MA3705 Algoritmos Combinatoriales.
Profesor: Iván Rapaport.
Auxiliares: Antonia Labarca y Cristian Palma.

Auxiliar 3

Árboles Generadores de Costo Mínimo y Matroides

P1 Considere $G = (V, E)$ conexo y $w : E \to \mathbb{Q}^+$ una función de peso.

a) Sea $\emptyset \neq U \subset V$. Sea $e \in \delta(U)$ tal que $w(e) \leq w(f), \forall f \in \delta(U)$. Pruebe que existe T^* MST de G tal que $e \in E(T^*)$.

b) Sea T^* un MST de G. Sea $e = uv \in E(T)$. Sea P un u-v-camino en $G - e$. Pruebe que $w(e) \leq w(f), \forall f \in E(P)$

P2 Para $G = (V, E)$ grafo conexo se define **Minimum Bottleneck Spanning Tree**[1] como un árbol generador de G en el que la arista de mayor costo es lo más barata posible.

a) Pruebe que si T es MST de G también es MBST.

b) ¿Se puede asegurar que si T es MBST entonces también es MST?

P3 Considere $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ una matroide. Se define un **circuito** como un conjunto dependiente minimal, es decir, un conjunto C tal que $C \notin \mathcal{I}, \forall e \in C, C - e \in \mathcal{I}$.

a) Sean C, D circuitos no disjuntos y sea $e \in C \cap D$. Pruebe que $C \cup D - e$ no es independiente.

b) Sea I independiente y sea $e \notin I$. Pruebe que $I + e$ tiene a lo más 1 circuito.

P4 Sea $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{I}})$. Diremos que $\tilde{\mathcal{M}}$ es **de partición** si existe una partición de $\tilde{\mathcal{S}}$ en conjuntos $S_1, \ldots, S_k$ no vacíos (llamados bloques) y existen $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{N}$ tales que $\forall X \subseteq \tilde{\mathcal{S}}\ (X \in \tilde{\mathcal{I}} \iff \forall i \in [k], X \cap S_i \leq b_i)$.
Pruebe que si $\tilde{\mathcal{M}}$ es de partición, entonces es una matroide.

P5 Dado $G = (V, E)$ grafo conexo, se define $I(G) := \{E' \subseteq E | (V, E \setminus E') \text{ es conexo}\}$.
Pruebe que $M(G) = (E, I(G))$ es matroide[2].

[1] También lo pueden encontrar como MinMax Spanning Tree.
[2] Se llama matroide cográfica de G