

**Examen**

Année Universitaire : 2009- 2010

Date : 02/02/2010

Filière : Ingénieur

Durée : 1h30

Semestre: S5 / Période : P2

Module : M5.7 / Élément de Module : M5.7.2 - MPRF

Professeur : AEM

**Consignes aux élèves ingénieurs:** Documentation: *Seule la polycopie est autorisée. Outils : Calculatrice non programmable autorisée; Calculatrice programmable et téléphone ou PC portables ne sont pas autorisés.*

**SUJET 1 (8 points)**

La matrice des variances et covariances des taux de rendement de deux titres financiers (actions de bourse)  $T_1$  et  $T_2$  est la suivante:

Variances - covariances		
	$RT_1$	$RT_2$
$RT_1$	0,0036	0,0054
$RT_2$	0,0054	0,0081

Il est possible d'investir dans plusieurs portefeuilles  $P_i$  composés à partir des deux titres financiers (actions). Les proportions des actions dans les  $P_i$  ne peuvent être inférieures à 0% ni supérieures à 100%.

- Calculez un portefeuille au risque (sigma) minimum et donnez les proportions de chacune des actions ;
- Calculez un portefeuille au rendement maximum et donnez les proportions de chacune des actions ;
- Y a-t-il un portefeuille avec risque (sigma) zéro ? si oui, donnez en la composition ;
- Donnez un portefeuille efficace (PE) et d'un portefeuille non-efficace (PNE) s'il existe ;
- Présentez sur un graphe la frontière des portefeuilles efficaces (FPE).

**SUJET2 (4 points):** La CDG a investi 1 000 000 Dh dans des titres CGI et 500 000 Dh en titres SONASID. La volatilité exprimée par le sigma sur base annuelle est de 15,8745% pour le titre CGI et de 31,7490% pour SONASID. En considérant que l'année boursière compte 252 jours (ouvrables) :

- Calculez la VaR (95%,1j) et VaR (95%,10j) pour les deux investissements. Commentez brièvement.

Rappel : Distribution normale  $Pr(X \leq z) = 0.05 \Rightarrow X = 1.645$  ;  $\sigma_a = \sigma_j * 252^{0.5}$  avec  $a$  : année et  $j$  : jour;  
et  $VaR(Nj) = Nj^{0.5} * VaR(1j)$ .

**SUJET3** (8 points): Les rendements des titres ONA ( $T_1$ ) et IAM ( $T_2$ ) cotés à la bourse de Casablanca ont présentés les caractéristiques suivantes pour l'année 2009.

Rendements ( $R_1, R_2$ )		
Titres	Béta $\beta_i$	Risque Non Systématique $\sigma_{NSi}$
ONA ( $T_1$ )	0,5	8,00%
IAM ( $T_2$ )	1,5	5,00%
Corrélation ( $R_1, R_2$ )	0,3069	
Sigma du marché $\sigma_M$	6,00%	

Le modèle de marché stipule que seul le risque systématique (ou non diversifiable) est rémunéré sur le marché, alors que le risque non systématique (appelé aussi risque spécifique ou diversifiable) n'est pas considéré par ce même marché dans l'optimisation de portefeuille.

En se basant sur les hypothèses du modèle de marché ainsi que la CML (et le CAPM), calculez les variances et covariances des rendements des deux actifs (présentez la matrice Variances –covariances).

Un investisseur ( $I_A$ ) institutionnel (gestionnaire de trésorerie d'une holding), a constitué un portefeuille en répartissant également l'argent dont il dispose sur les deux titres (50% en  $T_1$  et 50% en  $T_2$ ) :

- Calculez le béta de ce portefeuille ( $\beta_{PA}$ )
- Calculez la variance totale de ce portefeuille et son sigma ( $\sigma_{PA}$ )

Un autre investisseur individuel ( $I_B$ ) qui préfère prendre plus de risque « spéculateur », considéré que le marché boursier (Bourse de Casa et l'indice MASI (portefeuille du marché M)) a présenté une performance très intéressante. Il dispose de 500 000 Dh, et décide d'emprunter en plus au taux sans risque (taux des Bons de trésor) la somme de 250 000 Dh, pour investir la totalité de son argent dans le portefeuille du marché (M).

- Calculez le béta du portefeuille ( $\beta_{PB}$ )

Soient le taux de rendement espéré du marché :  $E(R_M) = 14\%$ , le Sigma du portefeuille marché (M) :  $\sigma_M = 6\%$ , et le taux sans risque :  $R_f = 2\%$  :

- Calculez le ratio Sharpe de ce portefeuille ( $RS_{PB}$ ), son risque ( $\sigma_{PB}$ ), et son rendement ( $E(R_{PB})$ ).

## Eléments de solution Exam MPRF\_2009\_10

### Sujet1

Données	T1	T2
T1	0,0036	0,0054
T2	0,0054	0,0081

→ Coefficient de corrélation = 1 → voir solution poly cas  $\rho = 1$  → FE linéaire (portefeuilles efficaces)

### Sujet2

Voir Cas Fichier « VaR test cas MS et ATT » dans dossier « Simul Projet »

### Sujet3 : (voir poly + applications « cas »)

Rendements ( $R_1, R_2$ )		
Titres	Béta $\beta_i$	Risque Non Systématique $\sigma_{NSi}$
ONA ( $T_1$ )	0,5	8,00%
IAM ( $T_2$ )	1,5	5,00%
Corrélation ( $R_1, R_2$ )	0,3069	
Sigma du marché $\sigma_M$	6,00%	

$\sigma_{is}^2 = (\beta_i * \sigma_M)^2$ , Variances  $\sigma_{Ti}^2 = \sigma_{NSi}^2 + \sigma_{is}^2$ ; Cov ( $T_1, T_2$ ) =  $\rho * \sigma_{T1} * \sigma_{T2}$

Matrice Var-cov	
0,007300	0,002700
0,002700	0,010600

$\sum x_i \beta_i = 1$ ;  $\sigma_{NS}^2 = \sum x_i^2 * \sigma_{NSi}^2$ ; Variance Totale Portefeuille  $\sigma_{pa}^2 = \sigma_{is}^2 + \sigma_{NS}^2 = 0,005825$ ;  $\sigma_{pa} = 0,076321688$

$\beta_p = \sigma_p / \sigma_{RM}$ ;  $\sigma_p * \sigma_{RM} / \sigma_{RM}^2 = 1,5$

$E(R_p) = 0,5R_f + 1,5E(R_M)$

$\sigma_p^2 = 0 + 1,5^2 \sigma_{RM}^2 + 0 = 1,5^2 \sigma_{RM}^2$

Ratio Sharpe :  $RS_p = (R_p - R_f) / \sigma_p$

$R_p = 21\%$ ;  $\sigma_p = 9\%$

### RATTRAPAGE : M5.7.2 COURS MPRF

#### 1. RATTRAPAGE ET VALIDATION DU PROJET1 :

##### • CONTENU

- REMETTRE UN NOUVEAU RAPPORT (PAPIER ET CD) EN EVITANT DE FAIRE DES COPIER/COLLER ET DU CLONAGE DANS LE CAS DE PNV1 OU PNR1

##### • FORME :

- PREMIERE PAGE : TITRE ET NOMS DES MEMBRES DU GROUPE
- PAGES 2 : TABLE DE MATIERE (OU SOMMAIRE)
- PAGES 3 ET SUIVANTES : DEVELOPPMENT
- CONCLUSION
- BIBLIOGRAPHIE, WEBGRAPHIE...

#### 2. EXAMEN :

- SEULE LA POLYCOPIE EST AUTORISEE
- IL FAUT RIEN ECRIRE SUR LA POLYCOPIE (REPONSES AUX EXAM...), AUTREMENT CE DOCUMENT NE SERA PAS AUTORISE. SI VOUS AVEZ ECRIT SUR VOTRE POLY ? EMPRUNETRE UNE AUTRE CHEZ LES AUTRES ELEVES QUI ONT VALIDES LE COURS ET/OU LE MODULE.
- RESPECTER BIEN CES CONSIGNES POUR REUSSIR LE RATTRAPAGE.

**BONNE CHANCE**

# Éléments de réponse examen MPRF 2010

---

## **PARTIE 1**

### **1- Calcul de portefeuille au risque minimum**

Le calcul du portefeuille à risque minimum revient à calculer  $\lambda$  la contribution du titre T1 dans le portefeuille, la fonction à minimiser est

$$var(P) = \lambda^2 var(T1) + (1 - \lambda)^2 var(T2) + 2\lambda(1 - \lambda)cov(T1, T2)$$

D'après la matrice de variances-covariances, les éléments de la diagonale sont les  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = var(T_i)$  donc  $var(T_1) = 0,0036$  et  $var(T_2) = 0,0081$  tandis que  $cov(T_1, T_2) = cov(T_2, T_1) = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0,0054$

$$corr(T_1, T_2) = \frac{cov(T_1, T_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{var(T_1)} \sqrt{var(T_2)}} = 1$$

Puisque la corrélation entre les deux titres est linéaire, le portefeuille à risque minimum ne peut être composé que l'un des deux titres, c'est-à-dire (100%  $T_1$ , 0%  $T_2$ ) ou bien (0%  $T_1$ , 100%  $T_2$ )

Cas  $\lambda = 1$  (100%  $T_1$ ), On a un risque qui est  $\sigma_1 = 0,06$

Cas  $\lambda = 0$  (100%  $T_2$ ), On a un risque qui est  $\sigma_2 = 0,09$

Le portefeuille à choisir est donc le premier ( $\lambda = 1$ )

### **2- Calcul de portefeuille à rendement maximum**

Le calcul de ce portefeuille revient à maximiser la fonction du rendement

$$E(P) = \lambda E(T_1) + (1 - \lambda)E(T_2)$$

Or la corrélation entre les deux titres étant de 1, le portefeuille à rendement maximum n'est autre que celui à risque maximum, donc le calcul de  $\lambda$  revient à maximiser la fonction du risque  $var(P) = (0,03\lambda - 0,09)^2$

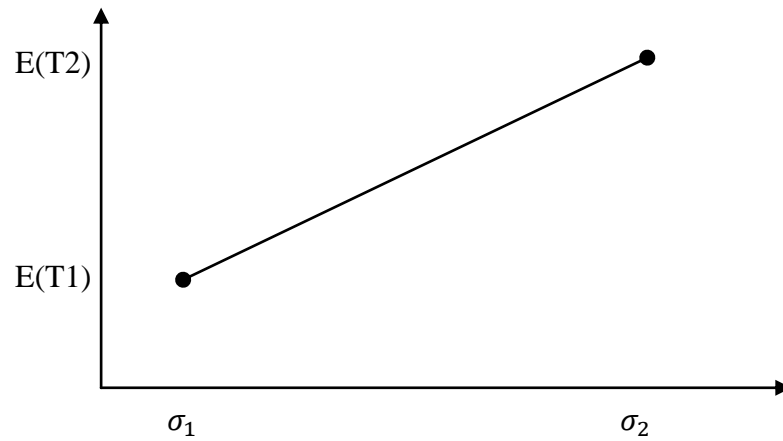
Cette fonction est maximum pour  $\lambda = 0$ , donc le portefeuille à rendement maximum est celui composé totalement du titre 2.

### **3- Portefeuille à risque nul**

Ce portefeuille n'existe pas car la corrélation est 1. (le portefeuille à risque nul ne peut exister que si la corrélation est différente de 1)

4- Il n'existe pas de portefeuilles non-efficaces. puisque la corrélation entre les deux titres est linéaire, tous les portefeuilles sont efficaces c'est-à-dire qu'on ne peut pas améliorer le rendement pour un risque fixé et vice versa.

5- Voir cours



Corrigé Exam 2010

fait par Y.A

Sujet 1: Déjà le corrigé existe

Sujet 3:

① Calcul des variances - covariances des rendements des deux actifs:

$$\text{Var}(T_1) = \text{Var}(\text{Systématique } T_1) + \text{Var}(\text{Non Syst } T_1)$$

$$= (\beta_1 \sigma_M)^2 + \sigma_{\text{Nse}}^2$$

$$= (0,5 \times 0,06)^2 + 0,08^2$$

$$\boxed{\text{Var}(T_1) = 0,007300}$$

de même on trouve  $\boxed{\text{Var}(T_2) = 0,010600}$

On sait que  $\text{cov}(T_1, T_2) = \text{corrélation}(T_1, T_2) \times \sigma(T_1) \times \sigma(T_2)$

donc  $\text{cov}(T_1, T_2) = 0,3069 \times \sqrt{0,0073} \times \sqrt{0,0106}$

$$\boxed{\text{cov}(T_1, T_2) = 0,002699}$$

Matrice Variance - Covariance	
$\sigma(T_1)^2$	$\text{cov}(T_1, T_2) \text{ corrélation}$
$\text{cov}(T_1, T_2) \text{ corrélation}$	$\sigma(T_2)^2$



Matrice Vari - Cov	
0,007300	0,002700
0,002700	0,010600

② Calcul de  $\beta$  du portefeuille:

$$\beta_{PA} = 0,5 \cdot \beta_1 + 0,5 \beta_2 = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 1,5$$

$$\boxed{\beta_{PA} = 1}$$



③ Calcul de la variance totale du portefeuille et de  $\sigma_P$

Méthode 1:

$$\sigma_{PA}^2 = \sigma_{NS}^2 + \sigma_{SPA}^2$$

avec  $\sigma_{NS}^2 = (0,5 \sigma_{NSL})^2 + (0,5 \sigma_{NSE})^2$

$$\sigma_{NS}^2 = (0,5 \times 0,08)^2 + (0,5 \times 0,05)^2$$

$$\boxed{\sigma_{NS}^2 = 0,002225}$$

$$\sigma_{SPA}^2 = (\beta_{PA} \times \sigma_M)^2$$

$$\sigma_{SPA}^2 = (1 \times 0,06)^2 = 0,0036$$

d'où  $\sigma_{PA}^2 = 0,002225 + 0,0036 = 0,005825$

et  $\sigma_{PA} = 0,076321688$

~~④ Calcul des  $\beta_{PB}$~~

Méthode 2: on sait que:  $\text{Variance}(PA) = \lambda_1^2 \sigma_{T1}^2 + \lambda_2^2 \sigma_{T2}^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \text{Cov}(T_1, T_2)$

avec  $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5}$

$$\text{Variance}(PA) = 0,5^2 \times 0,007300 + 0,5^2 \times 0,010600 + 2 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,002699$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Var}(PA) = 0,0058245} \Rightarrow \boxed{\sigma_{PA} = \sqrt{\text{Var}(PA)}}$$

④ Calcul de  $\beta_{PB}$ : on sait que  $\beta_{PB} = \frac{\sigma_{RP}}{\sigma_{RM}}$

or  $\sigma_{RP} = (1 - \alpha) \sigma_{RM} \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$

(\*) Ici l'investisseur dispose de 500 000 DH, et il a emprunté 250 000 DH  $\Rightarrow$  d'où  $\boxed{\alpha = -0,5}$

alors  $\beta_{PB} = 1 - (-0,5) \Rightarrow \boxed{\beta_{PB} = 1,5}$

⑤

$$E(R_p) = \alpha R_f + (1-\alpha) E(R_M)$$

d'où  $E(R_p) = -0,5 R_f + 1,5 E(R_M)$   
 $= -0,5 \times 0,02 + 1,5 \times 0,14$

$$E(R_p) = 0,2$$

⊕ Ratio Sharpe:  $RS_p = (R_p - R_f) / \sigma_p$

⊕ Calculons  $\sigma_p$ : on a  $\sigma_p^2 = 1,5^2 \sigma_{RM}^2$  (car  $\beta_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_{RM}}$ )

et on a  $\sigma_M = \sigma_{RM} = 6\%$

donc  $\sigma_p^2 = 1,5^2 \times (0,06)^2 = 0,0081$

$\Rightarrow \sigma_p = 9\%$

or on a  $E(R_p) = 2\% = R_p$

donc  $RS_p = \frac{0,2 - 0,02}{0,09} = 2$