MA3705 Algoritmos Combinatoriales.
Profesor: Iván Rapaport.
Auxiliares: Antonia Labarca y Cristian Palma.

Auxiliar 8

Flujo Máximo y Emparejamiento Bipartito

P1 Considere dos secuencias de números positivos $\{d_i^+\}_{i=1}^n$ y $\{d_i^-\}_{i=1}^n$. Diseñe un algoritmo que determine si existe un digrafo G con vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que

$$\forall i \in [n], d^+(v_i) = d_i^+ \wedge \, d^-(v_i) = d_i^-$$

P2 Pruebe que en grafos acíclicos, de existir un emparejamiento perfecto, este es único.

P3 Sea $M \in \{0,1\}^{p \times q}$. Describa un algoritmo para seleccionar un conjunto Q de filas y columnas de M y S un conjunto de 1's de M tales que $|Q| = |S|$ y se cumple que

a) Cada 1 de M está en una de las filas y/o columnas de Q,

b) Cada fila y cada columna de M contiene a lo más uno de los 1 's de S.

P4 **[Propuesto]** Una gran compañía de papel higiénico con fabricas a lo largo del país busca distribuir sus productos a todas las tiendas con las que tienen convenio. Cada tienda $i \in T$ necesita b_i rollos y cada fábrica $j \in F$ puede producir a lo más a_j rollos. Por razones logísticas y legales, no se pueden enviar rollos entre cualquier fabrica y cualquier tienda. Pruebe que la demanda se puede satisfacer si y solo si:

$$\forall C \subseteq T, \; a(N(C)) \geq b(C)$$

Donde $N(C)$ representa las fabricas que pueden enviar rollos a las tiendas C.

P5 **[Propuesto]**

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito tal que $\forall v \in V, d(v) = k \geq 1$ fijo. Pruebe que G posee un emparejamiento perfecto.

b) Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con clases A y B tales que $|A| = |B| = n$. Suponga además que $\forall v \in V, d(v) \geq \frac{n}{2}$. Pruebe que G posee un emparejamiento perfecto.