

Linguaggi

Linguaggio: un insieme di stringhe

Stringa: una sequenza di simboli da un alfabeto

Esempio:

Stringhe: gatto, cane, casa

Linguaggio: {gatto, cane, casa}

Alfabeto: $\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}$

Linguaggi sono usati per descrivere
problemi di calcolo:

$$PRIMI = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

$$Pari = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

Alfabeto: $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Alfabeti e Stringe

Un alfabeto è un insieme di simboli

Esempio Alfabeto: $\Sigma = \{a, b\}$

Una stringa è una sequenza di simboli da un alfabeto

Esempio Stringhe

a

ab

abba

aaabbbbaabab

u = ab

v = bbbbaaa

w = abba

Alfabeto dei numeri decimali

$$\Sigma = \{0,1,2,\dots,9\}$$

102345

567463386

Alfabeto dei numeri binari $\Sigma = \{0,1\}$

100010001

101101111

Alfabeto dei numeri unari $\Sigma = \{1\}$

Numeri unari : 11 111 1111 11111

Numeri decimali: 1 2 3 4

Zero?

Operazioni su stringhe

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

abba

$$v = b_1 b_2 \cdots b_m$$

bbbbaaa

Concatenazione

$$wv = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

abbabbbbaaa

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

ababaaaabbb

Inverso

$$w^R = a_n \cdots a_2 a_1$$

bbbaaababab

Lunghezza di una stringa

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n$$

Lunghezza: $|w| = n$

Esempi: $|abba| = 4$

$$|aa| = 2$$

$$|a| = 1$$

Lunghezza della concatenazione

$$|uv| = |u| + |v|$$

Esempio: $u = aab, |u| = 3$
 $v = abaab, |v| = 5$

$$|uv| = |aababaab| = 8$$

$$|uv| = |u| + |v| = 3 + 5 = 8$$

Stringa vuota

Una stringa con nessuna lettera è denotata:

$$\lambda \text{ o } \varepsilon$$

Osservazione:

$$|\lambda| = 0$$

$$\lambda w = w\lambda = w$$

$$\lambda abba = abba\lambda = ab\lambda ba = abba$$

Sottosstringa

Sottosstringa di una stringa:

Una sequenza consecutiva di caratteri:

Stringa

Sottosstringa

abbbab

ab

abbab

abba

ab**b**ab

b

ab**ba**b

bbab

Prefisso e Suffisso

abbab

Prefisso

Suffisso

λ

abbab

a

bbab

ab

bab

abb

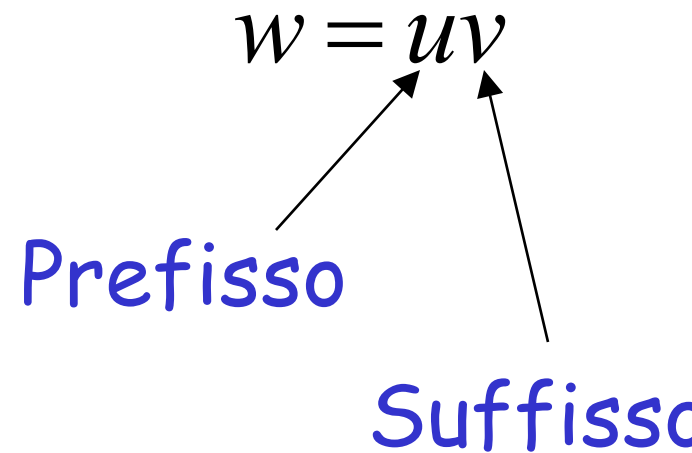
ab

abba

b

abbab

λ



Altre operazioni

$$w^n = \underbrace{ww \cdots w}_n$$

Esempio: $(abba)^2 = abbaabba$

Definizione: $w^0 = \lambda$

$$(abba)^0 = \lambda$$

L'operazione *

Σ^* : L'insieme di tutte le possibili stringe che è possibile generare a partire dall'alfabeto

Σ

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

L'operazione +

Σ^+ : L'insieme di tutte le possibili stringhe che è possibile generare a partire dall'alfabeto Σ eccetto λ

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \lambda$$

$$\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

Linguaggi. estensionali

Un linguaggio su un alfabeto Σ

È un qualsiasi sottoinsieme di Σ^*

Esempio:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$$

linguaggio : $\{\lambda\}$

linguaggio : $\{a, aa, aab\}$

linguaggio : $\{\lambda, abba, baba, aa, ab, aaaaaa\}$

Esempi di linguaggi

Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

Un linguaggio infinito $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

λ
 ab
 $aabb$
 $aaaaabbbbbb$

} $\in L$ $abb \notin L$

Numeri primi

alfabeto $\Sigma = \{0,1,2,\dots,9\}$

Linguaggio:

$PRIMES = \{x : x \in \Sigma^* \text{ and } x \text{ is prime}\}$

$PRIMES = \{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$

Numeri pari e dispari

alfabeto $\Sigma = \{0,1,2,\dots,9\}$

$$EVEN = \{x : x \in \Sigma^* \text{ e } x \text{ è pari}\}$$

$$EVEN = \{0,2,4,6,\dots\}$$

$$ODD = \{x : x \in \Sigma^* \text{ e } x \text{ è dispari}\}$$

$$ODD = \{1,3,5,7,\dots\}$$

Somma unaria

alfabeto: $\Sigma = \{1, +, =\}$

Linguaggio:

$$ADDITION = \{x + y = z : x = 1^n, y = 1^m, z = 1^k, n + m = k\}$$

$$11 + 111 = 11111 \in ADDITION$$

$$111 + 111 = 111 \notin ADDITION$$

Radici

Alfabeto: $\Sigma = \{1, \#\}$

Linguaggio:

$$SQUARES = \{x\#y : x = 1^n, y = 1^m, m = n^2\}$$

$$11\#1111 \in SQUARES$$

$$111\#1111 \notin SQUARES$$

Nota che :

Insieme vuoto $\emptyset = \{\} \neq \{\lambda\}$

Dimensione insiemi

$$|\{\}| = |\emptyset| = 0 \qquad |\{\lambda\}| = 1$$

Lunghezza di una stringa

$$|\lambda| = 0$$

Operazioni sui linguaggi

Le stesse degli insiemi

$$\{a, ab, aaaa\} \cup \{bb, ab\} = \{a, ab, bb, aaaa\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} \cap \{bb, ab\} = \{ab\}$$

$$\{a, ab, aaaa\} - \{bb, ab\} = \{a, aaaa\}$$

Complemento: $\bar{L} = \Sigma^* - L$

$$\overline{\{a, ba\}} = \{\lambda, b, aa, ab, bb, aaaa, \dots\}$$

Inverso

Definizione: $L^R = \{w^R : w \in L\}$

Esempio: $\{ab, aab, baba\}^R = \{ba, baa, abab\}$

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$L^R = \{b^n a^n : n \geq 0\}$$

Concatenazione

Definizione: $L_1L_2 = \{xy : x \in L_1, y \in L_2\}$

Esempio: $\{a, ab, ba\}\{b, aa\}$

$$= \{ab, aaa, abb, abaa, bab, baaa\}$$

Altre operazioni

Definizione: $L^n = \underbrace{LL \cdots L}_n$

$$\{a,b\}^3 = \{a,b\}\{a,b\}\{a,b\} = \\ \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

Casi speciale: $L^0 = \{\lambda\}$

$$\{a, bba, aaa\}^0 = \{\lambda\}$$

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$L^2 = \{a^n b^n a^m b^m : n, m \geq 0\}$$

$$aabbbaaabb \in L^2$$

Star-Closure-intensione (Kleene *)

Tutte le stringhe che possono essere
costruite da L

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \dots$$

Definizione:

Esempio:

$$\{a, bb\}^* = \left\{ \begin{array}{l} \lambda, \\ a, bb, \\ aa, abb, bba, bbbb, \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \dots \end{array} \right\}$$

Chiusure

Definizione: $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots$

Lo stesso come L^* without the λ

$$\{a, bb\}^+ = \left\{ \begin{array}{l} a, bb, \\ aa, abb, bba, bbbb, \\ aaa, aabb, abba, abbbb, \dots \end{array} \right\}$$