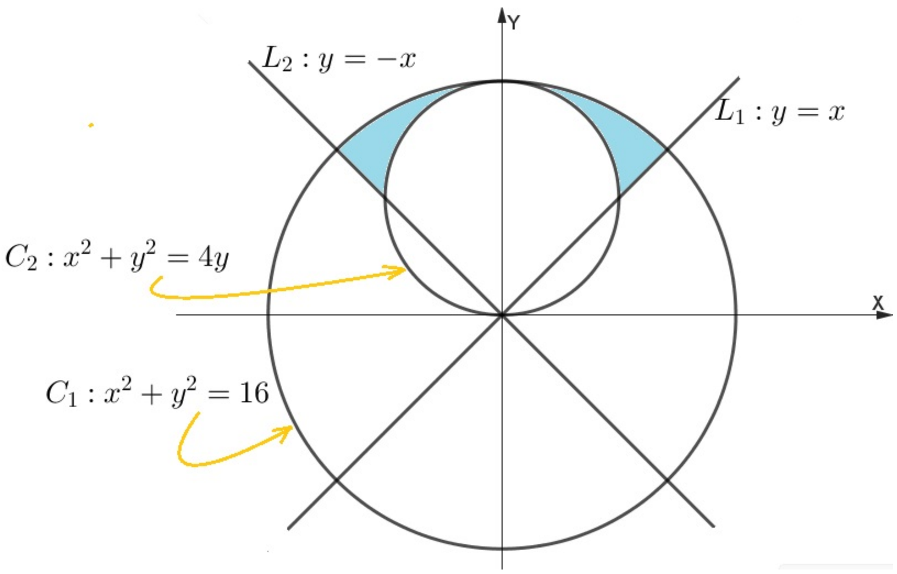
b) Si un punto crítico de la función $f(x,y)$ es el punto $(\sqrt{2};1)$, ¿en este punto la profundidad es máxima, mínima o es un punto silla ? Justificar su respuesta.

c) La profundidad de otro lago aledaño está definido por $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 150$.
Si se restringe a la región definida por unas mallas representada por la curva $x^2 + y^2 = 50$, determinar los puntos de máxima y mínima profundidad.

Solución ▼ [0049]

Pregunta 48

Se tiene la región sombreada en la figura.



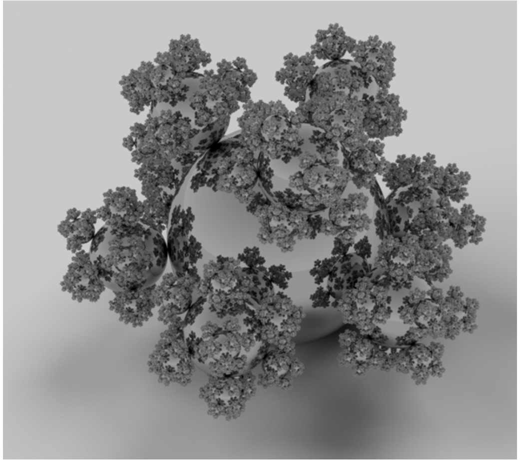
a) Describe la región sombreada en coordenadas polares.

b) Usando integrales dobles determinar el área de la región sombreada en coordenadas polares, usando la descripción del ítem anterior.
Sugerencia : $\int sen^2(x)dx = \frac{1}{4}(2x - sen(2x)) + C$

Solución ▼ [0050]

Pregunta 49

Consideraremos una versión tridimensional del copo de Koch : ¡un esfera-copo ! .



Este fractal se crea de la siguiente manera :

Paso 1 comienza con una esfera de radio 1.

Paso 2 : A esta esfera grande, se adjunta 9 esferas más pequeñas de radio 1/3.

Paso 3 : A cada una de estas nueve esferas, se adjunta nueve esferas de radio 1/9, y así sucesivamente.

Paso n : A cada esfera de radio r, se adjunta nueve esferas de radio r/3, para un número infinito de iteraciones.

a) **(2 puntos)** ¿Cuál es el volumen de las esferas que corresponde únicamente al paso n-ésimo del proceso ?

b) **(2 puntos)** El volumen de todo el fractal viene determinado por la expresión

$$V_T = \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{27}\right) + \cdots$$

¿Cuál es el volumen total del esfera-copo ? ¿Converge o no ?

c) **(2 puntos)** Calcule la serie de Maclaurin de la función $\frac{5}{3-x}$

Solución ▼ [0051]

Modelo 2

Pregunta 50

El perro de rastreo está entrenado para buscar el olor humano en los alrededores captando del aire las micropartículas que contiene el olor humano. La intensidad de olor de una persona ubicada en las cordenadas (x, y) está modelado por la expresión $I(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$.

a) El perro de rastreo se encuentra en el punto $A(3, 1)$ ¿Qué dirección debe seguir para ubicar lo más rápido posible a la persona ?.

b) Si un punto crítico de la función es el punto $(2, 1)$ ¿En este punto la intensidad de olor es máximo, mínimo o es un punto silla ? Justificar su respuesta.

c) Luego de un determinado tiempo la intensidad de olor está modelada por

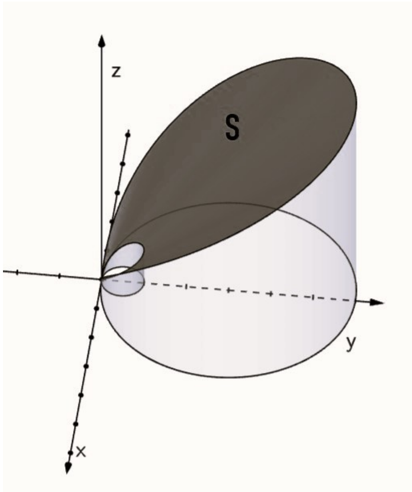
$$I(x,y) = x^2y^2$$

y la búsqueda se debe realizar solo sobre la curva $2x^2 + y^2 = 1$. Determinar los puntos donde se encuentra la intensidad de olor máximo y mínimo.

Solución ▼ [0052]

Pregunta 51

Queremos diseñar una lámina de metal de superficie S. Su forma está dada por el cono $K : x^2 + y^2 = 4z^2$, sobre el plano xy y entre los cilindros $C_1 : x^2 + y^2 = 6y$ y $C_2 : x^2 + y^2 = 2y$ tal como se observa en la figura.



a) Describa la región de integración planteando ecuaciones en coordenadas polares que permite calcular el área de la superficie S.

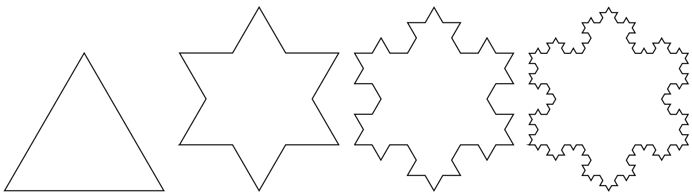
b) Aplica integrales dobles en coordenadas polares para obtener el área S.
Integral :

$$\int dx \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x. \tag{8}$$

Solución ▼ [0053]

Pregunta 52

El copo de nieve de Koch es una curva creada a partir de un triángulo, cada lado se convierte en un nuevo triángulo y así consecutivamente, esto se convierte en una curva fractal como se puede observar en la figura :



Se determina que el área total del copo de nieve de Koch sigue la siguiente expresión :

$$A_T = a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 a_0 + \ldots$$

Donde a_0 representa el área del triángulo original

a) El área total se puede expresar de la siguiente manera : $A_T = C + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Donde C es una constante. Determinar el valor de C y del término general b_n. Además, determine si la sucesión b_n es convergente.

b) Determine si la serie A_T es convergente y de ser así, determine su valor.

c) Determine la serie de McLaurin de la función : $\frac{1}{1-x}$

Solución ▼ [0054]

5 Soluciones

Solución de la pregunta 1 ▲

a) Sea el vector $\vec{A}+\vec{B}=(-3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})+(-5\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k})=(-8\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k})$, entonces su vector unitario está dado por :

$$\mu_{\vec{A}+\vec{B}}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{|A+B|}=\frac{(-8\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k})}{\sqrt{(-8)^2+2^2+7^2}}=\frac{1}{\sqrt{117}}(-8,2,7)$$

b) Sea el vector $\vec{A}-\vec{C}=(-3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})-(4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k})=(-7\vec{i}+-7\vec{j}+8\vec{k})$. Entonces, su módulo es :

$$|A-C|=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+8^2}=\sqrt{162}$$

c) Calcularemos el ángulo entre los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$ usando : $\cos(\theta)=\frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{|B||C|}$

$$\vec{B}\cdot\vec{C}=(-5\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k})\cdot(4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k})$$
$$\vec{B}\cdot\vec{C}=-44$$

$$|B|=\sqrt{(-5)^2+6^2+6^2}=\sqrt{97}$$
$$|C|=\sqrt{4^2+3^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$$

Luego

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{|B||C|}$$
$$\cos(\theta)=\frac{-44}{\sqrt{97}\sqrt{74}}$$
$$\cos(\theta)=\frac{-44}{\sqrt{7178}}$$

Luego

$$\theta=\arccos\left(\frac{-44}{\sqrt{7178}}\right)$$
$$\theta=121.29^\circ$$

d) Sean

$$\vec{B}+\vec{C}=(-5\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k})+(4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k})=(-\vec{i}+9\vec{j}+-1\vec{k})$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=(-3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k})=-34$$
$$|B+C|=\sqrt{(-1)^2+9^2+(-1)^2}=\sqrt{83}$$

Luego,

$$proy_{\vec{B}+\vec{C}}\vec{A}=\frac{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})}{|B+C|^2}(\vec{B}+\vec{C})$$
$$proy_{\vec{B}+\vec{C}}\vec{A}=\frac{-34}{\sqrt{83}^2}(-\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k})$$
$$proy_{\vec{B}+\vec{C}}\vec{A}=\left(\frac{34}{83}\vec{i}-\frac{306}{83}\vec{j}+\frac{34}{83}\vec{k}\right)$$

Solución de la pregunta 2 ▲

Sean $\vec{B} = (5, 6, 1)$ y $\vec{C} = (4, 0, 3)$, luego $\vec{BC} = C - B = (4, 0, 3) - (5, 6, 1) = (-1, -6, 2)$. El vector unitario de $\vec{BC}$ es :

$$\mu_{\vec{BC}} = \frac{\vec{BC}}{|BC|} = \frac{(-1, -6, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{(-1, -6, 2)}{\sqrt{41}}$$

Luego

$$\vec{F} = |\vec{F}|\mu_{\vec{BC}} = 50\frac{(-1, -6, 2)}{\sqrt{41}}$$

Luego

$$\vec{F} = -7.809\vec{i} - 46.852\vec{j} + 15.617\vec{k}$$

Solución de la pregunta 3 ▲

a) De la figura obtenemos los puntos A, B y C, y :

$$\vec{AB} = B - A = (3, -2, 0) - (0, 0, 6) = <3, -2, -6>$$
$$\vec{AC} = C - A = (2, 3, 0) - (0, 0, 6) = <2, 3, -6>$$

sus vectores unitarios serán :

$$\mu_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{<3, -2, -6>}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{7} <3, -2, -6>$$
$$\mu_{\vec{AC}} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{<2, 3, -6>}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{7} <2, 3, -6>$$

b)

$$\vec{F_1} = F_1\,\mu_{\vec{AB}} = \frac{840}{7} <3, -2, -6> = <360, -240, -720>$$
$$\vec{F_2} = F_2\,\mu_{\vec{AC}} = \frac{420}{7} <2, 3, -6> = <120, 180, -360>$$

Solución de la pregunta 4 ▲

a) De la figura :

$$\vec{F_1} = < -60\cos 45, 60\sin 45 > = < -30\sqrt{2}, 30\sqrt{2} >$$
$$\vec{F_2} = < -70\cos 30, -70\sin 30 > = < -35\sqrt{3}, -35 >$$
$$\vec{F_3} = < 0, -50 >$$

entonces :

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = < -30\sqrt{2} - 35\sqrt{3}, 30\sqrt{2} - 85 >$$
$$\to |\vec{F_R}| = \sqrt{(-30\sqrt{2} - 35\sqrt{3})^2 + (30\sqrt{2} - 85)^2} = 111.50\,\text{lb}$$

b) Como las componentes de $\vec{F_R}$ son negativas podemos decir que el vector se encuentra en el tercer cuadrante por ende al hallar el tangente de θ tenemos que sumarle 180°.

$$\tan\theta = \frac{30\sqrt{2} - 85}{-30\sqrt{2} - 35\sqrt{3}} = 0.41$$
$$\theta = 22.45^o$$

Por lo tanto la dirección de $\vec{F_R}$ será :

$$180^o + 22.45^o = 202.45^o$$

Solución de la pregunta 5 ▲

a) La componente del vector $\vec{F}$ sobre el vector $\vec{OA}$ define como :.

$$comp_{\vec{OA}}\vec{F} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{OA}}{||\vec{OA}||}$$

Iniciamos calculando los puntos O, A.

$$O = (0,0,0), A = (1,-3,2)$$

Ahora los vectores $\vec{OA} =< 1,-3,2 >$ y $\vec{F} =< -6,9,3 >$.
Operando en la definición de componente.

$$comp_{\vec{OA}}\vec{F} = \frac{< -6,9,3 > \cdot < 1,-3,2 >}{\sqrt{14}} = \frac{-27}{\sqrt{14}}$$

b) La proyección del vector $\vec{F}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{OA}$ se define como :

$$proy_{\vec{OA}}\vec{F} = comp_{\vec{OA}}\vec{F}\,\frac{\vec{OA}}{||\vec{OA}||}$$

$$proy_{\vec{OA}}\vec{F} = \frac{-27}{\sqrt{14}} \cdot \frac{< 1,-3,2 >}{\sqrt{14}} = \frac{-27}{14} < 1,-3,2 >$$

Solución de la pregunta 6 ▲

a) Para calcular la ecuación vectorial del plano se debe calcular el vector perpendicular al plano. Iniciamos identificando los puntos datos $A = (1,2,1), B = (-1,3,2), C = (2,-1,4)$ con ellos podemos determinar 2 vectores

$$\vec{AB} = B - A =< -2,1,1 >$$

$$\vec{AC} = C - A =< 1,-3,3 >$$

Calculando el vector normal :

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$$

Se toma un punto $P = (x,y,z)$ genérico en el plano y un punto de los conocidos para formar $\vec{AP} =< x-1, y-2, z-1 >$.
La ecuación vectorial viene dada por :

$$< x - x_0, y - y_0, z - z_0 > \cdot\vec{n} = 0$$

$$< x-1, y-2, z-1 > \cdot < 6,7,5 >= 0$$

b) La ecuación cartesiana está dada como la resolución de la ecuación vectorial :

$$6x + 7y + 5z - 25 = 0$$

Solución de la pregunta 7 ▲

a) Una manera de mostrar que tres vectores son coplanares, es mostrando que el triple producto escalar es cero, en cualquier orden.
Calculamos el triple producto escalar :

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot <3,1,2> = <17,11,-7> \cdot <3,1,2> = 48$$

Por lo que no son coplanares.

b) Ya que no son coplanares, los tres vectores generan un paralelepípedo cuyo volumen está dado por $V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |48| = 48\ u^3$

Solución de la pregunta 8 ▲

a) La componente del vector $\vec{F}$ proyectado a lo largo del tubo se define como :.

$$comp_{\vec{AO}}\vec{F} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{AO}}{||\vec{AO}||}$$

Iniciamos calculando los puntos O, A, B.

$$O = (0,0,0), A = (0,4,6), B = (4,5,0)$$

Ahora los vectores $\vec{AO}$ = $<0,-4,-6>$ y $\vec{F}$.

$$\vec{AO} = <0,-4,-6>$$

,

$$||\vec{AO}|| = \sqrt{52}$$

El vector $\vec{F}$ se define como :

$$\vec{F} = ||\vec{F}||\hat{F}$$
$$\vec{F} = ||\vec{F}||\hat{AB}$$

Calculando $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = B - A = <4,1,-6> = 4\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$$
$$||\vec{AB}|| = \sqrt{4^2+1^2+6^2} = 3\sqrt{7}$$

Reemplazando $\hat{AB} = \vec{AB}/||\vec{AB}||$ queda :

$$\vec{F} = 400 < \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{-6}{3\sqrt{7}} >$$

Operando en la definición de componente.

$$comp_{\vec{AO}}\vec{F} = \frac{400 < \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{-6}{3\sqrt{7}} > \cdot <0,-4,-6>}{\sqrt{52}} = \frac{3200}{3\sqrt{91}}$$

b) La proyección del vector $\vec{F}$ en la dirección del vector $\overrightarrow{AO}$ se define como :

$$proy_{\vec{AO}}\vec{F} = comp_{\vec{AO}}\vec{F}\cdot\hat{AO}$$

Con $\hat{AO} = \frac{0,-4,-6}{\sqrt{52}}$

$$proy_{\vec{AO}}\vec{F} = \frac{3200}{3\sqrt{91}} \cdot \frac{<0,-4,-6>}{\sqrt{52}} = \frac{800}{39\sqrt{7}} <0,-4,-6>$$

Solución de la pregunta 9 ▲

a) Para calcular la ecuación vectorial del plano hay que calcular el vector perpendicular al plano. Iniciamos identificando los puntos $O=(0,0,0), A=(3,-2,1), B=(1,1,1)$ y un punto en el espacio $C=(x,y,z)$. Con esto los vectores :

$$\vec{AO} = < -3, 2, -1 >$$
$$\vec{OB} = < 1, 1, 1 >$$

Calculando el vector perpendicular :

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

Se toma un punto en el plano y un punto de los conocidos para formar $\vec{AC} = < x-3, y+2, z-1 >$. La ecuación vectorial viene dada por :

$$< 3, 2, -5 > \cdot < x-3, y+2, z-1 >= 0$$

b) La ecuación cartesiana está dada como la resolución de la ecuación vectorial :

$$3x + 2y - 5z = 0$$

Solución de la pregunta 10 ▲

a) Si los vectores son coplanares significa que su producto triple es cero.
Calculamos el producto triple :

$$[\vec{u}\vec{v}\vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot < 4, 6, -2 >=< 5, -10, 7 > \cdot < 4, 6, -2 >= -54$$

Por lo que no son coplanares.

b) Ya que no son coplanares existe un volumen formado por los tres vectores.
Este es $V = |[\vec{u}\vec{v}\vec{w}]| = 54\ u^3$

Solución de la pregunta 11 ▲

$$\vec{r}(t) = < 3\ \sin t, 3\ \cos t, 6t >$$

item a)

$$a_T = \frac{v \cdot a}{|v|} \qquad a_N = \frac{|v \times a|}{|v|}$$

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = < 3\cos t, -3\sin t, 6 >$$

$$\vec{a} = \vec{r}\,''(t) = < -3\sin t, -3\cos t, 0 >$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

entonces :

$$a_T = \frac{v \cdot a}{|v|} = -9\sin t\cos t + 9\sin t\cos t + 0 = 0$$

$$a_N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3\cos t & -3\sin t & 6 \\ -3\sin t & -3\cos t & 0 \end{vmatrix} = |18\cos t\mathbf{i} - 18\sin t\mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 3$$

item b)

$$T = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} \qquad N = \frac{T'}{|T'|}$$

$$\vec{r}\,'(t) = < 3\cos t, -3\sin t, 6 > \qquad |\vec{r}\,'(t)| = 3\sqrt{5}$$

entonces

$$T = \frac{< 3\cos t, -3\sin t, 6 >}{3\sqrt{5}} = \frac{< \cos t, -\sin t, 2 >}{\sqrt{5}}$$

Ahora :

$$N = \frac{< -\sin t, -\cos t, 0 >}{\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}} = < -\sin t, -\cos t, 0 >$$

item c)
como $\vec{a} = a_N N + a_T T$ y sabemos que $a_T = 0$, entones :

$$\vec{a} = 3 < -\sin t, -\cos t, 0 >$$

item d)

$$\vec{r}\,'(t) = < 3\cos t, -3\sin t, 6 >$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = 3\sqrt{5}$$

entonces :

$$\int_0^{10} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = 30\sqrt{5}\,\mathrm{m}$$

considerando t en unidades de segundos.

Solución de la pregunta 12 ▲

---

item a)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-z}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-z}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-z}}$$

item b)

$$\Psi(x,y,x) = 3 = \sqrt{x^2+y^2-z}$$

entonces

$$z = x^2+y^2-9$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3,1)} = 2x = 2 \qquad \text{pendiente de la curva } C_1$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3,1)} = 2y = 6 \qquad \text{pendiente de la curva } C_2$$

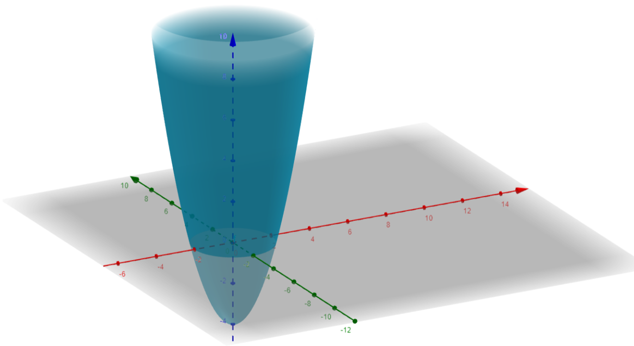
esto último representa la razón de cambio de z.
item c)

$$C = \Phi(2,1,1) = 2$$

$$\Phi(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-z} = 2$$

$$z = x^2+y^2-4$$

Gráfica de superficie de nivel de la función $\Phi = 2$.



Solución de la pregunta 13 ▲

$$\vec{r}(t) = < b\cos t, b\sin t, \sqrt{1-b^2}\,t >$$

como $b = 1/2$, entonces :

$$\vec{r}(t) = < \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}t >$$

item a)

$$a_T = \frac{v \cdot a}{|v|} \qquad a_N = \frac{|v \times a|}{|v|}$$

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) =< -\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} >$$

$$\vec{a} = \vec{r}\,''(t) =< -\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, 0 >$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{4} + \frac{\cos^2 t}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

entonces :

$$a_T = \frac{v \cdot a}{|v|} = \frac{1}{4}\sin t\cos t - \frac{1}{4}\sin t\cos t + 0 = 0$$

$$a_N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2}\sin t & \frac{1}{2}\cos t & \sqrt{3}/2 \\ -\frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2}\sin t & 0 \end{vmatrix} = |\frac{\sqrt{3}}{4}\sin t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}| = \frac{1}{2}$$

item b)

$$T = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} \qquad N = \frac{T'}{|T'|}$$

$$\vec{r}\,'(t) =< -\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} > \qquad |\vec{r}\,'(t)| = 1$$

entonces

$$T =< -\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} >$$

Ahora :

$$N = \frac{< -\frac{1}{2}\cos t, -\frac{1}{2}\sin t, 0 >}{\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t}} =< -\cos t, -\sin t, 0 >$$

item c)

como $\vec{a} = a_N N + a_T T$ y sabemos que $a_T = 0$, entones :

$$\vec{a} = \frac{1}{2} < -\cos t, -\sin t, 0 >$$

item d)

$$\vec{r}\,'(t) =< -b\sin t, b\cos t, \sqrt{1-b^2} >$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{b^2 + (1-b^2)} = 1$$

entonces :

$$\int_0^{300} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = 300 - 0 = 300\text{m}$$

considerando t en unidades de segundos.

Solución de la pregunta 14 ▲

item a)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 500(-\frac{5}{2})(\frac{2}{5}x^{-0.4} + \frac{3}{5}y^{-0.4})^{-7/2}(\frac{2}{5}(-0.4)x^{-1.4})$$

$$= 200(\frac{2}{5}x^{-0.4} + \frac{3}{5}y^{-0.4})^{-7/2}(x^{-1.4})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 500(-\frac{5}{2})(\frac{2}{5}x^{-0.4} + \frac{3}{5}y^{-0.4})^{-7/2}(\frac{3}{5}(-0.4)y^{-1.4})$$

$$= 300(\frac{2}{5}x^{-0.4} + \frac{3}{5}y^{-0.4})^{-7/2}(y^{-1.4})$$

item b)

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(500,1000)} = 200(\frac{2}{5}(500)^{-0.4} + \frac{3}{5}(1000)^{-0.4})^{-7/2}(500)^{-1.4} = 346.46$$

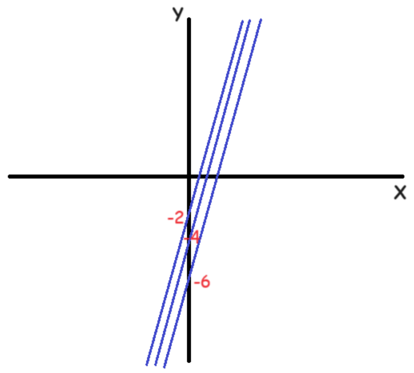
esto último representa la razón de cambio de la función de producción.
item c)

$$\begin{aligned} P(x,y) = 2^{2x-y} &= C \\ \log_2(2^{2x-y}) &= \log_2(C) \\ 2x - y &= \log_2(C) \\ y &= 2x - \log_2(C) \end{aligned}$$

entonces :

$$\begin{array}{lcl} c = 4 & \rightarrow & y = 2x - \log_2(4) = 2x - 2 \\ c = 16 & \rightarrow & y = 2x - \log_2(16) = 2x - 4 \\ c = 64 & \rightarrow & y = 2x - \log_2(64) = 2x - 6 \end{array}$$

Gráfica de la curva de nivel de la función de proyección para C =4,16 y 64



Solución de la pregunta 15 ▲

El error absoluto del área puede aproximarse mediante :

$$\Delta x = dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Donde $z = 5x^2 - 4y$, entonces :

$$dz = 10xdx - 4dy$$

Para $(x,y) = (10,6)$ con $\Delta x = 0.002$ y $\Delta y = \pm 0.006$

$$dz = 100(\pm 0.002) - 4(\pm 0.006)$$

$$dz = (\pm 0.200) + (\pm 0.024)$$

$$dz = \pm 0.224$$

Y el área es :

$$z = 5(10)^2 - 4(6) = 476$$

El error relativo es :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{0.224}{476} = 0.047\%$$

Solución de la pregunta 16 ▲

a) La dirección $\vec{PQ}$ esta dada por :

$$\vec{PQ} = Q - P = (\frac{\pi}{2}, \pi) - (\pi, 0) = < -\frac{\pi}{2}, \pi >$$

$$\|\vec{PQ}\| = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}$$

Su vector unitario en esta dirección es :

$$\hat{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = < -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} >$$

La gradiente de $f(x,y)$ es :

$$\nabla f(x,y) = < f_x, f_y >$$

$$\nabla f(x,y) = < 2\cos(2x)\cos(y), -\sin(2x)\sin(y) >$$

En el punto $P(\pi, 0)$:

$$\nabla f(\pi, 0) = < 2, 0 >$$

Entonces la derivada direccional de $D_u f$ en el punto $P(\pi, 0)$ es :

$$D_u f(\pi, 0) = \nabla f(\pi, 0) \cdot \hat{u}$$

$$D_u f(\pi, 0) = < 2, 0 > \cdot < -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} >$$

$$D_u f(\pi, 0) = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

b) Por propiedad de la gradiente, la dirección de máxima razón de cambio de temperatura en el punto $P(\pi,0)$ es :

$$\nabla f(\pi,0) = <2,0>$$

Ademas, el maximo valor es :

$$\|\nabla f(\pi,0)\| = 2$$

Solución de la pregunta 17 ▲

---

1. Datos y Variables del Problema :
   — f_1, f_2 : Funciones de costo de los dispositivos A y B respectivamente.
   — x_1, x_2 : Caudal de ingreso por el dispositivo A y B respectivamente.
2. — Función objetivo :

$$F(x_1,x_2) = x_1^2 + 0.5x_1 + x_2 + 4x_2^2$$

   — Restricción :

$$x_1 + x_2 = 3$$

3. El problema consiste en determinar los caudales óptimos de ingreso a través de los dispositivos A y B que minimicen el costo total, manteniendo el caudal total de ingreso al cultivo en 3 cm^3/hr.
4. Vamos a resolver el problema de optimización utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.
   La función objetivo es : $F(x_1,x_2) = x_1^2 + 0.5x_1 + x_2 + 4x_2^2$
   Entonces el problema es el siguiente :
   Maximizar $F(x_1,x_2) = x_1^2 + 0.5x_1 + x_2 + 4x_2^2$
   Sujeto a $x_1 + x_2 = 3$
   Paso 1 : Calcula la gradiente de la función objetivo $F(x_1,x_2)$ y de la restricción $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 3$:

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 0.5 + 2x_1 \\ 1 + 8x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Paso 2 : Plantea el sistema de ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange :

$$\begin{aligned} 0.5 + 2x_1 &= \lambda \\ 1 + 8x_2 &= \lambda \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   Paso 3 : Despeja λ en función de x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.5 + 2x_1 \\ \lambda &= 1 + 8x_2 \end{aligned}$$

   Igualando estas dos expresiones :

$$0.5 + 2x_1 = 1 + 8x_2$$

   Paso 4 : Resuelve para encontrar los valores de x_1 y x_2 :
   Usando la restricción $x_1 + x_2 = 3$:

Calculamos el valor correspondiente de x_1 y x_2 :

$$x_1 = 2.45$$
$$x_2 = 0.55$$

Paso 5 : Calcula el valor mínimo de la función objetivo :

$$F(2.45, 0.55) = 2.45^2 + 0.5 * 2.45 + 0.55 + 4 * 0.55^2 = 8.99$$

5. El valor obtenido en el ítem anterior se puede identificar en las imágenes proporcionadas.
6. Vamos a determinar si existe un mínimo global.
Paso 1 : Hallar los puntos críticos
Para encontrar los puntos críticos, calculamos la gradiente de la función $F(x, y)$ y la igualamos a cero :

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 0.5 + 2x \\ 1 + 8y \end{bmatrix} = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones :

$$0.5 + 2x = 0$$
$$1 + 8y = 0$$

Entonces despejando de las ecuaciones anteriores, el punto crítico es $(x, y) = (-0.25, -0.125)$.
Paso 2 : Hallar las segundas derivadas
Calculamos las segundas derivadas para usar el criterio de la segunda derivada y verificar que el punto crítico es un mínimo. Las segundas derivadas son :

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 8 \quad \text{y} \quad F_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Paso 3 : Proporcionar el mínimo
Para el punto $(x, y) = (-0.25, -0.125)$ se cumple

$$D(x, y) = F_{xx}(x, y) F_{yy}(x, y) - (F_{yy}(x, y))^2 = 16 > 0$$

y además
$$F_{xx}(-0.25, -0.125) = 2 > 0$$

Luego, el punto crítico $(-0.25, -0.125)$ es un mínimo.
Entonces, el valor mínimo de la función $F(x, y)$ es :

$$F(-0.25, -0.125) = -0.125$$

Solución de la pregunta 18 ▲

---

1. Datos y Variables del Problema :
— f_1, f_2 : Ganancia por el algodón y por el poliéster respectivamente.
— x_1, x_2 : Kilogramosde algodón y poliéster respectivamente.
2. — Función objetivo :
$$F(x_1, x_2) = 6 + 4x_1 + 3x_2 - 0.5x_1^2 - 0.8x_2^2$$
— Restricción :
$$x_1 + x_2 = 2$$
3. El objetivo es determinar la cantidad óptima de material que debe utilizarse para el tejido, para maximizar la ganancia total, garantizando una eficiente producción de tejido.

4. Vamos a resolver el problema de optimización utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.
   La función objetivo es : $F(x_1,x_2) = 6+4x_1+3x_2-0.5x_1^2-0.8x_2^2$
   Entonces el problema es el siguiente :
   Maximizar $F(x_1,x_2) = 6+4x_1+3x_2-0.5x_1^2-0.8x_2^2$
   Sujeto a $x_1+x_2 = 2$
   Paso 1 : Calcula la gradiente de la función objetivo $F(x_1,x_2)$ y de la restricción $g(x_1,x_2) = x_1+x_2-2$:

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 4-x_1 \\ 3-1.6x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Paso 2 : Plantea el sistema de ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange :

$$\begin{aligned} 4-x_1 &= \lambda \\ 3-1.6x_2 &= \lambda \\ x_1+x_2 &= 2 \end{aligned}$$

   Paso 3 : Despeja λ en función de x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned} \lambda &= 4-x_1 \\ \lambda &= 3-1.6x_2 \end{aligned}$$

   Igualando estas dos expresiones :

$$4-x_1 = 3-1.6x_2$$

   Paso 4 : Resuelve para encontrar los valores de x_1 y x_2 :
   Usando la restricción $x_1+x_2 = 2$:
   Calculamos el valor correspondiente de x_1 y x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.615 \\ x_2 &= 0.85 \end{aligned}$$

   Paso 5 : Calcula el valor mínimo de la función objetivo :

$$F(1.615,0.85) = 6+4*1.615+3*0.85-0.5*1.615^2-0.8*0.85^2 = 13.128$$

5. El valor obtenido en el ítem anterior se puede identificar en las imágenes proporcionadas.
6. Vamos a determinar si existe un máximo global.
   Paso 1 : Hallar los puntos críticos
   Para encontrar los puntos críticos, calculamos la gradiente de la función $F(x,y)$ y la igualamos a cero :

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 4-x \\ 3-1.6y \end{bmatrix} = 0$$

   Resolvemos el sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} 4-x &= 0 \\ 3-1.6y &= 0 \end{aligned}$$

   Entonces despejando de las ecuaciones anteriores, el punto crítico es $(x,y) = (4,1.875)$.

Paso 2 : Hallar las segundas derivadas

Calculamos las segundas derivadas para usar el criterio de la segunda derivada y verificar que el punto crítico es un máximo. Las segundas derivadas son :

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -1, \quad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -1.6 \quad \text{y} \quad F_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Paso 3 : Proporcionar el máximo

Para el punto $(x,y) = (4, 1.875)$ se cumple

$$D(x,y) = F_{xx}(x,y)\, F_{yy}(x,y) - (F_{yy}(x,y))^2 = 1.6 > 0$$

y además

$$F_{xx}(4, 1.875) = -1 < 0$$

Luego, el punto crítico $(4, 1.875)$ es un máximo.

Entonces, el valor mínimo de la función $F(x,y)$ es :

$$F(4, 1.875) = 16.8125$$

Solución de la pregunta 19 ▲

a. Descomponer la pieza en regiones simples para poder hallar su área.

$$\begin{aligned} R_1 &: \left\{0 \leqslant x \leqslant 4\ ,\ 4 - \tfrac{x^2}{4} \leqslant y \leqslant \tfrac{x}{3} + 4\right\} \\ R_2 &: \left\{4 \leqslant x \leqslant 6\ ,\ 3x - 12 \leqslant y \leqslant \tfrac{x}{3} + 4\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

b. Usar integrales dobles para poder calcular el área de la pieza.

Hallando las áreas $A(R_1)$ y $A(R_2)$

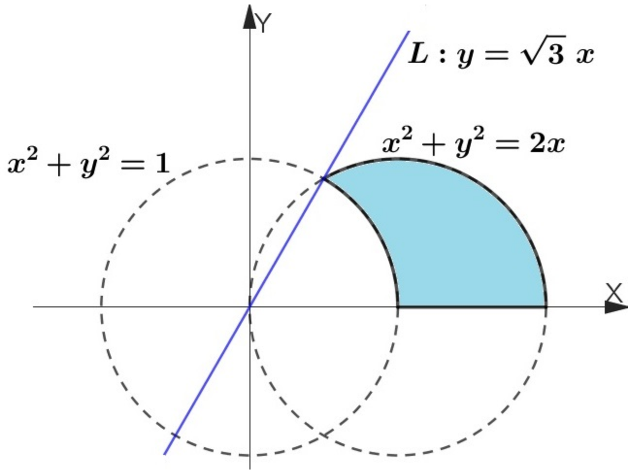
$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^4 \int_{4-\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{3}+4} dydx = \int_0^4 \left\{\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}\right\} dx = 8 \\ A(R_2) &= \int_4^6 \int_{3x-12}^{\frac{x}{3}+4} dydx = \int_4^6 \left\{\frac{x}{3} - 3x + 16\right\} dx = \frac{16}{3} \\ A(R) &= 8 + 16/3 = 40/3\ u^2 \end{aligned} \tag{10}$$

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dadas con respecto a gráfico planteado en el problema.

Rpta : Las regiones R_1 y R_2 geométricamente se observa que el área de R_1 es mayor que el área de R_2, lo que se verifica con los valores obtenidos. Loa valores para cada región se obtuvo positivo, era de esperar ya que representan área.

Solución de la pregunta 20 ▲

Una región del plano XY está limitada por las curvas de las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2x$ y las rectas $y=\sqrt{3}x$ e $y=0$, como se muestra en la figura.



a. Describir la región sombreada en coordenadas polares para hallar el área.

Usando la transformación polar

$$T : \begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \end{cases}$$

$$\text{llevando cada curva a la transformación } \ C_1 : r = 1 \ , \ C_2 : r = 2cos(\theta) \tag{11}$$

$$R : \left\{ 0 \leqslant r \leqslant 2cos(\theta) \ , \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \right\}$$

b. Usar integrales dobles en coordenadas polares y calcular la masa $M = \iint\limits_R \rho(x,y)dA$ de la región sombreada, si la densidad en cualquier punto está dado por $\rho(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ kg/m^3$.

$$Masa \quad = \quad \iint\limits_R \rho(x,y)dA = \iint\limits_R \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$$

reescribimos en cordenadas polares

$$\begin{aligned} &= \iint\limits_R r(\frac{2}{r})dA = 2\iint\limits_R drd\theta \\ &= 2\int\limits_0^{\pi/3}\int\limits_1^{2cos(\theta)} drd\theta \\ &= 2\int\limits_0^{\pi/3} \{2cos(\theta)-1\}\, d\theta = 2\ \{2sen(\theta)-\theta\}\,|_0^{\pi/3} = 2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})\ kg \end{aligned} \tag{12}$$

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dobles con respecto a gráfico planteado en el problema.

Rpta : El resultado obtenido de la integral es positivo e igual a 0.684kg, como se espera, ya que representa a la masa.

Solución de la pregunta 21 ▲

a. Dada la sucesión : $x_n = \dfrac{n}{n+3}$ Describa los tres primeros términos de la sucesión ¿Es convergente ?

$$x_n = \left\{\tfrac{1}{4}\ ,\ \tfrac{2}{5}\ ,\ \tfrac{3}{6}\ \ldots\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n}} = 1 \tag{13}$$

converge

b. Se tiene la serie : $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{5}{7^n})$, describa como son los términos de la serie. ¿Es convergente ?

Es una serie geométrica, cuyo término inicial $a_0 = 5$ y la razón $r = \frac{1}{7}$

$$|r| < 1 \text{ Es una serie geométrica converegente a } L = \frac{a_0}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{7}} = 35/6 \tag{14}$$

Solución de la pregunta 22 ▲

a. Descomponer la pieza en regiones simples para poder hallar su área.

$$\begin{aligned} R_1 &: \left\{0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 4-x^2 \leqslant y \leqslant 4-\tfrac{x^2}{9}\right\} \\ R_2 &: \left\{2 \leqslant x \leqslant 3\ ,\ 3x-6 \leqslant y \leqslant 4-\tfrac{x^2}{9}\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

b. Usar integrales dobles para poder calcular el área de la pieza.
Hallando las áreas $A(R_1)$ y $A(R_2)$

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^2 \int_{4-x^2}^{4-\frac{x^2}{9}} dydx = \int_0^2 \left\{\frac{8}{9}x^2\right\} dx = 64/27 \approx 2.37 \\ A(R_2) &= \int_2^3 \int_{3x-6}^{4-\frac{x^2}{9}} dydx = \int_2^3 \left\{10 - \frac{x^2}{9} - 3x\right\} dx = \frac{97}{54} \approx 1.79 \end{aligned} \tag{16}$$

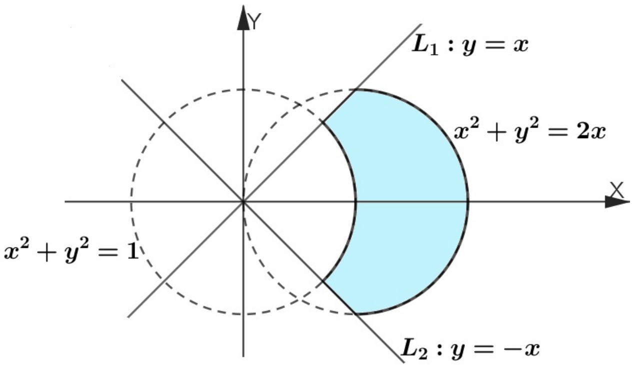
$$A(R) = 64/27 + 97/54 = 225/54\ u^2$$

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dadas con respecto a gráfico planteado en el problema.

Rpta : Las regiones R_1 y R_2 geométricamente se observa que el área de R_1 es mayor que el área de R_2, lo que se verifica con los valores obtenidos. Loa valores para cada región se obtuvo positivo, era de esperar ya que representan área.

Solución de la pregunta 23 ▲

Una región del plano XY está limitada por las curvas de las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2x$ y las rectas $y=x$ e $y=-x$, como se muestra en la figura.



a. Describir la región sombreada en coordenadas polares para hallar el área.

Usando la transformación polar

$$T : \begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \end{cases}$$

$$\text{llevando cada curva a la transformación } \; C_1 : r = 1 \;,\; C_2 : r = 2cos(\theta) \tag{17}$$

$$R : \left\{ 1 \leqslant r \leqslant 2cos(\theta) \;,\; -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \right\}$$

b. Usar integrales dobles en coordenadas polares y calcular la masa $M = \iint\limits_R \rho(x,y)dA$ de la región sombreada, si la densidad en cualquier punto está dado por $\rho(x,y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}\ kg/m^3$.

$$\begin{aligned}
Masa &= \iint\limits_R \rho(x,y)dA = \iint\limits_R \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}dA
\end{aligned}$$

reescribimos en cordenadas polares

$$\begin{aligned}
&= \iint\limits_R r(\frac{3}{r})drd\theta = 3\iint\limits_R drd\theta \\
&= 3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{1}^{2cos(\theta)} drd\theta \\
&= 3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\{2cos(\theta)-1\}d\theta = 3\,\{2sen(\theta)-\theta\}\,|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= 3(2\sqrt{2}-\tfrac{\pi}{4})\;kg \approx 6.12\;kg
\end{aligned} \tag{18}$$

c. Interpretar y reconocer el valor obtenido de las integrales dobles con respecto a gráfico planteado en el problema.

Rpta : El resultado obtenido de la integral es positivo e igual a 6.12 kg, como se espera, ya que representa a la masa.

Solución de la pregunta 24 ▲

---

a. Dada la sucesión : $x_n = \dfrac{n+4}{n^2+3}$ Describa los tres primeros términos de la sucesión. ¿Es convergente?

$$\begin{aligned}
& x_n = \{\tfrac{5}{4}\,,\,\tfrac{6}{7}\,,\,\tfrac{7}{12}\,...\} \\
& \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+4}{n^2}}{\frac{n^2+3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = 0 \\
& converge
\end{aligned} \tag{19}$$

b. Se tiene la serie : $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{2^{n+1}})$, describa como son los términos de la serie. ¿Es convergente?

$$\begin{aligned}
& \text{Es una serie geométrica, cuyo término inicial } \;a_0 = 2 \text{ y la razón } r = \tfrac{1}{2} \\
& |r| < 1 \text{ Es una serie geométrica converegente a } L = \frac{a_0}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned} \tag{20}$$

Solución de la pregunta 25 ▲

a) Hacemos $\vec{A} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{x}{9} = 2k \quad \rightarrow \quad x = 18k \\
\cos\beta &= \frac{y}{9} = 2k \quad \rightarrow \quad y = 18k \\
\cos\gamma &= \frac{z}{9} = -k \quad \rightarrow \quad z = -9k
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt{(18k)^2 + (18k)^2 + (9k)^2} = \|\vec{A}\| = 9 \quad \rightarrow \quad k = 1/3$

$\Rightarrow \vec{A} = 6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k} \quad$ y $\quad \vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = 12\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$

b) $\Rightarrow \|S\| = \sqrt{154}$

$\Rightarrow \vec{\mu}_S = \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} = \frac{12\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-\hat{k}}{\sqrt{154}}$

c) Como $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$

$\Rightarrow (38 - 18 - 6) = \sqrt{81}\sqrt{49} \cos\theta$
$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{21}\right)$
$\Rightarrow \theta = 79.02°$

Solución de la pregunta 26 ▲

n_1 y n_2 vectores normales de los planos P_1 y P_2

$$\begin{aligned}
P_1 &: n_1 = < 3, 12, -3 > \\
P_2 &: n_2 = < 3, -4, 9 >
\end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación de la recta necesitamos un punto y un vector paralelo a la recta.
Sea $v = < a, b, c >$ entonces :

$$\begin{aligned}
< a, b, c > \cdot < 3, 12, -3 > &= 0 \\
< a, b, c > \cdot < 3, -4, 9 > &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
3a + 12b - 3c &= 0 \\
3a - 4b + 9c &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow < a, b, c > = \frac{b}{3} < -8, 3, 4 >$ podemos tomar $v = < -8, 3, 4 >$ ya que es un vector paralelo.

Como intersecta a las rectas, entonces sean Q_1 y Q_2 puntos de intersección con las rectas L_1 y L_2 respectivamente. Entonces :

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = (3 - 2s, -1 + 3s, 2 + 4s) - (-5 + 2t, 3 - 4t, -1 + 3t) = \alpha < -8, 3, 4 >$$

$\Rightarrow$

$$8 - 2s - 2t = -8\alpha \tag{21}$$
$$-4 + 3s + 4t = 3\alpha \tag{22}$$
$$3 + 4s - 3t = 4\alpha \tag{23}$$

de (2) y (3) igualando α, obtenemos : $t = 1$, entonces $s = 3/5$. $\Rightarrow Q_1 = (-3,-1,2)$ y $v =< -8,3,4 >$.
Por lo tanto :

$$L : \frac{x+3}{-8} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Solución de la pregunta 27 ▲

Sean las rectas $L_1 = \mathscr{L}((5,2),\overrightarrow{(1,-1)})$ y $L_2 = \mathscr{L}((4,6),\overrightarrow{(1,2)})$. Si $L_1 \cap L_2 = \{Q\}$, determinar la ecuación de la recta L que pasa por Q y es ortogonal a la recta L_3 que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(3,8)$.
Solución P3 :

De la intersección de las rectas, encontraremos Q como punto de la recta L :

$$\begin{aligned} 5+t &= 4+s & &\rightarrow t = s-1 \\ 2-t &= 6+2s & &\rightarrow 2-(s-1) = 6+2s \quad \rightarrow \quad s=1 \quad y \quad t=-2 \end{aligned}$$

entonces $Q = (3,4)$. Ahora vamos encontrar el vector paralelo a la recta L, que será la ortogonal al vector v paralelo a la recta L_3, donde :

$$v = (3,8)-(1,0) =< 2,8 > \quad \rightarrow \quad v^{\perp} =< -8,2 >$$

Por lo tanto :

$$L = \mathscr{L}((3,4),\overrightarrow{(-8,2)})$$

Solución de la pregunta 28 ▲

Primero empezamos usando M como punto de intersección de las diagonales del rombo, entonces M pertenece a la recta $\mathscr{L}_1$, entonces igualamos abscisas y ordenadas :

$$a-1+t(a-3) = 3a+1 \tag{24}$$
$$5a-6+t = 6a \quad \rightarrow \quad t = a+6 \tag{25}$$

reemplazando $t = a+6$ en (4) obtenemos : $a = -5$ y $a = 4$ como $a > 0$, entonces

$$a = 4$$

Entonces $M = (13,24)$ y

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1 &: \{(3,14)+t(1,1)\} \\ \mathscr{L}_2 &: \{(-16,2)+s(12,5)\} \end{aligned}$$

Intersectando $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, obtenemos :

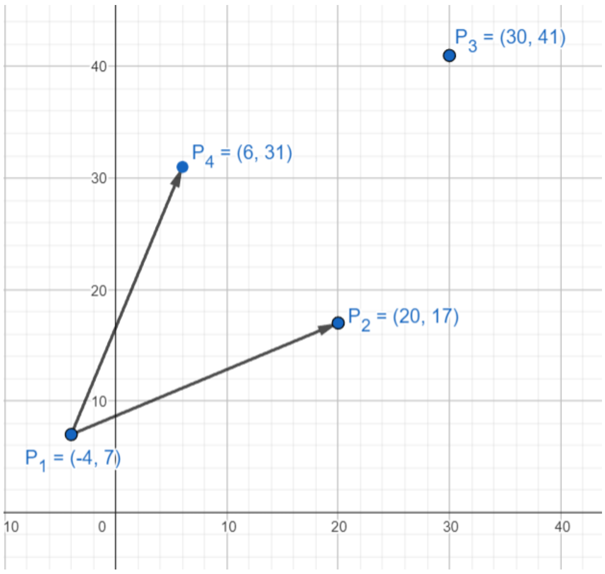
$$\begin{aligned} 3+t &= -16+12s \\ 14+t &= 2+5s \end{aligned}$$

Restando las dos últimas ecuaciones, tenemos $s = 1$ y $t = -7$, entonces primer vertice del rombo encontrado es :

$$P_1 = (-4,7)$$

Como M es el centro del rombo, observamos que P_1 es un punto inferior del rombo, ya que para llegar a M se desplaza en el eje x 17 unidades y sube en el eje y 17 unidades. Entonces el otro punto que se encuentra al otro extremo de la diagonal que contiene a P_1 y M será :

$$P_3 = M+(17,17) = (30,41)$$



Lo siguiente será encontrar la recta que contiene a la otra diagonal del rombo, como ambas diagonales son perpendiculares entre sí, entonces con el vector ortogonal $< -1, 1 >$ de la recta $\mathscr{L}_1$ y M formaremos una recta $\mathscr{L}_3$ que contiene a la otra diagonal del rombo : Ahora encontraremos el punto de intersección entre $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_2$.

$$(13, 24) + w(-1, 1) = (-16, 2) + s(12, 5)$$

Resolviendo, obtenemos $s = 3$ y $w = -7$. Entonces :

$$P_2 = (20, 17)$$

Para hallar P_4 solo necesitamos a P_2 y M, de P_2 a M retrocede 7 unidades y sube 7 unidades, entonces :

$$P_4 = M + (-7, 7) = (6, 31)$$

Por último cáculamos el área del rombo, usando el producto vectorial de dos lados del rombo
Entonces el Área $= ||\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}||$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (20, 17) - (-4, 7) = < 24, 10 >$$
$$\overrightarrow{P_1P_4} = (6, 31) - (-4, 7) = < 10, 24 >$$

$$||\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_2}|| = \begin{vmatrix} 24 & 10 \\ 10 & 24 \end{vmatrix} = |24^2 - 10^2| = 476$$

$\Rightarrow$ Área = 476 u^2

Solución de la pregunta 29 ▲

Sea :

$$a = < a_1, a_2 > \quad \rightarrow \quad a^{\perp} = < -a_2, a_1 >$$
$$b = < b_1, b_2 > \quad \rightarrow \quad b^{\perp} = < -b_2, b_1 >$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$a + b^{\perp} = < a_1 - b_2, a_2 + b_1 > = < -1, 5 > \tag{26}$$
$$< b_1 - a_2, b_2 + a_1 > \cdot < -5, 3 > = 0 \tag{27}$$
$$< a_1 + b_1, a_2 + b_2 > = \alpha < 1, -1 > \tag{28}$$

de (6), (7) y (8), tenemos :

$$a_1 - b_2 = -1 \;\; \& \;\; a_2 + b_1 = 5 \tag{29}$$
$$5(b_1 - a_2) = 3(b_2 + a_1) \tag{30}$$
$$a_1 + b_1 = -(a_2 + b_2) \tag{31}$$

Despejando (9) : $a_1 = b_2 - 1$ y $a_2 = 5 - b_1$ y reemplazando en (11), obtenemos $b_2 = -2$ y $a_1 = -3$. Reemplazando a_1, a_2 y b_2 en (10), obtenemos :

$$b_1 = 1 \;\; \& \;\; a_2 = 4$$

Solución de la pregunta 30 ▲

---

a) Primero encontraremos los vectores unitarios de X' y Y', como el angulo entre los ejes X' y X es 45° entonces :

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \tag{32}$$
$$\mathbf{j}' = \frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \tag{33}$$

Luego sumando ambas ecuaciones, obtenemos :

$$\mathbf{i}' + \mathbf{j}' = \frac{2\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{i}' + \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}' - \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}'$$

Entonces : reemplazando los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{A} = 30(\frac{\mathbf{i}' - \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}) + 4(\frac{\mathbf{i}' + \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}) + 16\mathbf{k}'$$

$$\rightarrow \qquad \vec{A} = \frac{34}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' - \frac{26}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + 16\mathbf{k}'$$

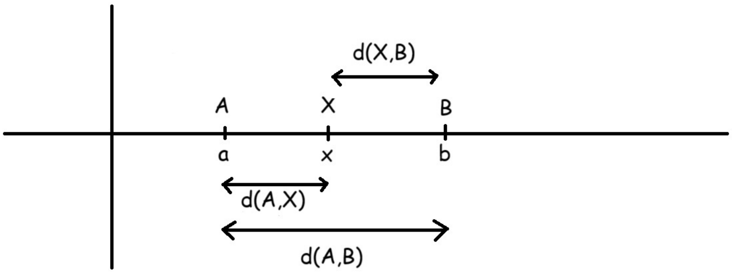
$$\vec{B} = -20(\frac{\mathbf{i}' - \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}) - 15(\frac{\mathbf{i}' + \mathbf{j}'}{\sqrt{2}}) + 8\mathbf{k}'$$

$$\rightarrow \qquad \vec{B} = -\frac{35}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + 8\mathbf{k}'$$

b) Verifiquemos $\vec{A} \cdot \vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (30\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) \cdot (-20\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = -532$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\frac{34}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' - \frac{26}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + 16\mathbf{k}') \cdot (-\frac{35}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' + 8\mathbf{k}') = -532$$



Por lo tanto no varía.

b) Verifiquemos $\vec{A} \times \vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 30 & 4 & 16 \\ -20 & -15 & 8 \end{vmatrix} = 272\mathbf{i} - 560\mathbf{j} - 370\mathbf{k} \tag{34}$$

y

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \frac{34}{\sqrt{2}} & -\frac{26}{\sqrt{2}} & 16 \\ -\frac{35}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & 8 \end{vmatrix} = -\frac{288}{\sqrt{2}}\mathbf{i}' - \frac{832}{\sqrt{2}}\mathbf{j}' - 370\mathbf{k}' \tag{35}$$

Si (3) lo pasamos a vectores unitarios $\mathbf{i}'$,$\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$ obtenemos (4). Por lo tanto obtenemos el mismo vector como resultado del producto vectorial de ambos vectores. Quiere decir que no varía.

Solución de la pregunta 31 ▲

De la figura siguiente obtenemos

$$d(A,X) = x - a$$
$$d(X,B) = b - x$$
$$d(A,B) = b - a$$

$\Rightarrow$

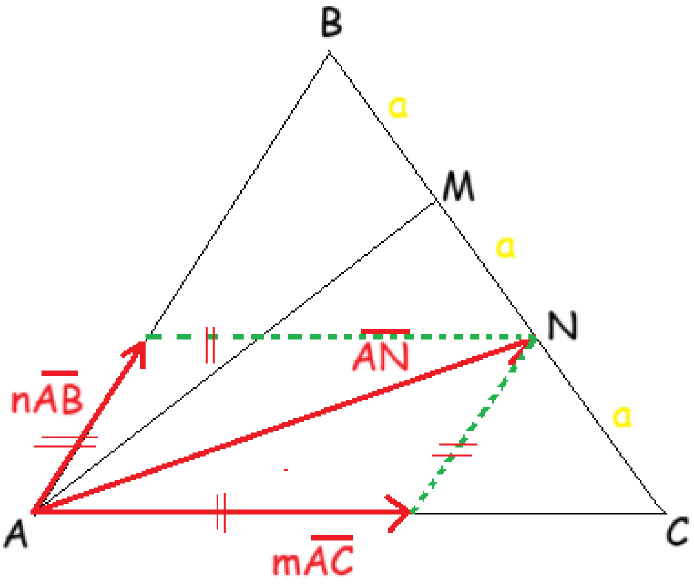
$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{x-a}$$

$\rightarrow$

$$(x-a)^2 = (b-x)(b-a)$$
$$x^2 - 2ax - a^2 = b^2 - ab - bx + ax$$
$$\rightarrow \quad x^2 + (b-3a)x + ab - a^2 - b^2 = 0$$

$\rightarrow$

$$x = \frac{-(b-3a) \pm \sqrt{(b-3a)^2 - 4(ab - a^2 - b^2)}}{2}$$



Resolviendo, obtenemos :

$$x = \frac{-(b-3a) \pm \sqrt{b^2 - 6ab - 9a^2 - 4ab + 4a^2 + 4b^2}}{2}$$

$$x = \frac{-(b-3a) \pm \sqrt{5b^2 - 5a^2 - 10ab}}{2}$$

$$x = \frac{-(b-3a) \pm \sqrt{(b-a)^2}\sqrt{5}}{2}$$

como $b > a$, entonces :

$$x = \frac{-(b-3a) \pm (b-a)\sqrt{5}}{2}$$

Entonces :

$$x = \frac{2a - (b-a) \pm (b-a)\sqrt{5}}{2}$$

$$x = a + \frac{(b-a)(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

como $x > a$, entonces :

$$x = a + \frac{(b-a)(-1 + \sqrt{5})}{2}$$

Solución de la pregunta 32 ▲

De acuerdo a la imagen siguiente, observamos que $n = 1/3$ siendo la tercera parte del modulo del vector $\overline{AB}$ y $m = 2/3$, como la dos tercera parte del modulo de $\overline{AC}$, por tanto :

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Solución de la pregunta 33 ▲

i) Como $u+v+w=0$, entonces :

$$(u+v+w)\times v = 0\times v \quad\to\quad u\times v + w\times v = 0 \quad\to\quad u\times v = -w\times v = v\times w \tag{36}$$
$$(u+v+w)\times u = 0\times u \quad\to\quad v\times u + w\times u = 0 \quad\to\quad w\times u = -v\times u = u\times v \tag{37}$$

DE (5) y (6), obtenemos :

$$u\times v = v\times w = w\times u$$

ii) Como $u\times v = v\times w = w\times u \neq 0$, entonces :

$$u\times v = v\times w \quad\to\quad u\times v = -w\times v \quad\to\quad u\times v + w\times v = 0 \quad\to\quad (u+w)\times v = 0$$

como $u+v$ es paralelo al vector u entonces sumamos al resultado de $u+v$ el vector v

$$u\times v = v\times w \to \quad u\times v = -w\times v \to \quad u\times v + w\times v = 0 \to \quad (u+w)\times v = 0 \quad\to\quad (u+v+w)\times v = 0$$

$$v\times w = w\times u \to \quad v\times w = -u\times w \to \quad v\times w + u\times w = 0 \to \quad (v+u)\times w = 0 \quad\to\quad (u+v+w)\times w = 0$$

$$u\times v = w\times u \to \quad w\times u = -v\times u \to \quad w\times u + v\times u = 0 \to \quad (w+v)\times u = 0 \quad\to\quad (u+v+w)\times u = 0$$

Entonces del primer resultado $u+v+w$ es paralelo a v, y del segundo resultado $u+v+w$ también es paralelo a w pero sabemos que $v\times w \neq 0$. Por lo tanto solo queda que :

$$u+v+w=0$$

Solución de la pregunta 34 ▲

Sino son alabeadas entonces se intersectan o son paralelas, entonces :
Primer caso : Se intersectan

$$x = y \to \frac{2x-1}{3} = \frac{x+3}{-2} \to -4x+2 = 3x+9 \to 7x = -7 \to \quad x = -1$$

entonces $y=-1$ y :

$$-1 = z-a \;\; \& \;\; \frac{-1+3}{-2} = \frac{z-2}{a} \to z = a-1 \;\; \& \;\; z = 2-a \to a-1 = 2-a \to \quad a = 3/2$$

Segundo caso : ¿son paralelas ?
Significa que los vectores de ambas rectas son paralelos. Vector paralelo a la recta r es $v_r = <1,1,1>$ y vector paralelo a la recta s es $v_s = <3,-2,a>$, entonces :

$$\begin{aligned} v_r &= \alpha v_s \\ <1,1,1> &= \alpha <3,-2,a> \\ \to \quad & 1 = 3\alpha && (*) \\ & 1 = -2\alpha && (**) \\ & 1 = a\alpha \end{aligned}$$

De (*) y (**), encontramos que no existe un α en los reales, por ende estas rectas no son paralelas. Solo se intersectan o pueden ser alabeadas.

Solución de la pregunta 35 ▲

b) Para determinar si 3 vectores son coplanarios o no, debemos aplicar el triple producto escalar.
Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ 4 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{\boldsymbol{i}} - 14\hat{\boldsymbol{j}} + 4\hat{\boldsymbol{k}} - (2\hat{\boldsymbol{k}} + 7\hat{\boldsymbol{i}} + 4\hat{\boldsymbol{j}}) = -8\hat{\boldsymbol{i}} - 18\hat{\boldsymbol{j}} + 2\hat{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \\ 2 \end{bmatrix} = -58$$

Como $\mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = -58 \neq 0$, entonces los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no son coplanarios.
Los conceptos de independencia lineal y vectores no coplanarios se relacionan mediante la siguiente proposición :
“Tres vectores son linealmente independientes, si y sólo si son no coplanarios."
Este último enunciado es equivalente a :
“Tres vectores son linealmente dependientes, si y sólo si son coplanarios".
Para demostrar ésta proposición. Supongamos primero que los tres vectores son linealmente dependientes.
Luego, existen escalares λ_1, λ_2 y λ_3 no todos nulos tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = 0.$$

Supongamos que $\lambda_1 \neq 0$, luego

$$\mathbf{v}_1 = c_1\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3$$

donde $c_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $c_2 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$.
Como $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_2 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (c_1\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3) \times \mathbf{v}_2 \\ &= c_1\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2 \\ &= c_2\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_3$ es perpendicular a $c_2\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_2$. Entonces, tenemos que el triple producto escalar es igual a cero :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 \cdot (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_3 \cdot (c_2\mathbf{v_3} \times \mathbf{v}_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ son coplanarios.
El recíproco se sigue de la doble equivalencia de la demostración anterior.

c) Para encontrar un conjunto de vectores ortogonales que genere el mismo espacio que los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$, debemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt.
Hacemos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Calculamos $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2$

— $\text{proy}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \frac{-2}{\sqrt{66}^2}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{33} \\ \frac{1}{33} \\ -\frac{7}{33} \end{bmatrix}$

Luego, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{4}{33} \\ \frac{1}{33} \\ -\frac{7}{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{62}{33} \\ \frac{32}{33} \\ \frac{40}{33} \end{bmatrix}$

Calculamos $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \text{proy}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$

— $\text{proy}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \frac{-17}{\sqrt{66}^2}\begin{bmatrix}4\\-1\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{34}{33}\\\frac{17}{66}\\-\frac{119}{66}\end{bmatrix}$

— $\text{proy}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{16/33}{\sqrt{196/33}^2}\begin{bmatrix}-\frac{62}{33}\\\frac{32}{33}\\-\frac{40}{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{248}{1617}\\\frac{128}{1617}\\\frac{160}{1617}\end{bmatrix}$

Luego, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{34}{33}\\\frac{17}{66}\\-\frac{119}{66}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{248}{1617}\\\frac{128}{1617}\\\frac{160}{1617}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{58}{49}\\\frac{261}{98}\\-\frac{29}{98}\end{bmatrix}$

Por lo tanto, el conjunto de vectores ortogonales es :

$$\left\{\begin{bmatrix}4\\-1\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{62}{33}\\\frac{32}{33}\\\frac{40}{33}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{58}{49}\\\frac{261}{98}\\-\frac{29}{98}\end{bmatrix}\right\}$$

Estos vectores generan el mismo espacio que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$; ya que, el proceso de Gram-Schmidt no modifica la independencia lineal de los vectores iniciales ; es decir, el proceso de Gram-Schmidt produce vectores ortogonales que siguen siendo linealmente independientes. Como éstos nuevos vectores ortogonales están en el mismo espacio que los vectores iniciales, entonces generan el mismo espacio.

d) Para encontrar un conjunto de vectores ortonormales que genere el mismo espacio que los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, lo único que tenemos que hacer es normalizar los vectores ortogonales que obtuvimos en el el proceso de Gram-Schmidt.
Sean las normas

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{66}, \quad \|\mathbf{u}_2\| = \frac{14\sqrt{33}}{3}, \quad \|\mathbf{u}_1\| = \frac{29\sqrt{2}}{14}$$

Luego, los vectores ortonormales son :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{66}}{33}\\-\frac{\sqrt{66}}{66}\\\frac{7\sqrt{66}}{66}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{bmatrix}-\frac{31\sqrt{33}}{231}\\\frac{16\sqrt{33}}{231}\\\frac{20\sqrt{33}}{231}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{7}\\\frac{9\sqrt{2}}{14}\\-\frac{\sqrt{2}}{14}\end{bmatrix}$$

Este conjunto de vectores ortonormales son los vectores unitarios de los vectores encontrados en el proceso de Gram-Schmidt, por ello genera el mismo espacio que los vectores iniciales.

Solución de la pregunta 36 ▲

Sea $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \alpha t\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\beta t^2+\alpha)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\gamma t^3+\beta)\hat{\boldsymbol{k}}$.
Luego, $r'(t) = \langle \alpha, 2\beta t, 3t^2\gamma\rangle$
En $t=1$, $r'(1) = \langle \alpha, 2\beta, 3\gamma\rangle$

$$\|r'(1)\| = \sqrt{\alpha^2+4\beta^2+9\gamma^2} = 2\sqrt{29} \tag{38}$$

La dirección del vector velocidad está determinada por la dirección de la recta L ; es decir,

$$\langle 2, -4, 3\rangle // \langle \alpha, 2\beta, 3\gamma\rangle$$

Luego,

$$\alpha = 2k \qquad\qquad 2\beta = -4k \qquad\qquad 3\gamma = 3k$$
$$\beta = -2k \qquad\qquad \gamma = k$$

En (1) :

$$\begin{aligned} 4k^2 + 4(4k^2) + 9k^2 &= 116 \\ 29k^2 &= 116 \\ |k| &= 2 \end{aligned}$$

Debido a que $\beta > 0$, entonces $-2k > 0$, luego $k < 0$, entonces $k = -2$
Luego, $\alpha = -4$, $\beta = 4$ y $\gamma = -2$
Por tanto, $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \langle -4t,\, 4t^2 - 4,\, -2t^3 + 4\rangle$
$r'(t) = \langle -4,\, 8t,\, -6t^2\rangle = 2\langle -2,\, 4t,\, -3t^2\rangle$
$\|r'(t)\| = \sqrt{16 + 64t^2 + 36t^4} = 2\sqrt{4 + 16t^2 + 9t^4}$ Luego, el vector unitario tangencial es

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \\ T(t) &= \frac{2\langle -2,\, 4t,\, -3t^2\rangle}{2\sqrt{4+16t^2+9t^4}} \\ T(t) &= \frac{\langle -2,\, 4t,\, -3t^2\rangle}{\sqrt{4+16t^2+9t^4}} \end{aligned}$$

Como $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$
Hallando $T'(t)$

$$\begin{aligned} T(t) &= (4+16t^2+9t^4)^{-1/2}\langle -2,\, 4t,\, -3t^2\rangle \\ T'(t) &= \Big\langle -2\left(-\frac{1}{2}\right)(4+16t^2+9t^4)^{-3/2}(32t+36t^3), \\ &\qquad 4t\left(-\frac{1}{2}\right)(4+16t^2+9t^4)^{-3/2}(32t+36t^3) + 4(4+16t^2+9t^4)^{-1/2}, \\ &\qquad -3t^2\left(-\frac{1}{2}\right)(4+16t^2+9t^4)^{-3/2}(32t+36t^3) - 6t(4+16t^2+9t^4)^{-1/2}\Big\rangle \\ &= (4+16t^2+9t^4)^{-3/2}\Big\langle 32t+36t^3, \\ &\qquad -2t(32t+36t^3) + 4(4+16t^2+9t^4), \\ &\qquad \frac{3}{2}t^2(32t+36t^3) - 6t(4+16t^2+9t^4)\Big\rangle \\ &= (4+16t^2+9t^4)^{-3/2}\Big\langle 32t+36t^3,\, 16-36t^4,\, -48t^3-24t\Big\rangle \\ &= 4(4+16t^2+9t^4)^{-3/2}\Big\langle 8t+9t^3,\, 4-9t^4,\, -12t^3-6t\Big\rangle \end{aligned}$$

Luego

$$N(t) = \frac{\langle 8t+9t^3,\, 4-9t^4,\, -12t^3-6t\rangle}{\sqrt{81t^8 - 225t^6 + 216t^4 + 100t^2 + 16}}$$

En $t = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} T(1) &= \frac{\langle -2,\, 4,\, -3\rangle}{\sqrt{29}} \\ N(1) &= \frac{\langle 17,\, -5,\, -18\rangle}{\sqrt{188}} \end{aligned}$$

Si comprobamos, tenemos que el producto escalar

$$T(1) \cdot N(1) = 0$$

Solución de la pregunta 37 ▲

Represéntese la trayectoria por la función de posición

$$r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por

$$r'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $r'(t)$ y $\nabla T(x,y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad -2y = k\frac{dy}{dt}$$

donde k depende de t. Despejando en cada ecuación dt/k e igualando los resultados, se obtiene

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador comienza en el punto $(2, -3)$, se puede determinar que $C = 2/81$. Por tanto, la trayectoria del rastreador del calor es

$$x = \frac{2}{81}y^4.$$

Solución de la pregunta 38 ▲

item a)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= 2x(1) + 2y(1) - 2z(v) \\
\frac{\partial f}{\partial u} &= 2(u+v) + 2(u-v) - 2uv^2 = 4u - 2uv^2 = 2u(2 - v^2)
\end{aligned}$$

respecto de v

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= 2x(1) + 2y(-1) - 2z(u) \\
\frac{\partial f}{\partial u} &= 2(u+v) - 2(u-v) - 2u^2v = 4v - 2u^2v = 2v(2 - u^2)
\end{aligned}$$

item b)

en el punto $(1, -1, -1)$

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= f(x,y,z) - 1 = 0 \\
&= x^+y^2 - z^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

$F_x(x,y,z)=2x$, $F_y=2y$ y $F_z(x,y,z)=-2z$ en $(1,-1,-1)$:

$$F_x=2 \quad , \quad F_y=-2 \quad y \quad F_z=2$$

$$\begin{aligned} 2(x-1)-2(y+1)+2(z+1) &= 0 \\ x-y+z-1 &= 0 \end{aligned}$$

item c)

$$\nabla f(x,y,z)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$$

dirección de mayor crecimiento a partir del punto $(2,-1,-3)$

$$\nabla f(2,-1,-3)=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

tasa de crecimiento

$$|\nabla f(2,-1,-3)|=\sqrt{4^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

Solución de la pregunta 39 ▲

item a)
Diferencial total del modelo

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz=-0.92dx+1.03dy$$

item b)

$$dz=-0.92(\pm 0.25)+1.03(\pm 0.25)$$

máximos errores de propagación

$$-0.4875<dz<0.4875$$

como $x=1.9$ y $y=7.5$, entonces

$$z=-0.92(1.9)+1.03(7.5)+0.02=5.997$$

el error relativo $\frac{\Delta z}{z}$

$$\frac{\Delta z}{z}=\frac{0.4875}{5.997}=8.13\%$$

Solución de la pregunta 40 ▲

item a)

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{9x}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\frac{9(x-3)}{((x-3)^2+(y-1)^2)^{3/2}}-\frac{9(x-3)}{((x-3)^2+(y+1)^2)^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(2,3)} = 1.317409$$

con respecto a y

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{9y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{9(y-1)}{((x-3)^2+(y-1)^2)^{3/2}} - \frac{9(y+1)}{((x-3)^2+(y+1)^2)^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(2,3)} = -1.547538$$

la razón de cambio del potencial V con respecto al eje x incrementa 1.317409, y la razón de cambio del potencial V con respecto al eje y disminuye -1.547538

item b)

como $x = 100 >> 10$ y $y = 100 >> 10$, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{9x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(100,100)} = -0.000318$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{9y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(100,100)} = -0.000318$$

Para x y y mucho mayores que 10, la razón de cambio del potencial con respecto al eje X y Y son casi insignificantes.

item c)

curvas de nivel para $x >> 10$ y $y >> 10$

$$V(x,y) \approx \frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$$

$$x^2+y^2 = (\frac{9}{C})^2$$

Para $C = 0.003$ y $C = 0.002$

Solución de la pregunta 41 ▲

Datos :

$$\mathbf{v}(t) =< -sen(t)-1, 3-3e^{-t}, 6 >$$
$$\mathbf{r}(0) =< 2, 4, -1 >$$

item a)

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt =< cos(t)-t+c_1, 3e^{-t}+3t+c_2, 6t+c_3 >$$
$$\mathbf{r}(t=0) =< 1+c_1, 3+c_2, c_3 >$$

igualando con el dato de $\mathbf{r}(0)$

$$\mathbf{r}(t=0) =< 1+c_1, 3+c_2, c_3 >=< 2, 4, -1 >$$

obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}$$

entonces

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = < cos(t) - t + 1, 3e^{-t} + 3t + 1, 6t - 1 >}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = < -cos(t), 3e^{-t}, 0 >$$

item b)

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} \qquad \text{y} \qquad a_N = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(0) = < -1, 0, 6 > \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}(0)| = \sqrt{37} \\ &\mathbf{a}(0) = < -1, 3, 0 > \end{aligned}$$

$$a_T = \frac{1}{\sqrt{37}} = \boxed{0.164}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-18)i - (6)j + (-3)k$$

$$a_N = \frac{\sqrt{18^2 + 6^2 + 3^2}}{\sqrt{37}} = \frac{3\sqrt{41}}{\sqrt{37}} = \boxed{3.158}$$

item c)

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{369}}{37\sqrt{37}} = \boxed{0.0853}$$

Solución de la pregunta 42 ▲

$$T(x,y) = 200e^{-x^2 - 3y^2}$$

item a)

$$\overrightarrow{PQ} = (3, -3) - (2, -1) = < 1, -2 >$$

$$\mu = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{< 1, -2 >}{\sqrt{5}}$$

Aplicamos derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 200e^{-x^2 - 3y^2}(-2x)\Big|_{(2,-1)} = 200e^{-7}(-4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200e^{-x^2-3y^2}(-6y)\Big|_{(2,-1)} = 200e^{-7}(6)$$

La razón de cambio de temperatura será

$$D_\mu f = \frac{200e^{-7}}{\sqrt{5}}(-4(1)+6(-2)) = -\frac{200\times 16e^{-7}}{\sqrt{5}} = \boxed{1.3049}$$

item b)

$$\nabla f = 200e^{-7}(-4\mathbf{i}+6\mathbf{j})$$

entonces la dirección donde aumenta más rápido la temperatura será paralelo a : $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$
item c)

$$|\nabla f| = 200e^{-7}(\sqrt{4^2+6^2}) = \boxed{1.3151}$$

Solución de la pregunta 43 ▲

$$\varepsilon = \frac{A}{l.C}$$

item a)

$$\begin{aligned} A &= 0.172807 & dA &= \pm 0.000008 \\ C &= 13,7 & dC &= \pm 0.3 \end{aligned}$$

$$d\varepsilon = \frac{dA}{lC} - \frac{AdC}{lC^2}$$

$$d\varepsilon = \frac{\pm 0.000008}{13,7} - \frac{0.172807(\pm 0,3)}{(13,7)^2}$$

entonces

$$\boxed{-0.000277 < d\varepsilon < 0.000277}$$

Ahora, como

$$\varepsilon_{inicial} = \frac{0,172807}{13,7} = 0.012614$$

entonces

$$\varepsilon_{esperado} = \varepsilon_{inicial} + d\varepsilon = \boxed{0,012614 \pm 0,000277}$$

item b)

$$\boxed{-0.000277 < d\varepsilon < 0.000277}$$

item c)

$$\text{error relativo} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{inicial}} = \boxed{2,196\%}$$

Solución de la pregunta 44 ▲

$$\vec{r} = 3cos(t)i + 3sen(t)j + \sqrt{7}tk$$

item a)

$$\widehat{\mathbf{T}} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \qquad \widehat{\mathbf{N}} = \frac{\widehat{\mathbf{T}}'}{|\widehat{\mathbf{T}}'|}$$

derivada de la función $\vec{r}$

$$\vec{r}' = < -3sen(t), 3cos(t), \sqrt{7} >$$

entonces

$$\boxed{\widehat{\mathbf{T}} = \frac{< -3sen(t), 3cos(t), \sqrt{7} >}{4}}$$

Ahora vamos por el vector unitario normal, comenzamos por

$$\widehat{\mathbf{T}}' = \frac{< -3cos(t), -3sent(t), 0 >}{4}$$

$$|\widehat{\mathbf{T}}'| = \frac{3}{4}$$

entonces

$$\widehat{\mathbf{N}} = \frac{< -3cos(t), -3sen(t), 0 >}{3} = \boxed{< -cos(t), -sen(t), 0 >}$$

item b)

$$\widehat{\mathbf{T}}(\pi/6) = \frac{< -3sen(\pi/6), 3cos(\pi/6), \sqrt{7} >}{4} = < -\frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{7}}{4} >$$

y

$$\vec{r}(\pi/6) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\pi\sqrt{7}}{6})$$

Entonces la ecuación paramétrica de la recta tangente en el punto $t = \pi/6$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{8}t \\ y &= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}t \\ z &= \frac{\pi\sqrt{7}}{6} + \frac{\sqrt{7}}{4}t \end{aligned}$$

item c)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{N}} &= < -cos(t), -sen(t), 0 > \\ \widehat{\mathbf{N}}(\pi/6) &= < -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 > \\ \vec{r}(\pi/6) &= (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\pi\sqrt{7}}{6}) \end{aligned}$$

entonces la ecuación del plano será

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{3\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})+0=0$$

$$\boxed{-2\sqrt{3}x-2y+12=0}$$

Veamos si es paralelo

$$<1,-\sqrt{3},0>\cdot<-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0>=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Por lo tanto si es paralelo al plano

Solución de la pregunta 45 ▲

$$H=\frac{1.6F^{1/3}d^{2/3}}{U}$$

$$\begin{aligned} F &= 684\,m^4/s^3 & dF &= 0.01 \\ d &= 807\,m & dd &= 0.02 \\ U &= 5\,m/s & dU &= 0.03 \end{aligned}$$

diferencial total

$$dH=\frac{\partial H}{\partial F}dF+\frac{\partial H}{\partial d}dd+\frac{\partial H}{\partial U}dU$$

$$dH=\frac{1,6}{U}\left(\frac{1}{3}(\frac{d}{F})^{2/3}dF+\frac{2}{3}(\frac{F}{d})^{1/3}dd-\frac{F^{1/3}d^{2/3}}{U}dU\right)$$

$$\boxed{dH=-1.46111}$$

$$H_{inicial}=\frac{1,6(684)^{1/3}(807)^{2/3}}{5}=\boxed{244.391}$$

item b)

$$\boxed{dH=-1.46111}$$

item c)

$$\boxed{\frac{dH}{H}=0.598\%}$$

Solución de la pregunta 46 ▲

$$E(x,y)=200-x^2-y^2$$

item a) Encontrando tres curvas de nivel

$$\begin{aligned} 200-x^2-y^2 &= C \\ x^2+y^2 &= 200-C \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} C=&4 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=196=14^2 \\ C=&31 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=169=13^2 \\ C=&56 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=144=12^2 \end{aligned}$$

El bosquejo es tipo un cono
item b)

$$\nabla E=-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}$$

La dirección donde el terreno cambia rápidamente desde el punto (10,5)

$$\boxed{\nabla E\Big|_{(10,5)}=-20\mathbf{i}-10\mathbf{j}}$$

item c) Tasa máxima de elevación

$$|\nabla E\Big|_{(10,5)}|=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}=\boxed{22,361}$$

Solución de la pregunta 47 ▲

---

a) La dirección que debe seguir es la dirección del gradiente en el punto $(1,-2)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,-y)&=\langle 2xy-2x,x^2-2y\rangle \\ \nabla f(1,-2)&=\langle -6,5\rangle \end{aligned}$$

b) $f_{xx}=2y-2$, $f_{xy}=2x$, $f_{yy}=-2$

$$\begin{aligned} D&=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2 \\ &=(2y-2)(-2)-(2x)^2 \\ &=4-4y-4x^2 \end{aligned}$$

Para $(x,y)=(\sqrt{2},1)$ se tiene $D=-8<0$. Por lo tanto, se trata de un punto silla.

c) Se pide optimizar la función $f(x,y)=x^2+2y^2-2x+150$ restringido a la curva $g(x,y)=x^2+y^2-50$.

$$\begin{aligned} \nabla f&=\lambda\nabla g \\ \langle 2x-2,4y\rangle&=\lambda\langle 2x,2y\rangle \end{aligned}$$

$$2x-2=2\lambda x \Longrightarrow x-1=\lambda x \tag{39}$$

$$4y=2\lambda y \Longrightarrow 2y=\lambda y \Longrightarrow y(2-\lambda)=0 \tag{40}$$

$$x^2+y^2=50 \tag{41}$$

De (1) y (2) $y=0$ ó $\lambda=2$ Si $y=0$, entonces de (3) $x=\pm\sqrt{50}=\pm5\sqrt{2}$ Si $\lambda=2$, entonces De (1) $x-1=2x$, entonces $x=-1$ De (3) $1+y^2=50$, entonces $y=\pm7$
Resúmen de Puntos Críticos :

$$\{(-5\sqrt{2},0), \{(5\sqrt{2},0), (-1,-7), (-1,7)\}$$

$$\begin{aligned} f(-5\sqrt{2},0)&=200+10\sqrt{2} \\ f(5\sqrt{2},0)&=200-10\sqrt{2} \longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(-1,-7)&=251 \longleftarrow \text{Máximo} \\ f(-1,7)&=251 \longleftarrow \text{Máximo} \end{aligned}$$

Solución de la pregunta 48 ▲

a) $C_2 : x^2 + y^2 = 4y$, $C_1 : x^2 + y^2 = 16$
En coordenadas polares :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$
De $C_2 : r^2 = 4r\sin\theta \Longrightarrow r = 4\sin\theta$
De $C_1 : r^2 = 16 \Longrightarrow r = 4$
$y = x \Longrightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$
$y = -x \Longrightarrow r\sin\theta = -r\cos\theta \Longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ Así,

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$$
$$4\sin\theta \leqslant r \leqslant 4$$

b)

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{4\sin\theta}^{4} r dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{4\sin\theta}^{4} d\theta \\
&= 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \sin^2\theta) d\theta \\
&= 8\ \theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - 8\left[\frac{1}{4}(2\theta - \sin 2\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= 4\pi - 2\left[\frac{3\pi}{2} - \sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} + \sin(\frac{\pi}{2})\right] \\
&= 4\pi - 2(\pi + 2) \\
&= 2\pi - 4
\end{aligned}$$

Solución de la pregunta 49 ▲

a)

$$\begin{aligned}
n = 1 &: V_1 = \frac{4}{3}\pi \\
n = 2 &: 9V_2 = 9\left[\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{3})^3\right] = \frac{4\pi}{3}(\frac{1}{3}) \\
n = 3 &: 9^2V_3 = 9^2\left[\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{9})^3\right] = \frac{4\pi}{3}(\frac{1}{9}) \\
n = 4 &: 9^3V_4 = 9^3\left[\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{27})^3\right] = \frac{4\pi}{3}(\frac{1}{27})
\end{aligned}$$

Luego

$$V_n = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

donde $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

b)

$$\begin{aligned} V_T &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{5}{3-x} = 5(3-x)^{-1} \Longrightarrow f(0) = \frac{5}{3}$
$f'(x) = -5(3-x)^{-2}(-1) = 5(3-x)^{-2} \Longrightarrow f'(0) = \frac{5}{9}$
$f''(x) = -10(3-x)^{-3}(-1) = 10(3-x)^{-3} \Longrightarrow f''(0) = \frac{10}{27}$
$f'''(x) = -30(3-x)^{-4}(-1) = 30(3-x)^{-4} \Longrightarrow f'''(0) = \frac{30}{81}$
Luego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n!}{3^{n+1}} x^n$$

Solución de la pregunta 50 ▲

a) La dirección que debe seguir es la dirección del gradiente en el punto $(3,1)$

$$\begin{aligned} \nabla I(x,y) &= \langle 3x^2 - 12y, 24y^2 - 12x \rangle \\ \nabla I(3,1) &= \langle 15, -12 \rangle \end{aligned}$$

b) $I_{xx} = 6x$, $I_{xy} = -12$, $I_{yy} = 48y$

$$\begin{aligned} D &= I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 \\ &= 6x(48y) - (-12)^2 \\ &= 288xy - 144 \end{aligned}$$

Para $(x,y) = (2,1)$ se tiene $D = 432 > 0$. Además $I_{xx}(2,1) = 12 > 0$ Por lo tanto, se trata de un mínimo.

c) Se pide optimizar la función $f(x,y) = x^2y^2$ restringido a la curva $2x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ \langle 2xy^2, 2x^2y \rangle &= \lambda \langle 4x, 2y \rangle \end{aligned}$$

$$2xy^2 = \lambda 4x \Longrightarrow xy^2 = 2\lambda x \Longrightarrow x(2\lambda - y^2) = 0 \tag{42}$$

$$2x^2y = \lambda 2y \Longrightarrow x^2y = \lambda y \Longrightarrow y(\lambda - x^2) = 0 \tag{43}$$

De (1) y (2) : $x = 0,\ y = 0 \Longrightarrow P.C = (0,0)$ ... No verifica condición.
De (1) y (2) : $x = 0,\ \lambda = x^2 \Longrightarrow y = \pm 1 \Longrightarrow P.C. = (0,-1),\ P.C. = (0,+1)$
De (1) y (2) : $\lambda = \frac{y^2}{2},\ y = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow P.C. = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
De (1) y (2) : $\lambda = \frac{y^2}{2},\ \lambda = x^2 \Longrightarrow y^2 = 2x^2 \Longrightarrow 4x^2 = 1 \Longrightarrow y^2 = 2x^2 \Longrightarrow P.C. = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Resúmen de Puntos Críticos :

$$\left\{(0,-1),\ (0,1),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$f(0,-1) = 0 \longleftarrow \text{Mínimo}$$

$$f(0,1) = 0 \longleftarrow \text{Mínimo}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=0 \longleftarrow \text{Mínimo}$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=0 \longleftarrow \text{Mínimo}$$
$$\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8} \longleftarrow \text{Máximo}$$

Solución de la pregunta 51 ▲

---

a) $K: x^2+y^2=4z^2$, $C_1: x^2+y^2=6y$, $C_2: x^2+y^2=2y$ En coordenadas polares :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2$
De $C_1: r^2=6r\sin\theta \Longrightarrow r=6\sin\theta$
De $C_2: r^2=2r\sin\theta \Longrightarrow r=2\sin\theta$
Así,

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi$$
$$2\sin\theta\leqslant r\leqslant 6\sin\theta$$

b) $A(S)=\int\int_D\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\,dA$
Despejamos z de la ecuación del cono :
$4z^2=x^2+y^2 \Longrightarrow z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{2}$
Luego

$$z_x=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad z_y=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}&=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\\&=\sqrt{\frac{5}{4}}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Piden :

$$\begin{aligned}A(S)&=\int_0^{\pi}\int_{2\sin\theta}^{6\sin\theta}\frac{\sqrt{5}}{2}r\,dr\,d\theta\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\sin\theta}^{6\sin\theta}d\theta\\&=\frac{\sqrt{5}}{4}\int_0^{\pi}36\sin^2\theta-4\sin^2\theta\,d\theta\\&=8\sqrt{5}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\&=8\sqrt{5}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi}\\&=4\sqrt{5}\pi\end{aligned}$$

Solución de la pregunta 52 ▲

a)

$$\begin{aligned}
A_T &= a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 a_0 + \ldots \\
&= a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^1 a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 a_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 a_0 + \cdot \\
&= \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_0\left(\frac{4}{9}\right)^0 + \frac{3}{4}a_0\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \cdot \\
&= \frac{1}{4}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4}a_0\left(\frac{4}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

Luego

$$b_n = \frac{3}{4}a_0\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

b) La serie es geométrica, por lo tanto es convergente

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_0\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) \\
&= \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_0\left(\frac{9}{5}\right) \\
&= \frac{8}{5}a_0
\end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \Longrightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = -(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} \Longrightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \Longrightarrow f''(0) = 2$
$f'''(x) = -6(1-x)^{-4}(-1) = 6(1-x)^{-4} \Longrightarrow f'''(0) = 6$
Luego

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}x^n
\end{aligned}$$