Preliminari matematici

Preliminari matematici

- Insiemi
- Funzioni
- Relazioni
- Grafi
- Tecniche di dimostrazioni

SETS

A insieme è una collezione di elementi

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{train, bus, bicycle, airplane\}$$

Scriveremo:

$$1 \in A$$

$$ship \notin B$$

Rappresentazione degli insiemi

$C = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \}$

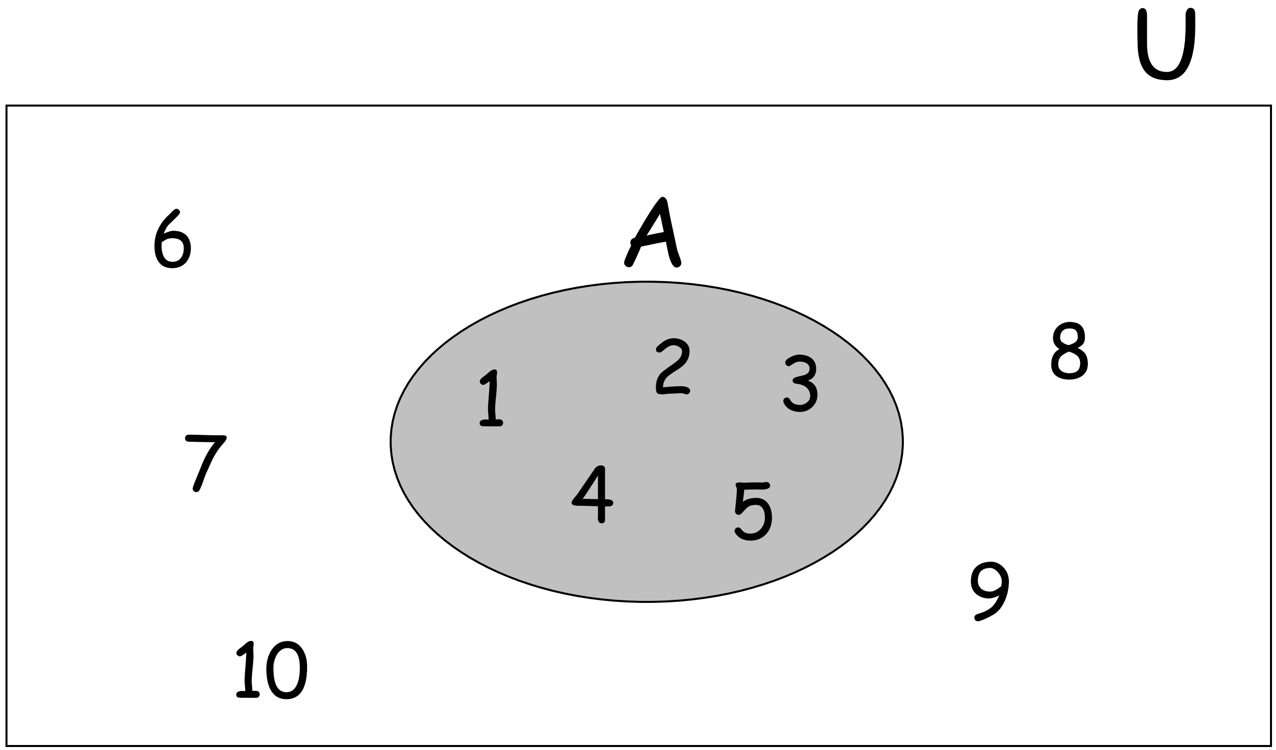
$C = \{ a, b, \ldots, k \}$ ⟶ *Insieme finito*

$S = \{ 2, 4, 6, \ldots \}$ ⟶ *Insieme infinito*

$S = \{ j : j > 0, \text{ e } j = 2k \text{ per qualche} k > 0 \}$

$S = \{ j : j \text{ è non negativo e pari} \}$

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$



Insieme universale: tutti gli elementi possibili

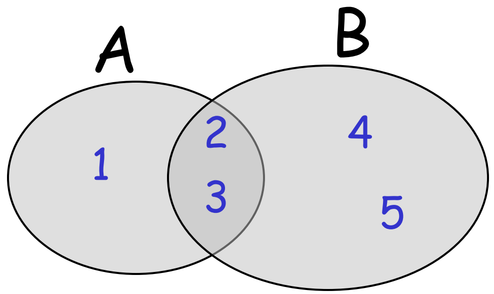
$U = \{ 1 , \ldots , 10 \}$

Operazione sugli insiemi

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

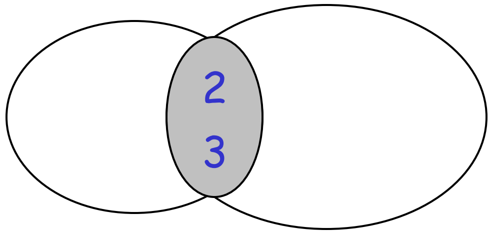
- Unione

$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$



- Intersezione

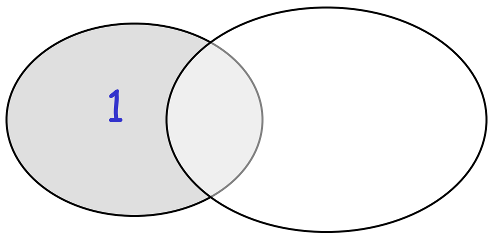
$A \cap B = \{ 2, 3 \}$



- Differenza

$A - B = \{ 1 \}$

$B - A = \{ 4, 5 \}$

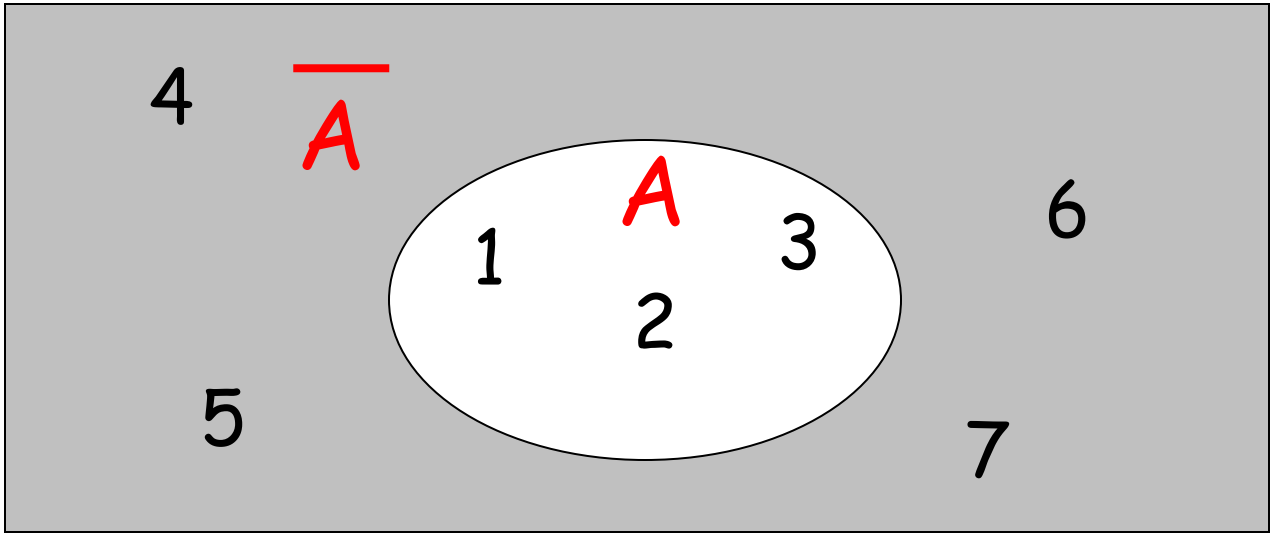


Venn diagrams

- Complemento

Insieme universale= {1, …, 7}

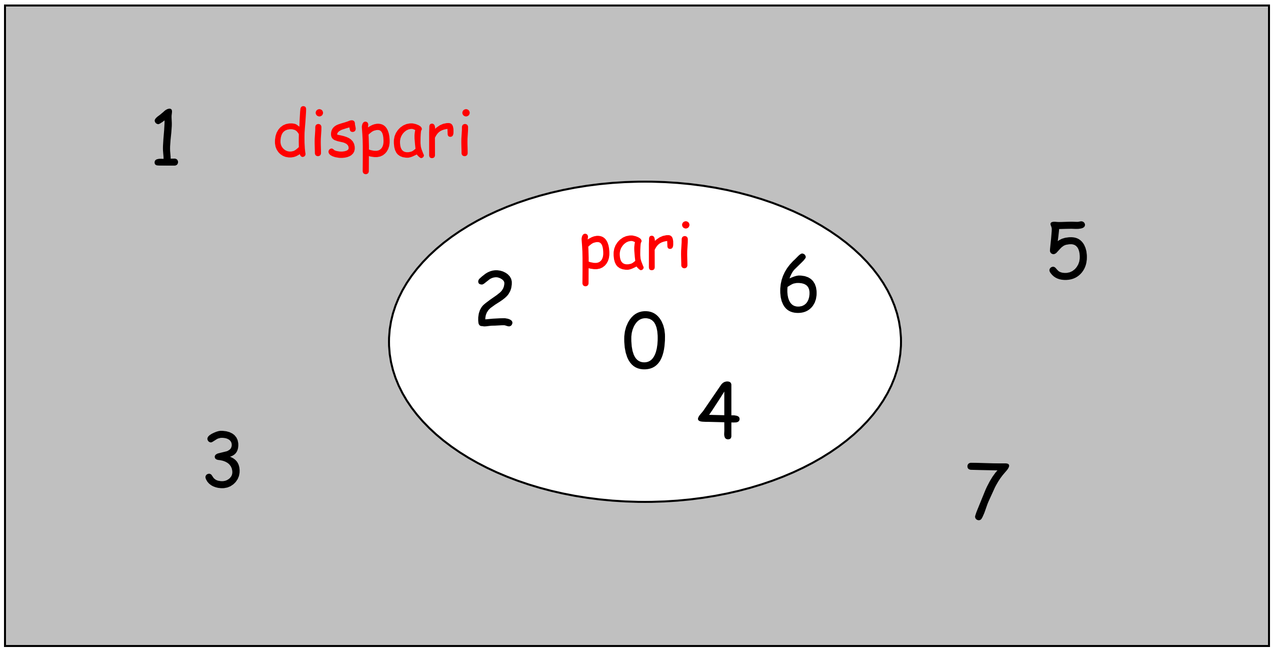
$A = \{ 1, 2, 3 \} \Rightarrow \overline{A} = \{ 4, 5, 6, 7\}$



$\overline{\overline{A}} = A$

$$\overline{\{\text{ interi pari}\}} = \{\text{ interi dispari}\}$$

interi



Leggi di DeMorgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Vuoto, insieme nullo: $\emptyset$

$\emptyset = \{ \}$

$S \cup \emptyset = S$

$S \cap \emptyset = \emptyset$

$\overline{\emptyset}$ = Universal Set

$S - \emptyset = S$

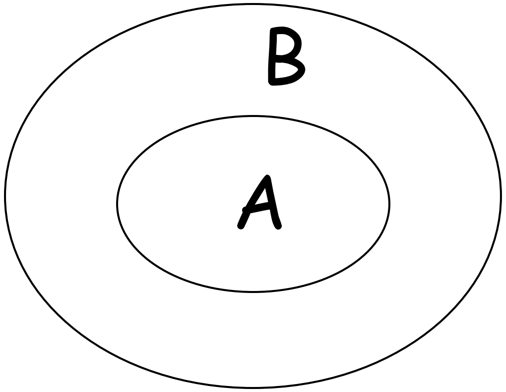
$\emptyset - S = \emptyset$

Sottoinsieme

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A \subseteq B$$

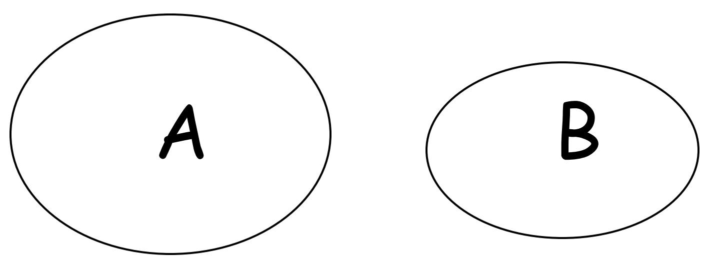
Sottoinsieme proprio: $A \subset B$



Insieme disgiunti

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{5, 6\}$

$$A \cap B = \emptyset$$



Cardinalità

- per gli insiemi finiti

$A = \{ 2, 5, 7 \}$

$|A| = 3$

(dimensione dell'insieme)

Insieme potenza

Un insieme potenza è un insieme di insiemi

$S = \{ a, b, c \}$

Potenza di S = l'insieme di tutti I sottoinsiemi di S

$2^S = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$

Osservazione: $| 2^S | = 2^{|S|}$ $(8 = 2^3)$

Prodotto Cartesiano

$A = \{ 2, 4 \}$ $B = \{ 2, 3, 5 \}$

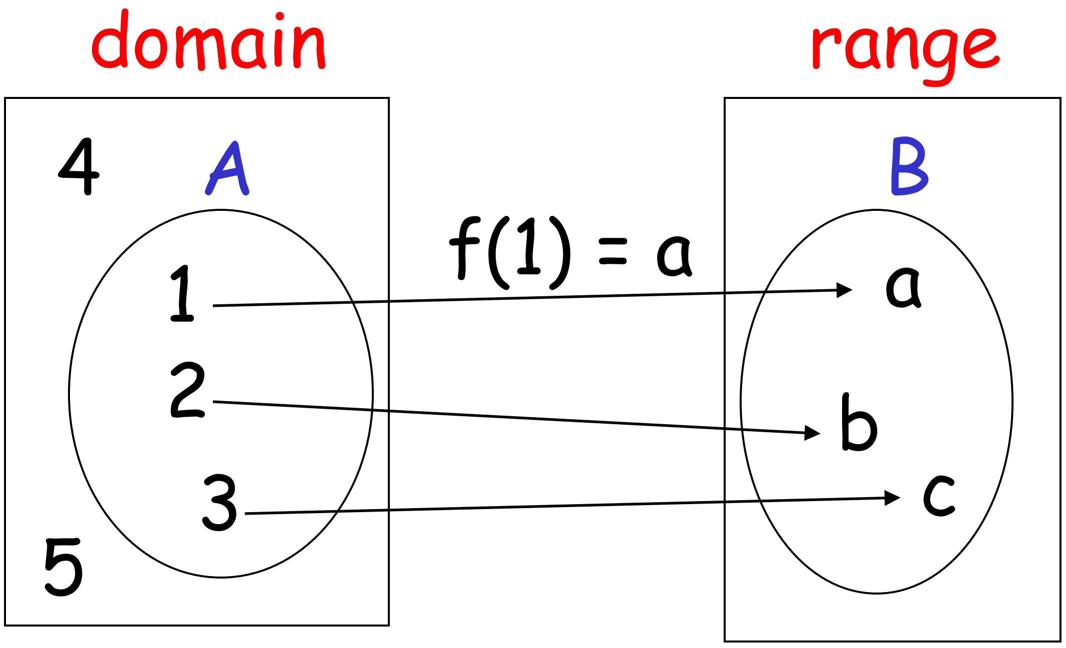
$A \times B = \{ (2, 2), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5) \}$

$|A \times B| = |A|\ |B|$

Possiamo generalizzarlo a più insiemi

$A \times B \times \ldots \times Z$

Funzioni



$f : A \to B$

Se A = dominio

allora f è una funzione totale

altrimenti f è una funzione parziale

Relazioni

$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots\}$

$x_i \; R \; y_i$

per esempio . se R = '>': $2 > 1$, $3 > 2$, $3 > 1$

Relazioni di equivalenza

- Riflessiva: $x \, R \, x$
- Simmetrica: $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
- Transitiva: $x \, R \, y$ and $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$

Esempio: R = '='

- $x = x$
- $x = y \Rightarrow y = x$
- $x = y$ e $y = z \Rightarrow x = z$

Classi di equivalenza

Data la relazione di equivalenza R

la classe di equivalenza per $x = \{y : x \; R \; y\}$

Esempio:

$R = \{ (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1),$

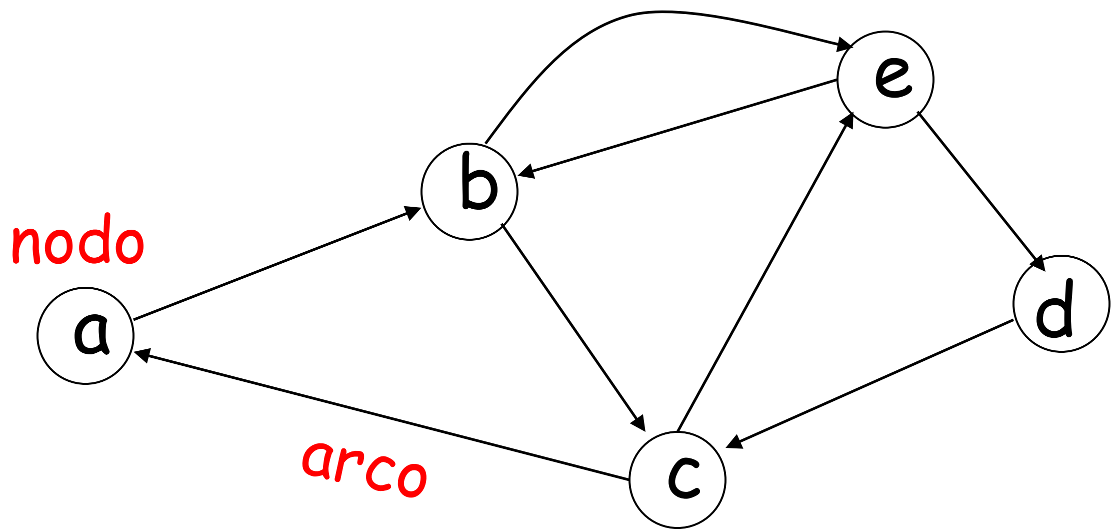
$(3, 3), (4, 4), (3, 4), (4, 3) \}$

classe di equivalenza per $1 = \{1, 2\}$

classe di equivalenza per $3 = \{3, 4\}$

Grafi

Grafo diretto



- Nodi (Vertici)

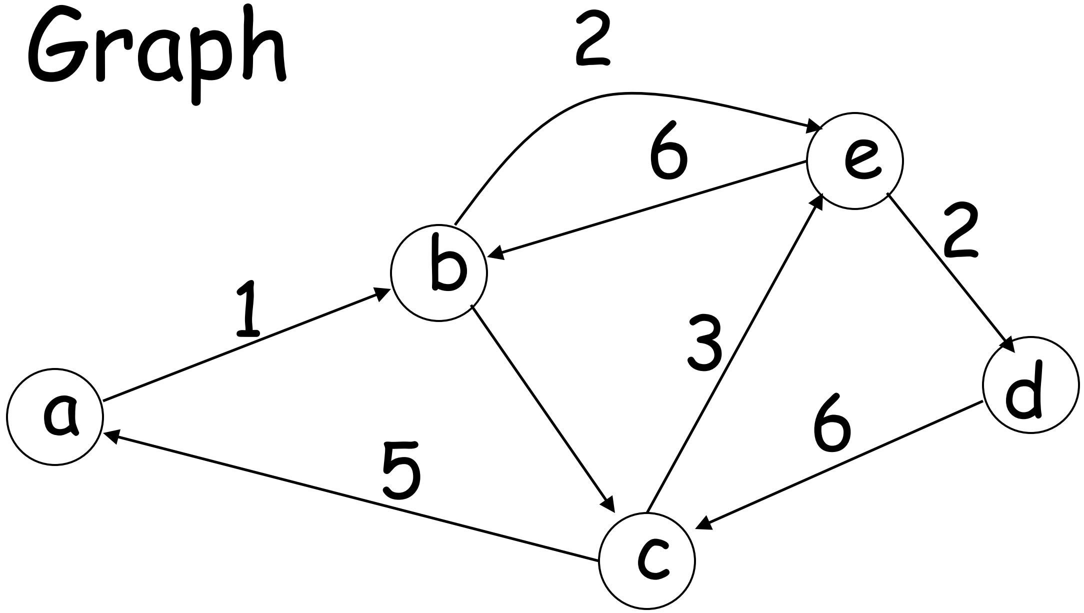
$$V = \{ a, b, c, d, e \}$$

- Archi

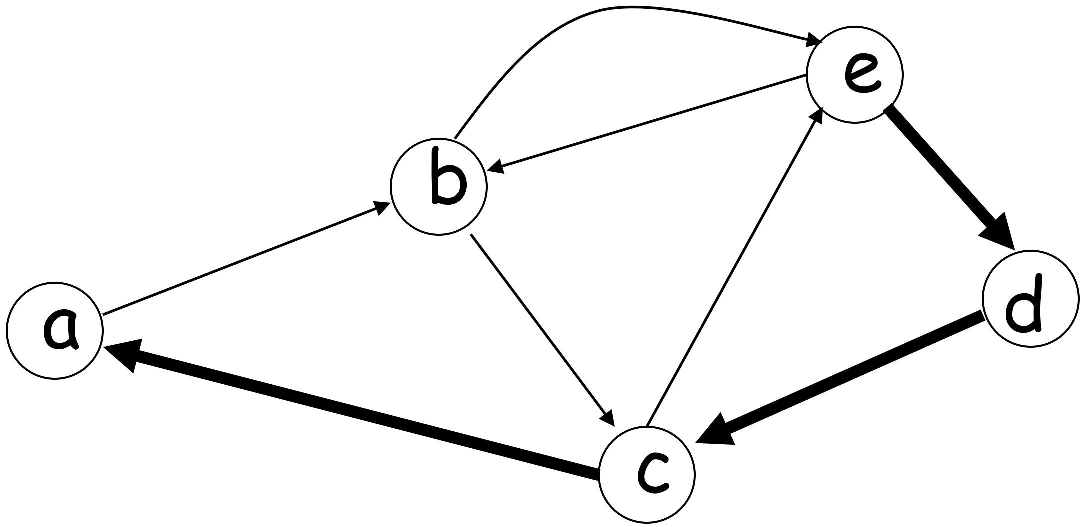
$$E = \{ (a,b), (b,c), (b,e),(c,a), (c,e), (d,c), (e,b), (e,d) \}$$

Grafo con etichette

Labeled Graph



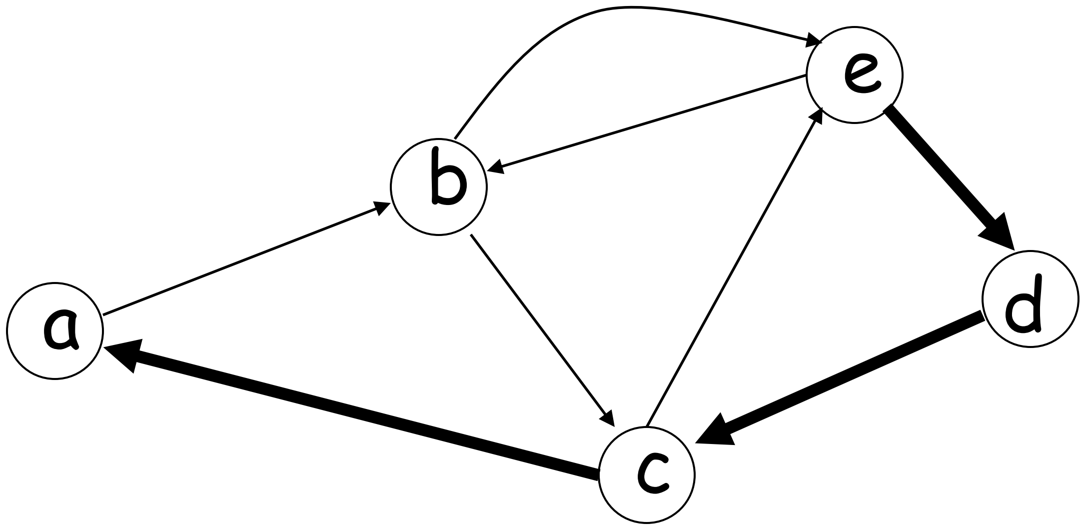
Cammino



Un cammino è una sequenza di archi adiacenti

(e, d), (d, c), (c, a)

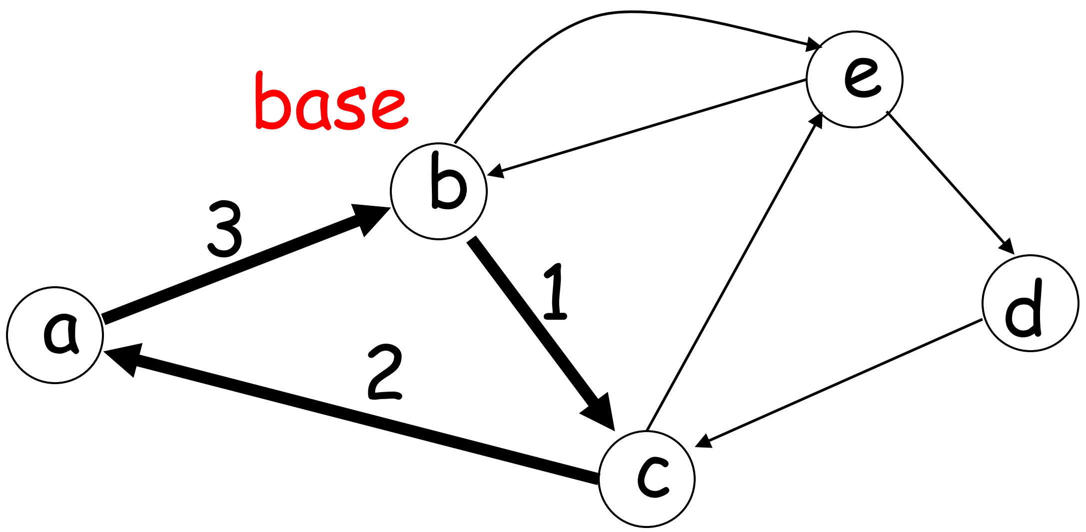
Path



Path è un cammino in cui nessun arco è ripetuto

Simple path : nessun nodo è ripetuto

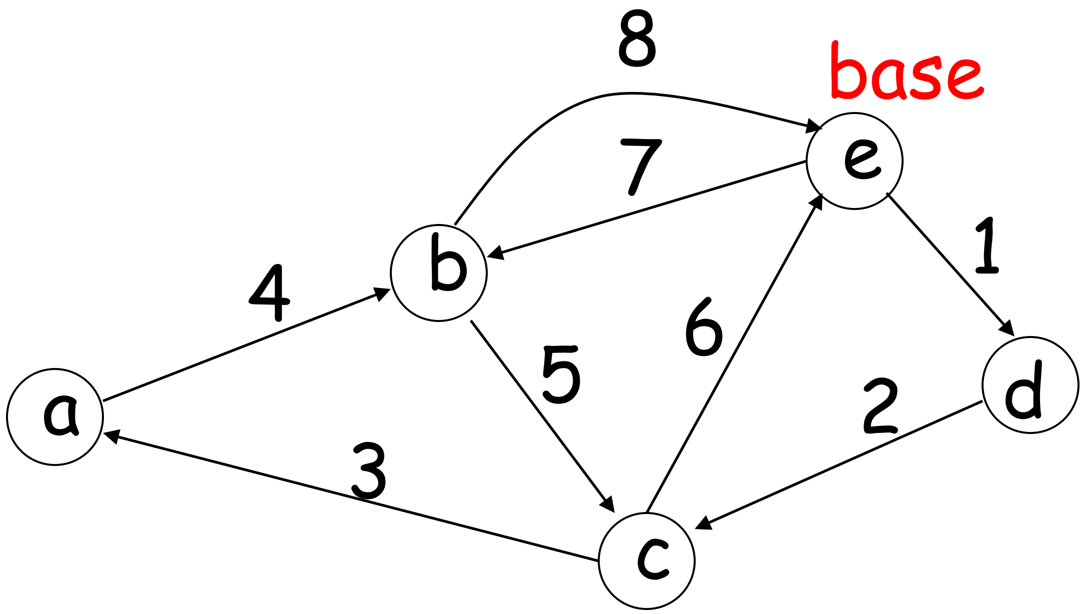
Ciclo



Ciclo: un cammino da un nodo(base) a se stesso

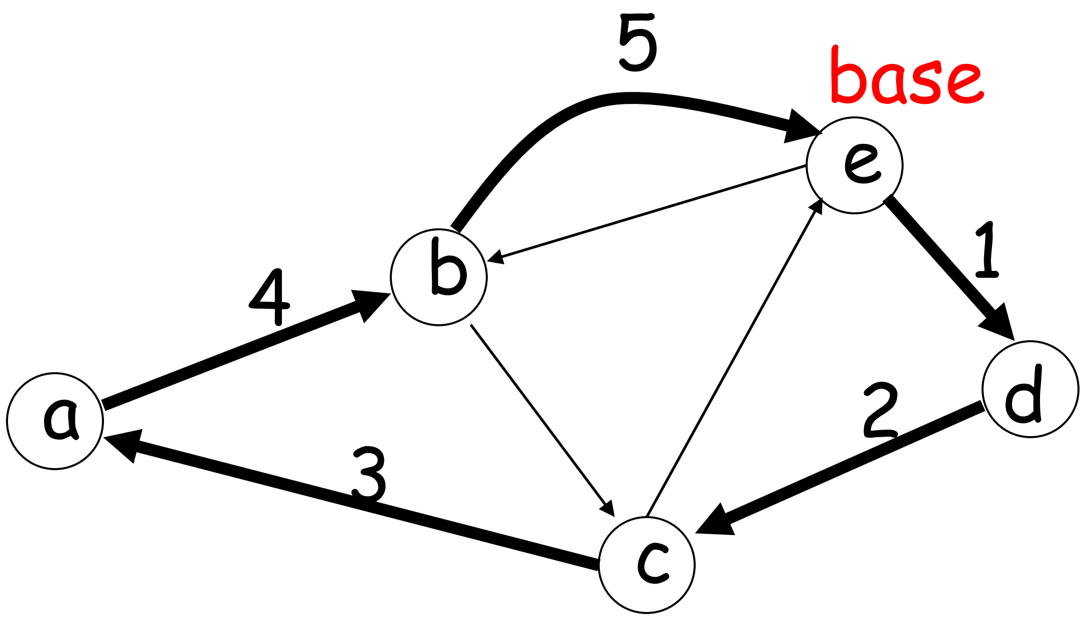
Ciclo semplice: solo la base è ripetuta

Euler Tour



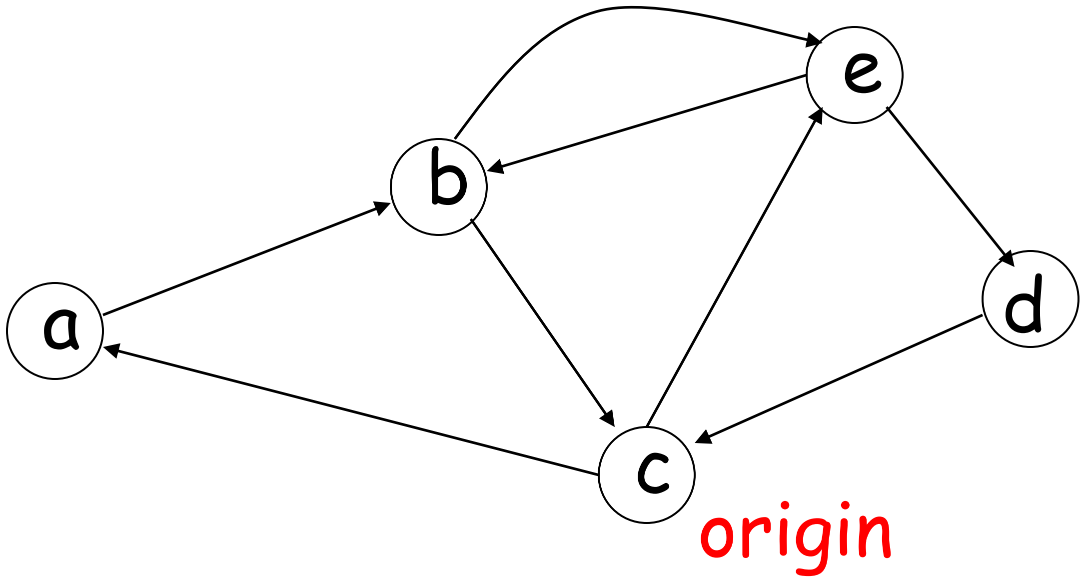
Un ciclo che contiene ogni arco una sola volta

Ciclo Hamiltonian

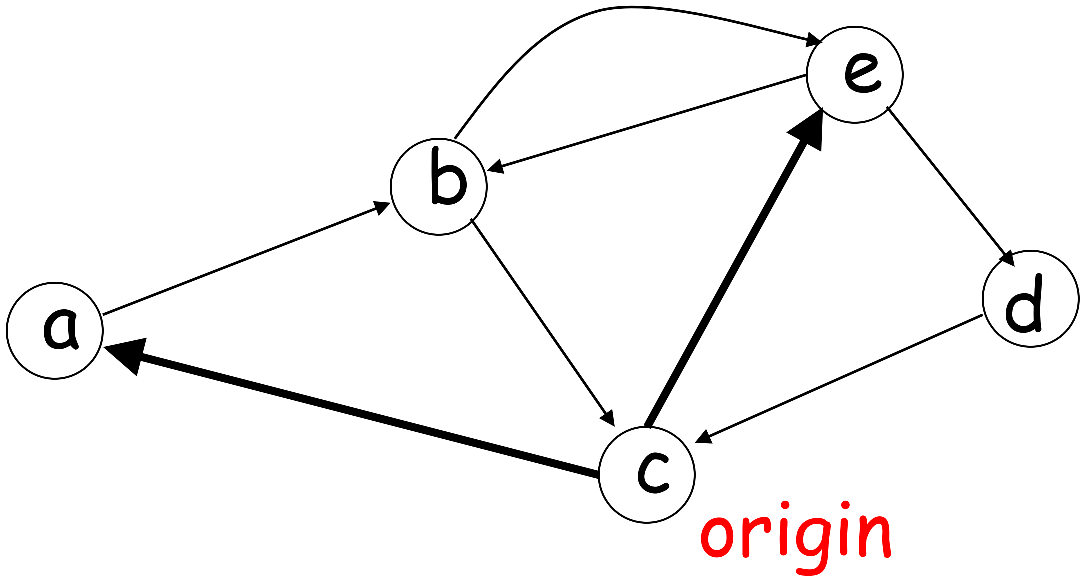


Un ciclo semplice che contiene tutti i nodi

Trovare tutti I path semplici



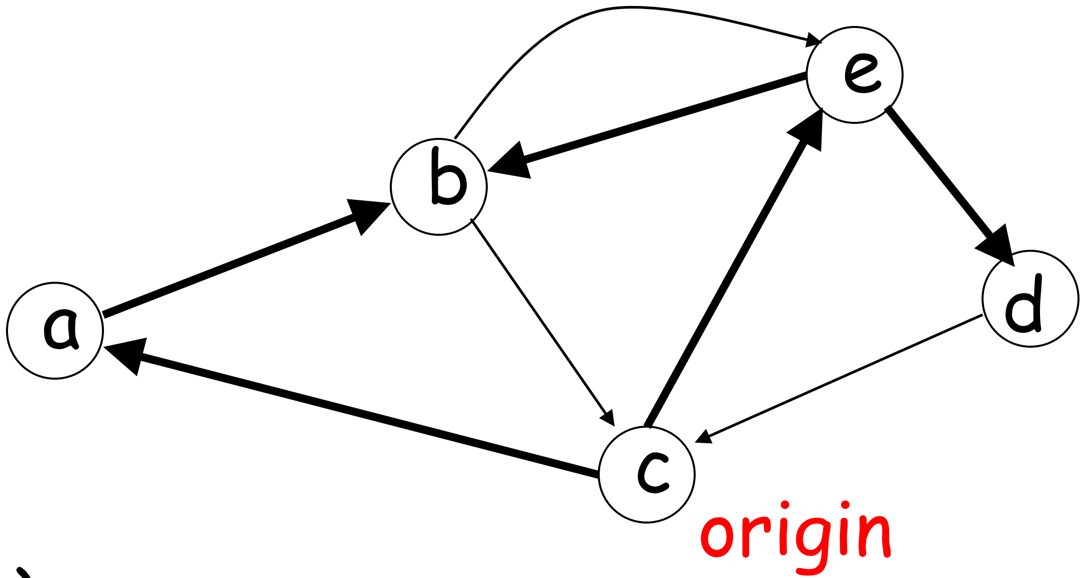
Step 1



(c, a)

(c, e)

Step 2



(c, a)

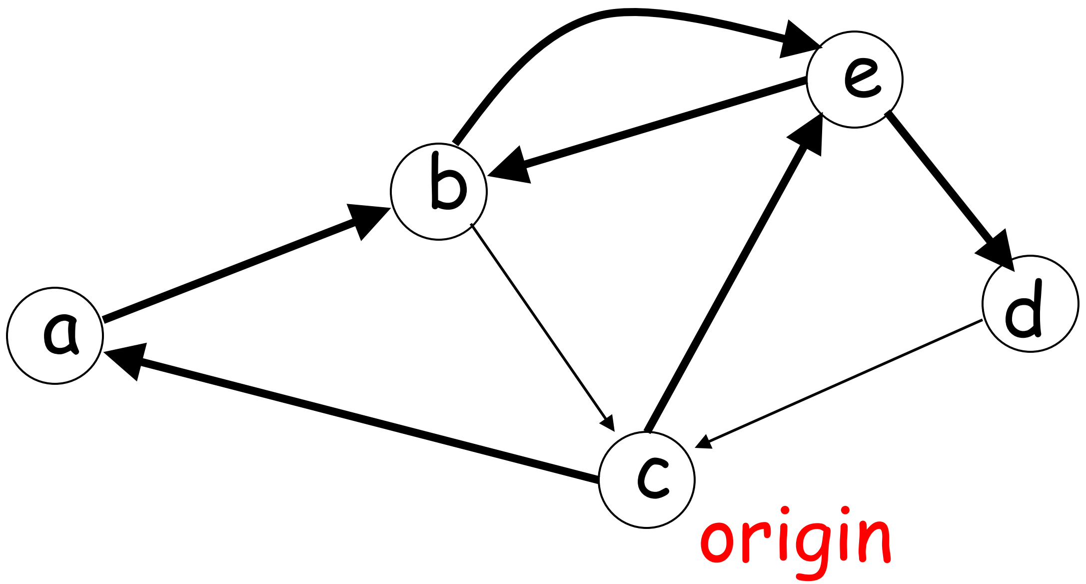
(c, a), (a, b)

(c, e)

(c, e), (e, b)

(c, e), (e, d)

Step 3



(c, a)

(c, a), (a, b)

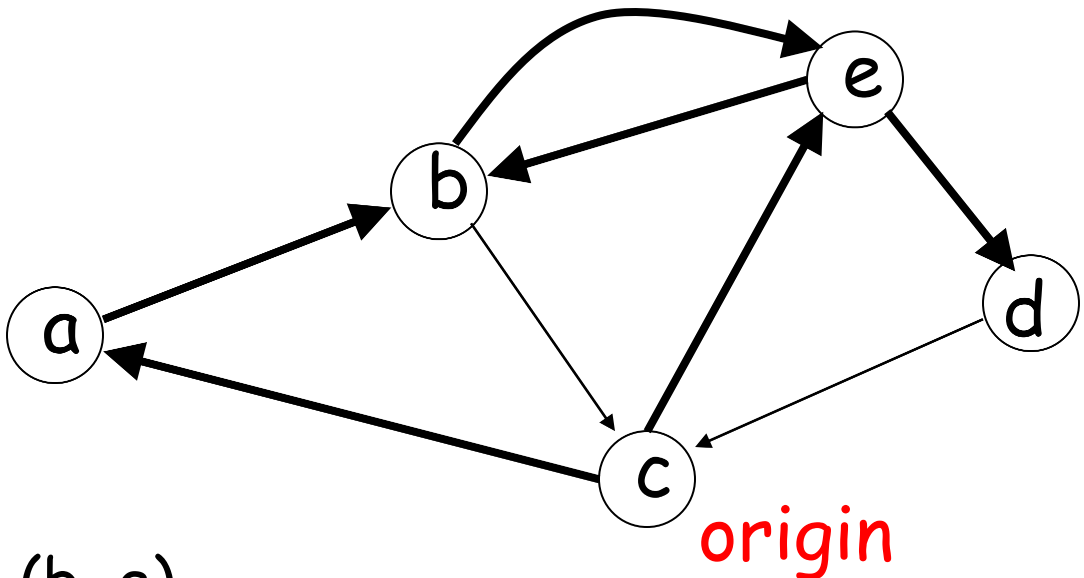
(c, a), (a, b), (b, e)

(c, e)

(c, e), (e, b)

(c, e), (e, d)

Step 4



(c, a)

(c, a), (a, b)

(c, a), (a, b), (b, e)

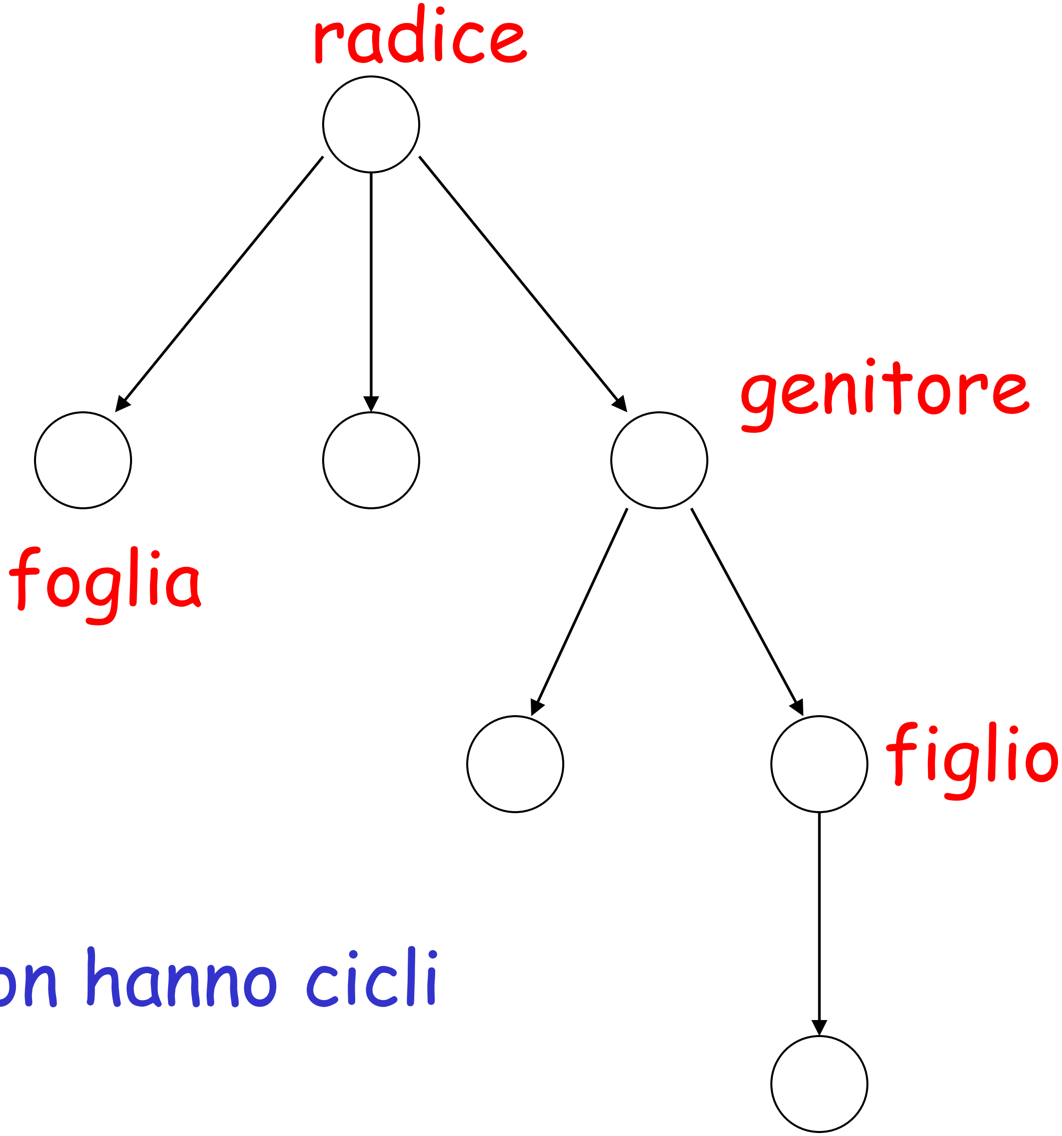
(c, a), (a, b), (b, e), (e,d)

(c, e)

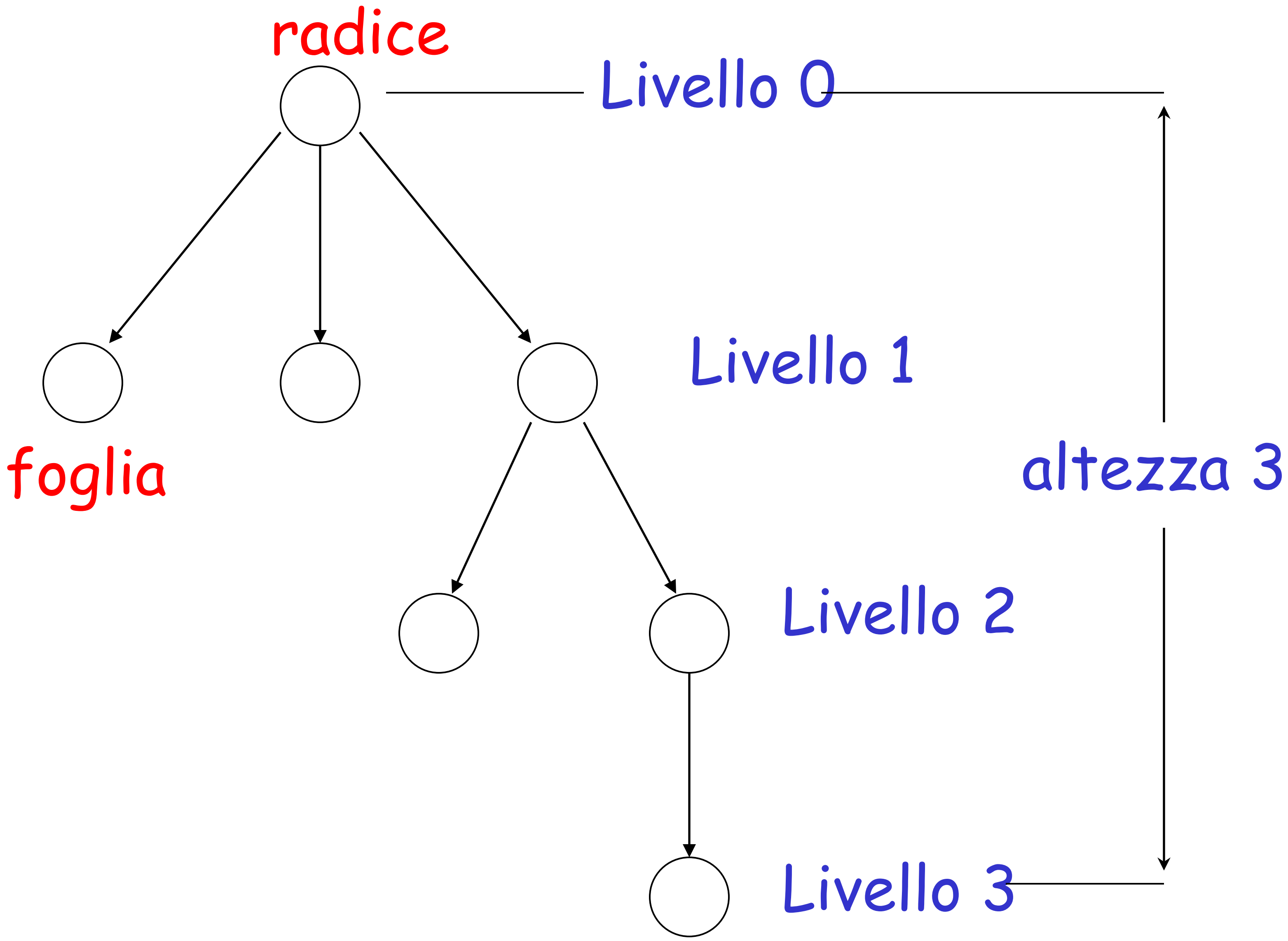
(c, e), (e, b)

(c, e), (e, d)

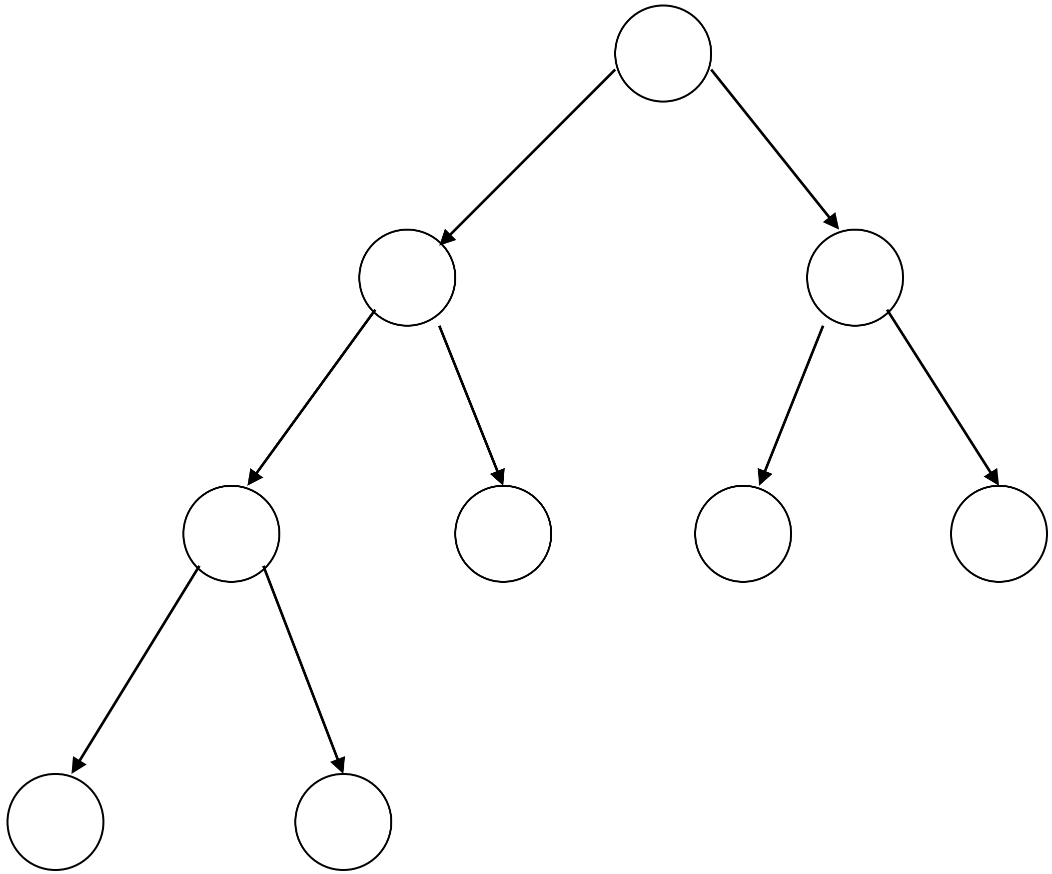
Alberi



Alberi non hanno cicli


radice
Livello 0
Livello 1
foglia
altezza 3
Livello 2
Livello 3

Alberi binari



Tecniche di dimostrazione

- dimostrazione per induzione
- dimostrazione per assurdo

Induzione

Abbiamo una serie di affermazioni ordinate

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

Se sappiamo

- per qualche b that $P_1, P_2, \ldots, P_b$ sono vere
- per ogni k >= b che

$$P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ implica } P_{k+1}$$

Then

allora P_i è vera

Dimostrazione per induzione

- Base induttiva

  trovare P_1, P_2, …, P_b che sono vere

- Ipotesi induttiva

  Asssumiamo che P_1, P_2, …, P_k sono vere,

  Per ogni k >= b

- Passo induttivo

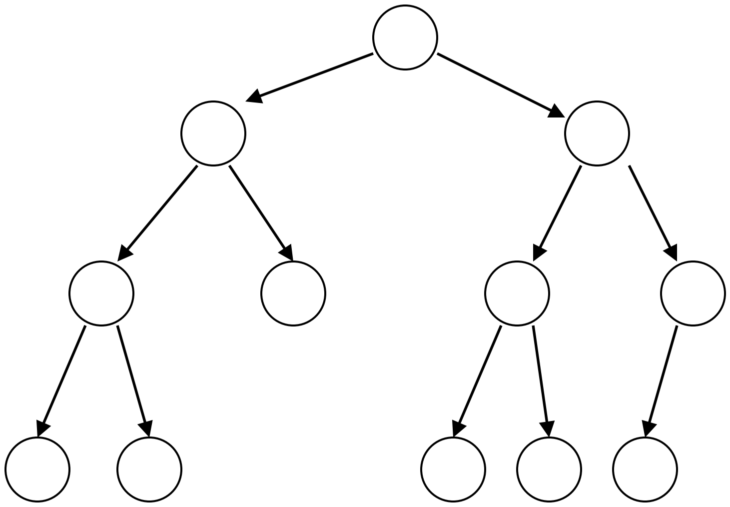
  Dimostrare che P_{k+1} è vera

Esempio

Theorem: Un albero binario di altezza n ha al massimo 2^n foglie.

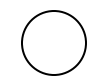
Proof by induction:

Sia L(i) il massimo numero di foglie di ogni sottoalbero di altezza i



Vogliamo dimostrare che : $L(i) <= 2^i$

- Base induttiva

- $L(0) = 1$ (nodo radice) 

- Ipotesi induttiva

- Assumiamo che $L(i) <= 2^i$ for all $i = 0, 1, \ldots, k$

- Step induttivo

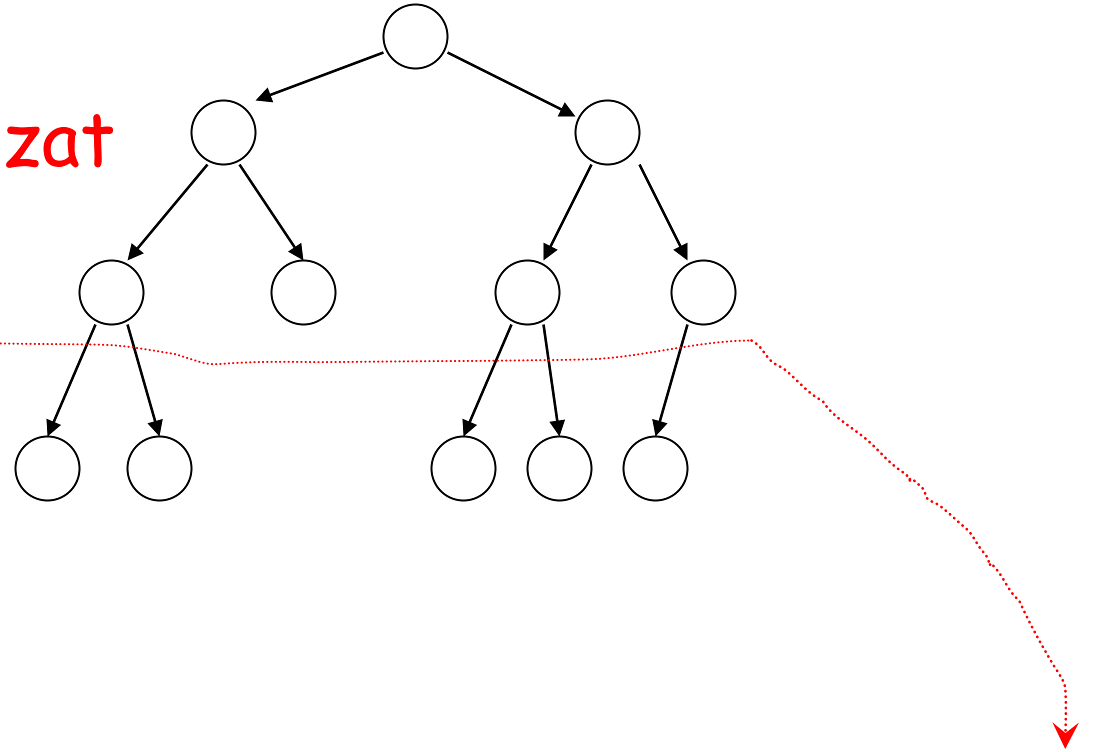
- Dobbiamo dimostrare che $L(k + 1) <= 2^{k+1}$

Step induttivo

altezzat

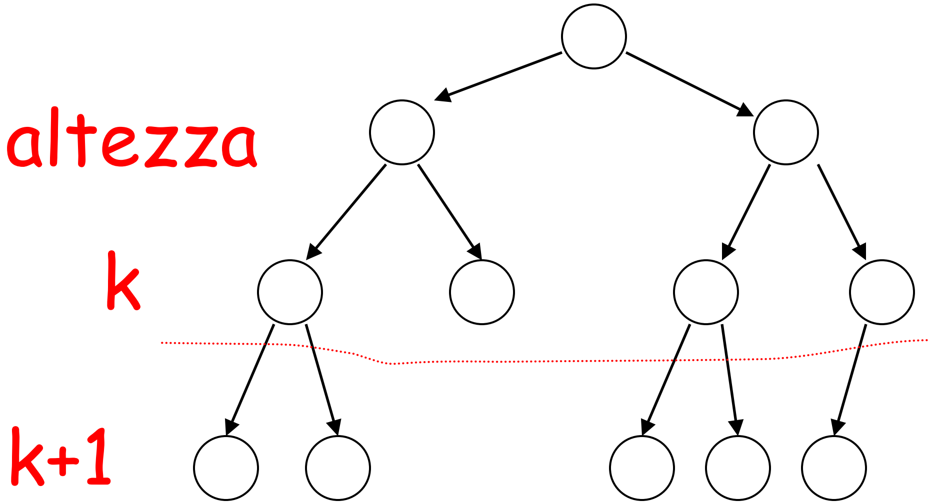
k

k+1



Per ipotesi induttiva: $L(k) <= 2^k$

Step induttivo



$L(k) <= 2^k$

$$L(k+1) <= 2 * L(k) <= 2 * 2^k = 2^{k+1}$$

(possiamo addizionare al massimo due nodi per ogni Foglia di livello k)

Remark

La ricorsione è un altra cosa

Esempio di funzione ricorsiva:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1$$

Dimostrazione per assurdo

Vogliamo provare che P è vero

- Assumiamo che P è falso
- arriviamo ad una conclusione sbagliata
- quindi, P deve essere vero.

Esempio

Teorema: $\sqrt{2}$ non è razionale

Dimostrazione:

Assumiamo per assurdo che sia razionale

$\sqrt{2}$ = n/m

n e m non devono avere fattori comuni

Proviamo che questa affermazione è impossibile

$\sqrt{2} = n/m \Rightarrow 2\,m^2 = n^2$

quindi, n^2 è pari
quindi n è pari
(quadrato di dispari
è dispari) $\Rightarrow$ n è pari

$n = 2\,k$

$2\,m^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow$ m è pari

$m = 2\,p$

Allora, m e n hanno come fattore comune 2

Contradizione!