Definizione formale

Grammatica:

$$G = (V, T, S, P)$$

Insieme delle variabili

Insieme simboli terminali

Start variabile

Insieme delle produzioni

$$G = (V, T, S, P)$$

Tutte le produzioni P sono della forma:

$$A \rightarrow s$$

Stringhe di
Variabili e non
terminali

Linguaggio di una grammatica:

Per una grammatica G con start S

$$L(G) = \{w: \quad S \overset{*}{\Rightarrow} w, \quad w \in T^*\}$$

Stringhe di terminali o λ

terminali

Grammatica lineare

Le grammatiche con al massimo una variabile sul lato destro della produzione

Esempio:

$$S \to aSb \qquad\qquad S \to Ab$$

$$S \to \lambda \qquad\qquad A \to aAb$$

$$A \to \lambda$$

Grammatica non lineare

Grammatica G :

$$S \to SS$$

$$S \to \lambda$$

$$S \to aSb$$

$$S \to bSa$$

$$L(G) = \{w: \quad n_a(w) = n_b(w)\}$$

Numeri di a nella stringa w

Grammatica lineare

Grammatica G :

$$S \to A$$

$$A \to aB \mid \lambda$$

$$B \to Ab$$

$$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Grammatica lineare a destra

Tutte le produzioni hanno la forma

$$A \to xB$$

o

$$A \to x$$

Stringa di terminali

esempio:

$$S \to abS$$

$$S \to a$$

Grammatiche lineare sinistra

Tutte le produzioni hanno la forma:

$$A \to Bx$$

o

$$A \to x$$

Stringhe di terminali

Esempio:

$$S \to Aab$$

$$A \to Aab \mid B$$

$$B \to a$$

Grammatica regolare

Grammatiche regolari

Una grammatica regolare è qualsiasi grammatica lineare a destra o a sinistra

Esempio:

G_1

$$S \to abS$$
$$S \to a$$

G_2

$$S \to Aab$$
$$A \to Aab \mid B$$
$$B \to a$$

I linguaggi generati da una grammatica regolare è un linguaggio regolare

Examples:

$$G_1$$

$$S \to abS$$

$$S \to a$$

$$L(G_1) = (ab)^* a$$

$$G_2$$

$$S \to Aab$$

$$A \to Aab \mid B$$

$$B \to a$$

$$L(G_2) = aab(ab)^*$$

Grammatiche regolari generano linguaggi regolari

Teorema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Linguaggi} \\ \text{Generati da} \\ \text{grammatiche} \\ \text{regolari} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Linguaggi} \\ \text{regolari} \end{array} \right\}$$

Teorema - Part 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Linguaggi} \\ \text{Generati da} \\ \text{grammatiche} \\ \text{regolari} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \text{Linguaggi} \\ \text{regolari} \end{array} \right\}$$

Ogni grammatica regolare
Genera un liguaggio generale

Teorema - Part 2

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi}\\\text{Generati da}\\\text{grammatiche}\\\text{regolari}\end{array}\right\} \supseteq \left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi}\\\text{regolari}\end{array}\right\}$$

Ogni linguaggio regolare
È generato da una grammatica regolare

Proof - Part 1

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi}\\\text{Generati da}\\\text{grammatiche}\\\text{regolari}\end{array}\right\} \subseteq \left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi}\\\text{regolari}\end{array}\right\}$$

Il linguaggio $L(G)$ generato da
Una grammatica regolare G è regolare

Il caso della Grammatica

sia G una right-linear grammatica

proveremo: $L(G)$ è regolare

idea: costruiamo una NFA M

con $L(M) = L(G)$

Grammatica G è right-linear

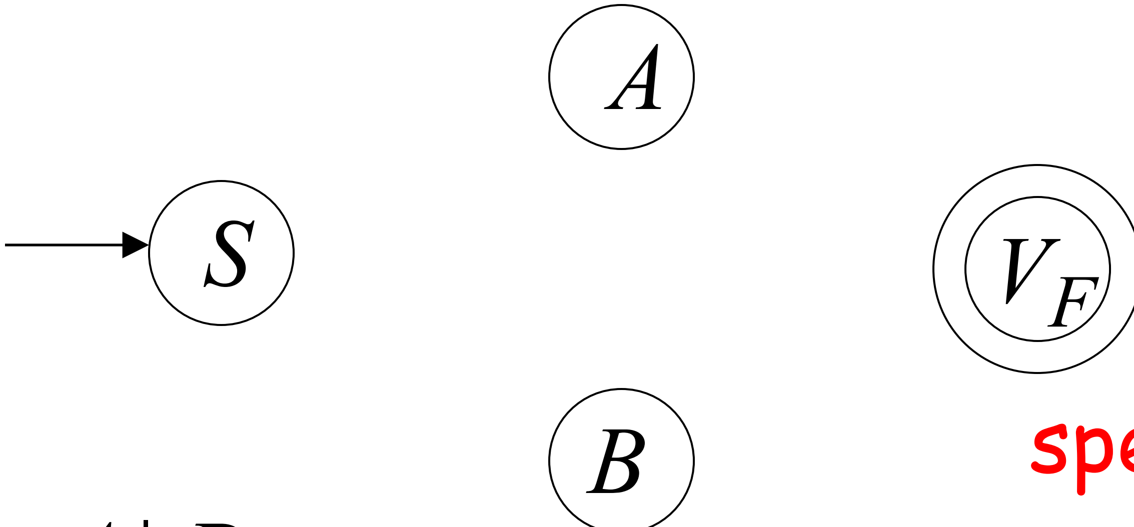
Esempio:

$$S \to aA \mid B$$

$$A \to aa\, B$$

$$B \to b\, B \mid a$$

Construiamo NFA M tale che
ogni stato è una variabile della grammatica :



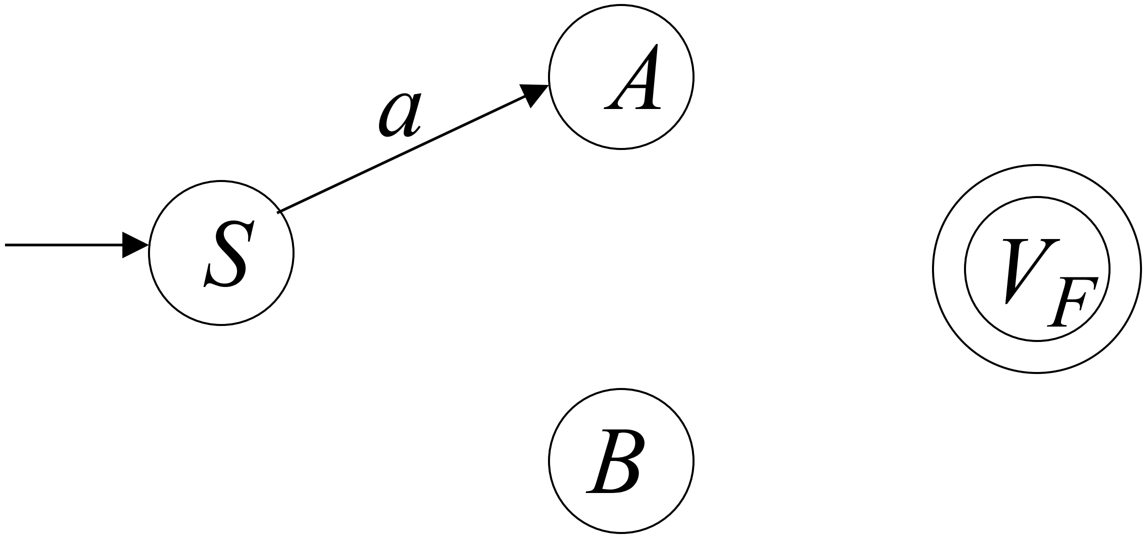
speciale
stato finale

$$S \to aA \mid B$$

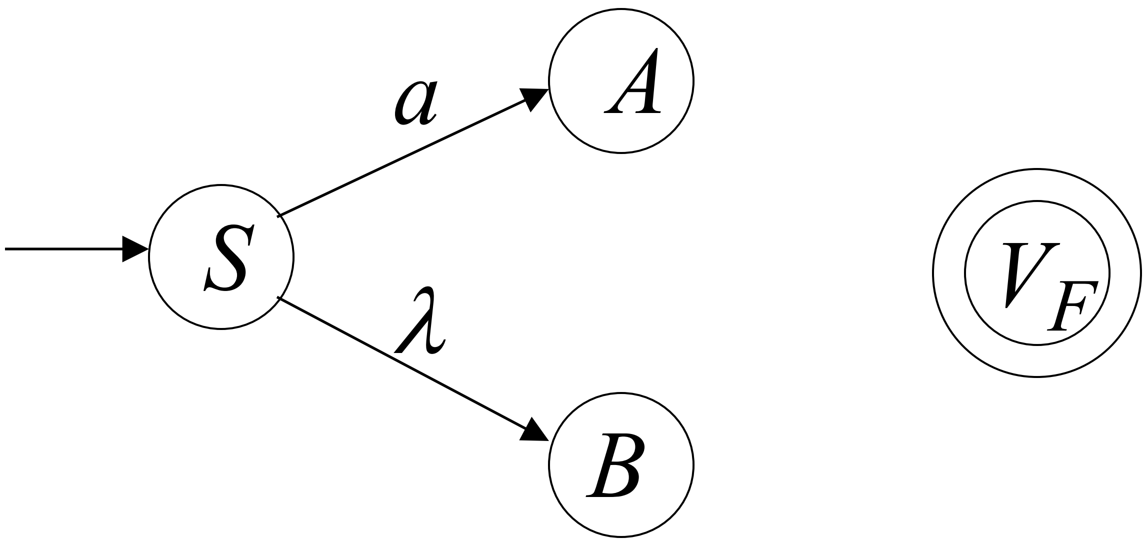
$$A \to aa\, B$$

$$B \to b\, B \mid a$$

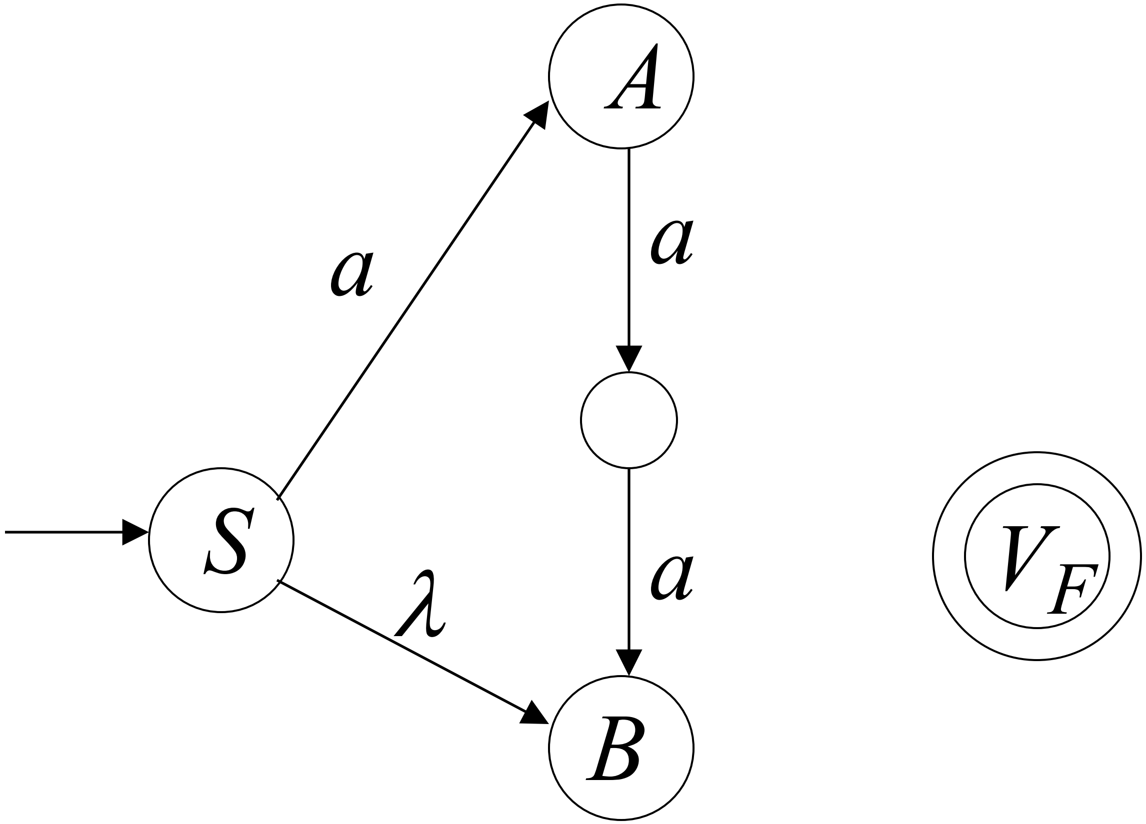
Addizioniamo un arco per ogni produzione:



$$S \rightarrow aA$$

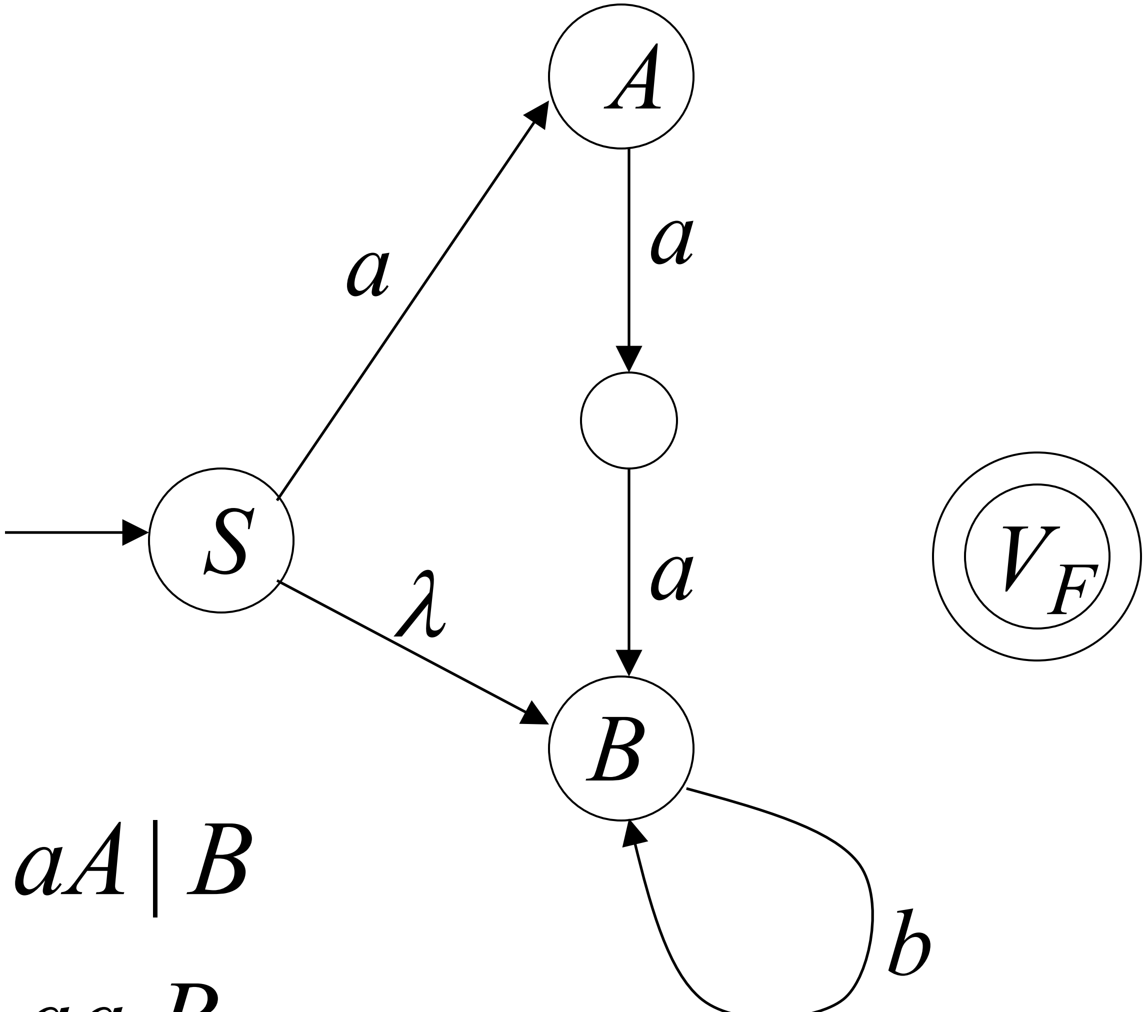


$$S \to aA \mid B$$



$$S \to aA \mid B$$

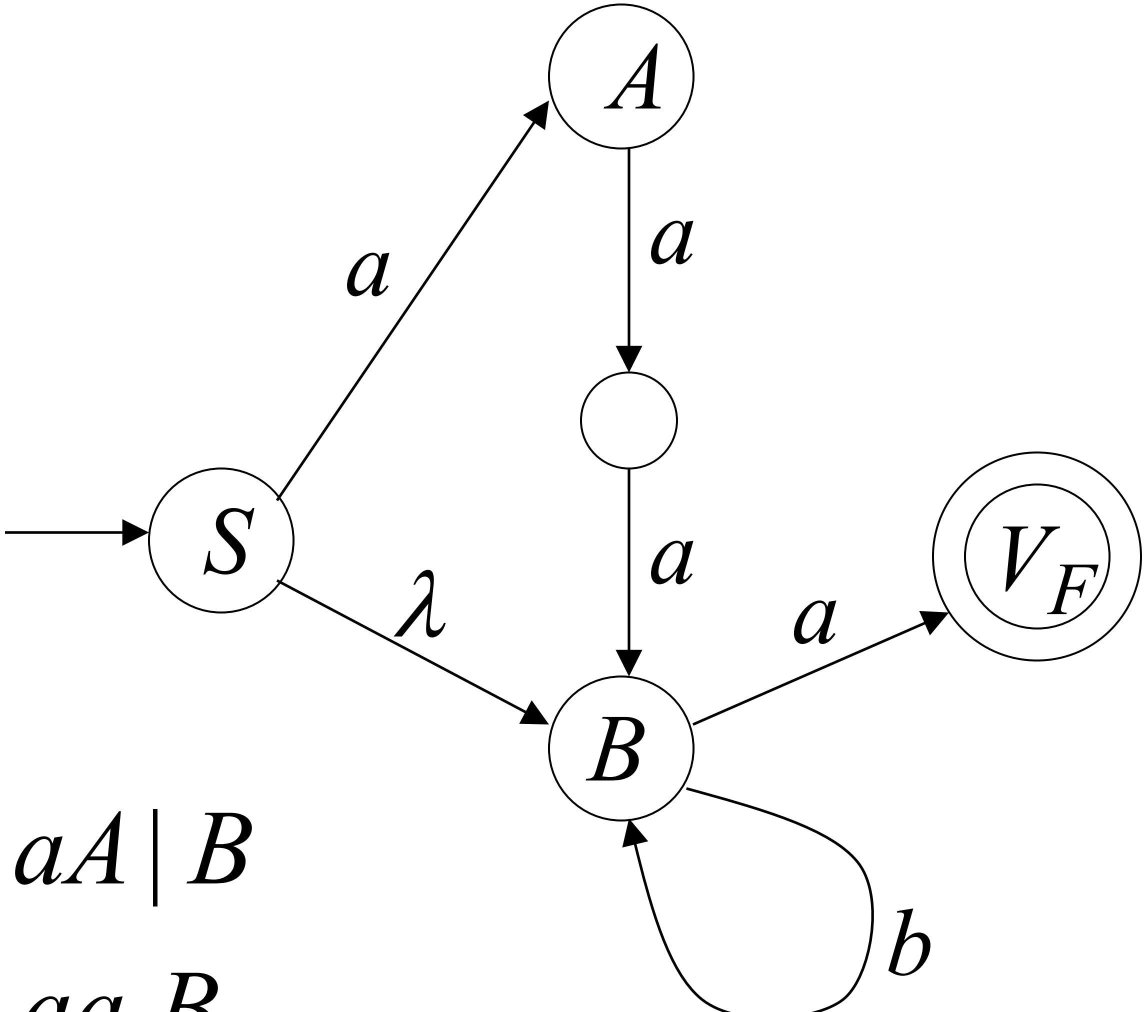
$$A \to aa\ B$$



$$S \to aA \mid B$$

$$A \to aa\ B$$

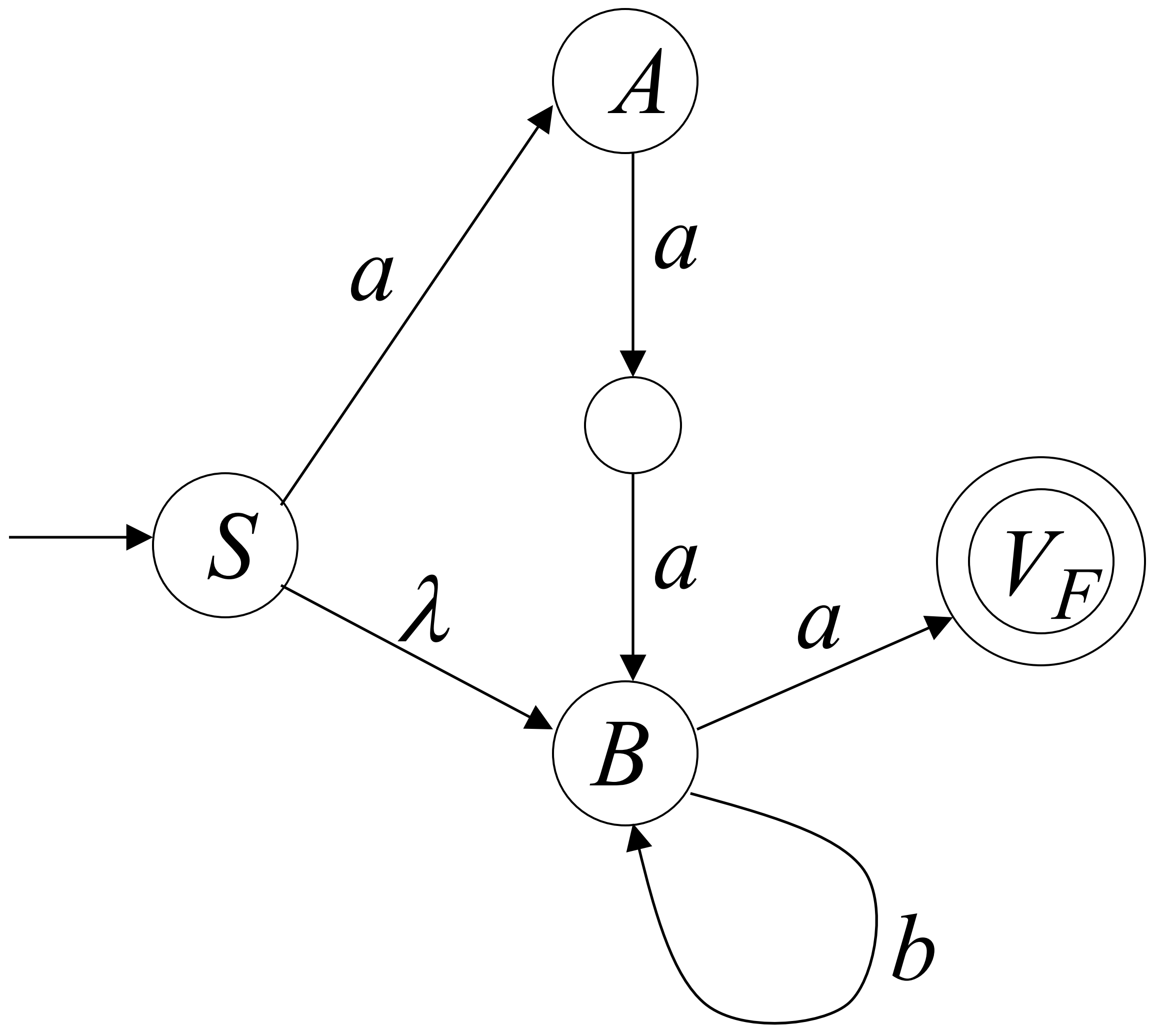
$$B \to bB$$



$$S \to aA \mid B$$

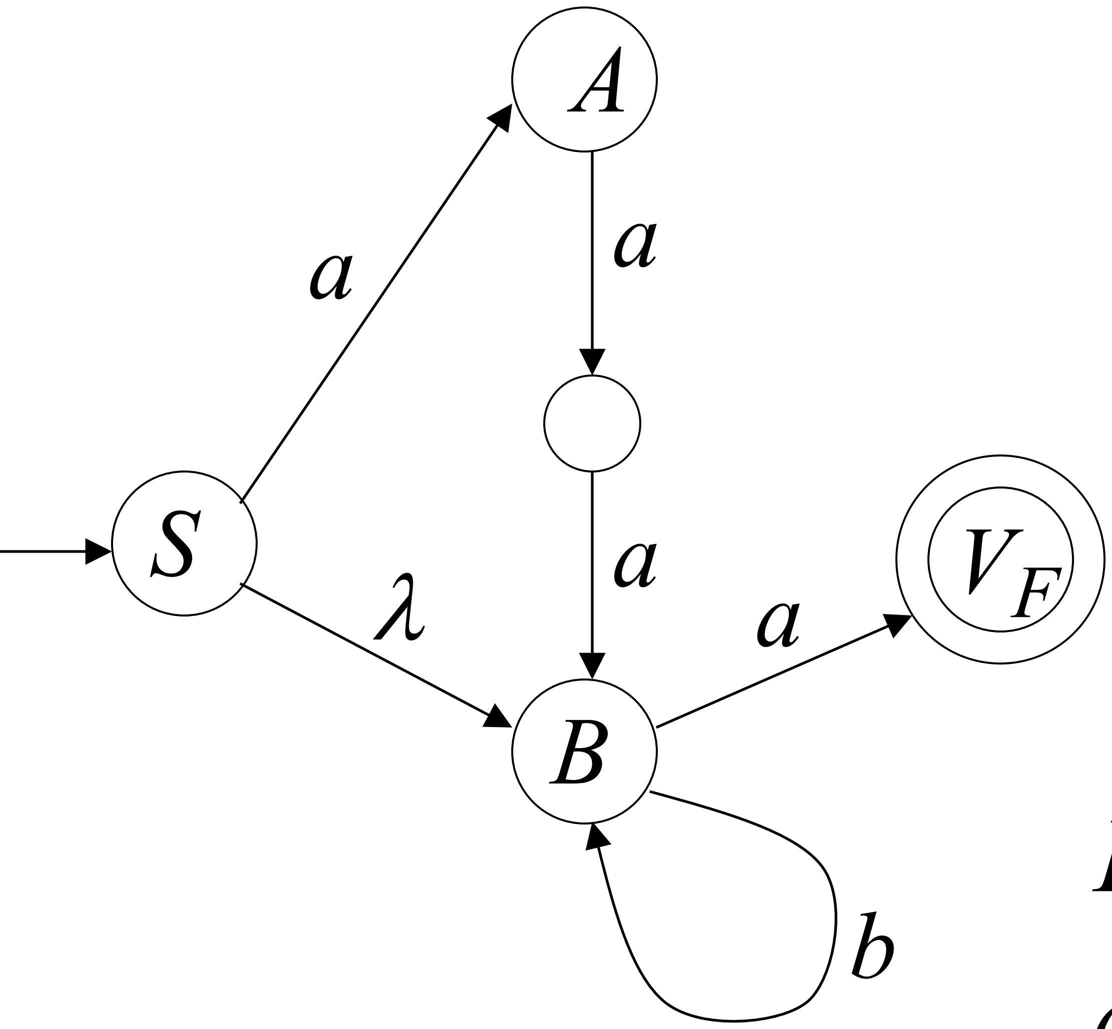
$$A \to aa\ B$$

$$B \to bB \mid a$$



$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aaaB \Rightarrow aaabB \Rightarrow aaaba$$

NFA M



Grammatica G

$$S \to aA \mid B$$

$$A \to aa\ B$$

$$B \to bB \mid a$$

$$L(M) = L(G) =$$

$$aaab^*a + b^*a$$

In Generale

una right-linear grammatica G

Ha le variabili: $V_0, V_1, V_2, \ldots$

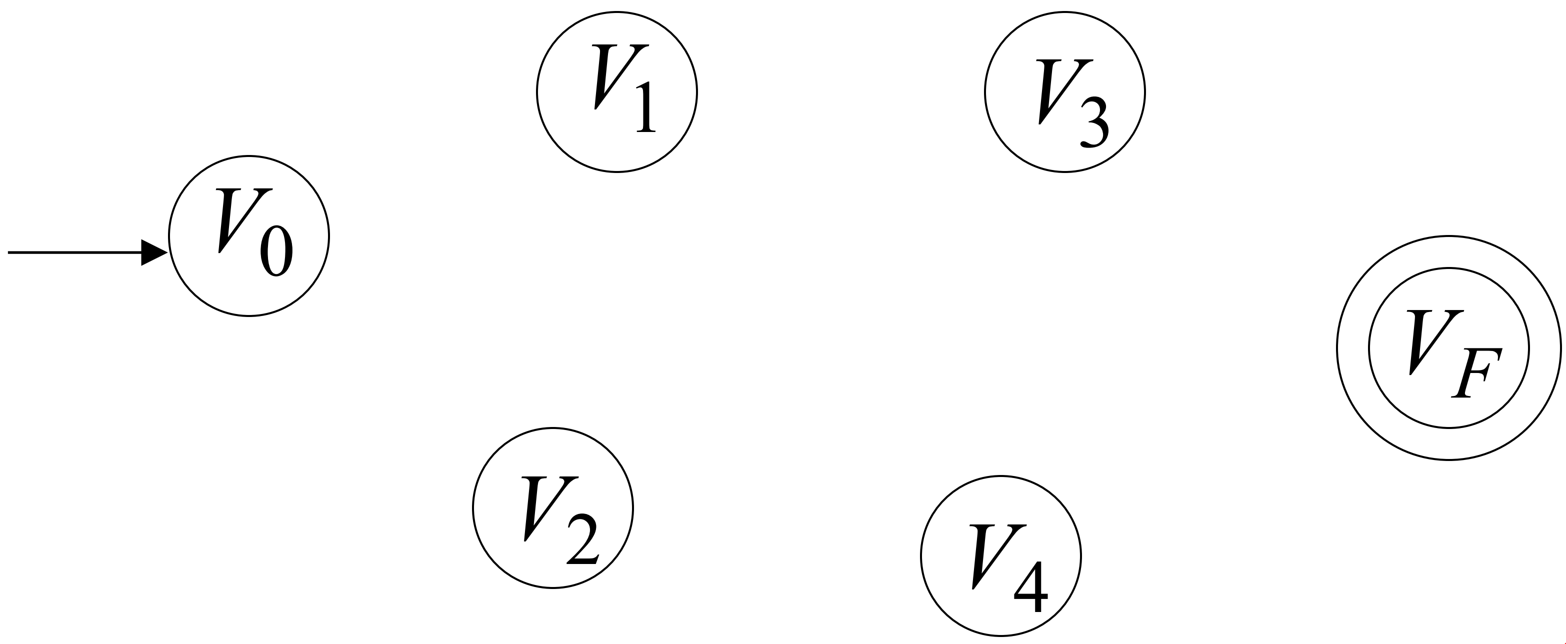
E le produzioni: $V_i \to a_1 a_2 \cdots a_m V_j$

or

$V_i \to a_1 a_2 \cdots a_m$

Costruiamo un NFA M tale che:

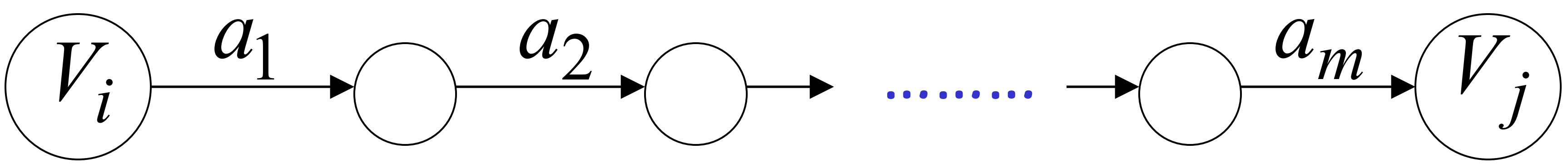
Ogni variabile V_i corrisponde ad un nodo:



stato finale

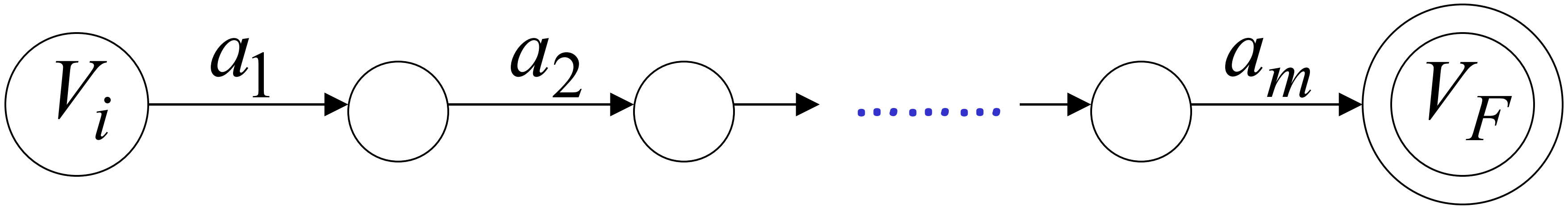
per ogni produzione: $V_i \to a_1 a_2 \cdots a_m V_j$

Addizioniamo transizioni e nodi intermedi

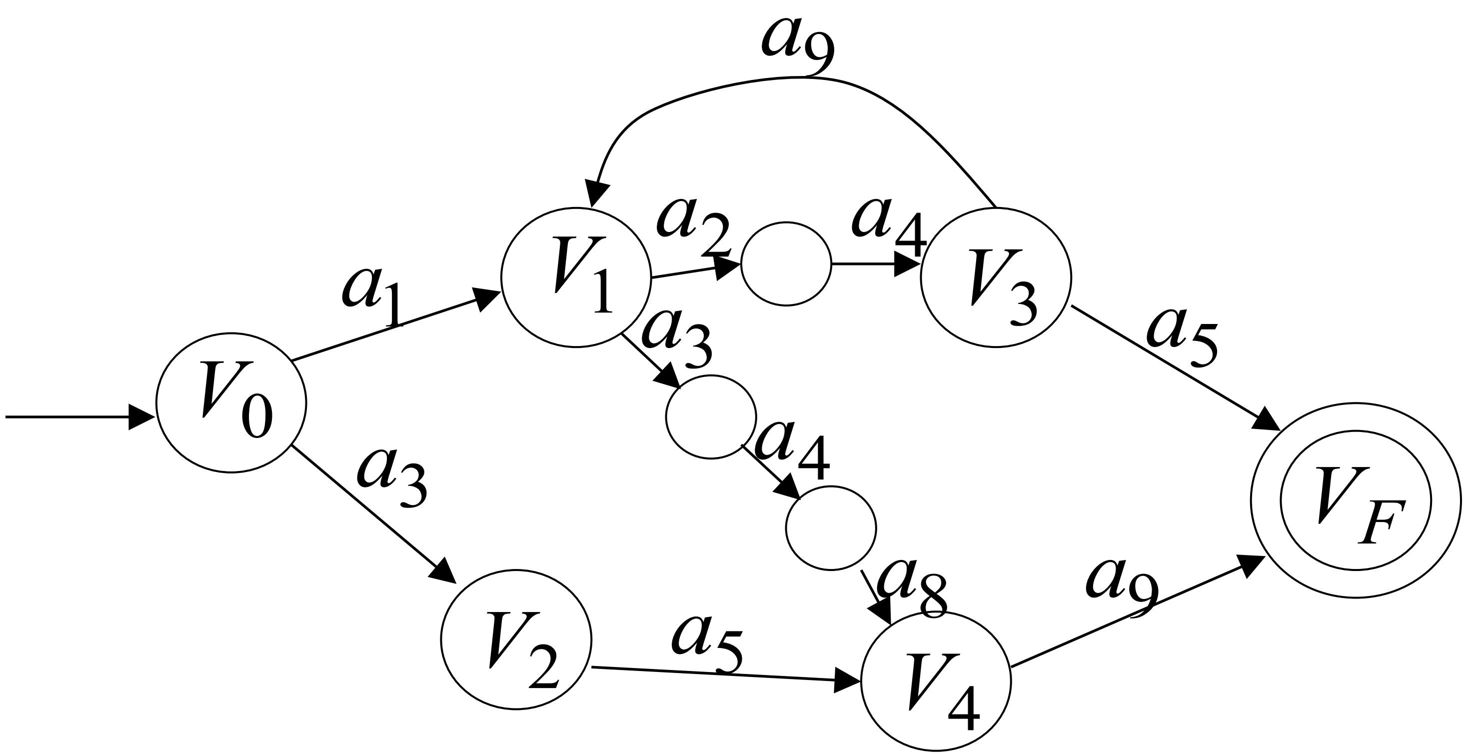


per ogni produzione: $V_i \to a_1 a_2 \cdots a_m$

Addizioniamo transizioni e nodi intermedi



otteniamo NFA M come questo:



Vale che: $$L(G) = L(M)$$

Il caso di una Left-Linear grammatica

Fate voi

dimostrazione - Part 2

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi} \\ \text{Generati da} \\ \text{grammatiche} \\ \text{regolari}\end{array}\right\} \supseteq \left\{\begin{array}{l}\text{Linguaggi} \\ \text{regolari}\end{array}\right\}$$

ogni linguaggio regolare L è generato da qualche grammatica regolare G

qualsiasi linguaggio regolare L è generato da una grammatica regolare G

idea:

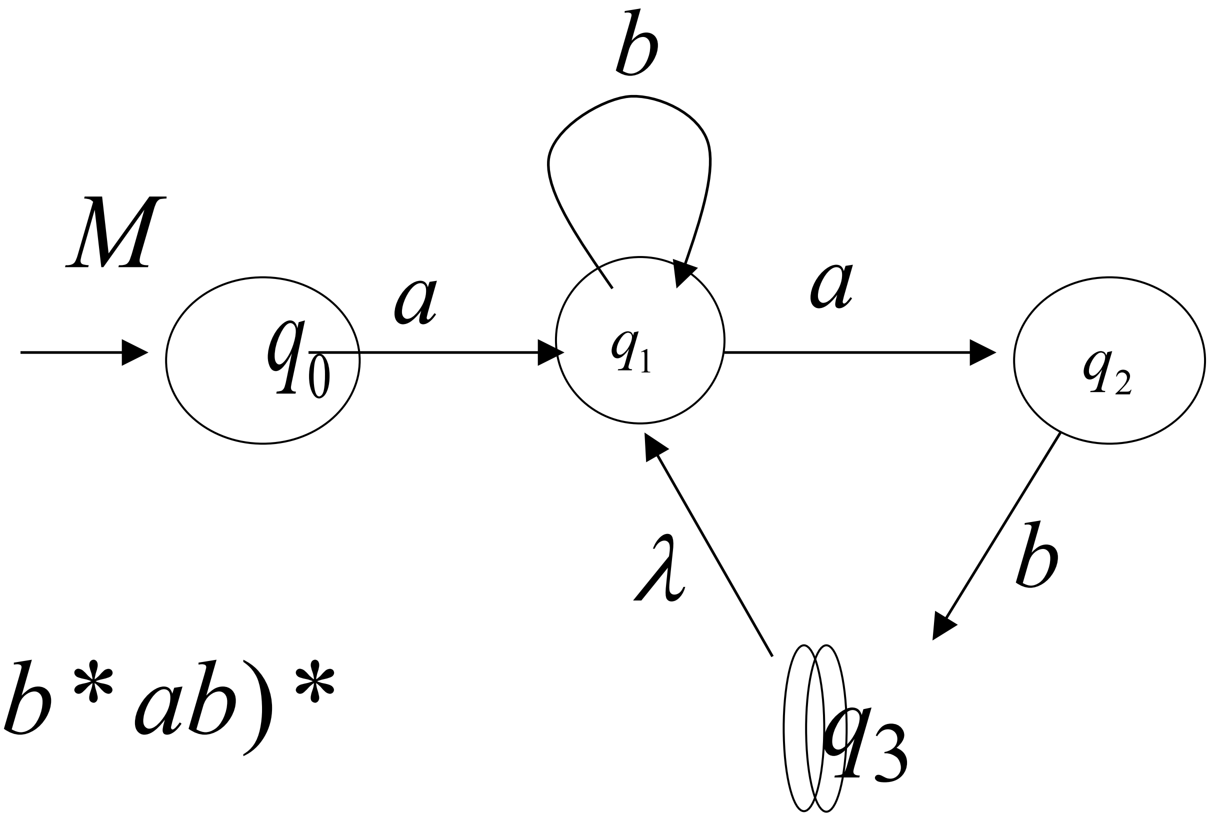
sia M NFA con $L = L(M)$.

costruiamo da M una grammatica G regolare tale che $L(M) = L(G)$

Poichè L è regolare

è un NFA M tale che $L = L(M)$

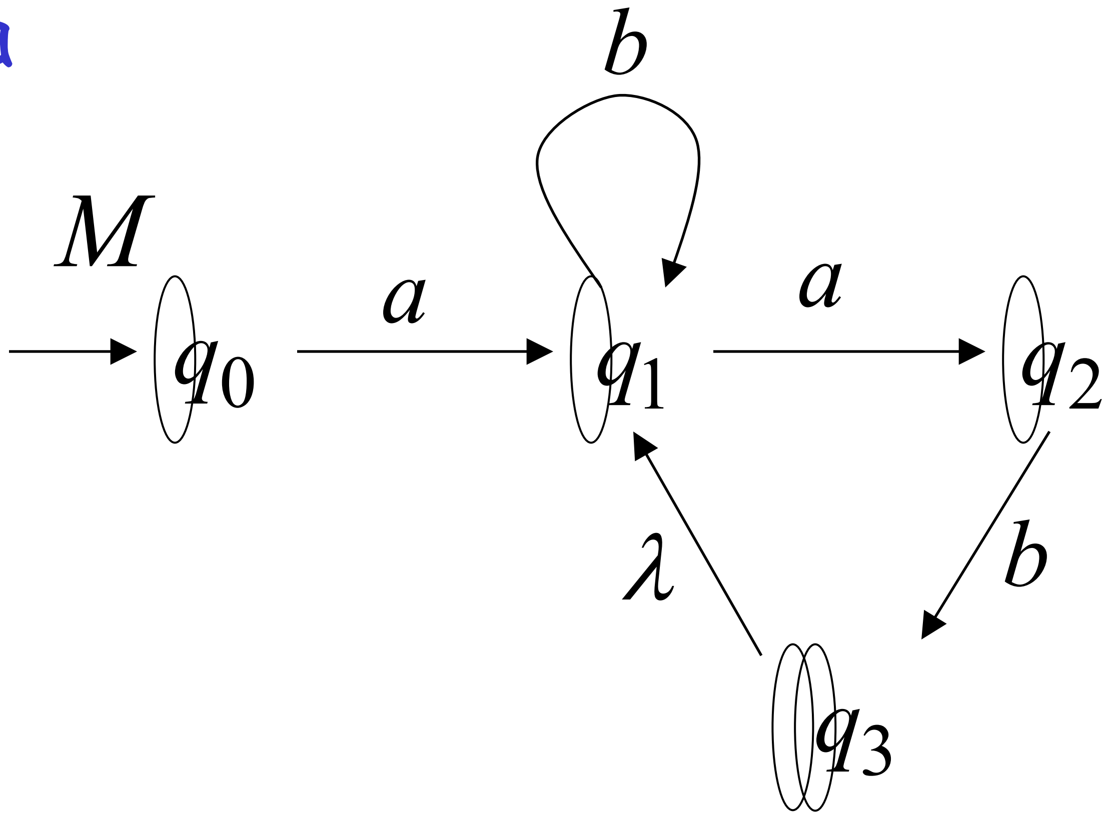
Esempio:



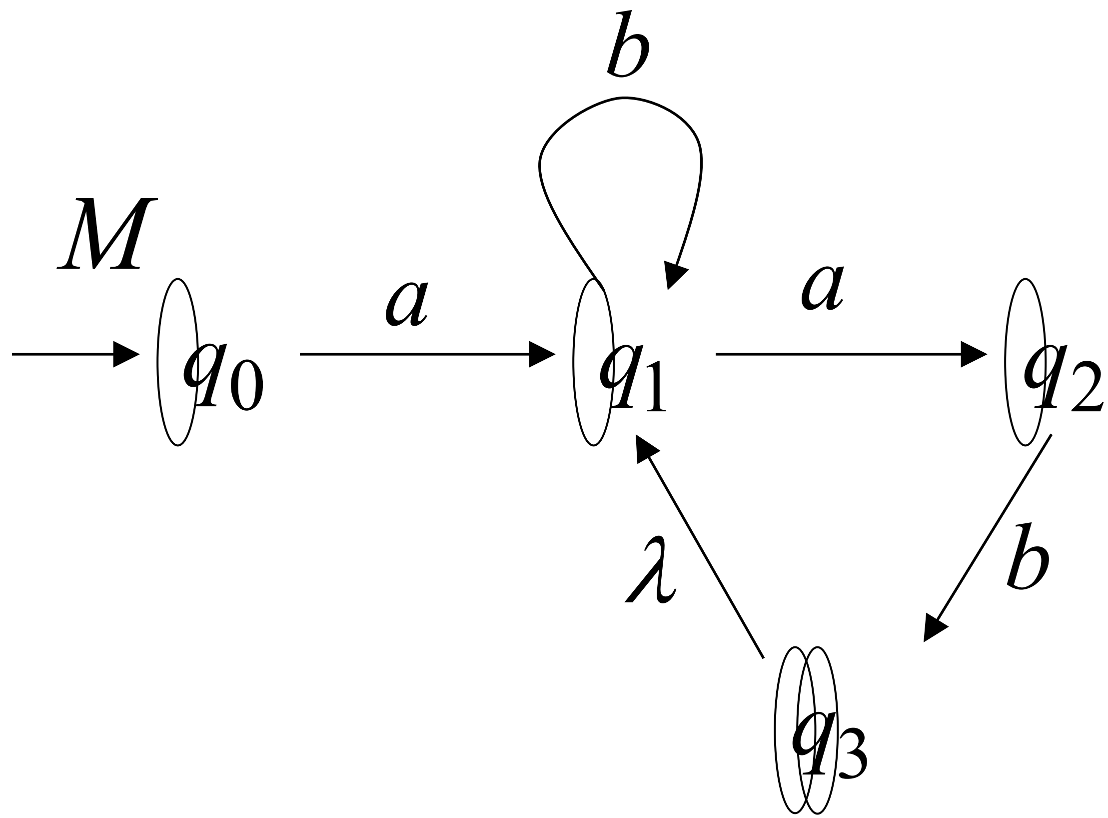
$$L = ab^*ab(b^*ab)^*$$

$$L = L(M)$$

convertiamo M in una right-linear grammatica



$$q_0 \to a q_1$$

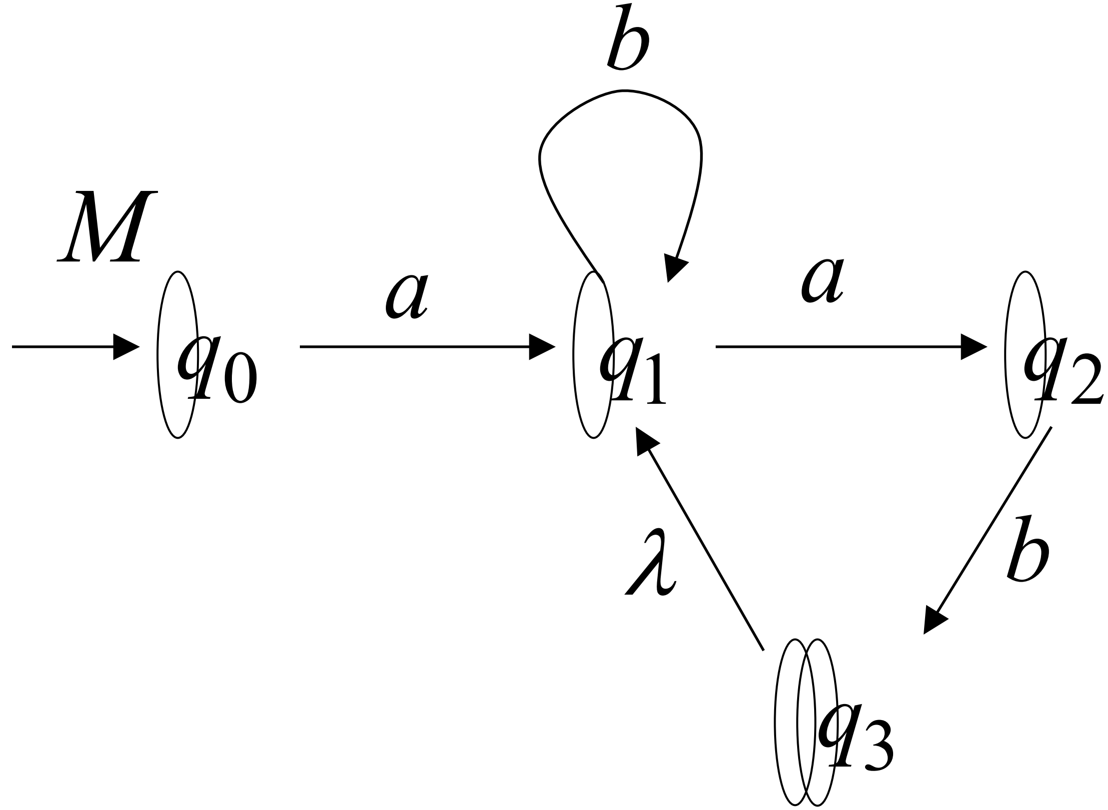


$$q_0 \rightarrow aq_1$$

$$q_1 \rightarrow bq_1$$

$$q_1 \rightarrow aq_2$$

M



$$q_0 \to aq_1$$

$$q_1 \to bq_1$$

$$q_1 \to aq_2$$

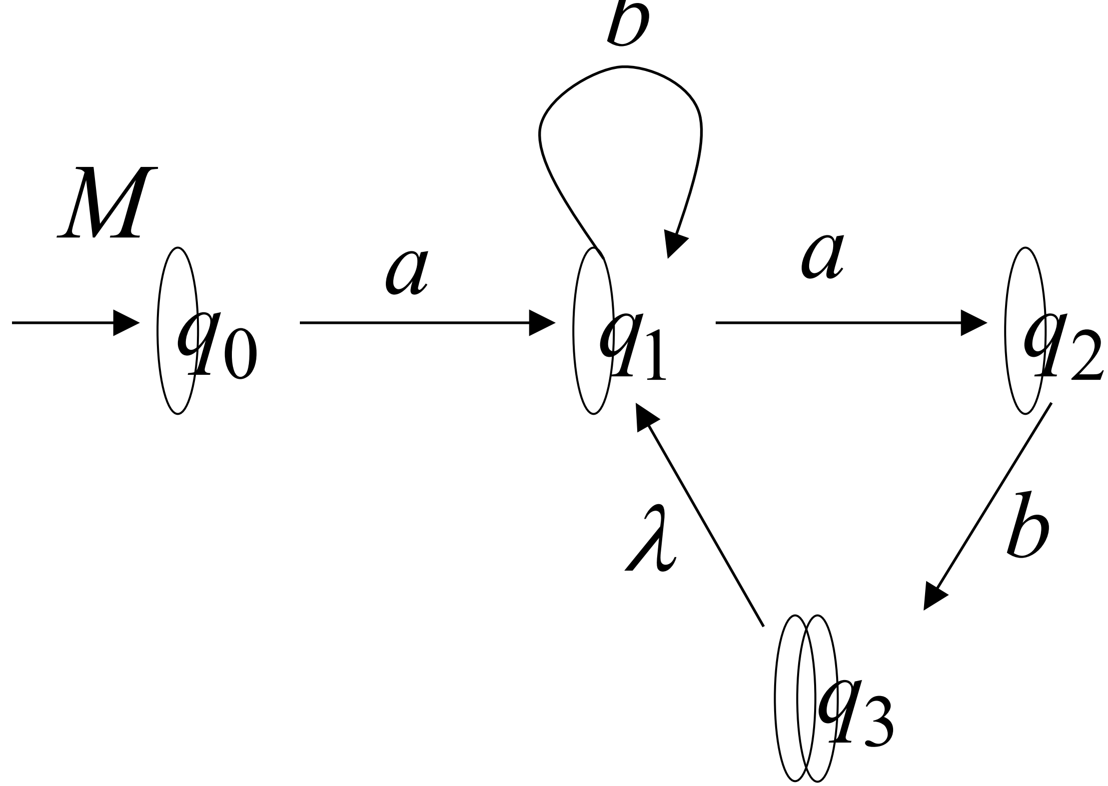
$$q_2 \to bq_3$$

$$L(G) = L(M) = L$$

G

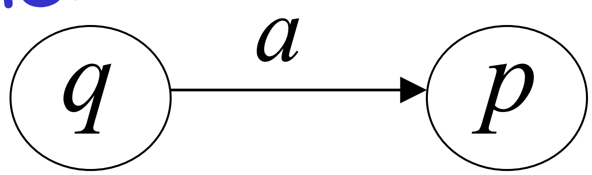
$$q_0 \to aq_1$$
$$q_1 \to bq_1$$
$$q_1 \to aq_2$$
$$q_2 \to bq_3$$
$$q_3 \to q_1$$
$$q_3 \to \lambda$$

M



In Generale

per qualsiasi transizione:

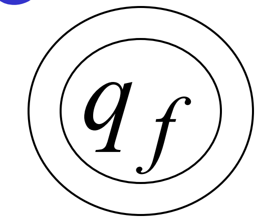


addizioniamo la produzione:

$$q \rightarrow ap$$

variable terminal variable

per qualsiasi stato finale :



Addizioniamo la produzione: $q_f \to \lambda$

Since G è right-linear grammatica

G è grammatica regolare

con

$$L(G) = L(M) = L$$