Estimadores Máximo Verosímiles

Estimadores - Método de Máxima Verosimilitud

Si $X \sim Binomial\ (n\ , p)$, determinar el estimador de "p" por método de máxima verosimilitud, a través de una M.A.S de tamaño k. Determinar si el estimador obtenido es insesgado y consistente.

$x_1, x_2, \dots x_k \leftarrow$ MAS de tamaño k.

$X \sim Binomial\ (n, p)$

Caso continuo:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{k} f(x_i, \theta)$$

Función de verosimilitud:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{k} P(x_i \mid p) = \prod_{i=1}^{k} \left[\binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \right]$$

Función Prob. Binomial

$$P(X = x_i) = \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$$

$$L(p) = \underbrace{\left[\prod_{i=1}^{k} \binom{n}{x_i}\right]}_{} \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} p^{x_i}\right] \cdot \left[\prod_{i=1}^{k} (1-p)^{n-x_i}\right]$$

$$L(p) = C \cdot p^{\sum_{i=1}^{k} x_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{k} (n-x_i)}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Logaritmo de $L(p)$:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ell(p) = \ln L(p) = \ln C + \ln\left[p^{\sum_{i=1}^{k} x_i}\right] + \ln\left[(1-p)^{\sum_{i=1}^{k}(n-x_i)}\right]$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

$$= \ln C + \left[\sum_{i=1}^{k} x_i\right] \cdot \ln p + \left[\sum_{i=1}^{k} (n-x_i)\right] \ln(1-p)$$

Derivar $\ell(p)$ respecto a p e igualar a cero:

$$0 = \frac{\partial \ell(p)}{\partial p} = 0 + \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\frac{1}{p} + \left(\sum_{i=1}^{k}(n-x_i)\right)\frac{-1}{1-p}$$

$$(cte \cdot f(x))' = cte \cdot f'(x)$$

$$(cte)' = 0$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(n-x_i)}{1-p} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{p} \Rightarrow p\left(\sum_{i=1}^{k}(n-x_i)\right) = (1-p)\sum x_i$$

$$p \cdot k \cdot n - \cancel{p\sum x_i} = \sum x_i - \cancel{p\sum x_i}$$

$$p\,k\,n = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k \cdot n} = \frac{\overline{X}}{n}$$

$$\hat{p}_{MV} = \frac{\overline{X}}{n}$$ ← Estimador M.V. de la Binomial(n,p)