MA3705 Algoritmos Combinatoriales.
Profesor: Iván Rapaport.
Auxiliares: Antonia Labarca y Cristian Palma.

Auxiliar 6

Repaso Control 1

P1 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $w : E \to \mathbb{R}_+$ una función de peso positiva.

a) Pruebe que todo subgrafo conexo cobertor de peso mínimo es un árbol.

b) Encuentre un contraejemplo en el caso en que w no sea positiva.

P2 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $w : E \to \mathbb{R}$ una función de peso, $C \subseteq G$ un ciclo y e una arista de mayor peso en C. Pruebe que existe un MST de G que excluye a e. Comente qué sucede cuando e es la única de mayor peso en C.

P3 Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, $w : E \to \mathbb{N}$ una función de peso y $W = \max_{e \in E} w(e)$. Sea $k = \lceil \log_2(W + 1) \rceil$, el número de dígitos de W en binario. Considere:

$$\forall i \in [k], w_i = \left\lfloor \frac{w}{2^{k-i}} \right\rfloor, \text{ los } i \text{ dígitos más significativos de } w$$

$$\forall i \in [k], \forall u, v \in V, d_i(u, v), \text{ la distancia mínima entre } u \text{ y } v \text{ para } w_i$$

Nuestro objetivo es mostrar un algoritmo que dado un vértice s calcule su distancia mínima $d(s, v)$ para todo $v \in V$ en tiempo $O(\log(W)|E|)$. Supondremos además que $|E| \geq |V| - 1$.

a) Muestre que es posible calcular $d_1(s, v)$ para todo $v \in V$ en tiempo $O(|E|)$.

b) Suponga que $d(s, v) \leq |E|$, pruebe modificando la cola de prioridad de Djikstra que es posible calcular $d(s, v)$ para todo $v \in V$ en tiempo $O(|E|)$.

c) **[Propuesto]** Nos interesa calcular d_i a partir de d_{i-1} y para eso probaremos un par de cosas, para empezar pruebe que:

$$2d_{i-1}(s, v) \leq d_i(s, v) \leq 2d_{i-1}(s, v) + |V| - 1$$

d) **[Propuesto]** Para $u, v \in V$ definimos:

$$\hat{w}_i(u, v) = w_i(u, v) + 2d_{i-1}(s, u) - 2d_{i-1}(s, v)$$

Pruebe que $\hat{w}_i(u, v)$ es un entero no negativo.

e) **[Propuesto]** Para $u, v \in V$, sean $\hat{d}_i(u, v)$ la distancia mínima entre u y v para $\hat{w}_i$. Pruebe que $d_i(s, v) = \hat{d}_i(s, v) + 2d_{i-1}(s, v)$.

f) **[Propuesto]** Entregue el algoritmo deseado.

P4 **[Propuesto]** Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, sea T un MST de G, sea $V' \subseteq V$. Sean T' y G' los subgrafos de T y G, respectivamente, inducidos por V'. Pruebe que si T' es conexo, T' es un MST de G'.