applicazioni

del

Pumping Lemma

Gli stati dell'automa , Variabili della grammatica e vale l'opposto.

$\longrightarrow$

Le variabili context free sono gli stati del PDA?

W y Z x K, W yy Z xx K, W yyy Z xxx K

Qualcosa di più complicato dobbiamo considerare sia la variabile che genera la y (Y) e sia la variabile che genera la x (X)

Stato YX ?

Quando ho un linguaggio se «provo» che le parole possono essere scritte

X y_i Y

A* a, aa, aaa,

A*B* due pezzi le A e le B indipendenti

W y_i Z x_i K

A_n B_n no regolare

AA BB non indipendenti

Il Pumping Lemma:

- dato un linguaggio regolare infinito L
- esiste un intero m (lunghezza critica)
- Per ogni stringa $w \in L$ con lunghezza $|w| \geq m$
- possiamo scrivere $w = x\,y\,z$
- con $|x\,y| \leq m$ e $|y| \geq 1$
- tale che: $x\,y^i\,z \in L \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$

Teorema: Il linguaggio

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\} \qquad \Sigma = \{a, b\}$$

non è regolare

Proof: Usiamo il Pumping Lemma

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

assumiamo per contradizione
che L sia un linguaggio regolare

poichè L è infinito
Possiamo applicare il Pumping Lemma

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

sia m la lunghezza critica per L

Prendiamo una stringa w tale che: $w \in L$

con lunghezza

$$|w| \geq m$$

$$\boxed{\text{prendiamo } w = a^m b^m b^m a^m}$$

Dal Pumping Lemma:

Possiamo scrivere: $w = a^m b^m b^m a^m = x\ y\ z$

con lunghezza: $|x\ y| \leq m, \quad |y| \geq 1$

$$w = xyz = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{\ldots a}_{}}^{m}\underbrace{\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{a\ldots a}^{m}}_{z}$$

allora: $y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$

$$x\ y\ z = a^m b^m b^m a^m \qquad y = a^k, \quad 1 \le k \le m$$

dal **Pumping Lemma**:

$$x\ y^i\ z \ \in\ L$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

allora: $x\ y^2\ z \ \in\ L$

$$x\ y\ z = a^m b^m b^m a^m \qquad y = a^k, \quad 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $\quad x\ y^2\ z \ \in\ L$

$$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{y}\ldots a}^{m+k}\underbrace{\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{a\ldots a}^{m}}_{z} \ \square\ L$$

allora: $\quad a^{m+k} b^m b^m a^m \ \in L$

$$a^{m+k}b^m b^m a^m \in L \qquad k \geq 1$$

ma: $$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

$$\Downarrow$$

$$a^{m+k}b^m b^m a^m \notin L$$

CONTRADIZIONE!!!

Considerare i casi
con y tra le b, tra le
a e tra ab.

$$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{y}\ldots a}^{m+k}\underbrace{\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{a\ldots a}^{m}}_{z} \notin L$$

quindi: L'assunzione che L è un linguaggio regolare non è vera

Conclusione: L Non è un linguaggio regolare

END OF PROOF

Teorema: il linguaggio

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \; n, l \geq 0\}$$

non è regolare

Proof: Usiamo il Pumping Lemma

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \ n, l \geq 0\}$$

assumiamo per contradzione
che L sia un linguaggio regolare

poichè L è infinito allora
possiamo applicare il Pumping Lemma

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \ n,l \geq 0\}$$

sia m la lunghezza critica di L

Prendiamo una stringa w tale che: $w \in L$

e lunghezza $|w| \geq m$

$$\boxed{\text{prendiamo } \ w = a^m b^m c^{2m}}$$

Dal Pumping Lemma:

possiamo scrivere $$w = a^m b^m c^{2m} = x\ y\ z$$

con lunghezzas $$|x\ y| \le m, \quad |y| \ge 1$$

$$w = xyz = \overbrace{a...aa...aa...a}^{m}\overbrace{b...b}^{m}\overbrace{c...cc...c}^{2m}$$

$$w = \underbrace{a...a}_{x}\underbrace{a...a}_{y}\underbrace{a...ab...bc...cc...c}_{z}$$

allora: $$y = a^k, \quad 1 \le k \le m$$

$$x\ y\ z = a^m b^m c^{2m} \qquad y = a^k, \quad 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $\quad x\ y^i\ z \ \in L$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

allora: $x\ y^0\ z = xz \ \notin \ L$

$$x\ y\ z = a^m b^m c^{2m} \qquad y = a^k,\ \ 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $xz \in L$

$$xz = \underbrace{\overbrace{a\ldots a}^{}a\ldots a}_{}\ldots$$

$$xz = \underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots ab\ldots bc\ldots cc\ldots c}_{z} \in L$$

$$xz = \overbrace{a\ldots aa\ldots a}^{m-k}\overbrace{b\ldots b}^{m}\overbrace{c\ldots cc\ldots c}^{2m} \in L$$

allora: $a^{m-k} b^m c^{2m} \in L$

$$a^{m-k} b^m c^{2m} \quad \in L \qquad\qquad k \geq 1$$

---

ma:

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : \; n, l \geq 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$a^{m-k} b^m c^{2m} \quad \notin L$$

Contradizione.

Vedere gli altri casi. La y tra le b, tra le c, tra ab, tra bc.

La nostra assunzione che L sia un linguaggio regolare non è vera

Conclusione: L non è un linguaggio regolare

END OF PROOF

Teorema: il linguaggio $L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$

Non è regolare

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$$

dimostrazione: Usiamo il Pumping Lemma

$$L = \{a^{n!} : \ n \geq 0\}$$

assumiamo che L sia un linguaggio regolare

poichè L è infinito

Possiamo applicare il Pumping Lemma

$$L = \{a^{n!}: \ n \geq 0\}$$

sia m la lunghezza critica of L

prendiamo una stringa w tale che: $w \in L$

lunghezza $|w| \geq m$

$\boxed{\text{prendiamo } w = a^{m!}}$

Dal Pumping Lemma:

Possiamo scrivere $\qquad w = a^{m!} = x\ y\ z$

con lunghezza $\qquad |x\, y| \leq m, \quad |y| \geq 1$

$$w = xyz = a^{m!} = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}a\ldots a}^{m}\overbrace{a\ldots aa\ldots a}^{m!-m}$$

where z spans from the third group to the end:

$$w = \underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots aa\ldots aa\ldots a}_{z}$$

allora: $y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$

$$x\ y\ z = a^{m!} \qquad y = a^k, \quad 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $$x\ y^i\ z \in L$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

allora: $x\ y^2\ z \in L$

$$x\ y\ z = a^{m!} \qquad\qquad y = a^k,\quad 1 \le k \le m$$

Dal Pumping Lemma: $\qquad x\ y^2\ z \in L$

$$xy^2z = \overbrace{\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a}_{y}a\ldots a}^{m+k}\overbrace{a\ldots aa\ldots a}^{m!-m} \in L$$

(where z spans $a\ldots aa\ldots aa\ldots a$)

allora: $\qquad a^{m!+k} \in L$

$$a^{m!+k} \in L \qquad 1 \leq k \leq m$$

poichè: $L = \{a^{n!} :\ n \geq 0\}$

$\Downarrow$

Deve esistere p tale che:

$$m!+k = p!$$

ovvero: $m!+k \le m!+m$ per $m>1$

$$\le m!+m!$$

$$< m!m+m!$$

$$= m!(m+1)$$

$$= (m+1)!$$

$$\Downarrow$$

$$m!+k < (m+1)!$$

$$\Downarrow$$

$$m!+k \neq p!$$ Per ogni p

$$a^{m!+k} \in L \qquad 1 \leq k \leq m$$

---

ma: $L = \{a^{n!}: \; n \geq 0\}$

$\Downarrow$

$$a^{m!+k} \notin L$$

contradizione

quindi: La nostra assunzione che L
È un linguaggio regolare
Non è vera

Conclusione: L Non è un linguaggio regolare

END OF PROOF

Applicazioni del Pumping Lemma context free

The Pumping Lemma:

Per un linguaggio infinito context-free L

Esiste un intero m tale che

per ogni stringa $w \in L, \quad |w| \geq m$

possiamo scrivere $\quad w = uvxyz$

Con lunghezze $|vxy| \leq m$ and $|vy| \geq 1$

E deve essere:

$$uv^i xy^i z \in L, \quad \text{for all } i \geq 0$$

m>=
(2_numero delle variabili della grammatica)-1

Perché?

linguaggi Non-context free

$$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\} \qquad \{vv : v \in \{a,b\}\}$$

linguaggi Context-free

$$\{a^n b^n : n \geq 0\} \qquad \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$$

Perché?

Teorema: il linguaggio

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

non è context free

Dim.: Usiamo il Pumping Lemma
Per i linguaggi context-free

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

Assumiamo per assurdo che L

è context-free

poichè L è context-free e infinito

Possiamo applicare il pumping lemma

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

Pumping Lemma ci dà un magico numero m tale che da li in poi due pezzi della stringa si ripetono.

Prendiamo una stringa di L con lunghezza almeno m

sia: $a^m b^m a^m b^m \in L$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

possiamo scrivere: $a^m b^m a^m b^m = uvxyz$

con lunghezze $|vxy| \leq m$ e $|vy| \geq 1$

Pumping Lemma dice:

$uv^i xy^i z \in L$ per tutti $i \geq 0$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Esaminiamo tutti i possibili "posti"

Dove la stringa vxy può essere

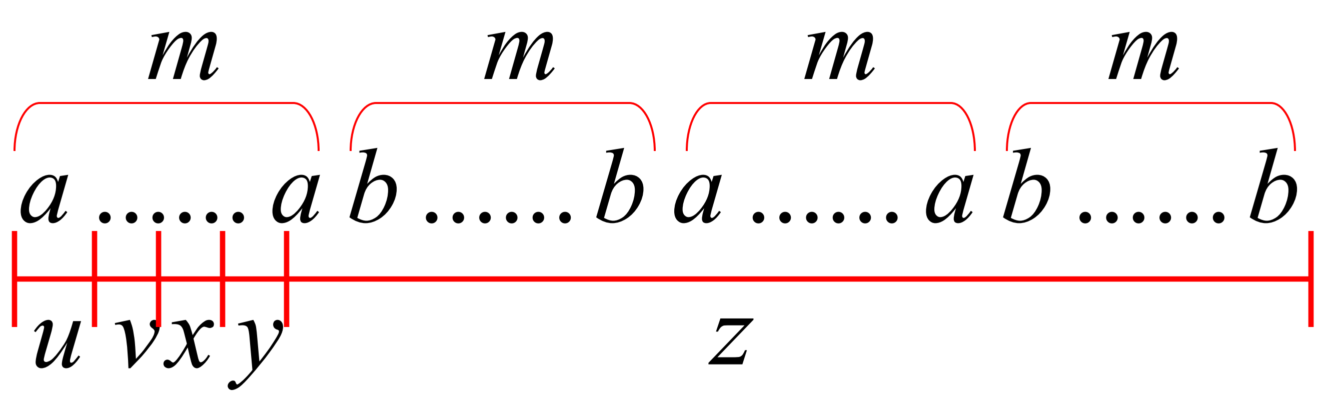
in $a^m b^m a^m b^m$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \le m \qquad |vy| \ge 1$$

Case 1: vxy È nel primo a^m

$$v = a^{k_1} \qquad y = a^{k_2} \qquad k_1 + k_2 \ge 1$$



$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \le m \qquad |vy| \ge 1$$

Case 1: vxy è nel primo a^m

$$v = a^{k_1} \qquad y = a^{k_2} \qquad k_1 + k_2 \ge 1$$

$$\overbrace{a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a}^{m+k_1+k_2}\ \overbrace{b \ldots\ldots b}^{m}\ \overbrace{a \ldots\ldots a}^{m}\ \overbrace{b \ldots\ldots b}^{m}$$

$$u \quad v^2 \quad x \quad y^2 \quad z$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 1: vxy è nel primo a^m

$$a^{m+k_1+k_2} b^m a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

$$k_1 + k_2 \geq 1$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 1: vxy è nel primo a^m

$$a^{m+k_1+k_2} b^m a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

Ma dal pumping lemma abbiamo: $uv^2xy^2z \in L$

Contradizione!!!

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \le m \qquad |vy| \ge 1$$

Case 2: v È nel primo a^m
y È nel primo b^m

$$v = a^{k_1} \qquad y = b^{k_2} \qquad k_1 + k_2 \ge 1$$

$$\overbrace{a\ldots\ldots a}^{m}\;\overbrace{b\ldots\ldots b}^{m}\;\overbrace{a\ldots\ldots a}^{m}\;\overbrace{b\ldots\ldots b}^{m}$$

$$u \quad v \quad x \quad y \quad z$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 2: v è nel primo a^m

y è nel primo b^m

$$v = a^{k_1} \qquad y = b^{k_2} \qquad k_1 + k_2 \geq 1$$

$$\overbrace{a \ldots\ldots\ldots\ldots a}^{m+k_1}\ \overbrace{b \ldots\ldots\ldots\ldots b}^{m+k_2}\ \overbrace{a \ldots\ldots a}^{m}\ \overbrace{b \ldots\ldots b}^{m}$$

$$u \qquad v^2 \qquad x \qquad y^2 \qquad z$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 2: v è nel primo a^m

y è nel primo b^m

$$a^{m+k_1} b^{m+k_2} a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

$$k_1 + k_2 \geq 1$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 2: v È nel primo a^m
y È nel primo b^m

$$a^{m+k_1} b^{m+k_2} a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

Dal Pumping Lemma: $uv^2xy^2z \in L$

Contradizione!!!

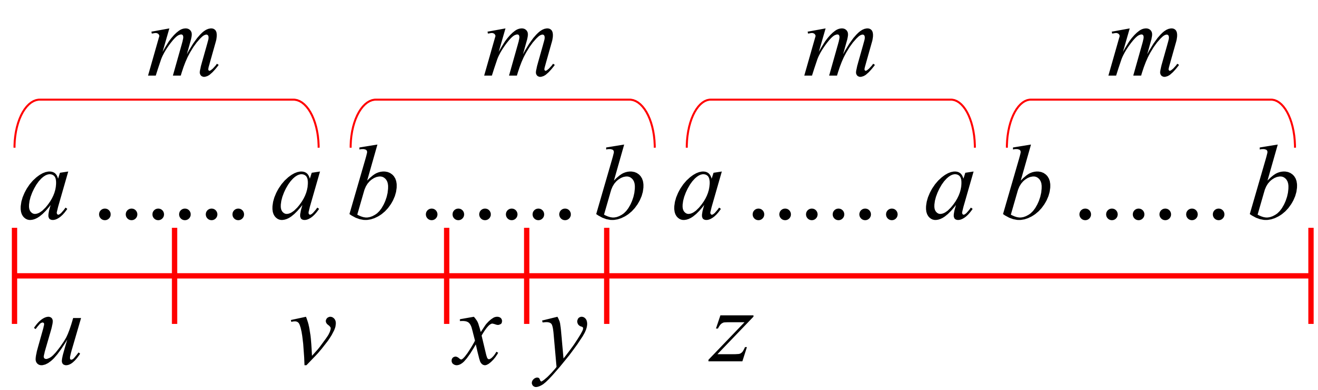
$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 3: v Sovrappone sul primo $a^m b^m$

y È nel primo b^m

$$v = a^{k_1} b^{k_2} \qquad y = b^{k_3} \qquad k_1, k_2 \geq 1$$



$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \le m \qquad |vy| \ge 1$$

Case 3: v Sovrappone sul primo $a^m b^m$
y è nel primo b^m

$$v = a^{k_1} b^{k_2} \qquad y = b^{k_3} \qquad k_1, k_2 \ge 1$$

$$\underbrace{\overbrace{a \ldots\ldots a}^{m}}_{u} \ \overbrace{b \ldots b}^{k_2} \ \overbrace{a \ldots a}^{k_1} \ \overbrace{b \ldots\ldots\ldots b}^{m+k_3} \ \overbrace{a \ldots\ldots a}^{m} \ \overbrace{b \ldots\ldots b}^{m}$$

$$u \qquad v^2 \qquad x \qquad y^2 \qquad z$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 3: v Sovrappone sul primo $a^m b^m$

y È nel primo b^m

$$a^m b^{k_2} a^{k_1} b^{m+k_3} a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

$$k_1, k_2 \geq 1$$

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 3: v Sovrappone sul primo $a^m b^m$

y È nel primo b^m

$$a^m b^{k_2} a^{k_1} b^{k_3} a^m b^m = uv^2xy^2z \quad \notin L$$

dal Pumping Lemma: $uv^2xy^2z \in L$

assurdo!!!

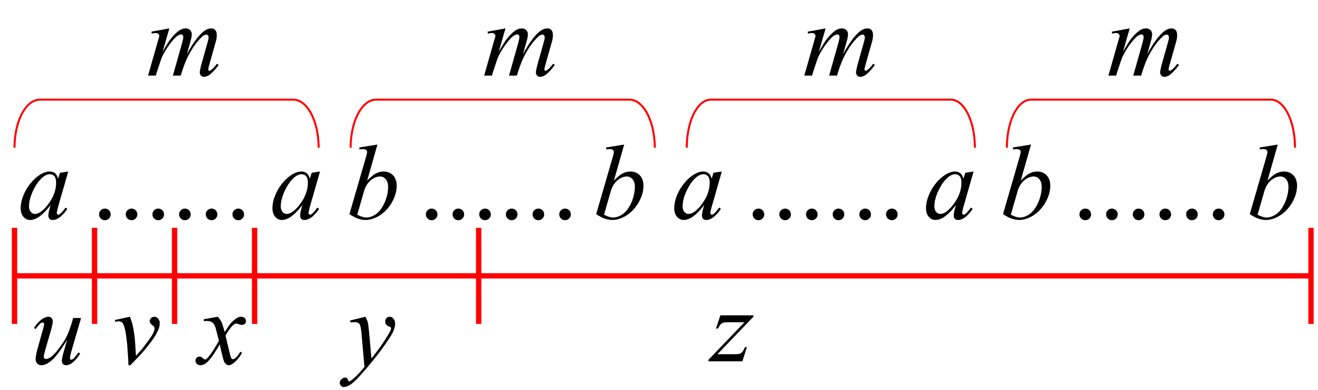
$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

$$a^m b^m a^m b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Case 4: v È nel primo a^m

y Sovrappone $a^m b^m$

Analisi simile al caso 3



Altri casi: vxy È dentro $a^m \boxed{b^m} a^m b^m$

or

$a^m b^m \boxed{a^m} b^m$

or

$a^m b^m a^m \boxed{b^m}$

Analisi simile al caso 1:

$$\boxed{a^m} b^m a^m b^m$$

Altri casi:

vxy sovrappone $a^m \boxed{b^m a^m} b^m$

or

$a^m b^m \boxed{a^m b^m}$

Analisi simile ai casi 2,3,4:

$\boxed{a^m b^m} a^m b^m$

Vi sono altri casi da considerare

Poichè $|vxy| \leq m$, è impossibile vxy

Sovrapporre a

$$\boxed{a^m b^m a^m} b^m$$

O, esclusivo

$$a^m \boxed{b^m a^m b^m}$$

O, esclusivo

$$\boxed{a^m b^m a^m b^m}$$

In tutti i casi raggiungiamo un assurdo

quindi: Il punto di partenza che

$$L = \{vv : v \in \{a,b\}^*\}$$

è context-free è sbagliato

Conclusione: L Non è context-free

Linguaggi Non-context free

$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$

$\{ww : w \in \{a,b\}\}$

$\{a^{n!} : n \geq 0\}$

linguaggi Context-free

$\{a^n b^n : n \geq 0\}$

$\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

linguaggi Non-context free

$$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$$

$$\{ww : w \in \{a,b\}\}$$

$$\{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

$$\{a^{n!} : n \geq 0\}$$

linguaggi Context-free

$$\{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$$

Teorema: il linguaggio

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

non è context free

Dim: Usiamo il Pumping Lemma per linguaggi context-free

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

assumiamo per assurdo che L

è context-free

poichè L è context-free ed è infinito

possiamo applicare il pumping lemma

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

Pumping Lemma ci da m

Prendiamo una stringa di L

Con lunghezza almeno m

sia: $a^{m^2} b^m \in L$

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

Prendiamo m: $a^{m^2} b^m = uvxyz$

con lunghezze $|vxy| \leq m$ e $|vy| \geq 1$

Pumping Lemma dice:

$uv^i xy^i z \in L$ Per tutte le $i \geq 0$

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

$$a^{m^2} b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Esaminiamo tutte le possibili posizioni

Della stringa vxy in $a^{m^2} b^m$

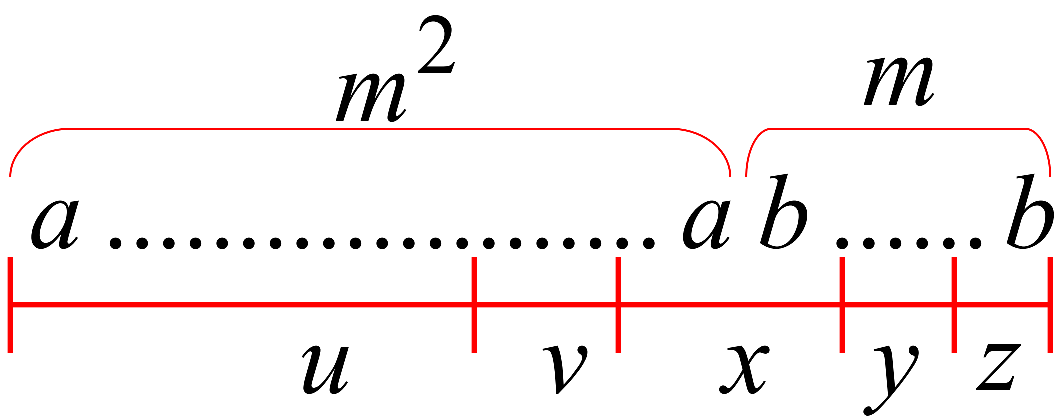
$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

$$a^{m^2} b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Caso interessante: v è in a^m

y è in b^m

sia $v = a^{k_1}$ $y = b^{k_2}$ con $1 \leq k_1 + k_2 \leq m$



$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

$$a^{m^2} b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Sotto caso in cui: $v = a^{k_1} \quad y = b^{k_2}$

Con $1 \leq k_1 + k_2 \leq m$

Sia i=0

abbiamo:

$$\overbrace{a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a}^{m^2 - k_1}\;\overbrace{b \ldots b}^{m - k_2}$$

$$u \quad v^0 \quad x \quad y^0 \quad z$$

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

$$a^{m^2} b^m = uvxyz \qquad |vxy| \leq m \qquad |vy| \geq 1$$

Sia i=0:

$$v = a^{k_1} \qquad y = b^{k_2} \qquad 1 \leq k_1 + k_2 \leq m$$

$$a^{m^2 - k_1} b^{m - k_2} = uv^0 xy^0 z$$

Vediamo il rapporto tra il numero di a e di b quando i=0

$$(m-k_2)^2 \le (m-1)^2$$

$$= m^2 - 2m + 1$$

$$< m^2 - k_1$$

$$\Downarrow$$

$$m^2 - k_1 \ne (m-k_2)^2$$

$$m^2 - k_1 \neq (m - k_2)^2$$

$$\Downarrow$$

$$a^{m^2 - k_1} b^{m - k_2} = uv^0xy^0z \quad \notin L$$

Ma via PL:

$$uv^0xy^0z \quad \in L$$

assurdo!!!

Casi

Caso 1. v e y sono una serie di a, quindi pumping v e y aumentano le a ma non le b

Caso 2. v e y sono una serie di b, quindi pumping v e y aumentano le b ma non le a.

Caso 3 (interessante) visto prima

v è una serie di a e y è una serie di b.

Si potrebbe pensare che crescono secondo le regole del linguaggio. Ma le a dovrebbero crescere rispetto alle brispettando il fatto che le tutte le a sono di lunghezza quadratic rispetto al numero delle b. Questo non è possibile Perche le v, quindi le a, crescono linearmente (allo stesso modo) delle y , ovvero delle b.

dal Pumping Lemma: $uv^0xy^0z \in L$

$$uv^0xy^0z \in L$$

$$a^{m^2-k_1}b^{m-k_2} = uv^0xy^0z \notin L$$

In tutti i casi otteniamo un assurdo

quindi: L'assunzione che

$$L = \{a^{n^2} b^n : n \geq 0\}$$

è context-free è sbagliata

Conclusion: L Non è context-free