MA3705 Algoritmos Combinatoriales.
Profesor: Iván Rapaport.
Auxiliares: Antonia Labarca y Cristian Palma.

Auxiliar 2

Árboles Generadores de Costo Mínimo

P1 Considere la siguiente implementación del algoritmo de Prim-Jarnik:

Algorithm 1: *Prim-Jarnik.*

Input: $\langle G, w, r\rangle$ donde $G = (V, E)$ es un grafo conexo, $w : E \to \mathbb{Q}_+$ función de pesos y $r \in V$ vértice.
Output: Árbol Generadores de Costo Mínimo de G

for $u \in V$ **do**
  $key(u) \leftarrow \infty$
  $\pi(u) \leftarrow$ NULL
end
$key(r) \leftarrow 0$
$Q \leftarrow V$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $u \leftarrow$ *Extract-Min*(Q)
  for $v \in N(u)$ **do**
    if $v \in Q$ *y* $w(uv) < key(u)$ **then**
      $\pi(v) \leftarrow u$
      $key(v) \leftarrow w(uv)$
    end
  end
end
$F \leftarrow \{(v, \pi(v)) \mid v \in V - r\}$
return (V, F)

a) Demuestre que el algoritmo es correcto.

b) Calcule la complejidad del algoritmo.

P2 Aproximación para TSP Métrico

Dado grafo completo G y distancias $\ell : E(G) \to \mathbb{R}_+$ (satisface la desigualdad triangular), encontrar un ciclo Hamiltoniano de largo mínimo.

Para resolver este problema usaremos ***shortcut***, estrategia que consiste en reemplazar dos aristas vecinas $v_1v_2v_3$ por una directa entre los vértices de los extremos v_1v_3, saltandose así el vértice común v_2.

Sea OPT el ciclo Hamiltoniano de largo mínimo.

Sabiendo que todo multigrafo Euleriano tiene paseos Eulerianos, considere el siguiente algoritmo:

a) Suponiendo que se puede generar el submultigrafo Euleriano H, demuestre que el algoritmo es correcto. Pruebe además que $\ell(\text{ALG}) \leq \ell(H)$.

Algorithm 2: Aproximación para TSP Métrico.

Input: $\langle G, \ell \rangle$ donde $G = (V, E)$ grafo completo y distancias $\ell : E(G) \to \mathbb{R}_+$.
Output: Ciclo Hamiltoniano

$H \leftarrow$ Submultigrafo Euleriano (conexo con grados pares) de G.
ALG $\leftarrow$ Encontrar paseo Euleriano (recorre todas las aristas) para H.
while $\exists u \in V, \delta_{\text{ALG}}(u) > 2$ **do**
    ALG $\leftarrow$ Aplicar *shortcut* en u a ALG.
end
return ALG.

b) Sea T un MST de G y sea H el multigrafo que duplica las aristas de T. Pruebe que $\ell(H) \leq 2\ell(\text{OPT})$.

c) Sea M un matching perfecto (aristas independientes que cubren todos los vértices) de peso mínimo de los vértices de grado impar de T. Un corolario del Lema del Apretón de Manos asegura que hay una cantidad par de dichos vértices, por lo que dicho matching perfecto existe. Pruebe que $H' = T + M$ es tal que $\ell(H') \leq \frac{3}{2}\ell(\text{OPT})$.

P3 [Propuesto] Considere la siguiente implementación del algoritmo de Boruvka:

Algorithm 3: *Boruvka.*

Input: $\langle G, c \rangle$ donde $G = (V, E)$ es un grafo conexo y $c : E \to \mathbb{Q}_+$ función de pesos.
Output: Árbol Generadores de Costo Mínimo de G

$F \leftarrow \emptyset$
while $cc(V, F) \neq 1$ **do**
    Encontrar CC de (V, F) y calcular $cc(V, F)$
    for *U CC de (V, F)* **do**
        Encontrar $e_U \in \delta(U)$ arista de menor peso
        $F \leftarrow F \cup e_U$
    end
end
return (V, F)

a) Justifique que solo basta probar que el grafo (V, F) entregado es acíclico.

Llame $G_i = (V, F_i)$ al grafo al comienzo de la iteración i y $\mathcal{U}_i$ al conjunto de sus componentes conexas. Note que el algoritmo escoge para cada componente $U \in \mathcal{U}_i$ una arista e_U de menor peso en $\delta(U)$ y llame $f(e_U) \in \mathcal{U}_i$ a la componente a la cual pertenece el extremo de e_U que no está en U. Con esto en mente, defina $G_i' = (\mathcal{U}_i, F_i')$ como el digrafo cuyos vértices son las componentes de $\mathcal{U}_i$ y donde para cada $U \in \mathcal{U}_i$ agregamos el arco $\tilde{U} = Uf(e_U)$ a F_i'. Por simplicidad extienda la función de costos como $c(\tilde{U}) = c(e_U)$

b) Demuestre que los únicos diciclos de G_i' tienen largo 2 (corresponden a arcos paralelos). Más aún, pruebe que si $\tilde{U}$ y $\tilde{W}$ son arcos paralelos en G_i', entonces $e_U = e_W$.

c) Sea G_i'' el grafo subyaciente de G_i' manteniendo solo una arista de cada par de arcos paralelos. Justifique que G_i'' no tiene ciclos. Use esto para demostrar inductivamente que $G_i = (V, F_i)$ no posee ciclos.

d) Concluya.