Gestion de Portefeuille

Mesures de Performance Ajustées du Risque

Daniel HERLEMONT

Le Ratio de Sharpe

- La mesure de performance (ajustée du risque) la plus utilisée
- Rappel: $\dfrac{R_p - r_f}{\sigma_P}$

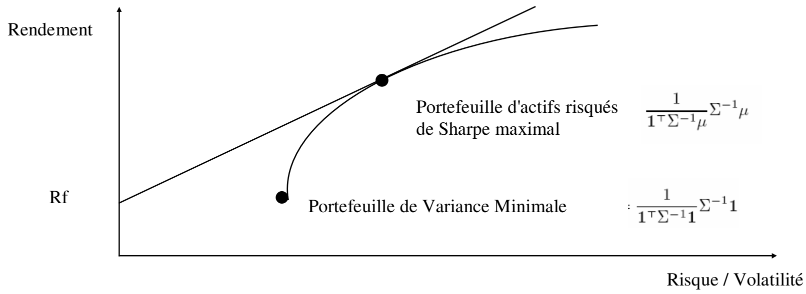
Asset class	Annualized return (%)	Annualized volatility (%)	Sharpe ratio
US stocks (S&P 500)	13.2	16.8	0.43
Intl stocks (MSCI EAFE index)	12.5	21.9	0.30
Real estate (NAREIT index)	12.5	17.2	0.38
Commodities (GS commodities index)	12.4	24.9	0.26
Intl stocks + real estate + commodities	13.9	11	0.72

Note: the calculation period is 1972–2000; the risk-free rate for the Sharpe ratio is assumed to be 6%

- Propriétés du ratio de Sharpe
  - Mesure de la stratégie: Indépendant du levier $S(\lambda) = \dfrac{\lambda(R_p - r_f)}{\lambda\sigma_P} = S(1)$
  - dépendance temporelle en racine carré du temps: $S_T = \dfrac{T(R_p - r_f)}{\sqrt{T}\sigma_P} = \sqrt{T}S_1$

Daniel HERLEMONT

Ratio de Sharpe – Plan Espérance-Variance - Rappel



Le portefeuille optimal est une combinaison linéaire
de l'actif sans risque et
du portefeuille efficient ayant le ratio de Sharpe maximal
Ajustement de la pondération dépend de l'aversion au risque

La ménagerie des Performance Ajustée du Risque (RAPM)

- **Basés sur le CAPM**
  - **le ratio de Treynor** $$T = \frac{R - r_f}{\beta}$$
    - **à comparer avec le rendement du marché**
  - **L'Alpha de Jensen** $$R - r_f = \alpha + \beta(R_M - r_f)$$
    - **normalement alpha=0**
- **L'information ratio** **alpha/trackingError**
  - **a comparer avec la statistique de student pour estimer si les rendements sont significativement != 0**
- **Modigilani: M2, M3, Graham-Harvey, Sterling, ROVaR**
- **Ces mesures classiques sont basées sur des modèles linéaires et les moments d'ordre <= 2**

M2

- Developed by Modigliani and Modigliani
- Equates the volatility of the managed portfolio with the market by creating a hypothetical portfolio made up of T-bills and the managed portfolio
- If the risk is lower than the market, leverage is used and the hypothetical portfolio is compared to the market

Daniel HERLEMONT

M^2 Measure: Example

Managed Portfolio: return = 35% standard deviation = 42%

Market Portfolio: return = 28% standard deviation = 30%

T-bill return = 6%

Hypothetical Portfolio:

30/42 = .714 in P (1-.714) or .286 in T-bills

(.714) (.35) + (.286) (.06) = 26.7%

Since this return is less than the market, the managed portfolio underperformed

Daniel HERLEMONT

Treynor Risk Adjusted Performance

Treynor Measure

$$\frac{R_p - r_f}{\beta_p}$$

rp = Average return on the portfolio

rf = Average risk free rate

ßp = Weighted average β for portfolio

L'alpha de Jensen

$$\alpha_p = \bar{r}_p - [\bar{r}_f + ß_p (\bar{r}_m - \bar{r}_f)]$$

α_p = Alpha for the portfolio

$\bar{r}_p$ = Average return on the portfolio

$ß_p$ = Weighted average Beta

$\bar{r}_f$ = Average risk free rate

$\bar{r}_m$ = Avg. return on market index port.

L'Information Ratio

$R_p = \alpha_p + \beta_p R_b + e_p$

avec

- R_p = rendement du portefeuille
- α_p = alpha du portefeuille
- β_p = beta du portefeuille reelatif au benchmark
- R_b = les rendements du benchmark
- e_p = les résidus

Information Ratio = $\alpha_p / \sigma(e_p)$

en données annualisées

reférence: "Active Portfolio Management" Grinold

Daniel HERLEMONT

L'information ratio en pratique

Percentile	Information Ratio
90	1.0
75	0.5
50	0.0
25	-0.5
10	-1

un manager possédant un information ratio de 0.5 fait partie des 25% meilleurs.

un IR de 1 est exceptionnel

Daniel HERLEMONT

Information Ratio

- Information Ratio et Ratio de Sharpe
  - $SharpeRatio^2 = SharpeRatioBenchmark^2 + InformationRatio^2$
  - Treynor Black
- Loi fondamentale de la gestion active selon GRINOLD
  - BR = breadth = nombre de paris indépendant dans l'année
  - IC = skill = correlation des performances prévues vs réalisées
  - Information Ratio IR= IC $BR^{1/2}$
    - Exemple: il suffit d'un léger avantage pour pour être parmi les meilleurs
      - paris sur 200 actions tous les trimestes
      - IC=0.02, correspondant à probabilité de 51% de succès dans la direction
      - l'information ratio est 0.56, parmi les meilleur gestionnaire.
        - Grinold - p. 154
    - D'un autre cote, si un avantage infime suffit à être classé parmi les meilleurs, il sera difficile de distinguer le talent de la chance ...

Daniel HERLEMONT

Mesures de Performances "Alternatives"

- Les mesures de performance classiques: Sharpe, Treynor, Jensen, Information Ration, ... sont basés sur des modèles linéaires et des distributions normales
- La réalité est bien différentes: asymétrie, queues épaisses, ... et pas seulement en gestion alternative
- Certaines mesures de performances sont mieux adaptées à la prise en compte de distributions non guassiennes et aux préférences des investisseurs:
  - Le ratio de Sortino: on remplace la variance par la variance des pertes sous un seuil
  - Omega: ratio des gains vs pertes
  - L'index de Stutzer: mesure le taux de décroissance de la probabilité de faire des pertes (vs un benchmark ou hurdle rate) en fonction du temps
  - Morningstar Risk Adjusted Return (lié à Stutzer)

Daniel HERLEMONT

Anomalie du ratio de Sharpe

Considérons deux actifs risqués A et B et les rendements en excès:

prob	1/6	1/2	1/3	mu	sigma	sharpe
A	-1%	1%	2%	1%	1%	1
B	-1%	1%	11%	4%	5%	.8

L'actif B possède un Sharpe plus faible que celui de A, alors que B est clairement préférable à A (dominance stochastique).

En passant de 2 à 11, l'écart type augmente plus vite que l'espérance.

Les anomalies du ratio de Sharpe

Considérons une loterie dont le ticket coûte un centime d'euro et permet de gagner 50 millions d'euros avec une probabilité de 10%.

Cette loterie n'est pas une opportunité d'arbitrage, son ratio de Sharpe est égal à 0.33 ratio inférieur à la plupart des actions du CAC40.

Pourtant, cette loterie vous donne la possibilité de devenir l'homme le plus riche du monde avec une chance sur dix, pour une pièce de monnaie que vous n'auriez même pas ramassé dans la rue.

Ce paradoxe correspond à la notion intuitive de "good deal".

$$p = \text{probabilite de gain G}$$
$$1-p = \text{probabilité de perte } \varepsilon << G$$
$$E = -(1-p)\varepsilon + pG$$
$$\sigma^2 = (1-p)\varepsilon^2 + pG^2 - \left(-(1-p)\varepsilon + pG\right)^2$$
$$= p(1-p)(G-\varepsilon)^2$$
$$sharpe = \frac{-(1-p)\varepsilon + pG}{\sqrt{p(1-p)}(G-\varepsilon)} \approx \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$
$$p = 0.1$$
$$sharpe \approx 0.33$$

Anomalie du ratio de Sharpe

une opportunité d'arbitrage peut avoir un ratio de Sharpe arbitrairement faible.

Considérons l'exemple extrême d'un portefeuille dont les rendements en excès possède la fonction de densité suivante:

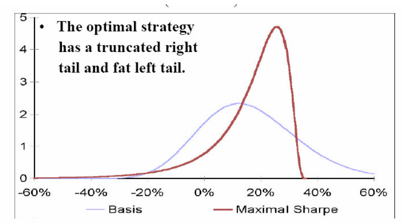
$$f(x) = \begin{cases} 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

L'espérance est 2, la variance est infinie,

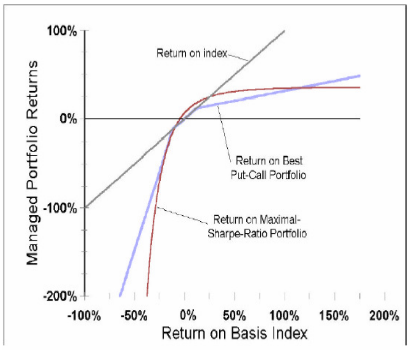
le ratio de Sharpe est donc nul.

Pourtant, ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage car il permet de doubler même dans le pire cas !

Le meilleur ratio de Sharpe



– Goetzmann, William, Jonathan Ingersoll, Matthew Spiegel, and Ivo Welch, "Sharpening Sharpe Ratios," Yale School of Management, Working Paper, February 2002.



On "voit" que le profil du vendeur d'options aura une volatilité
Le vendeur d'options en dehors de la monnaie

Morningstar Risk Adjusted Return

The Morningstar Risk-Adjusted Return (also known as the Stutzer index) is defined as the certainty equivalence for a power utility function $U(W) = -W^{-\gamma}/\gamma$, for $\gamma > -1$ and $\gamma \neq 0$ or $U(W) = \ln(W)$ for $\gamma = 0$ (hence relative risk aversion is $\gamma+1$). Constant relative risk aversion also implies that the investor's beginning of period wealth has no effect on the ranking of portfolios. Instead of holding a risky portfolio, the investor could buy a risk-free asset. Let R_b be the return on the risk-free asset. In comparing risky portfolios to the risk-free asset with R_b returns, we assume that the investor initially has all wealth invested in the risk-free asset. Then,

$$U = \frac{(1+R_G)^{-\gamma}}{\gamma}$$

where R_G is the geometric excess return:

$$R_G = \frac{1+R}{1+R_b} - 1$$

The certainty equivalent geometric excess return of a risky investment is the guaranteed geometric excess return that the investor would accept as a substitute for the uncertain geometric excess return of that investment. Letting $R_G^{CE}(\gamma)$ denote the certainty equivalent geometric excess return for a given value of γ, this means that:

$$U(1 + R_G^{CE}(\gamma)) = E[U(1 + R_G)]$$

$$R_G^{CE}(\gamma) = \begin{cases} (E[(1+R_G)^{-\gamma}])^{-1/\gamma} & \gamma > -1 \ \gamma \neq 0 \\ e^{E[\ln(1+R_G)]} & \gamma = 0 \end{cases}$$

$MMAR(\gamma)$ is defined as the annualized value of $R_G^{CE}(\gamma)$ using the time series average of $(1+R_G)^{-\gamma}$

L'indice de Stutzer

- Soit R(T) le rendement d'un fond entre 0 et T. Si la stratégie a un rendement > 0, la probabilité de faire des pertes décroît avec le temps. Pour T assez grand, cette probabilité décroît de manière exponentielle (application de la théorie des grandes déviations)
- Ip mesure le taux de décroissance, c'est l'indice de Stutzer
- Plus Ip est grand et meilleure est la stratégie
- L'indice de Stuzer pénalise les stratégies avec de fortes asymétries négatives et kurtosis
- On peut montrer que si les rendements sont gaussiens, alors

$$I_P = \frac{1}{2} Sharpe^2$$

- Actuellement utilisé par Moningstar et S&P pour classer les fonds en complément du ratio de Sharpe

Denote a portfolio p's *excess* (i.e., net of a benchmark) rate of return in any time period t by R_{pt}, and denote the time-averaged excess return it earns over T periods by

$$\overline{R_{pT}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{pt}}{T}. \quad (4)$$

Now, assuming the portfolio has a positive expected excess return, the law of large numbers implies that $\text{prob}(\overline{R_{pT}} \leq 0) \to 0$ as $T \to \infty$. In i.i.d. return processes and a wide variety of other return processes, this probability will eventually converge to zero asymptotically at a computable exponential rate I_p; that is,

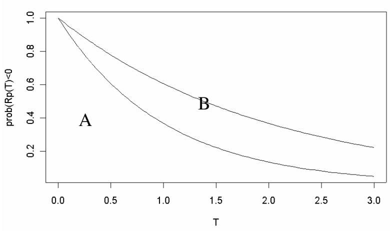
$$\text{prob}(\overline{R_{pT}} \leq 0) \approx \frac{c}{\sqrt{T}} e^{-I_p T}, \quad (5)$$

for large T, where c is a constant that depends on the return distribution. Therefore, the behavioral hypothesis is as follows:

A fund manager who is averse to receiving a non-positive time-averaged excess return above some specified benchmark will direct analysts to select a portfolio, m, that makes the probability of such a return occurring decay to zero at the maximum possible rate, I_m.

Stuzer, "A Portfolio Performance Index", Financial Analysts Journal May/Jun 2000

La stratégie A est préférable à B car elle permet probablement de surperformer le benchmark plus rapidement que la stratégie B



Hedge Funds Index CSFB TREMONT

Indicators of CSFB Hedge Funds indices:

Strategy	$\bar{R}$	σ	TWR	Sh	MDD	S	K	MRAR	Stutzer
HedgeFundIndex	11.27	8.09	3.18	0.90	13.81	0.10	1.90	10.21	1.32
ConvertibleArbitrage	9.54	4.67	2.73	1.19	12.04	-1.37	3.36	9.19	1.76
DedicatedShort	-1.18	17.69	0.74	-0.29	46.55	0.85	1.85	-5.49	0.07
EmergingMarkets	9.45	16.93	2.33	0.32	45.15	-0.62	3.98	4.64	0.53
EquityMktNeutral	10.29	3.00	2.97	2.10	3.55	0.29	0.21	10.15	3.37
EventDriven	11.86	5.80	3.43	1.35	16.04	-3.40	22.88	11.26	1.52
Distressed	13.85	6.67	4.15	1.48	14.32	-2.78	16.72	13.05	1.58
EDMultiStrategy	10.84	6.15	3.09	1.11	18.54	-2.58	16.46	10.18	1.40
RiskArbitrage	8.16	4.31	2.38	0.96	7.60	-1.27	5.98	7.86	1.62
FixedIncomeArb	6.87	3.81	2.08	0.75	12.47	-3.19	16.26	6.63	1.43
GlobalMacro	14.66	11.51	4.29	0.93	26.78	0.00	2.25	12.46	1.19
LongShortEquity	12.64	10.54	3.56	0.82	15.05	0.23	3.46	10.83	1.13
ManagedFutures	7.13	12.24	1.99	0.26	17.74	0.04	0.30	4.79	0.57
MultiStrategy	9.37	4.33	2.69	1.24	7.11	-1.24	3.44	9.06	1.86

Notations: $\bar{R}$ is the annualized return, σ is the annualized volatility, TWR is the terminal wealth return, Sh is the Sharpe ratio, MDD is the maximum drawdown, S is the skewness, K is the kurtosis; MRAR is the Morningstar Risk Adjuster Return

Performance Attribution

Decomposing overall performance into components that are related to specific elements of performance

- Asset allocation decision
  - Market timing
  - Up and Down Markets
- Security selection decision
  - Sectors or industries
  - Individual companies

Decomposition of Performance Attribution

Assume two broad asset markets, (1) stocks & (2) bonds.

- Want to compare a managed portfolio return (r_p) with a benchmark portfolio return (r_m)

$$r_p - r_m = (w_{p1}r_{p1} + w_{p2}r_{p2}) - (w_{m1}r_{m1} + w_{m2}r_{m2})$$

$$= (w_{p1} - w_{m1})r_{m1} + (w_{p2} - w_{m2})r_{m2} \rightarrow \text{asset alloc.}$$

$$+ w_{p1}(r_{p1} - r_{m1}) + w_{p2}(r_{p2} - r_{m2}) \rightarrow \text{sec. selec.}$$

- Difference in weights leads to asset allocation bets, and difference in returns within asset classes leads to security selection bets

Asset allocation vs. Selection

Market	(1) Portfolio weight	(2) Benchmark weight	(3) Excess weight	(4) Index return	(5)=(3)×(4) contribution to performance
Stocks	0.7	0.6	0.1	5.81%	0.581%
Bonds	0.07	0.3	-0.23	1.45%	-0.3335%
Cash	0.23	0.1	0.13	0.48%	0.0624%
Contribution of asset allocation					0.3099%

Market	(1) Portfolio return	(2) Benchmark return	(3) Excess return	(4) Portfolio weight	(5)=(3)×(4) contribution to performance
Stocks	7.28	5.81	1.47	0.7	1.03%
Bonds	1.89	1.45	0.44	0.07	0.03%
Contribution of selection within markets					1.06%

Daniel HERLEMONT

Appraisal Ratio

Active Portfolio : Squared Abnormal return

$$\left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{eA}}\right]^2$$

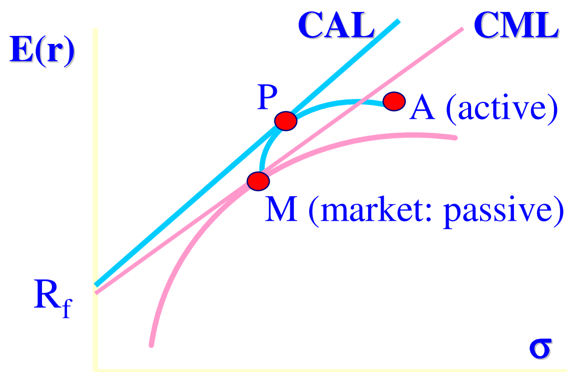
α_A = Alpha for the active portfolio

σ_{eA} = Unsystematic standard deviation for active

Daniel HERLEMONT

Combined portfolio's Squared Sharpe ratio

$$S_P^2 = \left[\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}\right]^2 + \left[\frac{\alpha_A}{\sigma_{eA}}\right]^2$$



Daniel HERLEMONT

Summary: Treynor-Black Model

Sharpe ratio can be increased by active management with added ability to pick stocks

- **Slope of new CAL > CML**

$$(r_p - r_f)/\sigma_p > (r_m - r_f)/\sigma_p$$

- **P is the portfolio that combines the passively managed portfolio with the actively managed portfolio**
- **The combined efficient frontier has a higher return for the same level of risk**

Daniel HERLEMONT