Canaux de transmission et Codage

Mostafa Belkasmi

2009-2010 ENSIAS

Plan

- Définition d'un canal
- Capacité d'un canal
- Limite du codage canal

Définition d'un canal

Canal discret stationnaire sans mémoire :

Il possède

un alphabet d'entrée fini $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$

un alphabet de sortie fini $B = \{y_1, \ldots, y_M\}$

$$X_k \longrightarrow \boxed{\text{CANAL SANS MEMOIRE}} \longrightarrow Y_k$$

Caractérisé par les probabilités de transition à l'instant k :

$p^{(k)}(y_j/x_i) = \mathrm{Prob}(Y_k = y_j/X_k = x_i)$
pour i dans {1,..,N} et j dans {1,..,M}

Définition d'un canal

- Et pour tout i dans {1, .., N}

$$\sum_{j=1}^{M} p^{(k)}(y_j / x_i) = 1$$

- Ces Proba sont regroupées dans une matrice dite matrice de transitions $T = [t_{ij}] = [\, p^{(k)}(y_j/x_i)]$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1M} \\ t_{21} & \cdots & t_{2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & \cdots & t_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & \cdots & p(y_M/x_1) \\ p(y_1/x_2) & \cdots & p(y_M/x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1/x_N) & \cdots & p(y_M/x_N) \end{bmatrix}$$

Propriétés de canaux

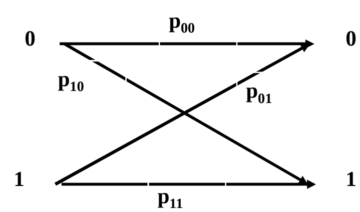
- ***Canal Stationnaire*** si ses probabilités de transition sont indépendantes du temps :

$$p^{(k)}(y_j/x_i) = p^{(k+r)}(y_j/x_i)$$

- ***Sans mémoire*** si le symbole de sortie Y_k ne dépend que du symbole d'entrée X_k .

EXEMPLE

Le canal binaire symétrique (CBS) est un canal discret stationnaire sans mémoire.
A = {0, 1 }   B = {0, 1}



- ***Il est symétrique si :***

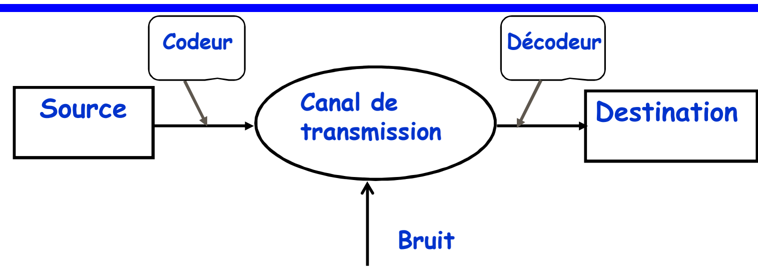
$p_{00} = p_{11} = 1-p$ $p_{10} = p_{01} = p$

où p est la probabilité d'erreur sur le canal.

Propriétés de canaux

- Avec mémoire quand le symbole Y_k dépend de plusieurs symboles d'entrée (X_k , X_{k-1},…).
- Par exemple les transmissions en présence d'interférences entre symboles.

Capacité d'un canal



Deux adaptations :

- Codage pour une source S → limite H(S)
- Codage pour un canal → Capacité C

→ Étudier les Entrées/Sorties d'un canal

Information mutuelle entre deux messages

- La source délivre un ensemble de N messages
  $[X] = [x_1, \dots, x_N]$
- L'utilisateur reçoit un ensemble de M messages
  $[Y] = [y_1, \dots, y_M]$

$\rightarrow$ Il y a perturbation sur observation x_i :
soit y_1 observé alors que x_i émis

$\rightarrow$ l'incertitude sur la réalisation de x_i, ayant observé y_1 :

$I(x_i/y_1) = -\log p(x_i/y_1)$: incertitude a posteriori

Information mutuelle entre deux messages

- Donc après réception d'un message yj :
  les probabilités p(xi) (probabilité a priori) deviennent p(xi/yj) (probabilité a posteriori)

Définition :

- L'information mutuelle entre xi et yj :
  I(xi, yj) = incertitude avant observation de yj - incertitude après observation de yj

  $= I(xi) - I(xi / yj)$

  $= \log p(xi/yj)/p(xi)$

Information mutuelle entre deux messages

- I(xi, yj) = I(xi) – I(xi / yj)

  = log p(xi/yj)/p(xi)

Deux cas limites :

- p(xi/ yj) = 1, perturbations nulles

  → I (xi, yj) = I(xi)
- p(xi/ yj) = p(xi), perturbations très fortes

  → I (xi, yj) = 0

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (1)

- Travaillons sur un exemple.
- Considérons un canal avec les probabilités des symboles d'entrée : p1 = 1/4 et p2 = 3/4.
- Sa matrice de transitions est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- La distribution de Y est alors : (champ à la sortie)

$$q_1 = p_1 P\{Y = y_1 / X = x_1\} + p_2 P\{Y = y_1 / X = x_2\} = 7/15$$
$$q_2 = p_1 P\{Y = y_2 / X = x_1\} + p_2 P\{Y = y_2 / X = x_2\} = 8/15$$

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (2)

- **La distribution de (X,Y) est : champ composé Entrée/Sortie :**

$$p_{11} = p_1 p_{1/1} = 1/6 \qquad p_{12} = p_1 p_{2/1} = 1/12$$
$$p_{21} = p_2 p_{1/2} = 3/10 \qquad p_{22} = p_2 p_{2/2} = 9/20$$

- **Ceci définit l'espace produit (X,Y) et**
  [P(X,Y)] = {P(xi,yj) = Pr(X=xi , Y =yj)}

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (3)

- **Calculons les entropies de X, Y, et (X,Y):**

  H(X) = -1/4log1/4 -3/4log3/4 = 0,811 bit

  H(Y) = -7/15log7/15 -8/15log8/15 = 0,997 bit

  H(X,Y) = -1/6log1/6 -1/12log1/12
  -3/10log3/10 -9/20log9/20
  = 1,769 bit

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (4)

Entropies conditionnelles (cas général)

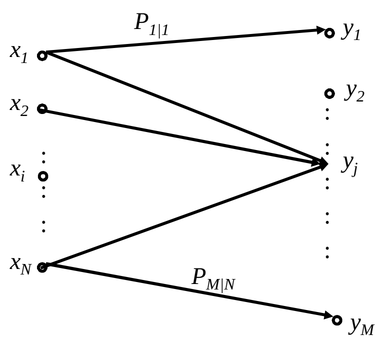
- Si le champ de sortie est connu il reste, à cause des perturbations, une incertitude sur la connaissance du champ d'entrée.
- La valeur moyenne de cette incertitude est :

l'entropie du champ X
conditionnée par le champ Y

--> H(X/Y) incertitude résiduelle moyenne

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (5)

$$H(X/Y) = \sum_{j=1}^{M} p(y_j) H(X/y_j)$$
$$= -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(y_j)\, p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j)$$



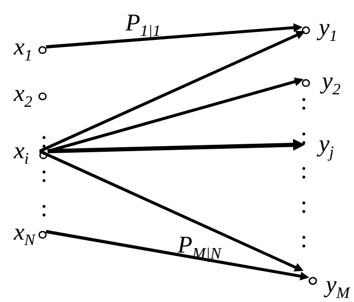
c'est l'équivoque
i.e. : la mesure de l'équivoque sur le champ d'entrée si le champ de sortie est connu

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (6)

De façon analogue on a :

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(xi)p(yj/xi)\log p(yj/xi)$$

On l' appelle <u>l'erreur moyenne</u> et ça mesure l'incertitude sur le champ de sortie si le champ d'entrée est connu.



PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (7)

- **On montre que :**

  $$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$$

- **On peut maintenant définir la quantité :**

  $$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y)$$

- **I(X,Y) = l'information que l'on obtient sur le champ d'entrée X en recevant celle sur le champ de sortie Y.**

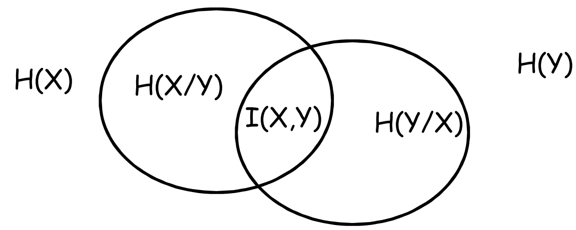
- **c'est l'information transmise par le canal**

  → **<u>Transinformation</u>**

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (8)

- **On montre qu'on a aussi :**

$$\mathbf{I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)}$$
$$\mathbf{= H(Y) - H(Y/X)}$$



PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ENTROPIE ET LE CANAL (9)

- **Revenons maintenant à l'exemple:**

- **Calculons l'erreur moyenne H(Y/X) et en déduisons la transinformation I(X,Y):**

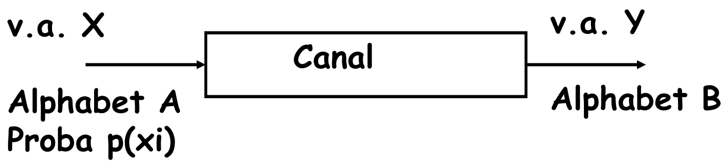
  H(Y/X=x1) = -2/3log2/3 - 1/3log1/3 = 0,918 bit
  H(Y/X=x2) = -2/5log2/5 - 3/5log3/5 = 0,971 bit
  H(Y/X) = 1/4*0,918 + 3/4*0,971 = 0,958 bit

  d'où : I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)
  = 0,997 - 0,958 = 0,039 bit

- **tout ceci étant mesuré par symbole de l'entrée ou de la sortie du canal.**

Capacité d'un canal (1)

- Revenons au cas général :



- L'information mutuelle moyenne entre les ensembles A et B (l'entrée et la sortie du canal) :

I(X,Y) = I(A,B) = H(X) – H(X/Y)

Capacité d'un canal (2)

- L' I.M. moyenne:

I(X,Y) = I(A,B) = H(X) – H(X/Y)

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i / y_j)}{p(x_i)}$$

dépend à la fois :

- de la source (i.e. les p(xi))
- du canal (les p(yj/xi))

et on montre que 0 =< I(X,Y) =< H(X)

Capacité d'un canal (3)

- **Nous sommes ainsi tentés de déterminer le maximum de I(X,Y)**

- **Maximum par rapport à quoi ?**

  - Certainement pas par rapport aux probabilités conditionnelles (donnée du problème).

  - Mais maximum par rapport aux différentes distributions de probabilité possibles pour les symboles appartenant à *A*.

Capacité d'un canal (4)

- **On définit ainsi une quantité *C* (capacité du canal) comme étant le maximum de I(X,Y), max sur toutes les distributions possibles des symboles à l'entrée.**

$$C = \max_{\{p(xi)\}} [I(X,Y)].$$

- **L'unité de la capacité est le bit par symbole.**
- **Si un symbole entre dans le canal chaque Tc sec, la capacité en bit/sec est *C'* = *C*/Tc.**

Canaux Uniformes

- Définition : Un canal (supposé discret et sans mémoire) est dit uniforme lorsque les lignes et les colonnes de sa matrice de transitions sont les permutations d'un même ensemble de nombres.

- Dans ce cas particulier, on montre que :

$$C = \log M + \sum_{j=1}^{M} p(y_j / x_i) \log p(y_j / x_i)$$

Pour un x_i fixe quelconque

Canaux Uniformes

- EXEMPLE : le canal binaire symétrique. C'est le canal uniforme le plus simple que l'on puisse imaginer.

$$T = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

- Sa capacité à pour valeur :

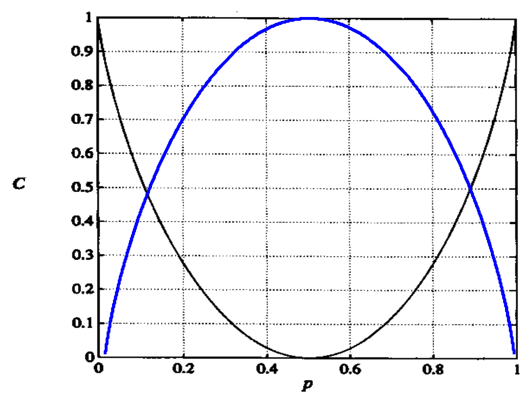
$$C = 1 + p \log p + (1-p)\log(1-p)$$

- Donc de façon générale pour un CBS on a :

$$C \leq 1 \text{ bit/symbole.}$$

Canaux Uniformes

- La capacité C d'un CBS en fonction de p :



Canal entrée discrète sortie continue

- L'entrée du canal est un élément de l'alphabet A = {x1,... xN}
- La sortie peut être n'importe quelle valeur réelle → B = R (M=∞)
- Caractérisé par un ensemble fini de densité de probabilité :

P(y/ X=xi)   pour i =1, .., N

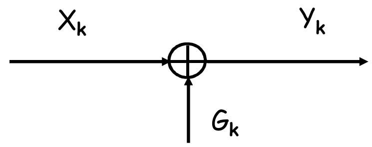
Exemple

- Canal à bruit additif, blanc et gaussien (AWGN) :

Dans ce cas :

$Y_k = X_k + G_k$

où G_k est un échantillon d'une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 cad



$$p(y/X_k=x_i)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y-x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Capacité

- <u>Extension du discret au continu :</u>

  Distribution de probabilité → densité de probabilité

$$\sum \quad \rightarrow \quad \int$$

- Capacité = maximum de la transinformation

$$C = max\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y/x_i)p(x_i)\log\frac{p(y/x_i)}{p(y)}dy$$

$$\text{où} \quad p(y)=\sum_{i=1}^{N}p(y/x_i)p(x_i)$$

Exemple

- Canal AWGN à entrées binaires :
- Les deux symboles en entrée sont supposées équiprobables p(X=a)=p(X=-a)=1/2
- Dans ce cas la capacité est donnée par:

$$C = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y/a)\log\frac{p(y/a)}{p(y)}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y/-a)\log\frac{p(y/-a)}{p(y)}dy$$

Les canaux de transmission continus

- Modèles discrets =modèles simples
- Malheureusement, les signaux de la réalité :
  - sont continus et dépendant du temps : parole, musique, télémesure d'une grandeur continue, image,....
- Par analogie :
  - un message continu sera considéré comme une réalisation possible
    - d'une v.a. continue,
    - d'un vecteur de v.a.c.
    - ou d'une fonction aléatoire
  - auxquelles on identifie la source.

Les canaux de transmission continus

- Les canaux de transmission continus sont les moyens de transmission de messages continus (ligne téléphonique, milieu de propagation hertzienne,...)

- On peut ainsi étendre les résultats obtenus à des signaux continus.

- Passer de l'entropie H → la transinformation I
  → La capacité C

Les canaux de transmission continus

- Ainsi Shannon, Hartley et Tuller ont obtenu:

$$C = W \log (1+ S/N)$$

  - où S est la puissance moyenne d'un signal x(t) limité à une bande passante W et un intervalle de temps T
  - et N est la puissance moyenne du bruit dans la bande W.

- Précision : cette formule est obtenue pour un canal qui est supposé être soumis à un bruit additif blanc et gaussien.

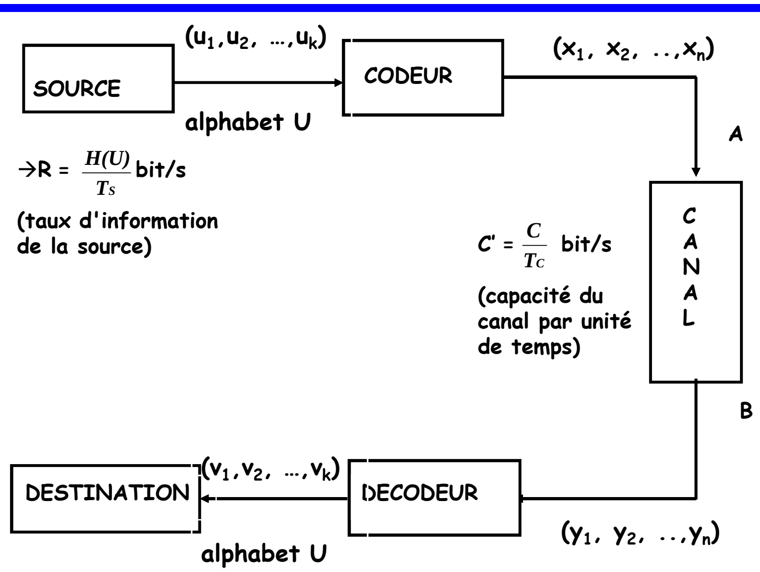
Limite du codage canal

- Pour énoncer un résultat très important de cette théorie (second théorème fondamental de Shannon) on se replace dans la cas d'un canal discret sans mémoire.

- Et nous supposons une transmission dans un canal bruité.

- Dans quel cas on peut agir ?

Limite du codage canal



Limite du codage canal

- Remarque : on doit avoir :

  kTs=nTc

- Notation : la probabilité d'erreur

$$P_e = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Prob(u_i \neq v_i)$$

Limite du codage canal

THÉORÈME FONDAMENTAL DU CODAGE :

- Si l'entropie par seconde de la source R est supérieure à la capacité du canal par seconde C' alors il existe une constante α telle que Pe $\geq \alpha$ pour toutes les valeurs de k.

- Sinon on peut toujours trouver un codeur/décodeur avec lequel Pe → 0.

Limite du codage canal

Résultat 1:

- **Pour un débit d'information > à la capacité du canal, la probabilité d'erreur moyenne par digit émis par la source est bornée inférieurement.**
- **La théorie nous montre ainsi qu'il n'existe aucun espoir d'obtenir une transmission de bonne qualité dans ce cas.**

Limite du codage canal

Résultat 2:

- **Lorsque R < C', et en utilisant une procédure adéquate pour le codage et le décodage,**
- **il est possible de reproduire, après transmission le long du canal, les messages fournis par la source**
- **avec une probabilité d'erreur arbitrairement petite, (Pe n'a pas de borne inférieure).**