Processus stochastique

Processus stationnaires

Un processus aléatoire X est dit stationnaire si sa fonction de répartition est invariante par translation de l'origine des temps (shift). Cela signifie que pour un tel processus, pour tout réel positif non nul h, la distribution de $X(t)$ est identique à celle de $X(t+h)$. i.e.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall h \in \mathbf{R}_+^* : F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

Ainsi, dans le cas de processus continu de densité f_X , cela signifie aussi que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall h \in \mathbf{R}_+^* : f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h) = f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

Chaîne de Markov

Définitions et propriétés

- **Définitions**
  - *On dira qu'un processus stochastique X vérifie la propriété de Markov d'ordre k, si*

$$\Pr\{\underset{\text{Futur}}{\underset{\uparrow}{X(t_{n+1})\le x_{n+1}}}\,|\,\underbrace{X(t_n)=x_n,\cdots,X(t_1)=x_1}_{\text{Histoire}}\}=\Pr\{\underset{\text{Futur}}{\underset{\uparrow}{X(t_{n+1})\le x_{n+1}}}\,|\,\underset{\text{Présent}}{\underset{\uparrow}{X(t_n)=x_n}},\underbrace{\cdots,X(t_{n-k+1})=x_{n-k+1}}_{\text{Passé proche}}\}$$

  - *Le processus est dit de Markov s'il est un processus d'ordre 1, i.e.*

$$\Pr\{\underset{\text{Futur}}{\underset{\uparrow}{X(t_{n+1})\le x_{n+1}}}\,|\,\underbrace{X(t_n)=x_n,\cdots,X(t_1)=x_1}_{\text{Histoire}}\}=\Pr\{\underset{\text{Futur}}{\underset{\uparrow}{X(t_{n+1})\le x_{n+1}}}\,|\,\underset{\text{Présent}}{\underset{\uparrow}{X(t_n)=x_n}}\}$$

  - *Souvent, les processus de Markov utilisés en évaluation de performance sont invariants aux shifts du temps, ainsi, $\forall\ s<t$, et x, x_s, nous avons*

$$\Pr\{X(t)\le x\,|\,X(s)=x_s\}=\Pr\{X(t-s)\le x\,|\,X(0)=x_s\}$$

Chaîne de Markov

Définitions et propriétés

- **Définitions**
  - *Dans le cas d'un processus à temps discret, on dit qu'il vérifie la propriété de Markov d'ordre* 1 *si*

$$\Pr\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Futur}}}{X(n+1)=i_{n+1}}\mid \underbrace{X(n)=i_n,\cdots,X(1)=i_1}_{\text{Histoire}}\}=\Pr\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Futur}}}{X(n+1)=i_{n+1}}\mid \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Présent}}}{X(n)=i_n}\}$$

  - *On appelle matrice de transition en un pas à l'instant* t_n, *la matrice*

$$\Pi^{(n,n-1)}=\left(p_{ij}^{(n,n-1)}\right)_{i\in\mathbf{E},j\in\mathbf{E}} \text{ avec } p_{ij}^{(n,n-1)}=\Pr\{X(t_n)=j\mid X(t_{n-1})=i\} \text{ et } \sum_{j\in\mathbf{E}} p_{ij}^{(n,n-1)}=1$$

  - *Le processus ainsi défini est dit « chaîne de Markov ».*
  - *Une chaîne de Markov à temps discret est dite homogène, si*

$$p_{ij}^{(n,n-1)}=\Pr\{X(t_n)=j\mid X(t_{n-1})=i\}=p_{ij}^{(1)}=\Pr\{X(t_1)=j\mid X(t_0)=i\}=p_{ij}\ ;\ \forall\, n\in\mathbf{N}$$

  - Plus généralement,

$$\forall r,s: r<s \Rightarrow p_{ij}^{(s,r)}=\Pr\{X(s)=j\mid X(r)=i\}=\Pr\{X(s-r)=j\mid X(0)=i\}=p_{ij}^{(s-r)}$$

Chaîne de Markov

Définitions et propriétés (suite)

- **Définition :**

  Nous appelons système d'équations de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m,s)} = \sum_{k \in \mathbf{E}} p_{ik}^{(n,s)} p_{kj}^{(m,s)}, \quad \forall n,m,s \in \mathbf{N}; \quad \forall i,j \in \mathbf{E}$$

  où $p_{ij}^{(k,s)}$ est l'élément à l'intersection de la ligne i et la colonne j de la matrice de transition $\Pi^{(k,s)}$.

- **Corollaire :**

  Dans le cas d'une CMTD homogène, nous avons

$$\begin{cases} \Pi^{(n+s,s)} = \Pi^n \\ \Pi^{(s,s)} = \mathbf{Id} \end{cases} ; \forall n,s \in \mathbf{N}$$

- **Preuve**

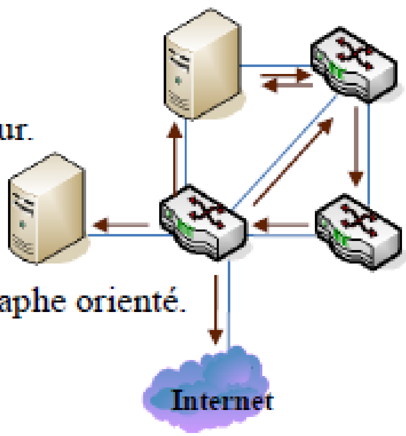
  D'après les équations de Chapman- Kolmogorov, on a dans le cas homogène

$$\Pi^{(n+s,s)} = \Pi^{(1,s)}\,\Pi^{(n+s-1,s)} = \Pi\ \Pi^{(n+s-1,s)}$$

  le résultat recherché est obtenu par récurrence.

Chaîne de Markov

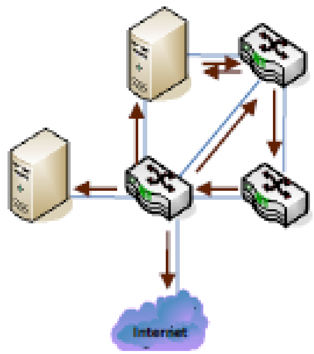
Problème de modélisation



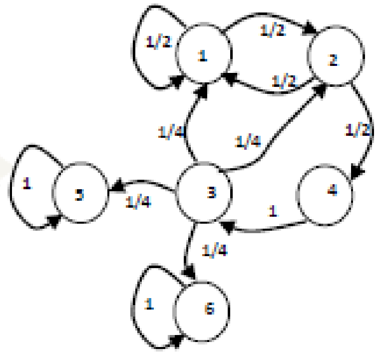
- On se propose de modéliser à l'aide d'une CMTD le problème suivant :
  - Un paquet se déplace dans un réseau propriétaire où il peut :
    1. Etre commuté d'une liaison vers une autre par le biais d'un routeur/commutateur.
    2. Subir des traitements aux niveau d'un serveur.
    3. Sortir du réseau propriétaire vers l'Internet.
  - Le réseau de transport est un réseau à commutation de paquets modélisé par un graphe orienté.
  - On suppose les 2 hypothèses suivantes :
    - ✓ Suite à la coopération des protocoles de la couche transport dans un réseau à commutation de paquets, le choix d'une direction par un paquet est supposé aléatoire.
    - ✓ Les directions possibles à partir d'un nœud donné sont supposées équiprobables (i.e. routage probabiliste équitable).
- **Question 1 :** Représenter le graphe pondéré de la CMTD associée à la modélisation de ce problème.
- **Question 2 :** Déterminer la matrice de transition.
- **Question 3 :** Un paquet initialement au niveau du commutateur 4, déterminer la probabilité qu'il se retrouve dans ce même état après 6 transitions ?

Chaîne de Markov

1. et 2.



Modélisation



Modélisation

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\Pi^6 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{13}{64} & \frac{1}{8} & \frac{7}{64} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{17}{64} & \frac{11}{64} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{5}{32} & \frac{13}{128} & \frac{1}{16} & \frac{7}{128} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{11}{64} & \frac{7}{64} & \boxed{\frac{1}{16}} & \frac{1}{16} & \frac{19}{64} & \frac{19}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Probabilité

$$\Pr(X_6 = 4 | X_0 = 4) = \Pi^6_{44} = \frac{1}{16}$$

Notions de CMTD

Etude du régime permanent d'une CMTD

Exercice

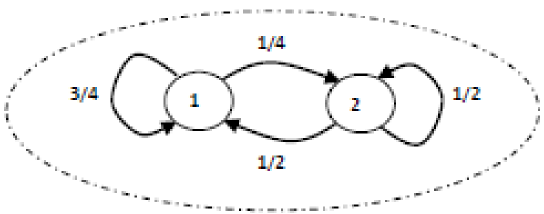
- La CMTD associée aux traitements successifs répartis sur deux serveurs a pour matrice de transition P :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le graphe pondéré associé à la CMDT modélisant ce réseau.
2. Montrer que cette CMTD est irréductible et apériodique.
3. Comment sont les états de cette CMTD.
4. Calculer le vecteur π des probabilités stationnaires.

- Solution

1.



2. De tout état i on peut atteindre tout autre état j en une et une seule étape; la CMTD est donc irréductible.
3. Tous les états d'une CMTD irréductible finie sont récurrents non-nuls.
4. Comme la chaîne est irréductible et apériodique et comme les états sont récurrents non-nuls, le vecteur π des probabilités stationnaires existe et il est tel que :

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi = (0.6667, 0.3333)$$

Réseaux de files d'attente : Notations

- Dans la description des réseaux de files d'attente, nous utilisons les notations :

N	Nombre de nœuds dans le réseau.
K	Nombre constant de paquets dans le cas d'un réseau fermé.
k_i	Etat du processus du nombre de paquets du nœud *i*.
$(k_1,k_2,\ldots,k_N)$	Etat du réseau tel que dans un réseau fermé $\sum_{i=0}^{N} k_i = K$.
m_i	Nombre de services parallèles au niveau du routeur *i*.
μ_i	Taux de service au niveau du routeur *i*.
r_{ij}	Probabilité de routage d'un paquet au niveau du nœud *i* vers le nœud *j*.
r_{0j}	Probabilité d'entrée depuis l'extérieur d'un réseau ouvert au niveau du routeur *j*.
r_{i0}	Probabilité de sortie vers l'extérieur d'un réseau ouvert au niveau du routeur *i*. Cette probabilité vérifie $r_{i0} + \sum_{j \neq 0} r_{ij} = 1$.
ρ_{0j}	Taux d'arrivée des paquets de l'extérieur d'un réseau ouvert vers le nœud *j*.
λ_i	Taux total des arrivées des paquets au niveau du nœud *i*.
λ	Taux total des arrivées des paquets depuis l'extérieur vers un réseau ouvert $\lambda = \sum_{i=1}^{N} r_{0j}$

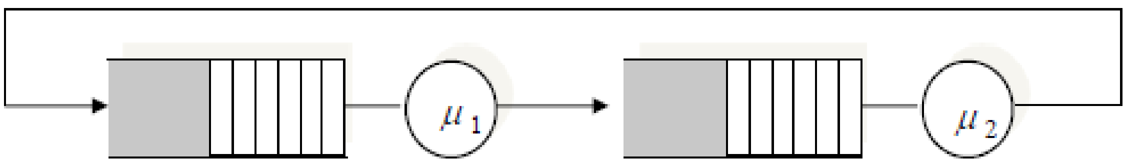
Réseaux de files d'attente : Notations

- Symboles pour décrire les réseaux contenant de multiples classes de paquets sont :

R	Nombre constant de classes de paquets circulant dans le réseau.
$K^{(r)}$	Nombre de paquets de la classe r. Ce nombre est constant dans un réseau fermé.
$k_i^{(r)}$	Etat du processus du nombre de paquets de la classe r du nœud i : $\sum_{i=0}^{N} k_i^{(r)} = K^{(r)}$
$\mathbf{k}^{(r)}=(k_1^{(r)},k_2^{(r)},\ldots,k_N^{(r)})$	Etat de la classe r dans le réseau telle que dans un réseau fermé : $\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=0}^{N} k_i^{(r)} = K$
$\mathbf{K} = (K^{(1)},K^{(2)},\ldots,K^{(R)})$	Vecteur des nombre de paquets par classes.
$\mathbf{S}_i = (k_i^{(1)},k_i^{(2)},\ldots,k_i^{(R)})$	Vecteur d'état du routeur i $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i = \mathbf{K}$
$\mathbf{S} = (\mathbf{S}'_1, \mathbf{S}'_2,\ldots, \mathbf{S}'_R)$	Matrice d'état du réseau à R classes de paquets.
$m_i^{(r)}$	nombre de services de la classe de paquets r au niveau du routeur i.
$r_{ij}^{(r)}$	Proportion du flux sortant du nœud i sur le lien (i,j) de classe r.
$r_{ij}^{(r,s)}$	Proportion du flux sortant du nœud i sur le lien (i,j) passant de la classe r vers la classe s.
$r_{i0}^{(r)}$	Proportion du flux de classe r sortant du réseau au nœud i . Cette probabilitévérifie $r_{i0}^{(r)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} r_{ij}^{(r,s)} = 1$.
λ	Taux total des arrivées des paquets depuis l'extérieur vers un réseau ouvert .
$\lambda_{0j}^{(r)}$	Taux d'arrivée des paquets de la classe r depuis l'extérieur vers le nœud j : $\lambda_{0j}^{(r)}=\lambda\, r_{0j}^{(r)}$
$\lambda_i^{(r)}$	Taux des arrivées des paquets de la classe r au niveau du nœud i : $\lambda_i^{(r)} = \lambda\, r_{0i}^{(r)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} \lambda_j^{(s)}\, r_{ji}^{(r,s)}$ où $r_{0j}^{(r)} = 0$ dans le cas des réseaux fermés.

Exercices

- Considérons un réseau tandem fermé de deux routeurs avec K paquets (réseau cyclique). Supposons que le routeur 1 soit de taux de service μ_1 et que le routeur 2 soit de taux de service μ_2 .



1. Déterminer l'espace d'état de la chaine de Markov issue de ce problème.
2. Quel type de files d'attente convient pour la modélisation des routeurs dans ce problème.
3. Déterminer les taux de charges des deux routeurs.
4. Calculer les probabilités stationnaires marginales des deux routeurs.
5. Calculer les taux d'utilisation des deux routeurs.
6. Calculer le débit dans ce réseau
7. Calculer le nombre moyen de paquets dans chacun des routeurs
8. Calculer les temps de séjours moyens dans les deux routeurs.

Exercices

1. L'espace d'état dans ce cas est $\{(k_1, k_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | k_1 + k_2 = K\}$
   C'est un espace d'état multidimensionnel.
2. Vue que le réseau est fermé , on utilisera des files d'attente M/M/1/*K.*
3. Les taux de charges des deux routeurs sont :

$$\rho_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\pi_2(k_2) = \pi_2(0)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{k_2}, \forall k_2 \leq K \qquad \sum_{n=0}^{K} \pi_2(n) = 1 \text{ i.e. } \pi_2(0) = \left(\sum_{n=1}^{K} \rho_2^n\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho_2}{1-\rho_2^{K+1}} & \text{si } \rho_2 \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e.

$$\pi_2(n) = \rho_2^n \frac{1-\rho_2}{1-\rho_2^{K+1}}, \quad \forall n \in [0..K] \quad \text{si } \rho_2 \neq 1$$

$$\lambda = \lambda_1 = U_1 \ \mu_1 = \lambda_2 = U_2 \ \mu_2 \quad \text{où} \quad U_1 = 1 - \pi_1(0) \ \text{ et } \ U_2 = 1 - \pi_2(0)$$

6.

$$\begin{aligned} \overline{K}_2 &= \pi_2(0) \sum_{n=0}^{K} k_2 \ \rho_2^n & \text{où } \rho_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ &= \pi_2(0) . \ \rho_2 . \frac{\partial}{\partial \rho_2} \sum_{n=0}^{K} \rho_2^n & \text{si } \rho_2 \neq 1 \\ &= \pi_2(0) . \ \rho_2 . \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1-\rho_2^{K+1}}{1-\rho_2}\right) \\ &= \frac{\rho_2}{1-\rho_2} - \frac{(K+1)\,\rho_2^{K+1}}{1-\rho_2^{K+1}} & \text{si } \rho_2 \neq 1 \end{aligned}$$

et $\overline{K}_1 = K - \overline{K}_2$

8. D'après la loi de Little, le temps moyen de séjour des paquets dans chacun des routeurs :
   - ✓ Routeur 1 : $R_1 = \dfrac{\overline{K}_1}{\lambda_1}$
   - ✓ Routeur 2 : $R_2 = \dfrac{\overline{K}_2}{\lambda_2}$