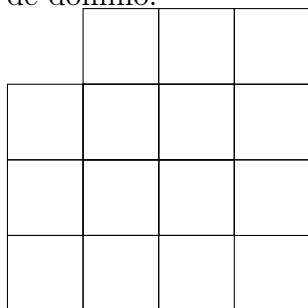


MA3705 Algoritmos Combinatoriales.**Profesor:** Iván Rapaport.**Auxiliares:** Antonia Labarca y Cristian Palma.

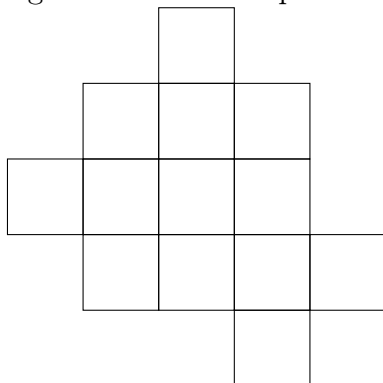
Auxiliar 9

- P1** Se quiere repartir poleras de distintos colores a un grupo de n personas. Suponga que a cada persona le gustan 2 colores, y se tienen justo n poleras de las cuales c_i son de color i . Encuentre un algoritmo que determine si se pueden repartir las poleras de forma que cada persona sea feliz (es decir, quede con una polera de un color que le gusta).
- P2** Sea G bipartito k -regular (es decir, $\forall v \in V(G), d_G(v) = k$). Pruebe que G tiene un matching perfecto. ¿Se tiene lo anterior si G no es bipartito?
- P3** Considere el siguiente problema: dado un tablero cuadrulado T roto (pueden pensarlo como una matriz donde solo algunos casilleros se pueden usar, el resto son inexistentes), se desea saber cuantas piezas de dominó se pueden ubicar en T sin que dos piezas se superpongan.
Por ejemplo, en el siguiente tablero de 14 casilleros, se pueden ubicar solo 6 piezas de dominó:



Modele este problema como un matching de cardinalidad máxima en un grafo bipartito.

- P4 Propuesto:** Use un teorema visto en un auxiliar anterior para demostrar que en el siguiente tablero se pueden ubicar como máximo 5 dominós sin superponerse.



- P5 Propuesto:** Un mazo de 52 cartas tiene 13 cartas de cada una de 4 pintas. Un adversario las baraja y reparte en 13 montones de 4 cartas cada uno. Demuestre

que siempre es posible escoger una carta de cada montón de forma que las 13 cartas escogidas formen una escalera (es decir, se escoge una carta de cada número).

Hint: Teorema de Hall

P6 Propuesto: Explique brevemente cómo resolver las siguientes modificaciones del problema de flujo máximo:

- a) Se tienen múltiples fuentes de flujo s y múltiples sumideros t .
- b) Se tienen nodos con capacidades (es decir, el máximo flujo que entra y sale del nodo está acotado por su capacidad).

P7 Sea $x \geq 0$ el valor de un $s - t$ -flujo factible en una red G . Pruebe que existe un $s - t$ -flujo factible del mismo valor en el que $f_e \leq x, \forall e \in E$.

P8 En un pueblo hay n pozos de los que se puede sacar agua y m casas que necesitan agua. Además hay un conjunto de l tuberías entre pares de casas o entre pozos y casas a través de las que puede pasar alguna cantidad de agua en una dirección (fija). Considere que el pozo i permite obtener c_i litros de agua, la casa i necesita d_i litros de agua y a través de la tubería de i a j pueden pasar $u_{i,j}$ litros de agua. Encuentre un algoritmo que permita determinar si es posible abastecer cada casa con suficiente agua.