Vari modelli

Lezioni tratte dal gambosi etc, vai su ada.

Macchine di Turing Multitraccia

Definizione Una macchina di Turing multitraccia $\mathcal{M}$ ad m tracce è definita come una 6-upla

$$\Sigma, \not{b}, K, \delta, q_0, q_f$$

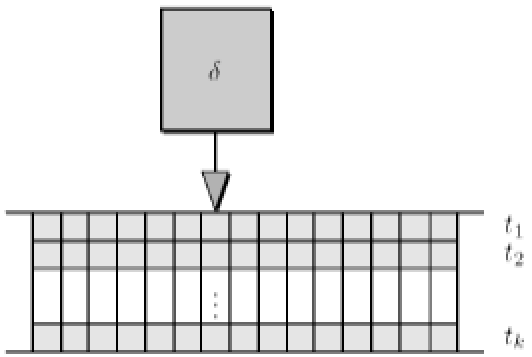
ove la fuzione δ è definita come

$$\delta_m : (K - \{q_f\}) \times \Sigma_{\not{b}}^m \rightarrow K \times \Sigma_{\not{b}}^m \times \{d, s, i\}$$

Quindi, una macchina di Turing multitraccia è in grado di scrivere e leggere caratteri **vettoriali** ma la testina si sposta contemporaneamente su tutte le tracce.

Da un punto di vista fisico si può immaginare di avere una macchina composta da un nastro suddiviso in m tracce ed una singola testina.

L'uso di MT-multitraccia permette di avere maggior potere computazionale?



Macchine di Turing Multi-traccia

Una macchina di Turing **multi-traccia** consiste di un nastro suddiviso in **tracce** disposte in modo tale che la testina, con una singola operazione può accedere a tutte le celle di tutte le tracce in corrispondenza della testina.

Possiamo considerare la macchina multi-traccia come una macchina che anzichè operare su **simboli scalari** opera su **simboli vettoriali**.

Data una macchine di turing $\mathcal{M}_m = (\Sigma, \not{b}, K, \delta^m, q_0, q_f)$ multitraccia con m tracce si ha che:

- l'alfabeto $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_m$, ove ogni Σ_i rappresenta l'alfabeto di simboli della traccia i.

  Quindi un generico elemento (carattere) $\sigma \in \Sigma$ sarà del tipo: $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, $1 \leq i \leq m$ $\sigma_i \in \Sigma_i$.

  In particolare il simbolo $\underbrace{(\not{b}, \ldots, \not{b})}_{m}$ rappresenta il simbolo di blank dell'alfabeto $\Sigma_{\not{b}}$.

  Poichè ogni elemento di Σ_i può essere combinato con gli altri elementi di Σ_j, per ogni $j \neq i$, il numero di caratteri $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ diversi che potranno comparire sul nastro saranno: $|\Sigma| = \prod_{i=1}^{m} |\Sigma_i|$.

- la funzione di transizione δ^m sarà una funzione del tipo:

$$\delta^m : (K - \{q_f\}) \times \Sigma_{\not{b}} \rightarrow K \times \Sigma_{\not{b}} \times \{d, s, i\}, \quad \delta^m(q_i, \sigma) = (q_j, \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in \Sigma_{\not{b}}$$

Equivalenza MT-multi-traccia e MT-singola-traccia

Teorema Una Macchine di Turing singolo nastro multi-traccia $\mathcal{M}^m$ con m tracce può essere simulata da una macchina di Turing singolo nastro mono-traccia $\mathcal{M}$.

Dimostrazione Sia $\mathcal{M}^m = (\Sigma, ḃ, K, \delta^m, q_0, q_f)$ la macchina di Turing multitraccia, ove $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_m$. Si definisca una MT singola traccia $\mathcal{M} = (\Lambda, ḃ, K', \delta, q_0', q_f')$ tale che:

$$|\Lambda| = |\Sigma_1| \times \ldots \times |\Sigma_m|$$

cioè, la cardinalità dell'alfabeto Λ è pari al prodotto delle cardinalità degli alfabeti delle singole tracce.

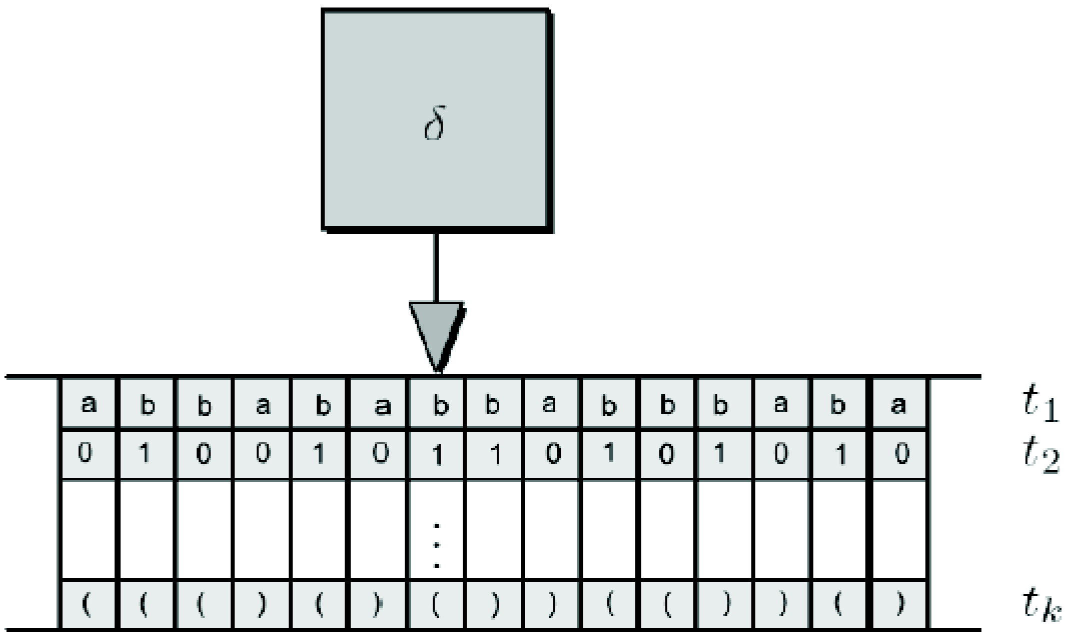
Si definisca inoltre, una funzione **iniettiva** $\varphi : \Sigma \to \Lambda$ che associ ad ogni simbolo di Σ un simbolo di Λ (poichè $|\Lambda| \geq |\Sigma|$ è possibile definire una tale funzione).

La funzione di transizione δ sarà definita in modo tale che in corrispondenza di una transizione $\delta^m(q_i, \sigma) = (q_j, \sigma', v)$ della macchina $\mathcal{M}^m$, la macchina $\mathcal{M}$ esegua la transizione:

$$\delta(q_i, \lambda) = (q_j, \lambda', v), \quad \lambda = \varphi(\sigma), \quad \lambda' = \varphi(\sigma')$$

L'alfabeto su cui opera la macchina singola traccia $\mathcal{M}$ è un alfabeto in cui ogni simbolo rappresenta la **codifica** di un vettore di simboli dell'alfabeto della macchina multi-traccia $\mathcal{M}^m$.

Equivalenza MT-multi-traccia e MT-singola-traccia



La testina della macchina di Turing multi-traccia punta al carattere $\sigma = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ (\end{bmatrix}$

Macchine di Turing Multinastro

Definizione Una macchina di Turing ad m nastri è definita da una 6-upla

$$\Sigma, \not{b}, K, \delta_m, q_0, q_f$$

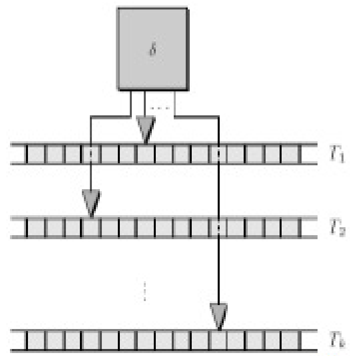
ove $\Sigma, \not{b}, K, q_0, q_f$ sono definiti come nel caso di una machina di Turing a singolo nastro e δ_m è la funzione di transizione definita come:

$$\delta_m : (K - \{q_f\}) \times \Sigma_{\not{b}}^m \rightarrow K \times \Sigma_{\not{b}}^m \times \{d, s, i\}^m$$

cioè la funzione δ_m definisce le transizione della MT su ogni nastro.

Da un punto di vista fisico si può immaginare di avere una macchina composta da m nastri ed m testine, una per ogni nastro.

L'uso di MTM permette di avere un maggior potere computazionale ?



16

Equivalenza MT-Multinastro e MT-singolo-nastro

$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\downarrow$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_1
$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	a	b	b	a	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_2
$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\downarrow$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_3
$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	b	a	b	c	b	$\bar{b}$	$\cdots$	t_4
$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\downarrow$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_5
$\cdots$	$\bar{b}$	d	e	d	d	e	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cdots$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\downarrow$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_{2k-1}
$\cdots$	f	f	g	h	g	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\cdots$	t_{2k}

ure 1: Macchina di Turing singolo nastro multitraccia che simula una Macchina di Turing multinastro

Equivalenza MT-Multinastro e MT-singolo-nastro

Teorema Sia data una macchina di Turing $\mathcal{M}^{(k)}$ con k nastri, allora esiste una macchina di Turing $\mathcal{M}$ a singolo nastro che la simula.

Dimostrazione Sia $\mathcal{M}^{(k)}$ la MT multi nastro così definita $\mathcal{M}^{(k)} = (\Sigma, \flat, K, q_0, F, \delta)$ ove supponiamo per ogni nastro i, $1 \leq i \leq k$ che l'alfabeto usato sia Σ_i.

Costruiamo una MT singolo nastro, avente $2k$ tracce, definita nel seguente modo:

$$\mathcal{M}' = (\Sigma', \flat, K', q_0', F', \delta')$$

ove l'alfabeto Σ' è definito come:

$$\Sigma' = \{\flat, \downarrow\} \times \Sigma_1 \times \ldots \{\flat, \downarrow\} \times \Sigma_k$$

cioè, è composto di k coppie di simboli (λ_i, σ_i) di cui $\lambda_i \in \{\flat, \downarrow\}$ e $\sigma_i \in \Sigma_i$ per ogni $1 \leq i \leq k$.

Il nastro di $\mathcal{M}'$ risulta allora composto nel seguente modo:

- $\forall i, 1 \leq i \leq k$, la traccia pari di indice $2i$ contiene la stringa presente sul nastro di indice i
- $\forall i, 1 \leq i \leq k$, la traccia dispari di indice $2i - 1$ contiene una stringa composta del solo simbolo $\downarrow$ rappresentante la posizione della testina del nastro di indice i

Equivalenza MT-Multinastro e MT-singolo-nastro

$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\downarrow$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_1
$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	a	b	b	a	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_2
$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\downarrow$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_3
$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	b	a	b	c	b	ƀ	$\cdots$	t_4
$\cdots$	ƀ	ƀ	$\downarrow$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_5
$\cdots$	ƀ	d	e	d	d	e	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\downarrow$	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_{2k-1}
$\cdots$	f	f	g	h	g	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	t_{2k}

ure 1: Macchina di Turing singolo nastro multitraccia che simula una Macchina di Turing multinastro

All'inizio della computazione supponiamo che il nastro di $\mathcal{M}'$ sia configurato nel seguente modo:

- la traccia 1 contiene una stringa con il solo simbolo $\downarrow$ in corrispondenza del primo carattere a sinistra della traccia 2
- la traccia 2 contiene la stringa di input della macchina $\mathcal{M}^{(k)}$
- $\forall i, 2 \leq i \leq k$ le tracce pari di indice $2i$ contengono solamente il simbolo $\not{b}$
- $\forall i, 2 \leq i \leq k$ le tracce dispari di indice $2i-1$ contengono solamente il simbolo $\downarrow$ in corrispondenza del simbolo più a sinistra della traccia 2, cioè quella contenente la stringa di input della macchina multi-traccia $\mathcal{M}^{(k)}$

Per simulare la funzione di transizione di $\delta^{(k)}$ della MT multi-nastro $\mathcal{M}'$, la funzione di transizione δ' deve riscrivere $2k$ simboli, uno per traccia. Quindi, in particolare, per simulare una transizione del tipo:

$$\delta^{(k)}(q_i, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = (q_j, a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}, d_1, \ldots, d_k)$$

deve eseguire i seguenti passi:

1. rintracciare le posizione dei k simboli $\downarrow$ rappresentanti le posizione delle k testine della macchina $\mathcal{M}^{(k)}$ nello stato q_i
2. riscrivere i k simboli puntati dalle testine dei k nastri
3. posizionare i k simboli $\downarrow$ nella posizione delle testine della macchine $\mathcal{M}^{(k)}$nello stato q_j
4. transire di stato

Quindi ad ogni passo di $\mathcal{M}^{(k)}$, la macchina $\mathcal{M}'$ deve eseguire un numero di passi proporzionale alla distanza, in termini di numero di celle, tra i due simboli $\downarrow$ più lontani.

Ad ogni passo i simboli $\downarrow$ possono al più allontanarsi di 2 celle, quindi dopo t passi, nel caso pessimo, si saranno allontanati di $2t$ celle.

Quindi se la macchina multi-nastro $\mathcal{M}^{(k)}$ compie t passi, il numero di passi eseguiti dalla macchina singolo-nastro $\mathcal{M}'$ per simularla sarà:

$$\Sigma_{i=1}^{t} 2i = 2\Sigma_{i=1}^{t} i = 2\frac{t(t+1)}{2} = t^2 + t = \mathcal{O}(t^2)$$

Per quanto riguarda la dimensione dell'alfabeto Σ', osserviamo che quella dell'alfabeto dei nastri dispari è 2, mentre quella dei nastri pari, per ogni nastro i è $|\Sigma_i|$.

Quindi, la dimensione dell'alfabeto Σ' usato da $\mathcal{M}'$ sarà pari al prodotto di tutte le cardinalità degli alfabeti dei singoli nastri:

$$\prod_{i=1}^{k} 2|\Sigma_i| = \mathcal{O}((\max|\Sigma_i|)^k)$$

Quindi una MT multinastro può essere simulata da una MT singolo-nastro multi-traccia in un tempo quadratico usando un alfabeto di cardinalità esponenziale nel numero dei nastri.

Macchine di Turing NON Deterministiche

Esempio: Definire una macchina di Turing non deterministica che riconosca le stringhe del tipo $x$aa con $x \in \{a,b\}^*$.

Sia $\mathcal{M}$ la macchina di Turing non-deterministica definita nel seguente modo:

$$\mathcal{M} = (\{a, b\}, \not b, \{q_0, q_1\}, \delta, q_0, q_f)$$

ove la funzione δ è definita dalla seguente matrice:

δ	a	b	$\not b$
q_0	$(q_0, a, d), (q_1, a, d)$	(q_0, b, d)	$-$
q_1	(q_2, a, d)	$-$	$-$
q_2	$-$	$-$	$(q_f, \not b, i)$

Esercizio: scrivere la computazione sulla stringa abbabaa.

Macchine di Turing NON Deterministiche

Una macchina di Turing **non deterministica** è definita da 6-upla:

$$\mathcal{M} = (\Sigma, \not{b}, K, \delta, q_0, q_f)$$

ove la funzione di transizione δ è definita nel seguente modo:

$$\delta : (K - \{q_f\}) \times \Sigma_{\not{b}} \rightarrow \mathcal{P}(K \times \Sigma_{\not{b}} \times \{d, s, i\})$$

cioè da ogni configurazione si può transire in una o più configurazione simultaneamente.

La configurazione successiva **non è univocamente determinata** e la computazione non è più una successione di configurazioni ma secondo un albero di configurazioni.

Il **grado di non determinismo** corrisponde, dato una generica configurazione, al massimo numero di confgurazioni generate dalla funzione δ.

Una MT non deterministica si comporta come se ad ogni passo instanziasse nuove MT, ognuna delle quali elabora una delle configurazione diverse prodotte dalla funzione di transizione δ.

Equivalenza MTND e MT deterministiche

Teorema Per ogni MTND $\mathcal{M}$ esiste una MT deterministica $\mathcal{M}^{(3)}$ deterministica a 3 nastri equivalente.

Dimostrazione La simulazione della macchine di Turing non deterministica $\mathcal{M}$ tramite una deterministica $\mathcal{M}^{(3)}$ si ottiene visitando l'albero delle computazione di $\mathcal{M}$ utilizzando l'algoritmo di visita **breadth first**.

> NB: la visita **non** può essere fatta in modo **depth first** poichè visitando un ramo corrispondente ad una computazione **infinita**, l'algoritmo di visita non terminerebbe.

Ad ogni passo di computazione di $\mathcal{M}$ si possono generare al massimo d scelte, ove d è il grado di non determinismo della macchina $\mathcal{M}$.

Supponiamo di numerare con numeri compresi tra 1 e d le scelte derivanti dalla funzione di transizione di $\mathcal{M}$.

In tal modo ogni computazione potrà essere identificata come una sequenza di numeri compresi tra 1 e d, ognuno dei quali identifica una delle possibili d scelte generate dalla funzione di transizione di $\mathcal{M}$.

Non tutte le combinazioni saranno valide poichè non è detto che ad ogni passo la funzione di transizione generi esattamente d scelte.

Dopo i passi di computazione della macchina $\mathcal{M}$, quindi esistono al più d^i stringhe di lunghezza i che rappresentano particolari computazioni di $\mathcal{M}$.

Si supponga quindi di organizzare la macchina $\mathcal{M}^{(3)}$ nel seguente modo:

- il primo nastro contiene la stringa di input
- il secondo nastro contiene, per ogni passo di computazione i di $\mathcal{M}$, stringhe di lunghezza i, corrispondenti a sequenze di numeri compresi tra 1 e d. Fissato i il numero di stringhe sarà al più d^i.
- il terzo nastro eseguirà la simulazione vera e propria

La simulazione avviene secondo il seguente algoritmo:

1. $\forall i \geq 1$ passo di computazione di $\mathcal{M}$, si generano sul nastro 2 tutte le stringhe di lunghezza i, corrispondenti a possibili sequenze di scelte per computazioni di lunghezza i. La generazione delle stringhe avviene una alla volta.
2. per ogni sequenza di lunghezza i:
   (a) si copia il contenuto del nastro 1 sul nastro 3
   (b) si scandisce il nastro 2, e per ogni j, indice di una possibile scelta, si applica la j-esima scelta di δ al nastro 3

Se esiste un cammino di lunghezza l che porta la macchina $\mathcal{M}$ in uno stato finale, allora esiste sicuramente una fase di calcolo di $\mathcal{M}^{(3)}$ che percorre tale cammino.

Se viceversa tale cammino non esiste allora anche $\mathcal{M}^{(3)}$ non raggiungerà mai lo stato finale.

Ad ogni passo j della computazione di $\mathcal{M}$, la MT $\mathcal{M}^{(3)}$ compie un numero di passi pari alla lunghezza del cammino (j) per il numero dei cammini (d^j), ovvero:

$$j \cdot d^j$$

Se la macchina $\mathcal{M}$ termina in $k \geq 0$ passi, allora la macchina $\mathcal{M}^{(3)}$ esegue al più un numero di passi pari a:

$$\Sigma_{j=1}^{k} j \cdot d^j \in \mathcal{O}(kd^k)$$

Quindi una MTND può essere simulata da una MT deterministica multi-nastro in un tempo esponenziale nel numero dei passi della macchine non deterministica.