MA3705 Algoritmos Combinatoriales.
Profesor: Iván Rapaport.
Auxiliares: Antonia Labarca y Cristian Palma.

Auxiliar 10

Programas Lineales Enteros

P1 Machine Productivity

En una fábrica, se tienen n tanques de combustible distintos de tamaño $p_j, j \in [n]$ y m máquinas cuya producción es proporcional al combustible administrado hasta cierta capacidad $k_i, i \in [m]$. Es posible cargar una máquina con combustible por sobre su capacidad, pero el exceso no generará ningún beneficio.

Formule el problema de encontrar una asignación de tanques a máquinas que maximice la productividad de las máquinas como un programa lineal entero.

P2 Symmetric Traveling Salesman Problem

Sea $G = (V, E)$ grafo no dirigido y $d : E \to \mathbb{R}_+$ una función donde d_e representa la distancia entre los extremos de la arista e. Sea $x \in \{0,1\}^E$ la indicatriz de un tour (ciclo Hamiltoniano) en G.

Pruebe que la formulación de Dantzig-Fulkerson-Johnson es exacta, es decir que un tour óptimo en G está determinado por una solución óptima del siguiente PLE:

$$\begin{array}{lll} (TSP) & \min \sum_{e \in E} d_e x_e & \\ s.a. & x(\delta_E(v)) = 2 & \forall v \in V \\ & x(\delta_E(S)) \geq 2 & \forall \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \\ & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E \end{array}$$

P3 El principio del palomar establece que el problema no tiene solución:

(P) Colocar $n+1$ palomas en n agujeros de manera que no haya dos palomas que compartan un agujero.

Formule *(P)* como un programa lineal entero con dos tipos de restricciones

a) Cada paloma debe entrar en un agujero.

b) Para cada pareja de palomas, a lo sumo una de las dos aves puede entrar en un agujero dado.

Demostrar que no existe ninguna solución entera que satisfaga (a) y (b), pero que el programa lineal con las restricciones (a) y (b) es factible.

P4 [Propuesto] Knapsack

Supongamos que se tiene una mochila que puede llevar un máximo de peso b y n objetos donde el i-ésimo tiene peso ω_i y beneficio c_i.

Nuestro objetivo será cargar la mochila con estos objetos sin violar la restricción de capacidad de la mochila de manera que maximicemos nuestra utilidad.

a) Modele el problema como un programa lineal entero y defina la relajación lineal.

b) Demuestre que si $\bar{x}$ es un óptimo para el problema relajado, entonces a lo más una de sus coordenadas es fraccional (no es entera).

P5 [Propuesto] Minimum Spanning Tree

Queremos construir una red de comunicación que conecte a todas las ciudades a costo mínimo. Para ello, contamos con un grafo no dirigido $G = (V, E)$, en donde V es el conjunto de ciudades, E las autopistas que conectan las ciudad y ω_e el costo de usar la autopista $e \in E$. El problema anterior se puede formular como el de encontrar un MST. Considere las siguientes formulaciones como programa lineal entero.

$$
\begin{aligned}
(M_1) \quad & \min \sum_{e \in E} \omega_e x_e \\
s.a. \quad & x(E) = |V| - 1 \\
& x(\delta(S)) \geq 1, \forall S \subset V, S \neq \emptyset \\
& x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M_2) \quad & \min \sum_{e \in E} \omega_e x_e \\
s.a. \quad & x(E) = |V| - 1 \\
& x(E(S)) \leq |S| - 1, \forall S \subset V, S \neq \emptyset \\
& x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

a) Demuestre que ambos modelos con exactos.

b) Relaje la integralidad de la primera formulación y dé un ejemplo de un punto factible que no corresponde a solución del problema original.