linguaggi Non-regolari

(Pumping Lemma)

linguaggi Non-regolari

$$\{a^n b^n : \ \ n \geq 0\}$$

$$\{vv^R : \ \ v \in \{a,b\}^*\}$$

linguaggi regolari

$$a^*b$$

$$b^*c + a$$

$$b + c(a+b)^*$$

etc...

Come possiamo provare che un linguaggio L non è regolare?

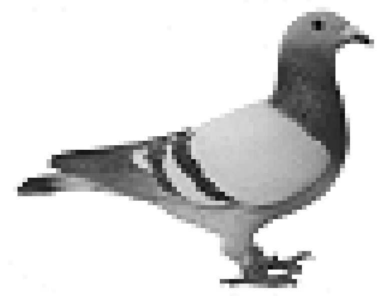
Dobbiamo provare che non vi è Nessun DFa or NFa or RE che lo accetta

Difficulty: non è facile da provare

(perchè vi sono infiniti dfa, nfa e re)

Solution: usare il Pumping Lemma !!!

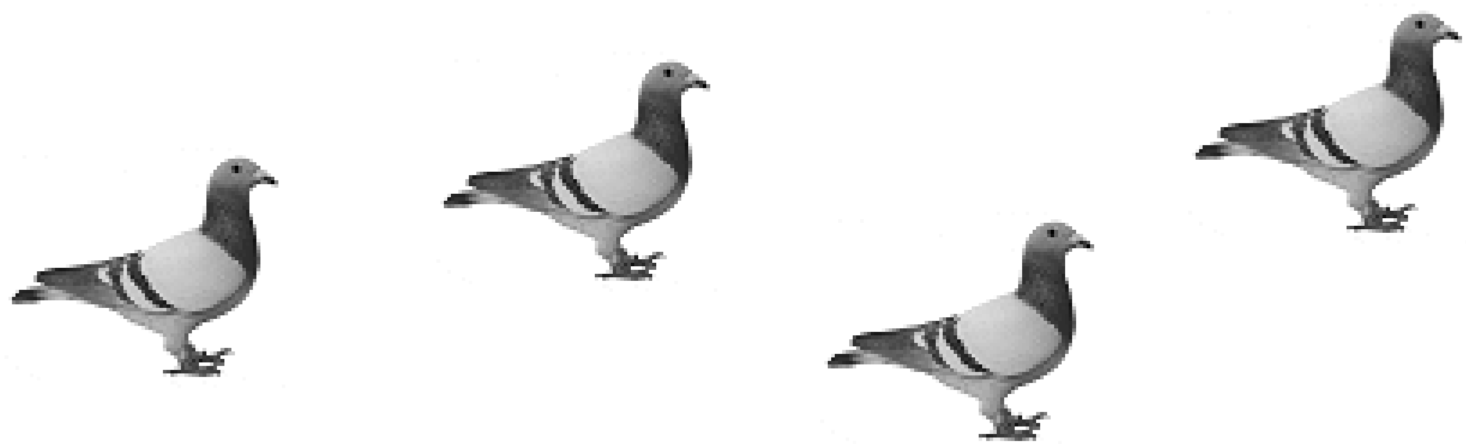
L



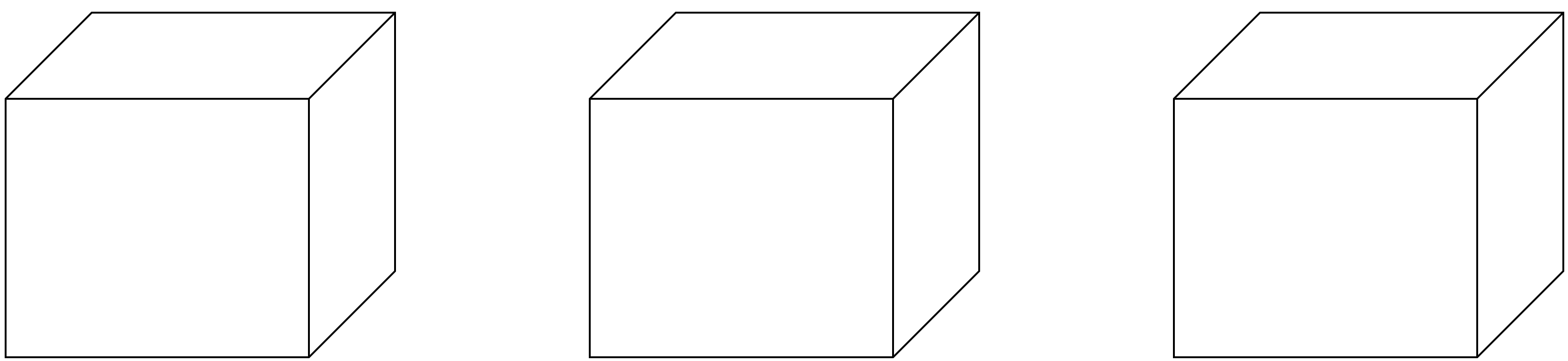
il Pigeonhole Principle

Capelli. Persone.

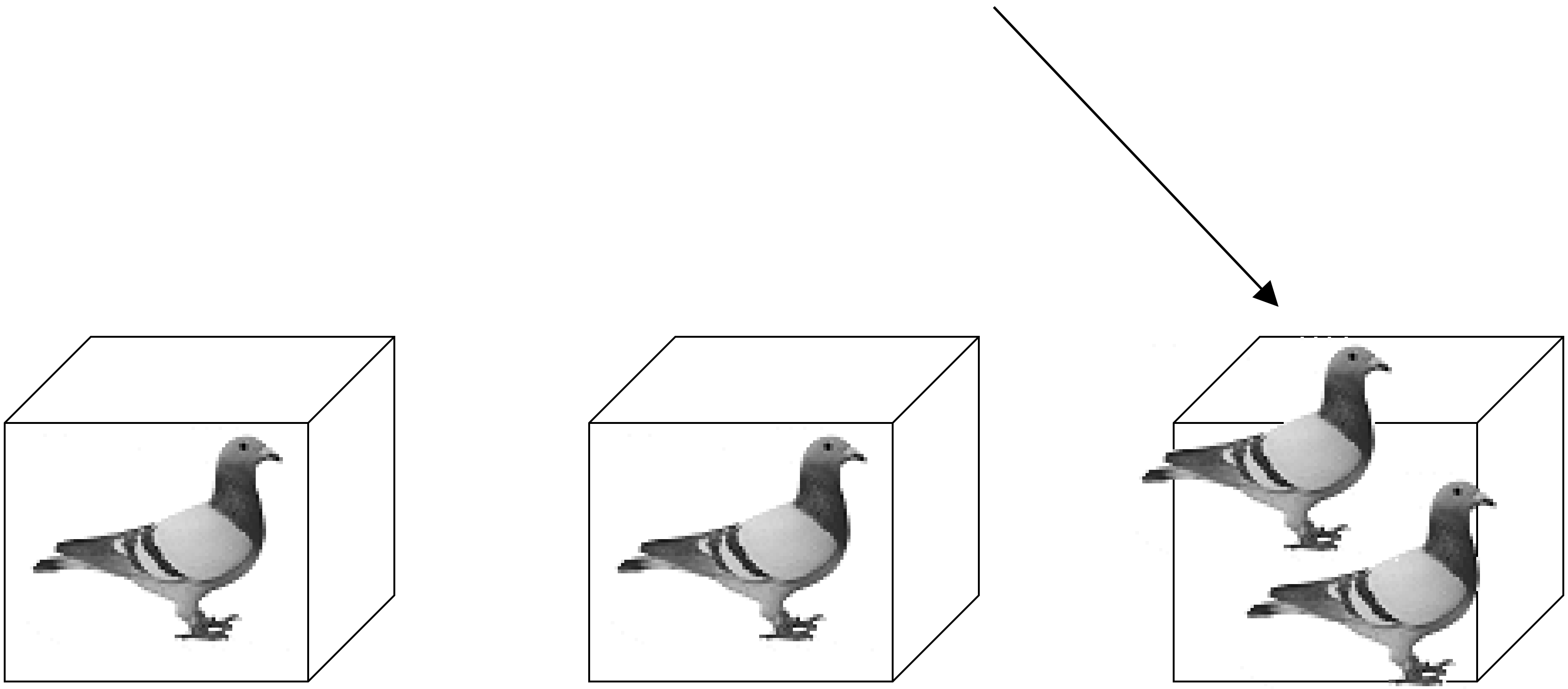
4 pigeons



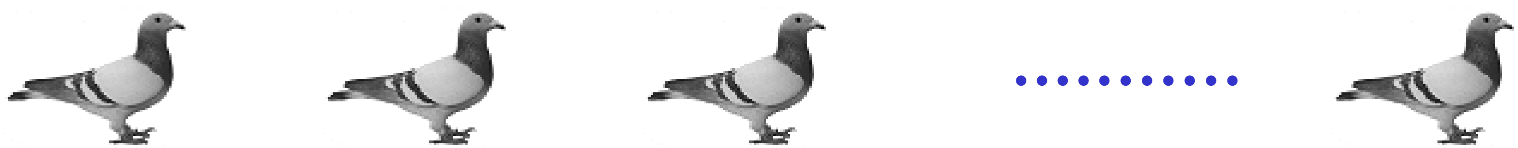
3 pigeonholes



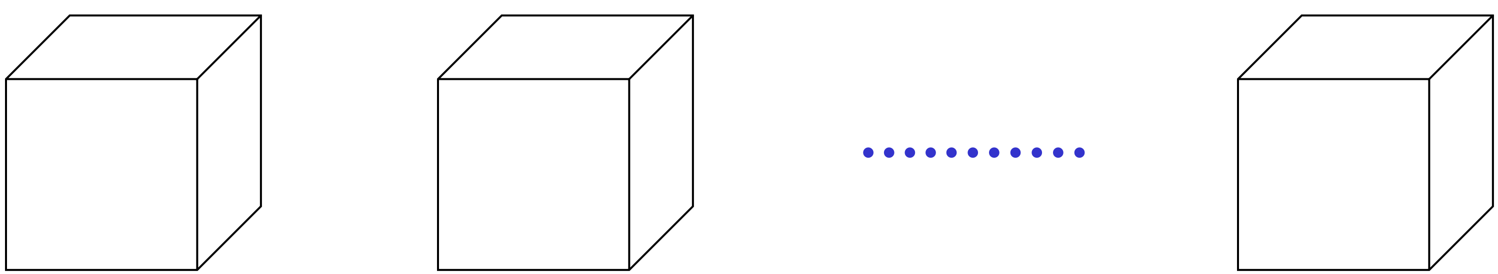
a pigeonhole deve
Contenere due pigeons



n pigeons



m pigeonholes $\qquad n > m$



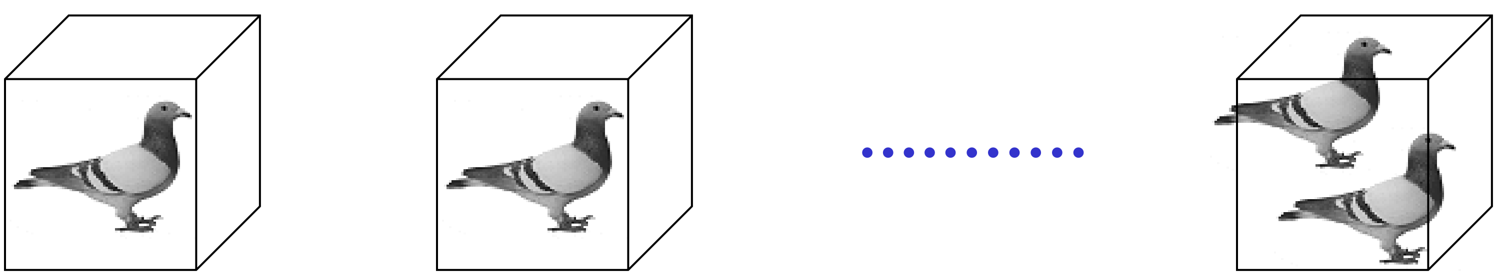
il Pigeonhole Principle

n pigeons

m pigeonholes

$$n > m$$

a pigeonhole deve
Contenere minimo
due pigeons

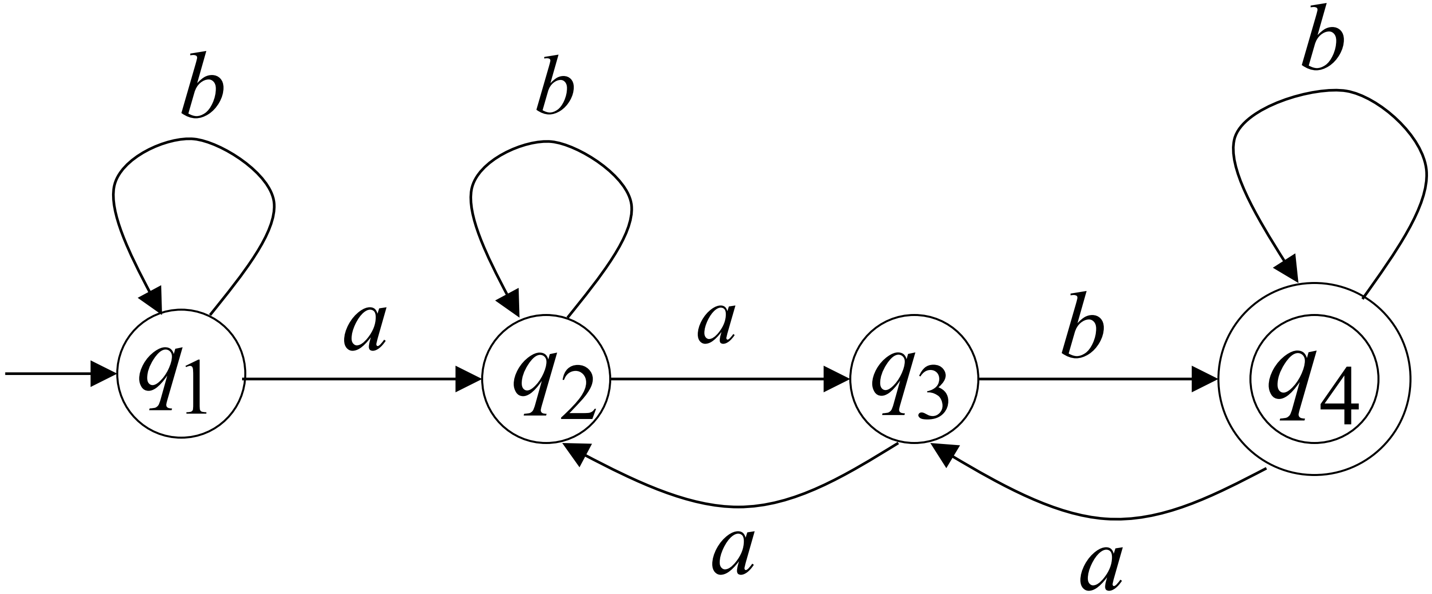


il Pigeonhole Principle

e i

DFa

considera un DFa con 4 stati

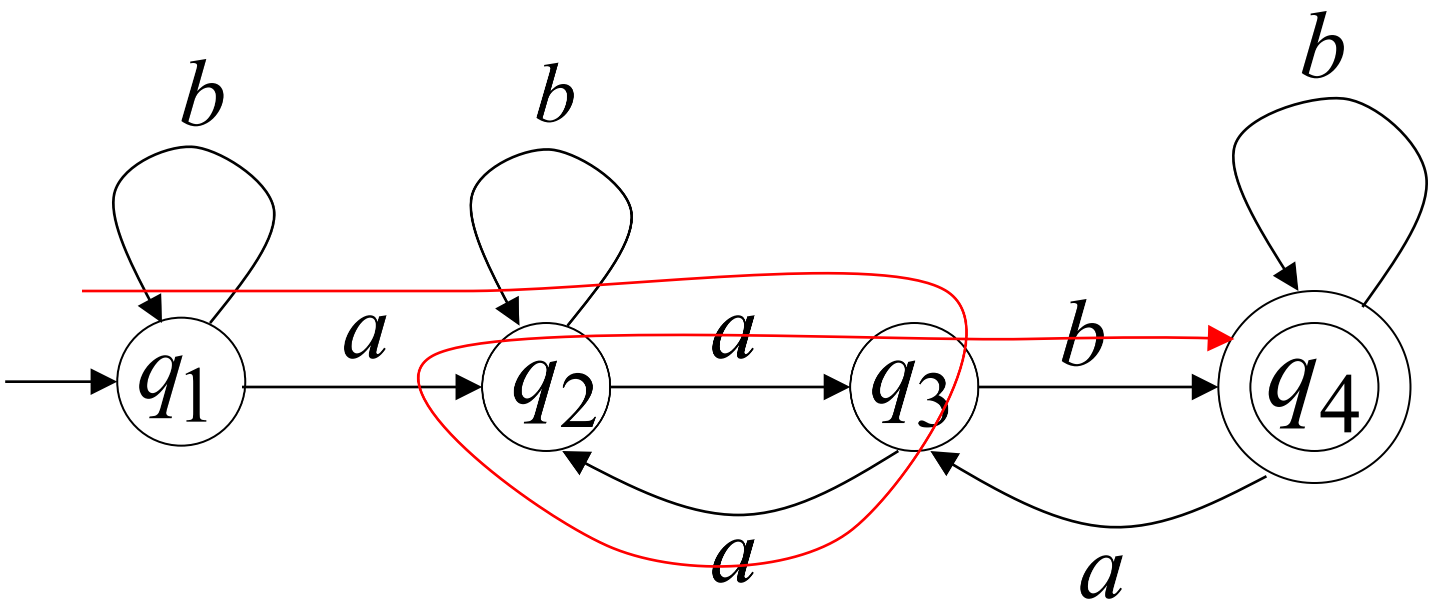


considera il cammino di una “stringa lunga” :
(lunghezza almeno 4)

$$aaaab$$

uno stato è ripetuto nel cammino di $aaaab$

$$q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} \boxed{q_3} \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} \boxed{q_3} \xrightarrow{b} q_4$$

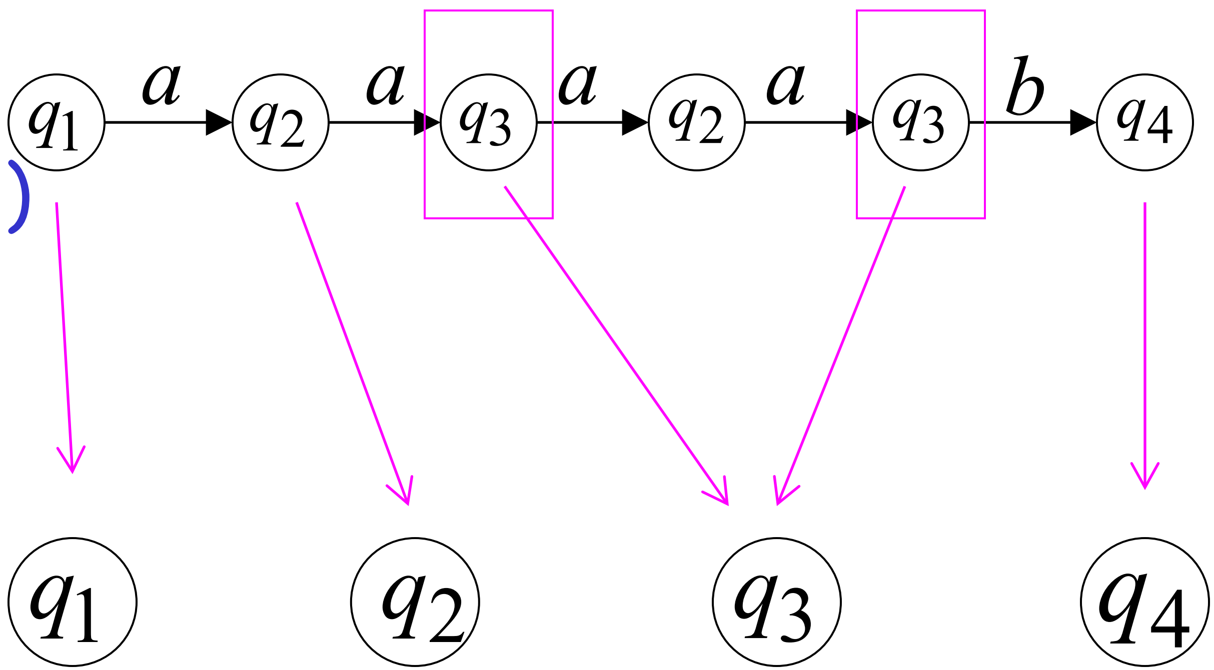


il stato è ripetuto da a, risultato del pigeonhole principle

cammino di $aaaab$

Pigeons:
(cammino stati)

Sono più degli



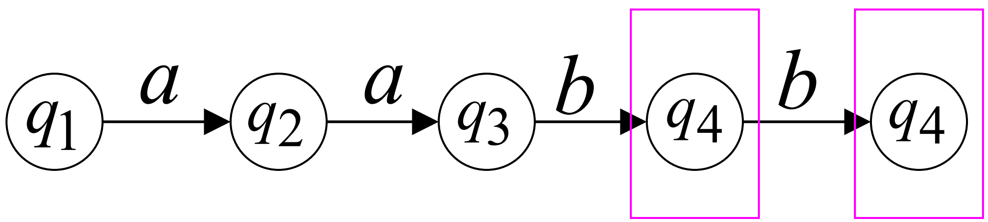
Cesti:
(stati dell'automata)

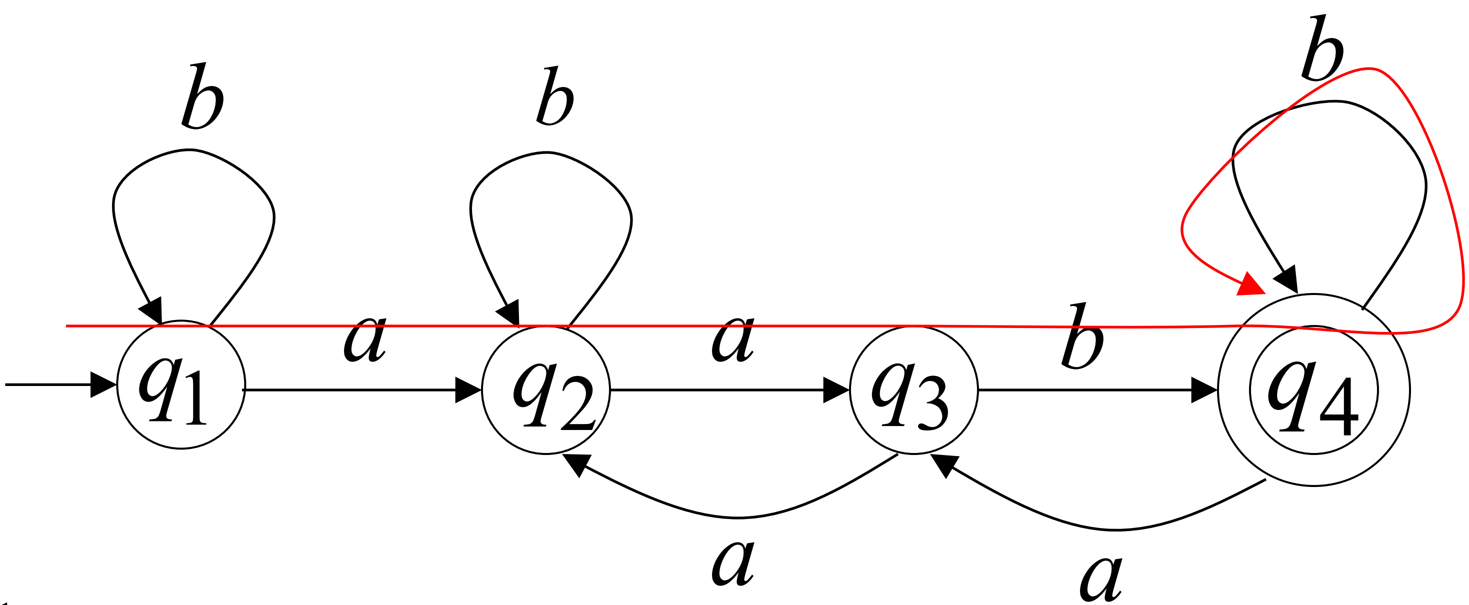
stato
Ripetuto

considera il cammino di a “long” stringa: $aabb$
(lunghezza almeno 4)

Dal pigeonhole principle:

uno stato è ripetuto nel cammino di $aabb$





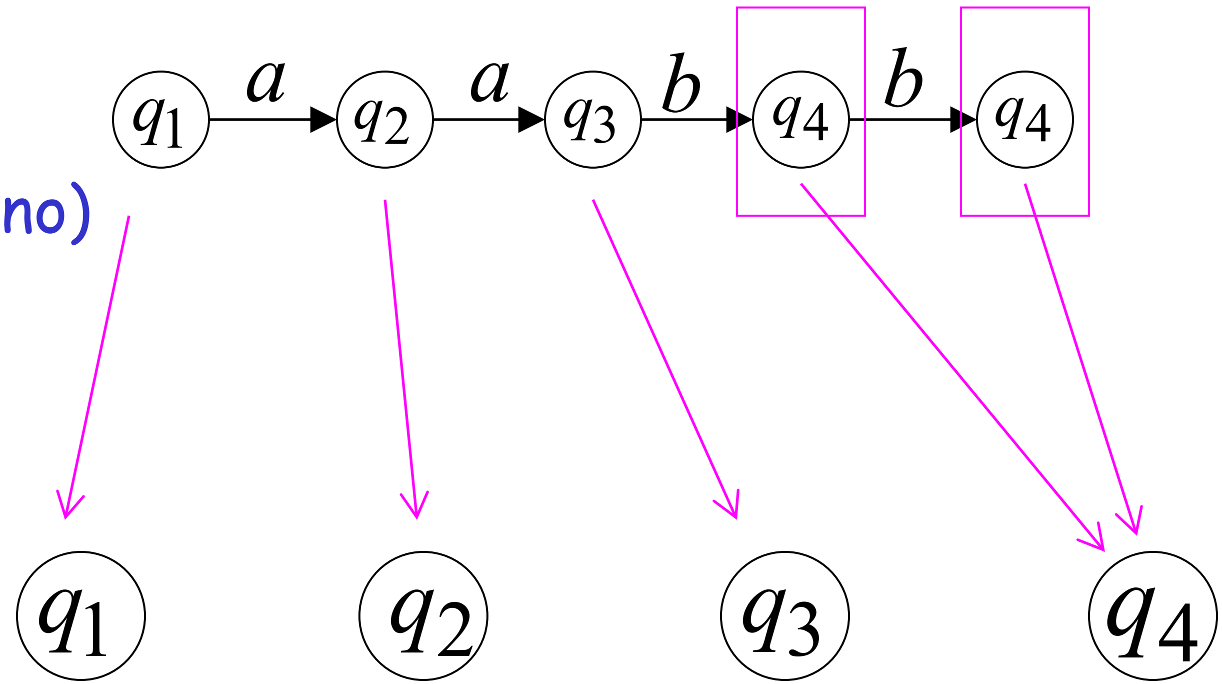
il stato è ripetuto come risultato del pigeonhole principle

cammino di $aabb$

Pigeons:

(stati del cammino)

sono di più



Nests:

(automaton stati)

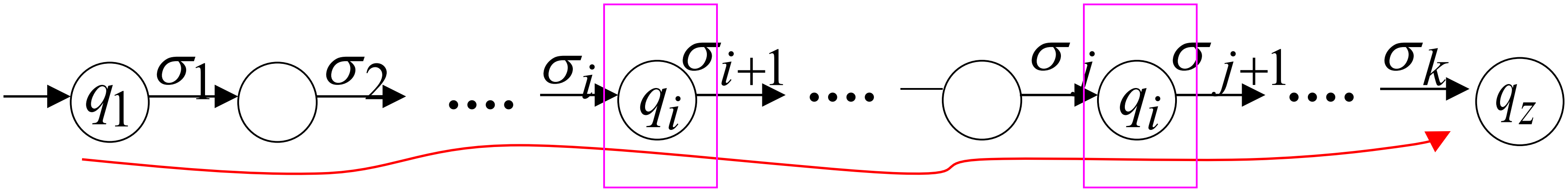
Stati automa

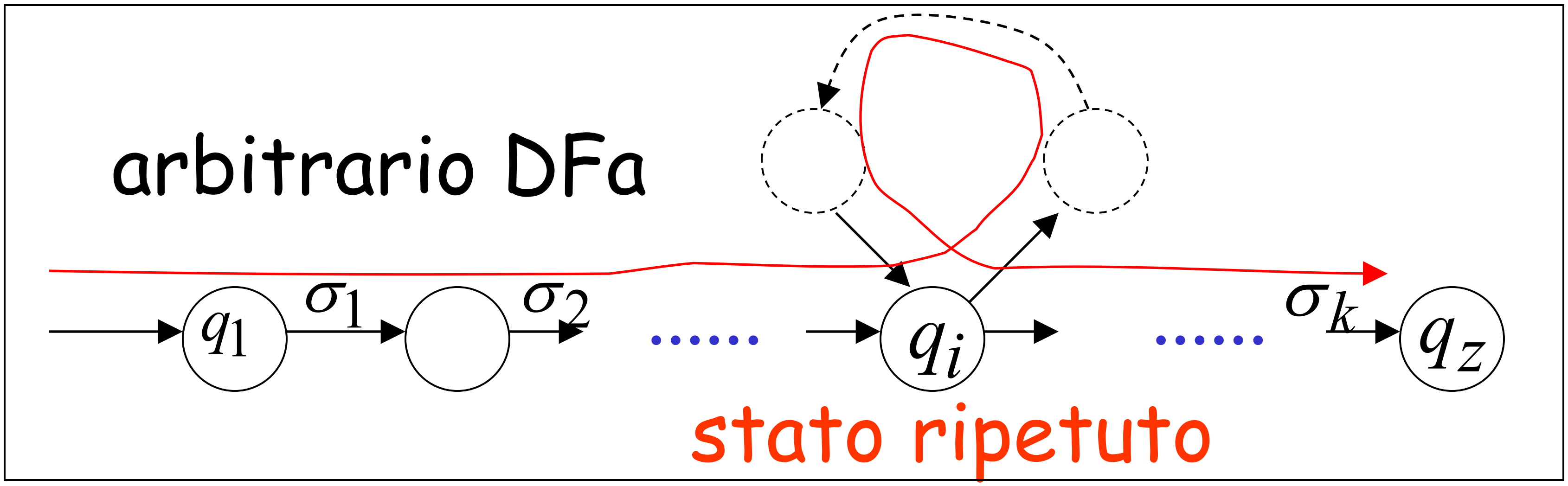
ripetuto stato

In Generale: se $|w| \geq$ #states of DFA

Per il pigeonhole principle,
uno stato è ripetuto nel cammino W

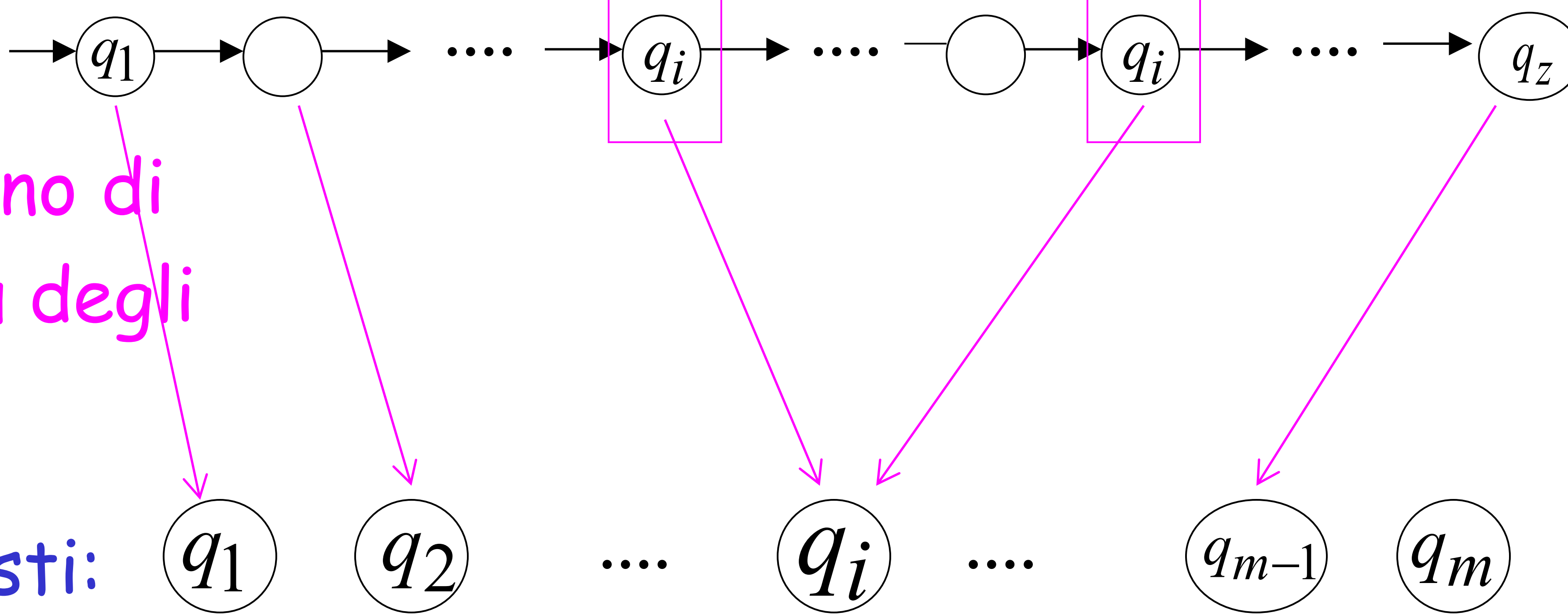
cammino di $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$





$|w| \geq \#\text{states of DFA} = m$

Pigeons: (stati del cammino) cammino di w



Sono di Più degli

cesti: (stati dell automata)

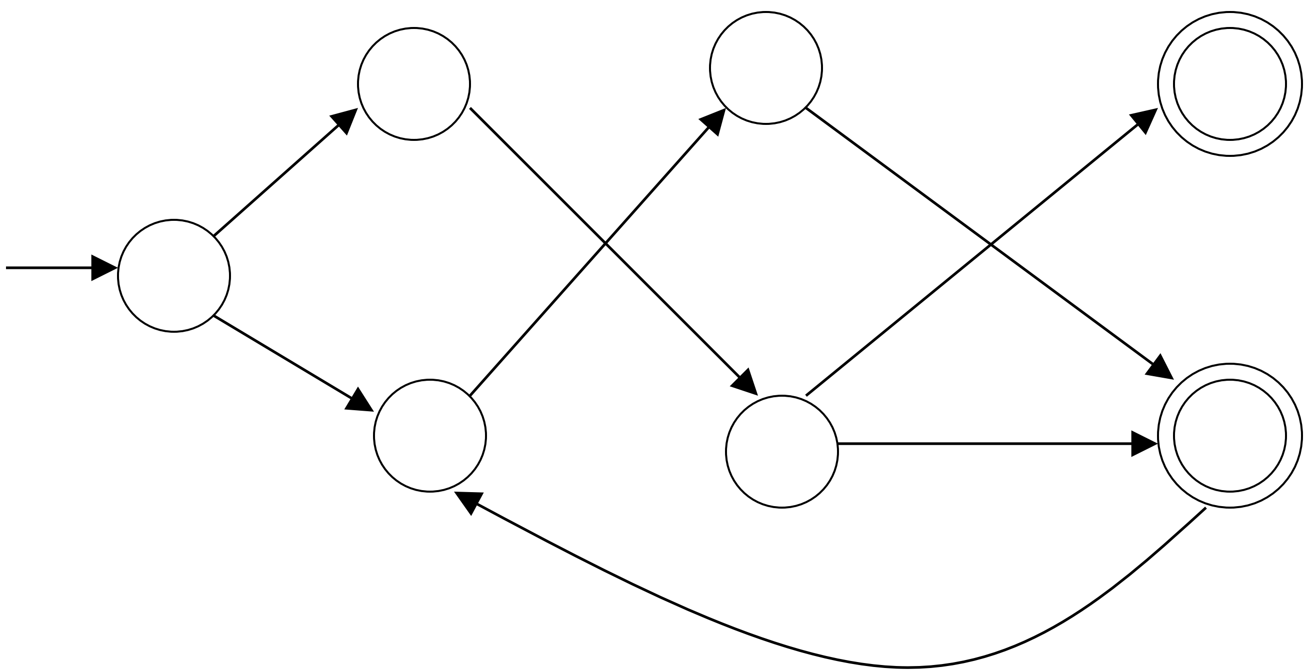
uno stato è ripetuto

il Pumping Lemma

prendi un linguaggio regolare infinito L

(contiene un numero infinito di stringhe)

Sia un DFa che accetta L



m stati

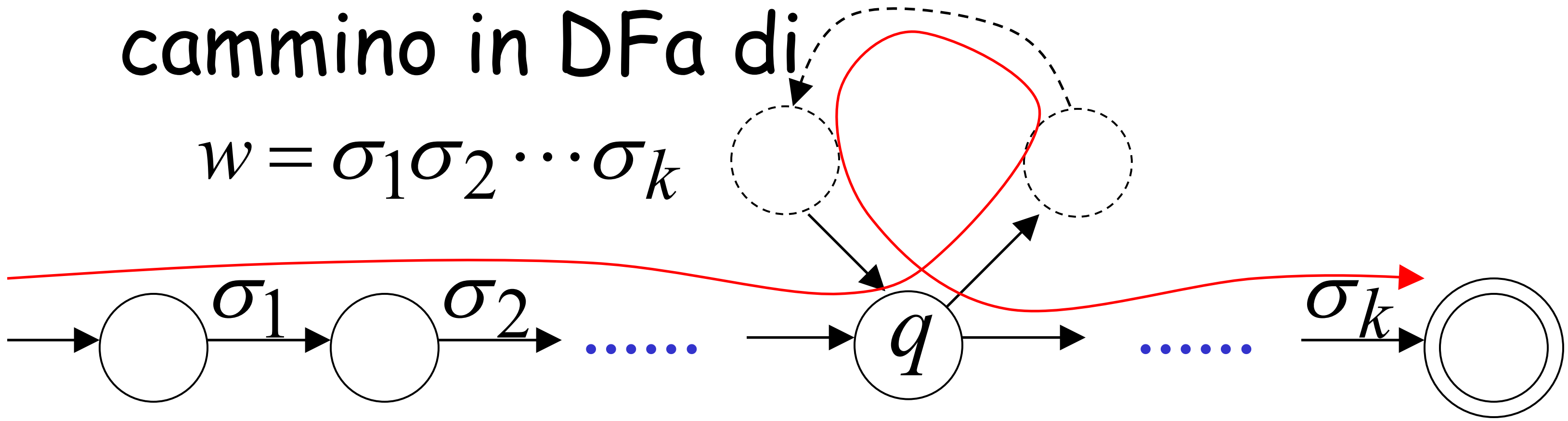
prendiamo una stringa $w \in L$ con $|w| \geq m$

(numero di stati del DFa)

Almeno uno stato è ripetuto nel cammino di w

cammino in DFa di

$w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$

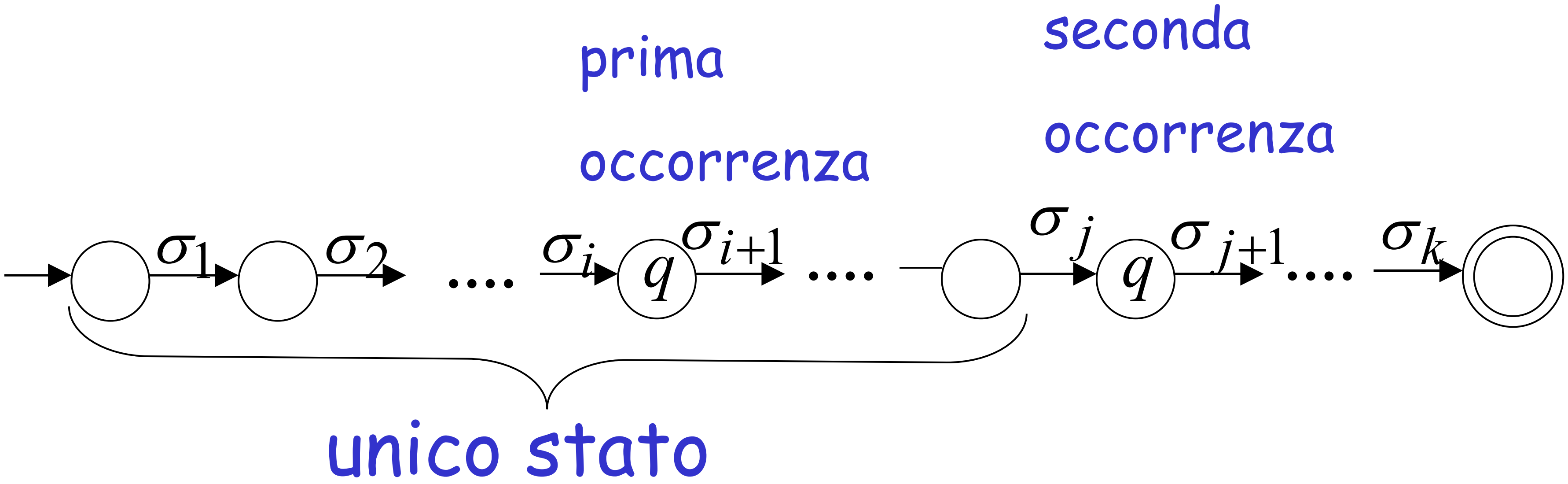


stato ripetuto in DFa

Ci saranno molti stati ripetuti

prendiamo il primo stato ripetuto q

In una dimensione il cammino di: w

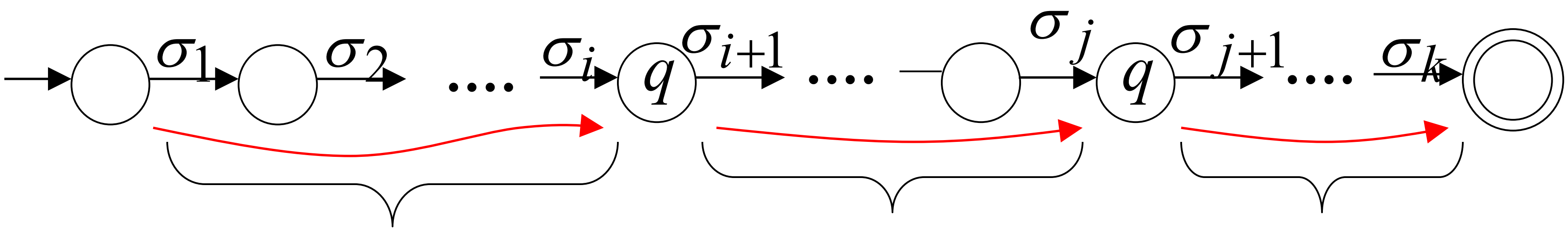


Possiamo scrivere $w = xyz$

Una dimensione del cammino di : w

prima occorrenza

seconda occorrenza

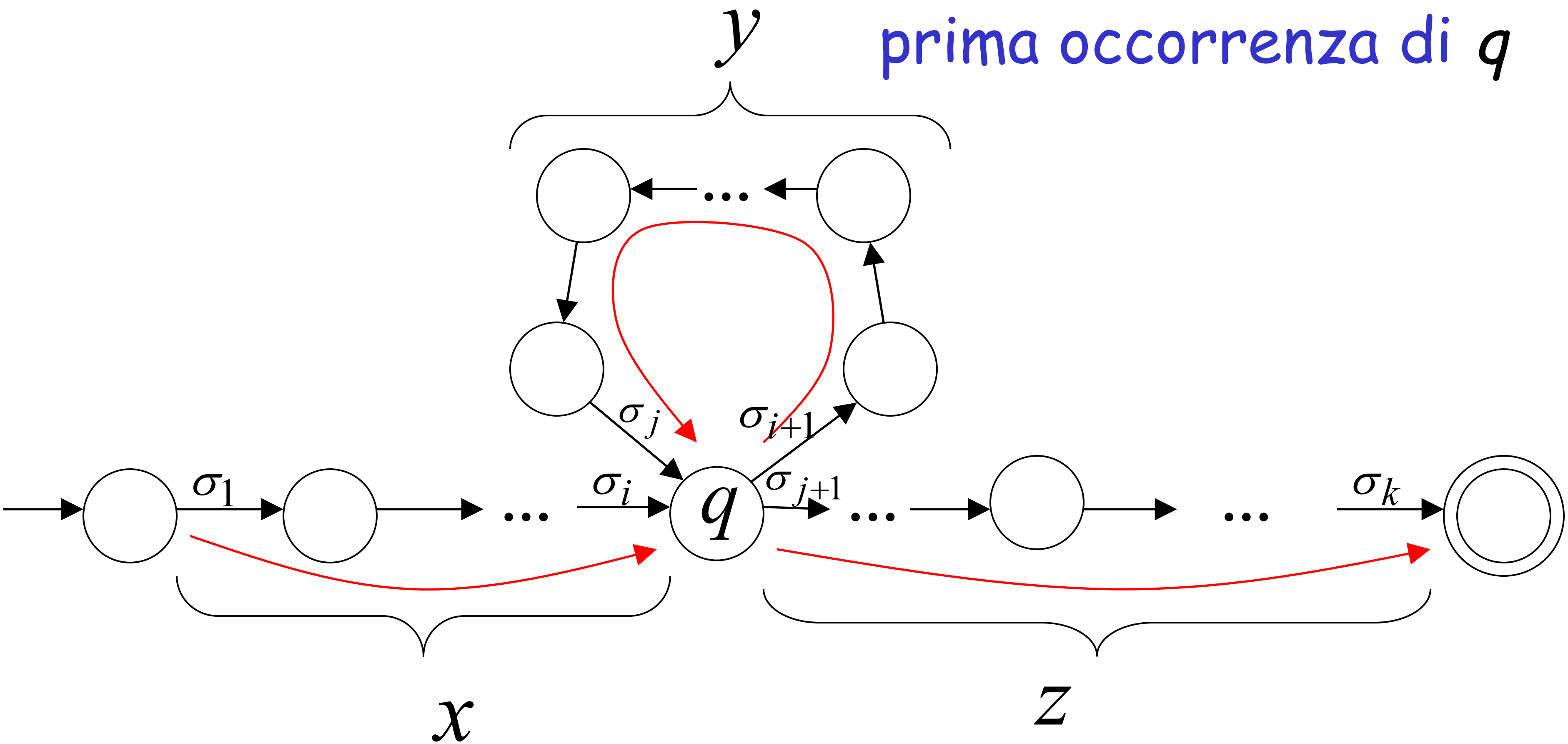


$x = \sigma_1 \cdots \sigma_i$ $y = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j$ $z = \sigma_{j+1} \cdots \sigma_k$

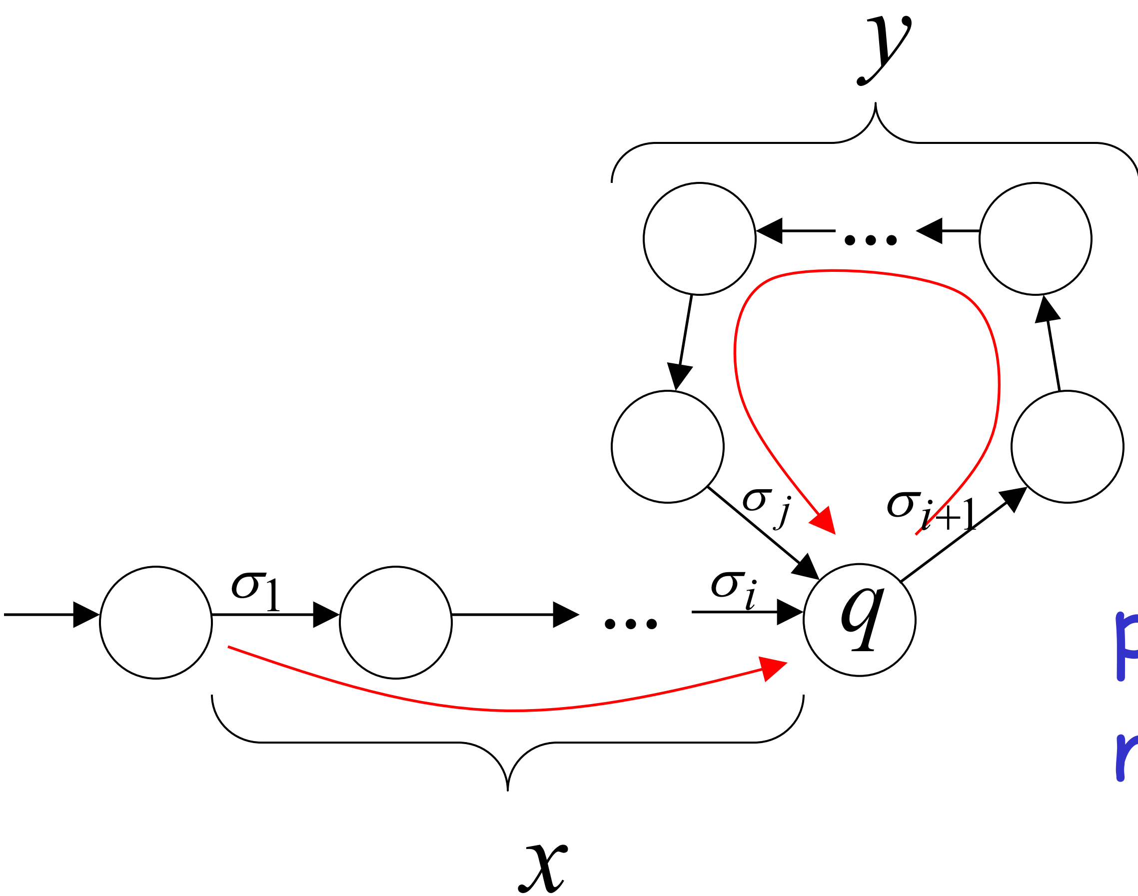
Nel DFa: $w = x\ y\ z$

contiene solo

prima occorrenza di q



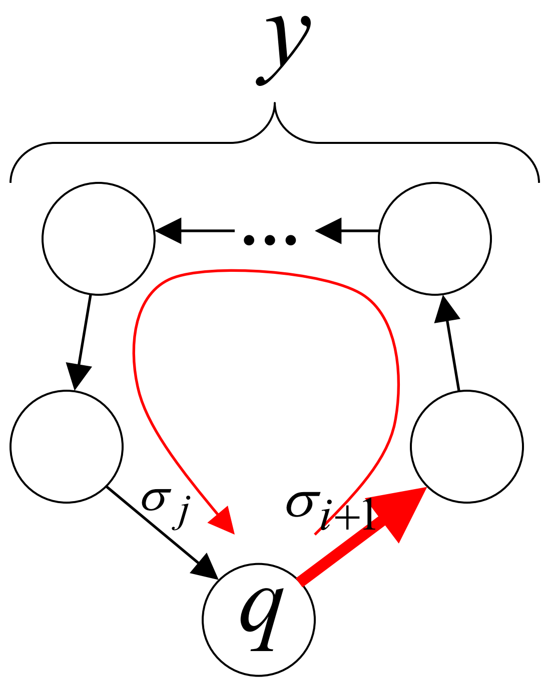
osservazione: lunghezza $|x\,y| \leq m$ numero di stati del DFa



unici stati

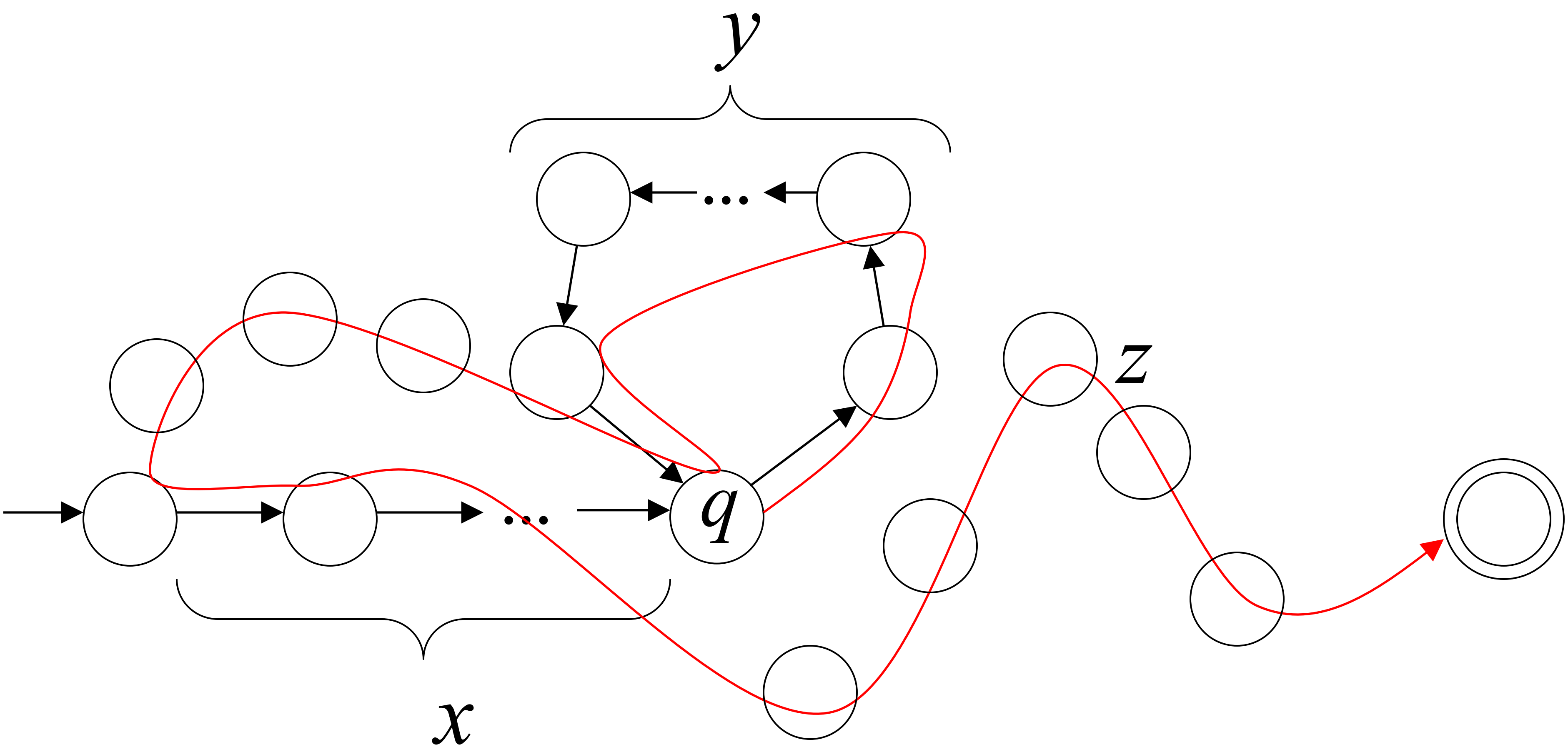
poichè, in xy nessuno è stato ripetuto (eccetto q) osservazione: lunghezza $|y| \geq 1$

Vi è almeno un loop



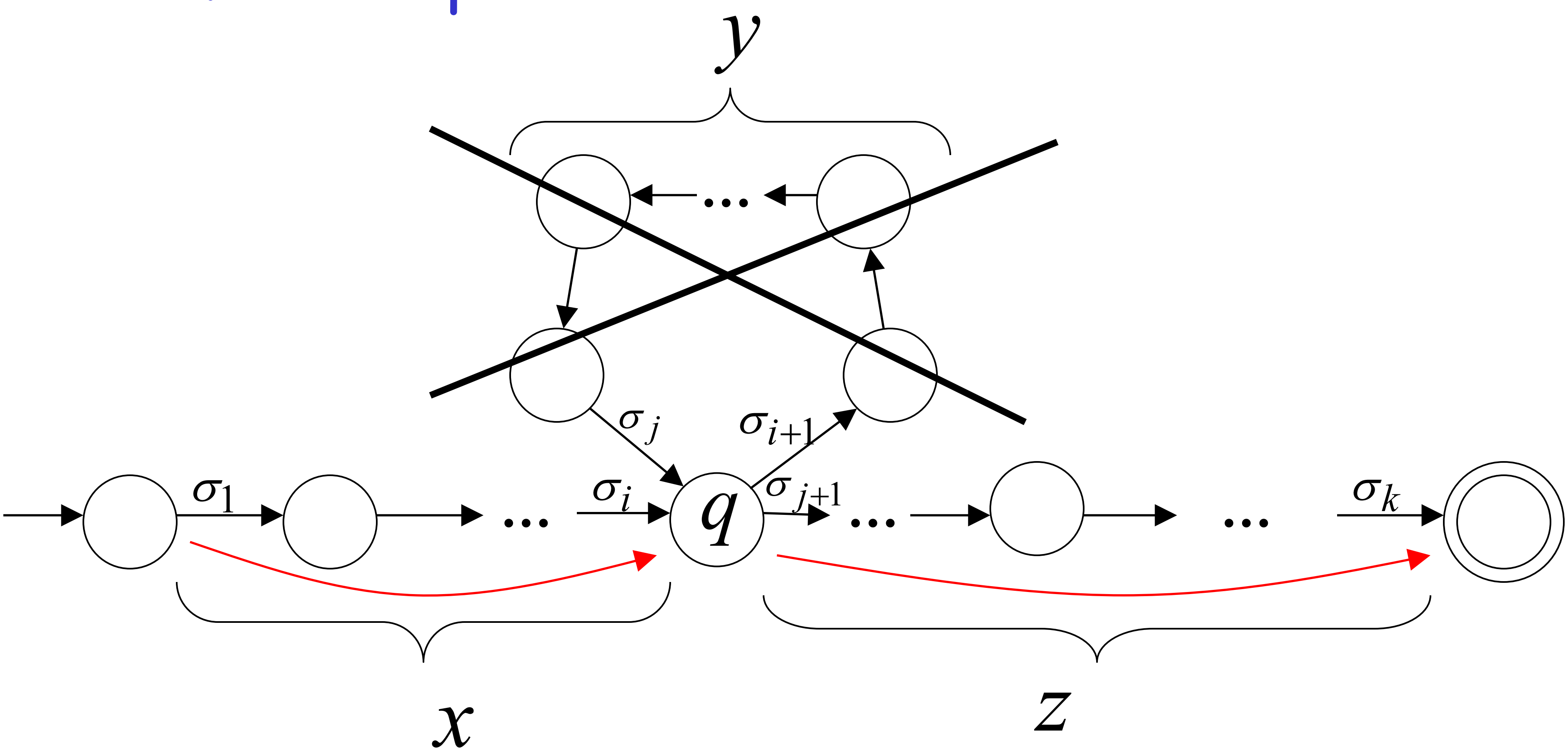
Non badiamo alla forma della stringa z

z può avere pezzi di cammino di x and y



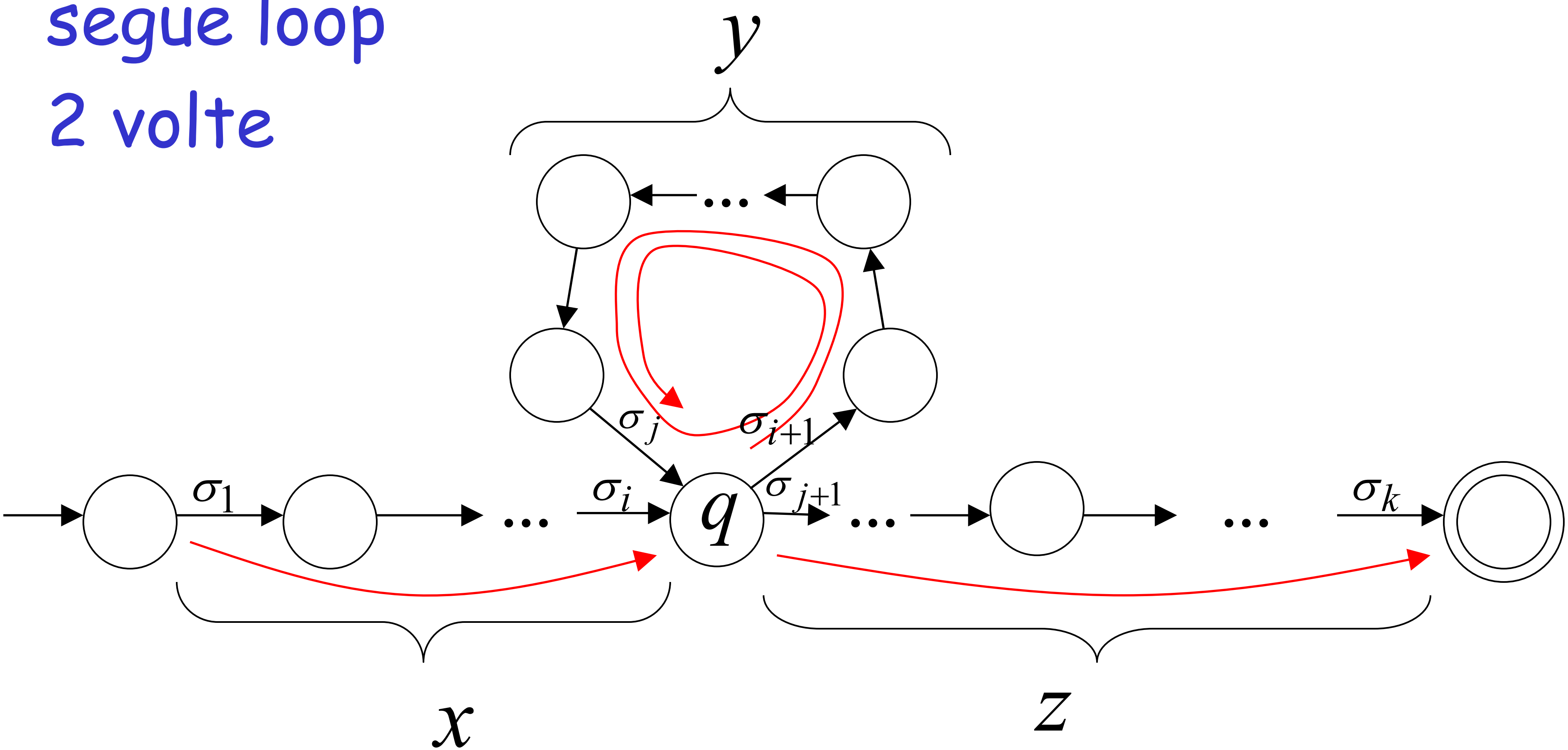
stringa addizionale: la stringa $x\ z$
è accettata

Non fa il loop



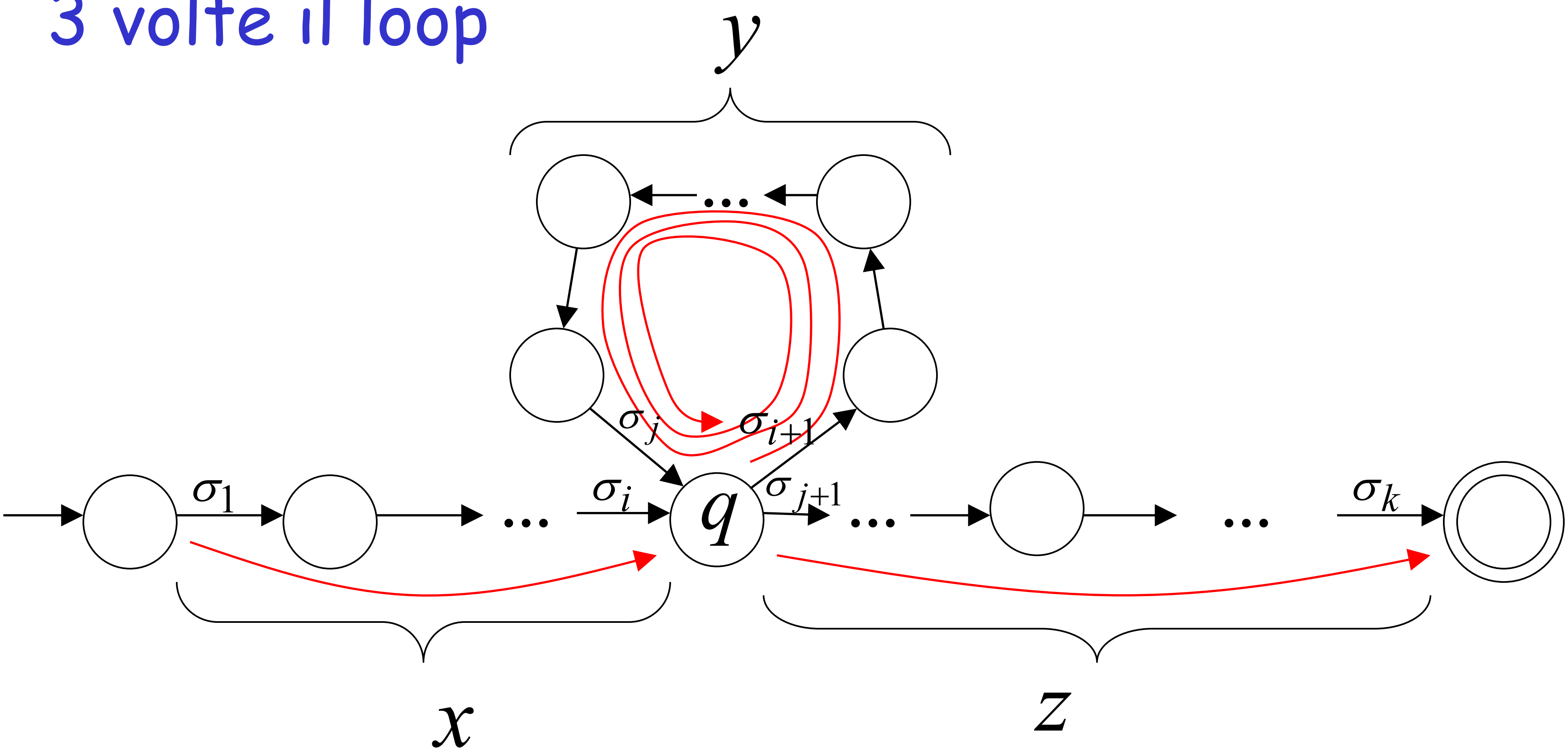
stringa addizionale : la stringa $x\ y\ y\ z$ è accettata

segue loop 2 volte



addizionale stringa: la stringa $x\ y\ y\ y\ z$ è accettata

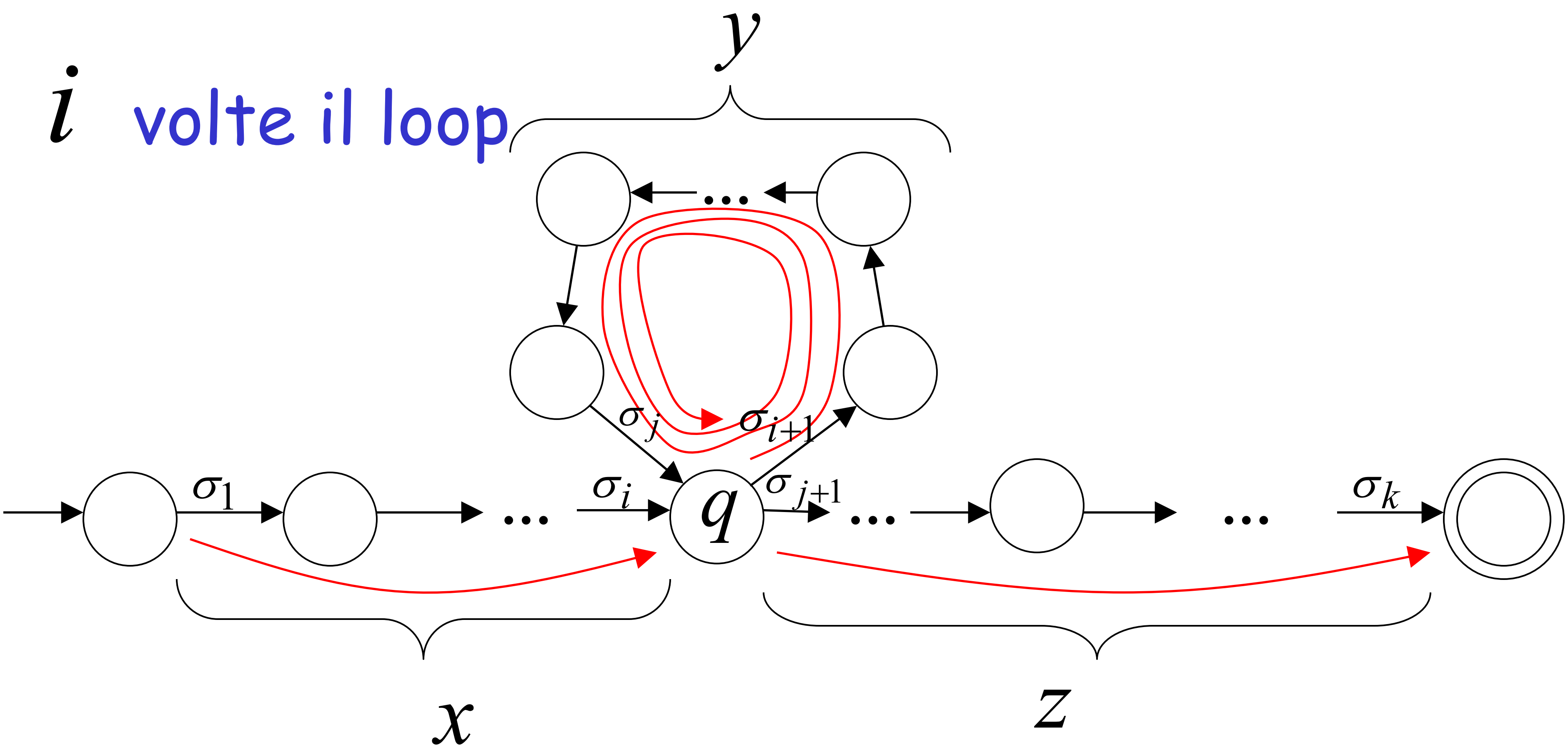
3 volte il loop



In Generale: la stringa $x\, y^i\, z$

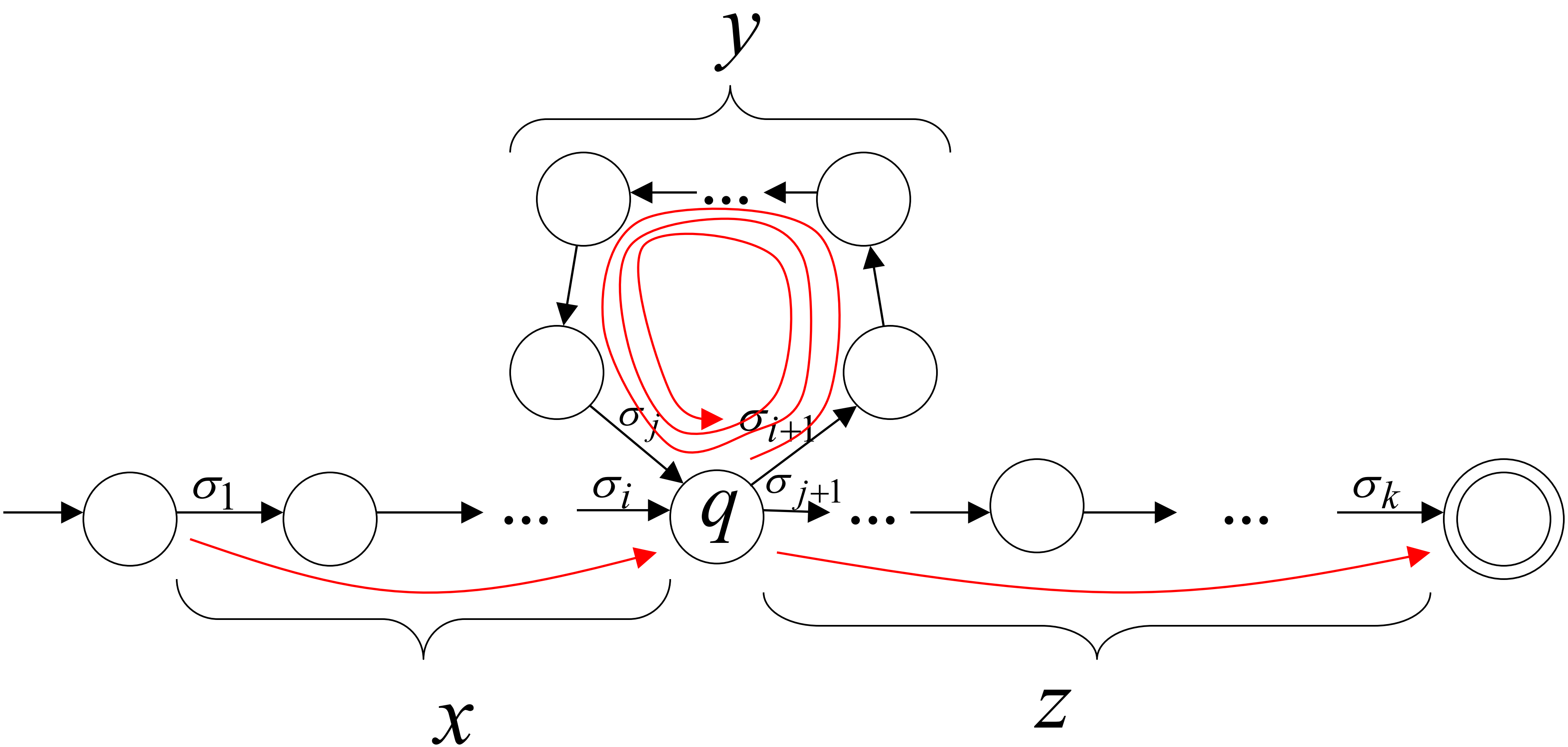
è accettata $i = 0, 1, 2, \ldots$

i volte il loop



quindi: $x\,y^i\,z \in L \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$

linguaggio accettato dal DFa



il Pumping Lemma:

- dato un linguaggio regolare infinito L
- esiste an intero m (lunghezza critica)
- per ogni stringa $w \in L$ con lunghezza $|w| \geq m$
- possiamo scrivere $w = x\, y\, z$
- con $|x\, y| \leq m$ e $|y| \geq 1$
- tale che: $x\, y^i\, z \in L \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

nel libro sipster :

lunghezza Critica = m lunghezza Pumping p

applicazioni applicazioni

del
Pumping Lemma

osservazione:

ogni linguaggio di dimensione finita è regolare

(possiamo facilmente costruire an NFa che accetta ogni stringa nel linguaggio)

quindi, ogni linguaggio non-regolare è di dimensione infinita

(contiene an infinito numero di stringhe)

supponiamo vogliamo provare che
Un linguaggio infinito L non è regolare

1. assumiamo l' opposto: L è regolare

2. il pumping lemma deve valere per L

3. usiamo il pumping lemma per ottenere una contradizione

4. quindi, L non è regolare

Spiegazione Step 3: come avere una contradizione

1. Let m sia la lunghezza critica for L

2. Scegliamo una stringa particolare $w \in L$ che soddisfa la condizione di lunghezza $|w| \geq m$

3. scrivere $w = xyz$

4. mostriamo che $w' = xy^i z \notin L$ Per qualche $i \neq 1$

5. Questo ci dà una contradizione, poichè dal pumping lemma $w' = xy^i z \in L$

Note: È sufficiente mostrare che solo una stringa $w \in L$ genera una contraddizione

Non dobbiamo ottenere contraddizioni per ogni $w \in L$

Esempi di applicazioni del Pumping Lemma

teorema: il linguaggio $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

non è regolare

dim: Usa il Pumping Lemma

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

assumiamo per contradizione
che L è un linguaggio regolare

Since L è infinito
Possiamo applicare il Pumping Lemma

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

sia m la lunghezza critica per L

Prendiamo a stringa w such che: $w \in L$

e lunghezza $|w| \geq m$

$$\boxed{\text{prendiamo } w = a^m b^m}$$

Dal Pumping Lemma:

possiamoscrivere $w = a^m b^m = x\ y\ z$

Con lunghezza $|x\ y| \leq m, \quad |y| \geq 1$

$$w = xyz = a^m b^m = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}a\ldots a}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}$$

$$\text{allora: } y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$$

$$x\ y\ z = a^m b^m \qquad y = a^k,\ \ 1 \le k \le m$$

dal Pumping Lemma:

$$x\ y^i\ z \ \in\ L$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

allora: $x\ y^2\ z \ \in\ L$

$$x\ y\ z = a^m b^m \qquad y = a^k,\ \ 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $$x\ y^2\ z \ \in L$$

$$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a...a}_{x}\underbrace{a...a}_{y}\underbrace{a...a}_{y}\underbrace{a...a}_{z}}^{m+k}\overbrace{b...b}^{m} \in L$$

allora: $a^{m+k}b^m \in L$

aaabbb =xyz

1 caso x=aa y=a z=bbb

aa aa bbb

2 caso x=aaab y=b z=b

aaab bb b

3 caso

x=aa y=ab z=bb

aa ababab bb

$$a^{m+k} b^m \in L \qquad k \geq 1$$

MA: $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

$$\Downarrow$$

$$a^{m+k} b^m \notin L$$

contradizione!!!

quindi: l'assunzione che che L
è un linguaggio regolare
non è vera

Conclusione: L non è un linguaggio regolare

END dim

linguaggio Non-regolare $\{a^n b^n : \quad n \geq 0\}$

Linguaggio regolare

$$L(a^* b^*)$$

a*b*

aayabybb=xyz y=a

aa aa a bbb

aaa bbbbb

y=ab

aaabbbb