Ecole **N**ationale **S**upérieure d'**I**nformatique et d'**A**nalyse des **S**ystèmes

Systèmes Télécoms
ITR - SSI

2012 - 2013

Plan de cours

- Généralités
- Analyse spectrale des signaux analogiques
- Systèmes linéaires continus
- Du continu au discret
- Analyses spectrale des signaux discrets (TF à Temps Discret, TF discrète, FFT)

GENERALITES

Rappels : Signaux discrets

Rappels de base :

$\mathbb{R}$ Ensemble des réels : 1,234 ; -1 ; π ; etc.

$\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, etc.

$\mathbb{Z}$ Ensemble des entiers relatifs : -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

$\mathbb{Q}$ Ensemble des nombres rationnels (quotient de deux $\mathbb{Z}$). ex : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Signal discret

Soit un signal $x(t)$ échantillonné à une période T_e. Le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_n x(nTe)\delta(t - nTe)$$

En considérant une période d'échantillonnage normalisée ($T_e = 1$) , on a :

$$x_e(t) = \sum_n x(n)\delta(t - n)$$

On obtient la suite de valeurs $\{x(n)\}$ appelée signal discret.

- Ainsi, un signal discret est une suite $\{x(n)\}$ représentée par la fonction de $\mathbb{Z} \to \mathbb{C} : n \to x(n)$

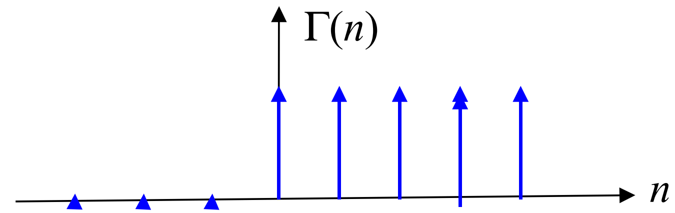
➢ Remarque : la normalisation permet de considérer la suite de valeurs $x(nT_e)$ *indépendamment* du processus de discrétisation qui l'a générée.

Signaux discrets particuliers

Echelon unité

$$\Gamma(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

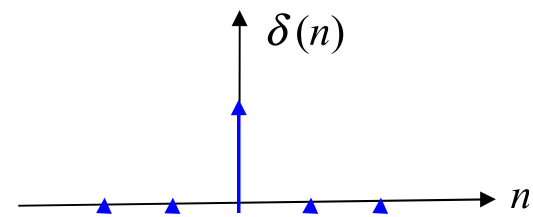
➢ Remarque : $\Gamma(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} \delta(n-r)$



Impulsion discrète (fonction delta de Kronecker)

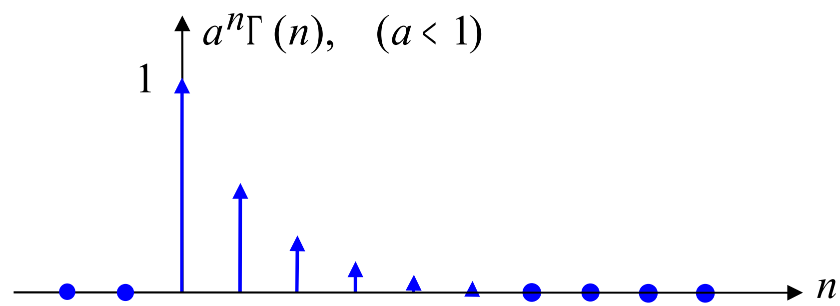
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

➢ Remarque : $\delta(n) = \Gamma(n) - \Gamma(n-1)$



Exponentielle décroissante causale

$$x(n) = a^n\Gamma(n), \quad a < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

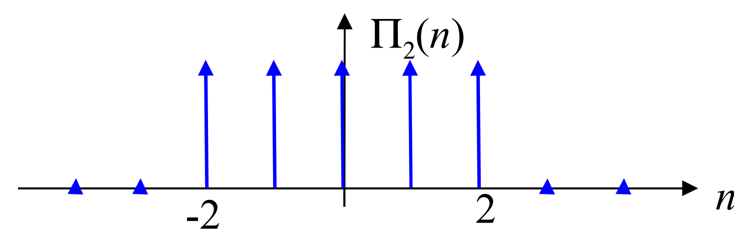


Signal rectangulaire

$$\Pi_T(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } -T \leq n \leq T \quad T \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le signal est de longueur $2T+1$

➢ Remarque : $\Pi_T(n) = \Gamma(n+T) - \Gamma(n-(T+1))$



Signaux discrets périodiques

Définition de la périodicité

Un signal discret est périodique de période N si :

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } x(n+N) = x(n) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

- Remarque : la plus petite valeur de N est la période fondamentale

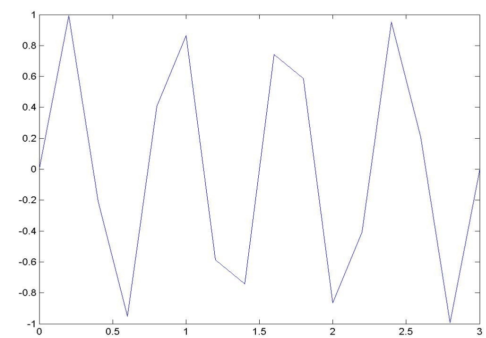
Exemples

- Signal sinusoïdal : $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

- Signal exponentiel complexe : $x(n) = ae^{j\omega_0 n}$

⚠ En discret, les signaux sinusoïdaux ne sont pas nécessairement périodiques.

- **Condition de périodicité :** $\omega_0 n = 2\pi k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$



soit $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{n}{k}$ avec $\dfrac{n}{k} \in \mathbb{Q}$

La période est l'entier naturel N (s'il existe) tel que $N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

- Remarque : en continu, la condition de périodicité s'énonce $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{n}{k} \in \mathbb{R}$ et est moins restrictive.

Energie et puissance des signaux discrets

Energie

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Puissance moyenne

Si le signal est à énergie infinie, on définit la puissance moyenne

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- Exemple : signal échelon discret

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\Gamma(n)|^2 \rightarrow P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 \rightarrow P = \lim_{N \to +\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

Puissance moyenne d'un signal périodique

Si N est la période alors $P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{N} |x(n)|^2$ Energie sur une période : $E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

Opération sur les signaux discrets

Soit $\{x(n)\} = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y(n)\} = \{y(n), n \in \mathbb{Z}\}$, des signaux discrets

- Multiplication par un scalaire

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\{x(n)\} = \{\lambda x(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Somme de signaux discrets

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Multiplication de signaux discrets

$$\{x(n)\} \times \{y(n)\} = \{x(n) \times y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

Ces opérations sur les signaux discrets donnent des signaux discrets.

- Signaux définis par une relation de récurrence :

Aux équations différentielles dans le cas continu correspondent des équations de récurrence dans le cas discret. Ces équations permettent de décrire des signaux discrets et des opérations sur ces signaux à l'aide d'additions et multiplications scalaires.

- Exemple : considérons l'équation récurrente :

$x(n) = ax(n-1)$ avec $x(0) = c$ (condition initiale)

On montre aisément que la solution à cette équation est : $x(n) = c\, a^n\, \Gamma(n)$

Transformée de Fourier des signaux à temps discret (TFTD)

Question : Comment faire l'analyse fréquentielle de signaux discrets ?

Soit $x_e(t)$ un signal issu de l'échantillonnage de $x(t)$: $x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

- Que donne la TF "classique" du signal échantillonné ?

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \right) e^{-j2\pi ft} dt \longrightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) e^{-j2\pi ft} dt}$$

En utilisant la définition de la distribution de Dirac, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi nfT_e}$

Par conséquent : $X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi nfT_e}$

La TF d'un signal échantillonné est une combinaison linéaire d'exponentielles complexes pondérées par la valeur des échantillons.

- Normalisation de la période d'échantillonnage :
  dorénavant et sauf mention contraire, on considerera que Te=1

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

TFTD

Définition

Soit $x(n)$ un signal discret. La TFTD $X(f)$ de ce signal est donnée par l'expression :

$$\boxed{X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}}$$

f est une variable continue

La TF d'un signal discret est une fonction continue ou non de la variable continue f

Remarque : idem que la TF d'un signal quelconque, avec une somme à la place de l'intégrale.

Condition d'existence de la TFTD

La TF d'un signal discret $x(n)$ existe si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$ i.e. si le signal est absolument sommable.

L'existence de la TFTD est donc liée à la convergence absolue de la série $x(n)$

(Exemple d'une série semi-convergente : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est finie mais pas $\sum_{n\geqslant 1} |\frac{(-1)^n}{n}|$)

TFTD

Périodicité de la TFTD

Soit $X(f)$ la TFTD du signal discret $x(n)$: $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi n(f+1)}$$

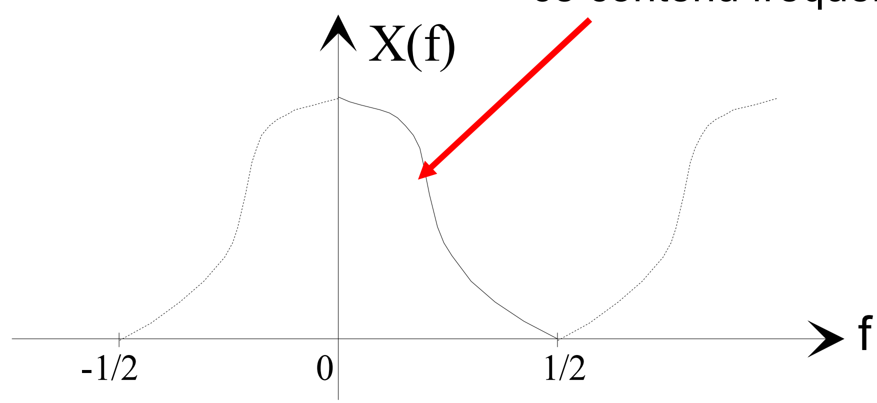
$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}e^{-j2\pi n}$$

$$X(f+1) = X(f)$$

- La TF des signaux discrets est périodique de période f=1

- Toute l'information fréquentielle du signal est localisée dans l'intervalle de fréquence : $f \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$x(n)$ est caractérisé par ce contenu fréquentiel



➢ Remarque

Si $x(n)$ est réel, $|X(f)|$ est paire et $\arg(X(f))$ est impair. On réduit donc l'analyse de $X(f)$ sur l'intervalle de fréquence $f \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

TFTD

Périodicité de la TFTD : généralisation avec Fe ≠ 0

Pour un signal échantillonné à la fréquence F_e, sa TFTD $X_e(f)$ est périodique de période F_e

→ l'information fréquentielle est contenue dans la bande $f \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$

On retombe sur un résultat connu, par un calcul différent !

TF inverse des signaux discrets

TFTD : $$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

Comme la TF des signaux discrets est périodique de période 1, l'expression de la TFTD inverse est donnée par :

$$\boxed{x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi nf} df}$$

Remarque : Intégrale car *f* est une variable continue

Représentation spectrale

$x(n)$, signal discret (support discret)

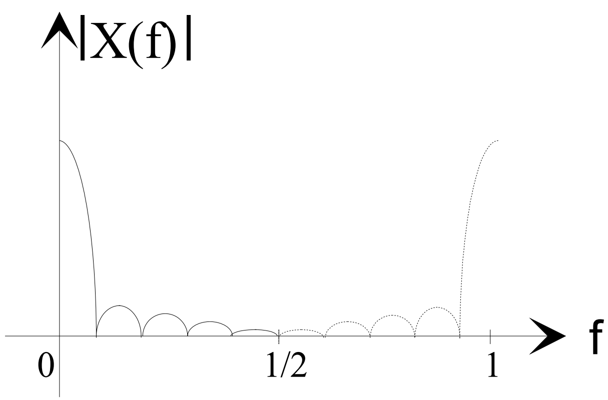
En fonction de la nature (périodique ou non) de $x(n)$, on a deux types de représentation spectrale possibles :

- $x(n)$ non périodique

$\big\downarrow$ TFTD

$X(f)$ est à support continu

Ex. : $x(n) = \begin{cases} 1 & n \in [-N,\ N-1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

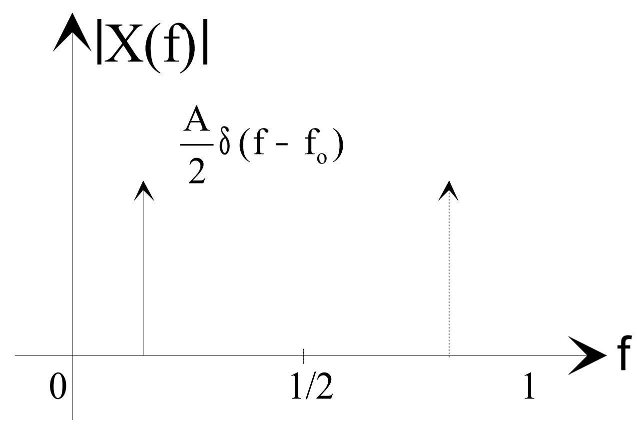


- $x(n)$ périodique

$\big\downarrow$ TFTD

$X(f)$ est à support discret

Ex. : $x(n) = A.\cos(2\pi f_0 n)$



Exemple de TFTD

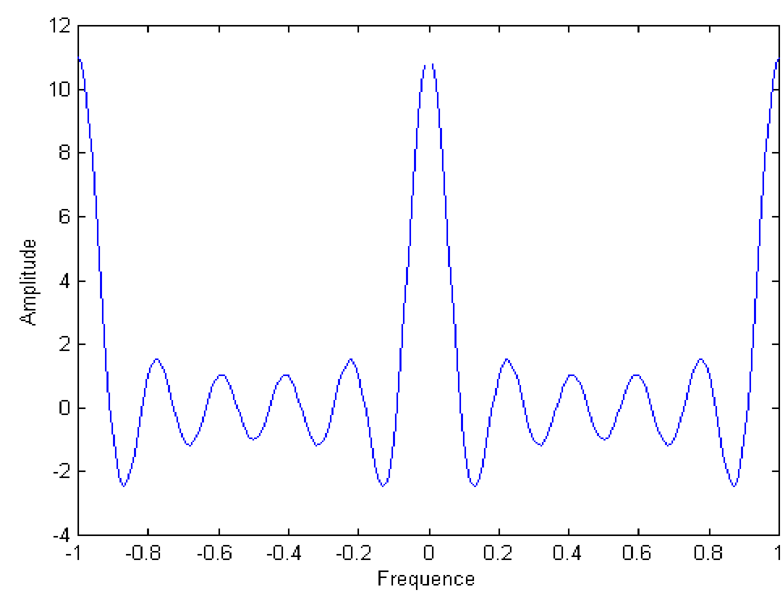
Soit $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

On a $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf} \longrightarrow X(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi nf}$

$X(f)$ est la somme de $N+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{-j2\pi f}$ et de premier terme $e^{j\pi N f}$

$$X(f) = e^{j\pi Nf} \frac{1-e^{-j2\pi(N+1)f}}{1-e^{-j2\pi f}}$$

$$X(f) = \frac{e^{-j\pi f}\left(e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f}\right)}{e^{-j\pi f}\left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right)} = \frac{\sin \pi f (N+1)}{\sin \pi f}$$



Remarques (pour Te = 1)
-Toute l'info est contenue dans [-½ , ½]
- Périodique de période 1

Propriétés de la TFTD

Globalement, la TFTD possède les mêmes propriétés que la TF :

- $X(f)$ est une fonction complexe. Si $x(n)$ est réel :

$$\left.\begin{array}{l} |X(f)| \text{ : spectre d'amplitude est une fonction paire} \\ \arg\left(X(f)\right) \text{ : spectre de phase est une fonction impaire} \end{array}\right\}$$

Etude sur l'intervalle de fréquence $f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

- Linéarité $\quad a.x(n) + b.y(n) \rightarrow aX(f) + bY(f)$

- Décalage temporel $\quad x(n - n_0) \rightarrow X(f)e^{-j2\pi f n_0}$

- Décalage fréquentiel (ou modulation) $\quad x(n)e^{j2\pi f_0 n} \rightarrow X(f - f_0)$

Propriétés de la TFTD

- TF de la dérivée du signal $$\frac{dx(n)}{dn} \rightarrow j2\pi f\, X(f)$$

- Relation de Parseval (conservation de l'énergie) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df$$

- Relations de Plancherel $$x(n) * y(n) \rightarrow X(f).Y(f)$$

$$x(n).y(n) \rightarrow X(f) * Y(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X(u)Y(f-u)du$$

- TFTD Inverse $$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi nf} df \quad \text{ou} \quad x(n) = \int_{0}^{1} X(f)e^{j2\pi nf} df$$

<u>Bilan sur la TFTD :</u>

- La TF fonctionne sur un signal à temps discret
- Mais en fréquence, on repasse en continu

= on perd l'avantage du numérique !

De la TFTD à la Transformée de Fourier Discrète (TFD)

TFTD de $x(n)$: $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$

- **Objectif :** On veut calculer la TF d'un signal discret à l'aide d'un calculateur

- **Difficultés**
  - Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.)
  - Le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est forcément discrète = un nombre fini de points fréquentiel $f_{n,}$ alors que f varie continûment ...

- **Solution :** Transformée de Fourier Discrète (TFD)
  - Limiter la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels
  - Discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels)

  A un nombre fini de valeurs $x(1)$, …, $x(N)$, on fait correspondre un nombre fini de valeurs $X(f_1)$, …, $X(f_L)$ telle que la TFD de x soit une approximation aussi bonne que possible de $X(f)$

- **Question**
  - Quelle est l'influence du nombre de points temporels N et du nombre de points fréquentiels L sur l'observation spectrale ?

Détermination de la TFD

Soit $\{x(0), x(1), \ldots, x(N\text{-}1)\}$ un signal discret de durée finie N. Sa TFTD est :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

- **Discrétisation de la fréquence sur L points :**

$X(f)$ est périodique de période 1, donc :

$$f = k\Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{1}{L} \quad \text{et} \quad k = 0,\ldots,L-1$$

L'approximation discrète de la TFTD de ce signal est :

F=k/L

$$X\left(\frac{k}{L}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{L} n}$$

k et n ne jouent pas le même rôle :

n : variable temporelle $n = 0, \ldots, N-1$

k : variable fréquentielle $k = 0, \ldots, L-1$

- Notation : $X\left(\frac{k}{L}\right) = X(k) \quad \text{avec} \quad k = 0,\ldots,L-1$

- La TFTD inverse de $x(n)$ est

$$x(n) = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi nf} df$$

car $X(f)$ est périodique de période 1

- L'approximation discrète de la TFTD inverse est

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{L} n}$$

c'est la TFD inverse.

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définition

- La TFD évaluée sur un nombre L de points fréquentiels d'un signal discret est définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{L} n}$$

N : nombre de points temporels

n : variable temporelle $n = 0, \ldots, N-1$

L : Nombre de points fréquentiels

k : variable fréquentielle $k = 0, \ldots, L-1$

➢ Remarque : $X(k)$ est périodique de période L

- La TFD inverse est :

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{L} n}$$

➢ Remarque

$\tilde{x}(n)$ est une suite périodique de période L.
La discrétisation de *x(k)* a entrainé une périodisation de *x(n)*

Dans la suite, sans perte de généralités et sauf mention contraire, on considérera $L=N$

➢ Remarque

On a vu avec la TFTD que : *Discrétisation en temporel* → *Périodisation en fréquentiel*

Ici avec la TFD : *Discrétisation en fréquentiel* → *Périodisation en temporel*

TFD d'un signal périodique

- Que se passe t'il si l'on applique la TFD à un signal périodique ?

Soit $x_p(n)$, un signal périodique de période N. Pour calculer sa TFD, on se restreint à une période

- La TFD $$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- La TFD inverse $$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Si $x(n)$ est une suite périodique de période N et $x(n)$ coincide exactement avec $x_p(n)$

Ce n'est pas le cas pour un signal quelconque !

$$\text{Suite } x(n) \text{ périodique de période } N \;\underset{\text{TFD inverse}}{\overset{\text{TFD}}{\rightleftarrows}}\; \text{Suite } X(k) \text{ périodique de période } N$$

Propriétés de la TFD

La TFD possède les propriétés classiques de la TFTD mais tous les calculs d'indice k et n se font modulo N

- Périodicité — $X(k)$ est périodique de période N
- Linéarité — $a.x(n)+b.y(n) \to aX(k)+bY(k)$
- Décalage temporel — $x(n-n_0) \to X(k)e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0}$
- Décalage fréquentiel ou modulation — $x(n)e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} \to X\left((k-k_0) \bmod N\right)$
- Relation de Parseval : conservation de l'énergie — $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- D'après la définition ci-dessus, il faut, pour calculer 1 valeur en fréquence de la TFD d'un signal de N points :
  - N-1 sommes complexes et N produits complexes
- Pour calculer une TFD à N points , il faudra donc :
  - N(N-1) sommes complexes N^2 produits complexes
- Sur un signal son wav de 6 secondes qui a 6*44100 = 264 600 points, on arrive à :
  - 10^{11} opérations complexes !!!
- La FFT va permettre de diminuer cela

Transformée de Fourier Rapide

- **Objectif :** trouver un algorithme de calcul efficace de la TFD de $\{x(n)\}$

La TFD de $\{x(n)\}$ s'écrit : $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$ $\longrightarrow$ $\boxed{X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n.k}}$ avec $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

- Propriétés de W_N
  - $W_N^{k+l} = W_N^k . W_N^l$
  - $W_N^{l+kN} = W_N^l$
  - $W_N^{2.n.k} = W_{N/2}^{n.k}$

Ecriture matricielle (avec N pair)

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{\frac{N}{2}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^2 & \cdots & \cdots & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ 1 & W^4 & \cdots & \cdots & W^{4\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} & & & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ W & W^3 & \cdots & \cdots & W^{(N-1)} \\ W^2 & W^4 & \cdots & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} & W^{3\left(\frac{N}{2}-1\right)} & & & W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = T_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & W & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & W^2 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} T_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{0\cdots\frac{N}{2}-1} &= T_{\frac{N}{2}} x_{pair} + D T_{\frac{N}{2}} x_{impair} \\ X_{\frac{N}{2}\cdots N-1} &= T_{\frac{N}{2}} x_{pair} - D T_{\frac{N}{2}} x_{impair} \end{aligned}}$$

Conclusion

- TFTD
  - Idem TF mais avec une somme.
  - Signal non périodique -> support en fréquence continu.
  - Signal périodique -> support discret.
  - La TFTD d'un signal est Périodique de période Fe.
  - Mais impossible à exploiter par un calculateur ...
- TFD
  - Limitation de la durée du signal par fenêtrage.
  - Discrétisation de la fréquence ...
  - ... d'où une périodisation dans le temps.
  - Le fenêtrage implique des déformations du spectre fréquentiel.
  - Gourmand en calcul => FFT !

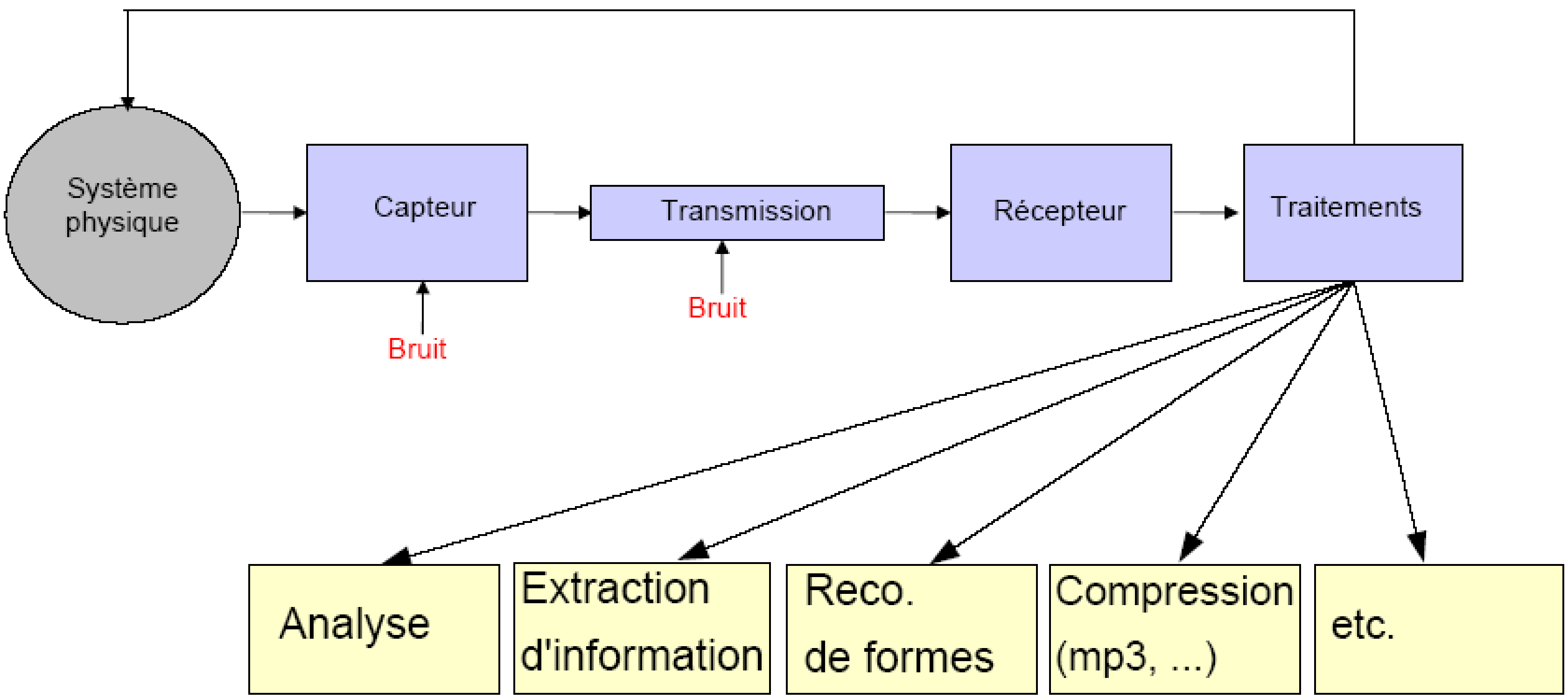
Objectifs

- Description et Représentation des signaux
- Maitrise du principe et les limites des méthodes de traitement
- Mise en oeuvre des méthodes de traitement simples

Généralités

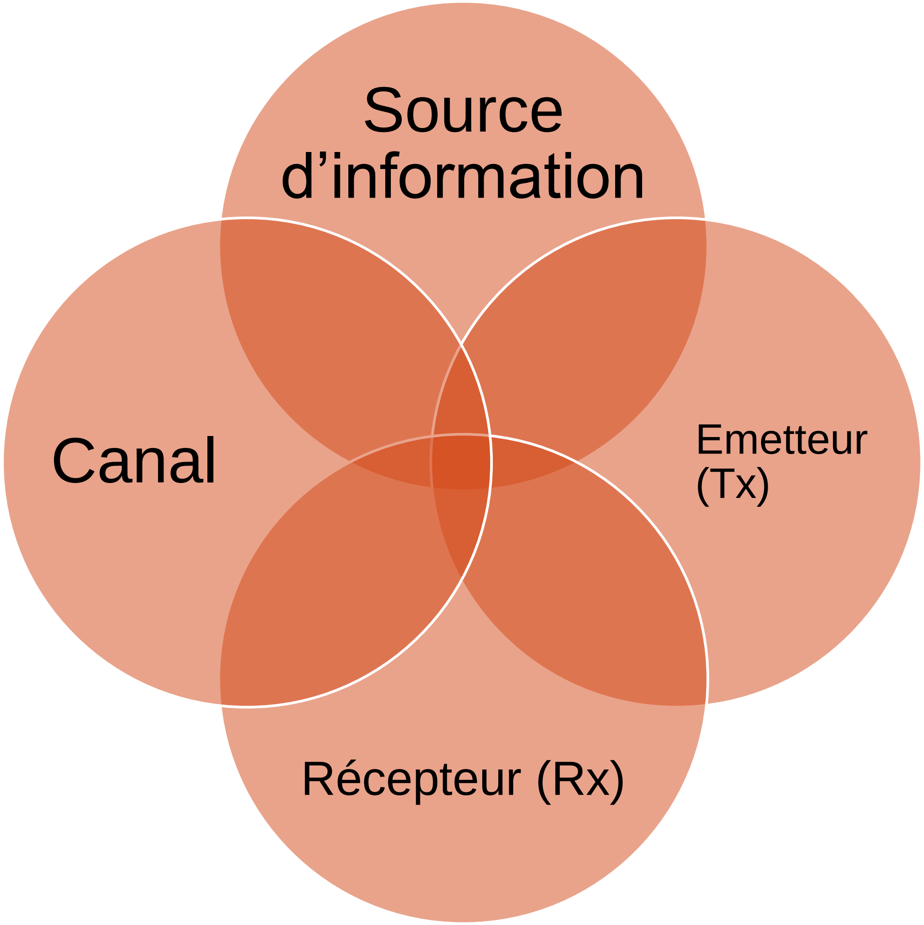
- Introduction
  - Chaine de traitement de l'information
  - Définitions
  - Qu'est ce que le traitement de signal « signal Processing »
  - Signaux élementaires
- Classification des signaux
  - Energétique
  - Morphologique
  - Phénoménologique

Introduction



Chaine de traitement de l'information

Chaine de transmission



Quelques définitions

- Signal :
  - Représentation physique d'une information à transmettre
  - Entité qui sert à véhiculer une information

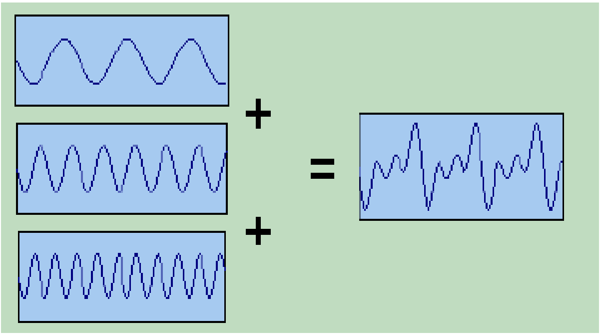
  Exemples :
  - Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, …)
  - Signaux biologiques :
  - Tension aux bornes d'un condensateur en charge
  - Signaux géophysiques : vibrations sismiques
  - Finances : cours de la bourse
  - Images
  - Vidéos
- Bruit :
  - Tout phénomène perturbateur pouvant géner la perception ou l'interprétation d'un signal

Définition : Traitement du signal

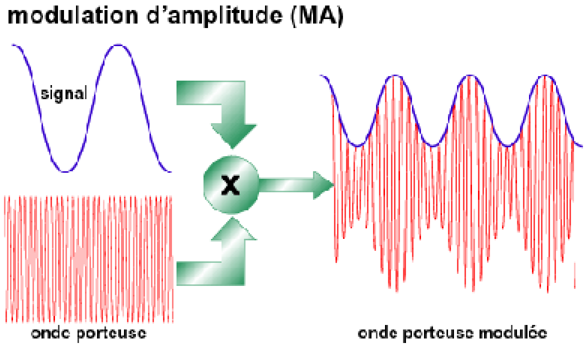
- Traitement du signal
  - Ensemble de techniques permettant de créer, d'analyser, de transformer les signaux en vue de leur exploitation
  - Extraction du maximum d'information utile d'un signal perturbé par le bruit

➢ Créer : Elaboration de signaux :

1. Synthèse :

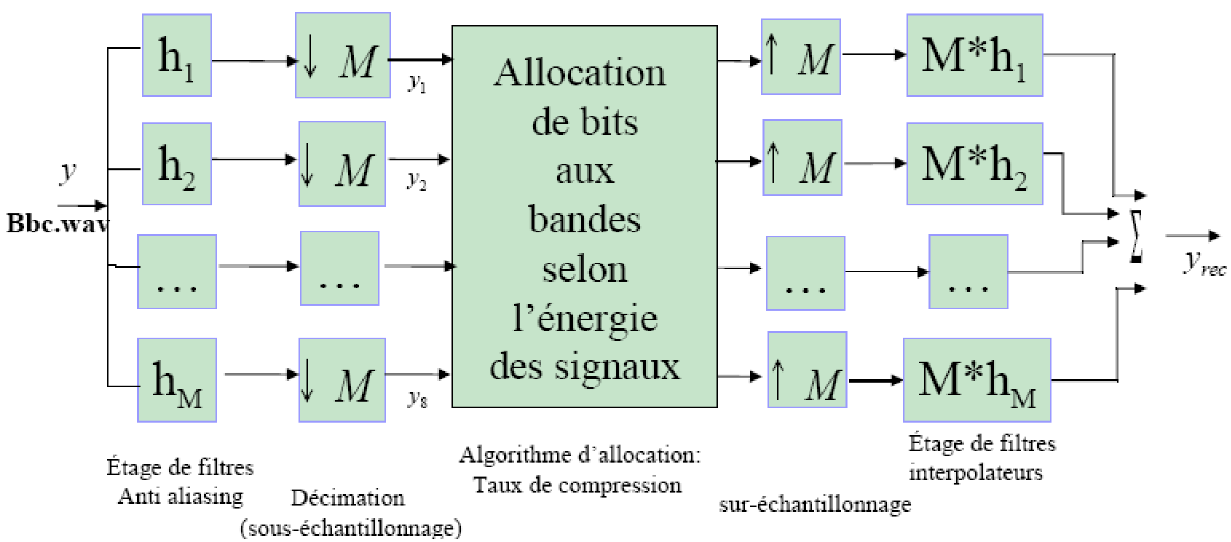


2. Modulation :



Définitions : Fonctions du traitement du signal

- Analyser : Interprétation des signaux
  - Détection : fonction de décision
  - Identification : classification du signal
- Transformer : adaptation aux besoins
  - Filtrage :
    - Craquement sur une image
    - Fonction de débruitage
  - Codage, compression (jpeg, mp3,…)



Définitions

- Puissance d'un signal :
  - Puissance instantanée fournie par un signal s(t) :

$$\boxed{\begin{aligned} p(t) &= s(t).i(t) \\ &= \frac{s(t)^2}{R} \end{aligned}}$$

  - Puissance instantanée normalisée :

$$\boxed{p_n(t) = s(t)^2}$$

=> Valeur moyenne de la puissance normalisée

Définition : Puissance d'un signal

- Si *s(t)* est périodique, de période T:

$$P = < s(t)^2 >$$

Alors :

$$P =$$

- Pour un signal non périodique (T ->∞):

$$P =$$

Définition : Energie d'un signal

- Pour *dt* infiniment petite

$$dw = p_n(t)dt$$

- D'où :

$$dw = s(t)^2 dt$$

- Sur un intervalle de temps t1, t2 :

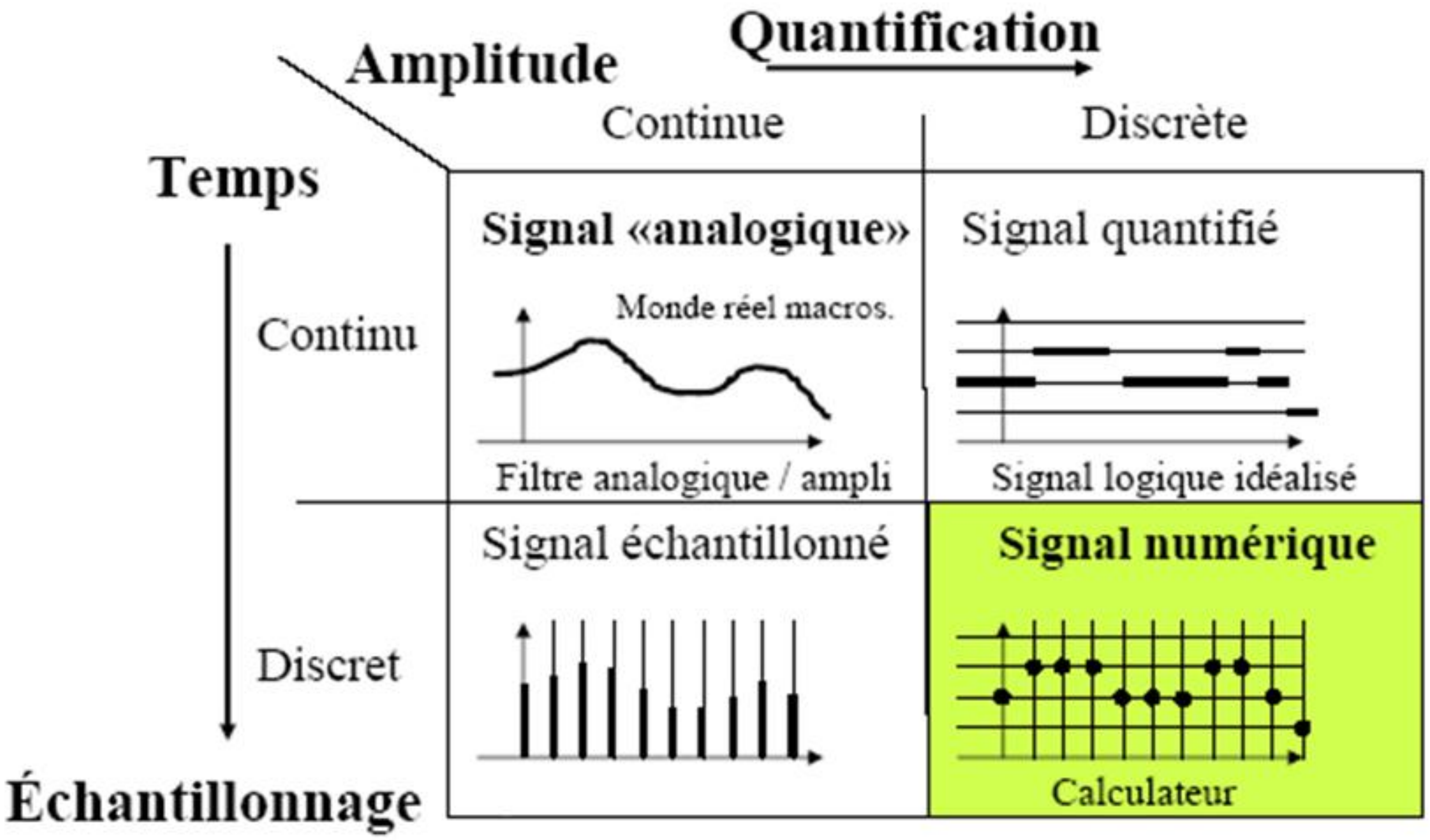
$$w = \int_{t_1}^{t2} dw$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt$$

Travaux Dirigés

Classification des signaux : **Energétique**

Energie finie / Puissance nulle	• Signaux transitoires (non nuls sur un intervalle de temps limité)
Energie infinie / Puissance finie	• Signaux permanents (existants toute le temps)

Classification des signaux : **Morphologique**

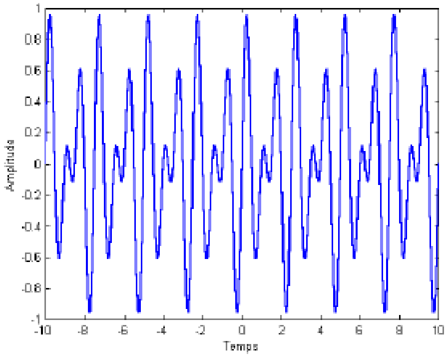


Classification des signaux : **Phénoménologique**

- Signaux déterministes :

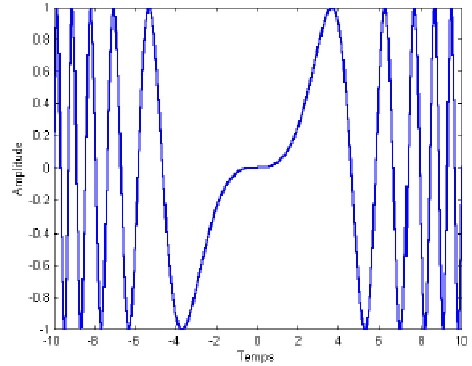
Signaux dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite grâce à une fonction mathématique ou graphique

- périodiques

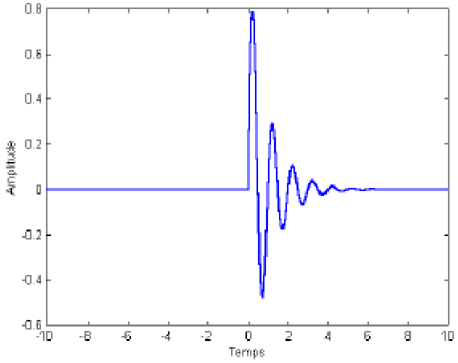


$$\exists\, T / x(t) = x(t + kT)$$

- apériodiques



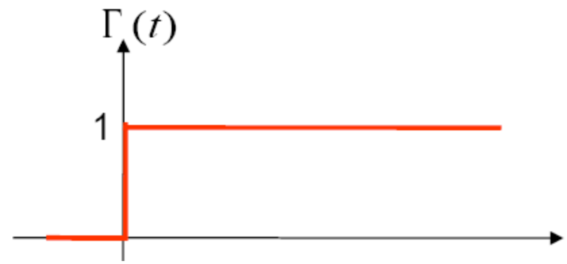
- transitoire



Classification des signaux : **Phénoménologique**

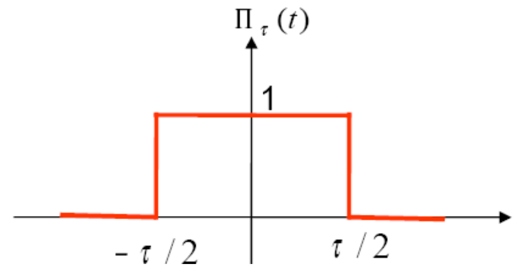
- Echelon

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$



- Signal porte

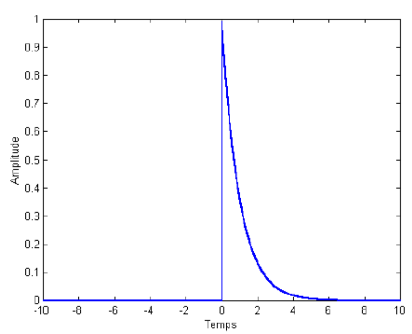
$$\pi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & si\ |t| \leq \dfrac{t}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



τ : largeur de la porte

- Exponentielle décroissante

$$y(t) = \Gamma(t)e^{-at} \qquad a > 0$$



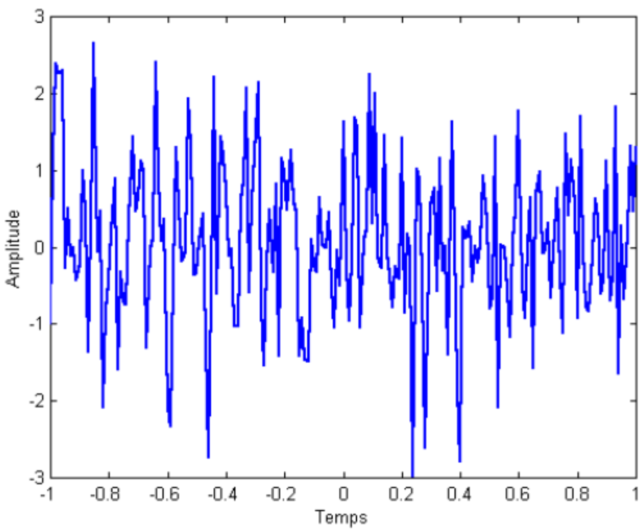
- Signaux périodiques : sin/cos/tan

Classification des signaux : **Phénoménologique**

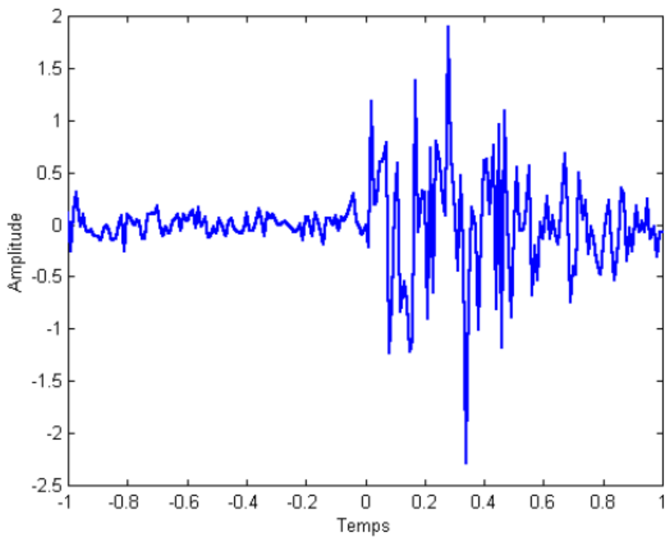
- Signaux aléatoires (stochastiques)

Signaux dont l'évolution temporelle est imprévisible et dont on ne peut pas prédire la valeur à un temps *t.* La description est basée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, loi de probabilité, …), exemple : jet de dé

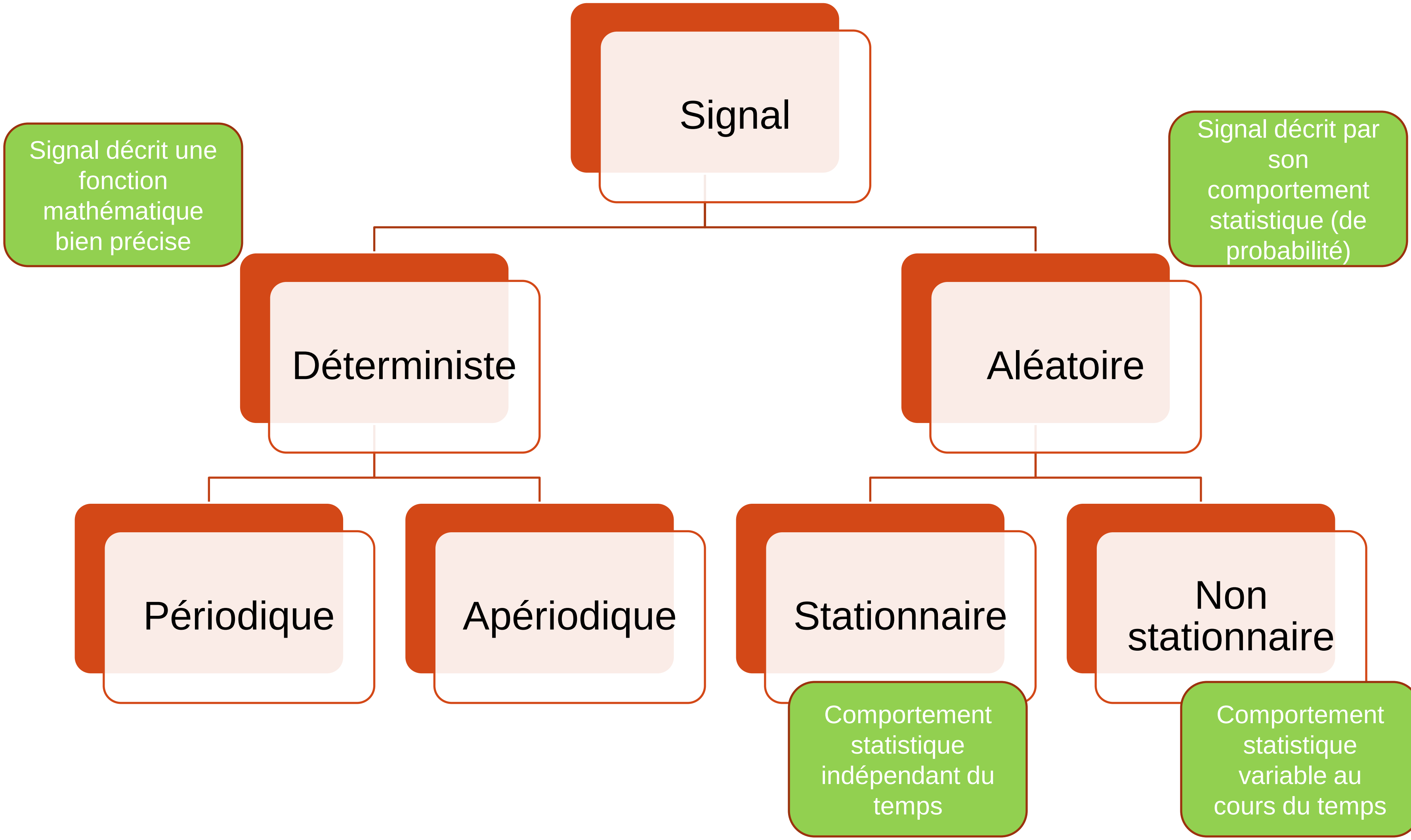
- stationnaires



- Non-stationnaires



Classification des signaux :
Phénoménologique



Notions de bruit

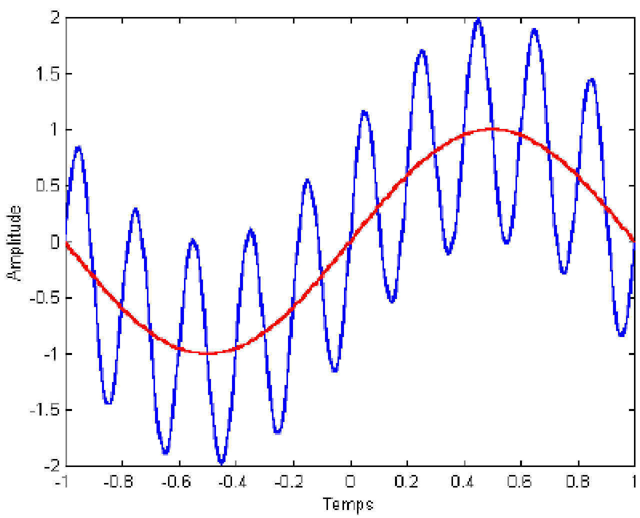
Tout élément perturbateur pouvant géner la perception ou l'interprétation d'un signal

- La notion du bruit est relative, elle dépend du contexte
- Exemple classique du technicien en télécom et de l'astronome :
  - Pour le technicien en télécom :
    - Ondes d'un satellite = signal
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = bruit
  - Pour l'astronome :
    - Ondes d'un satellite = bruit
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = signal
- Tout signal physique comporte du bruit = une composante aléatoire
- Introduction de la notion du rapport signal/bruit

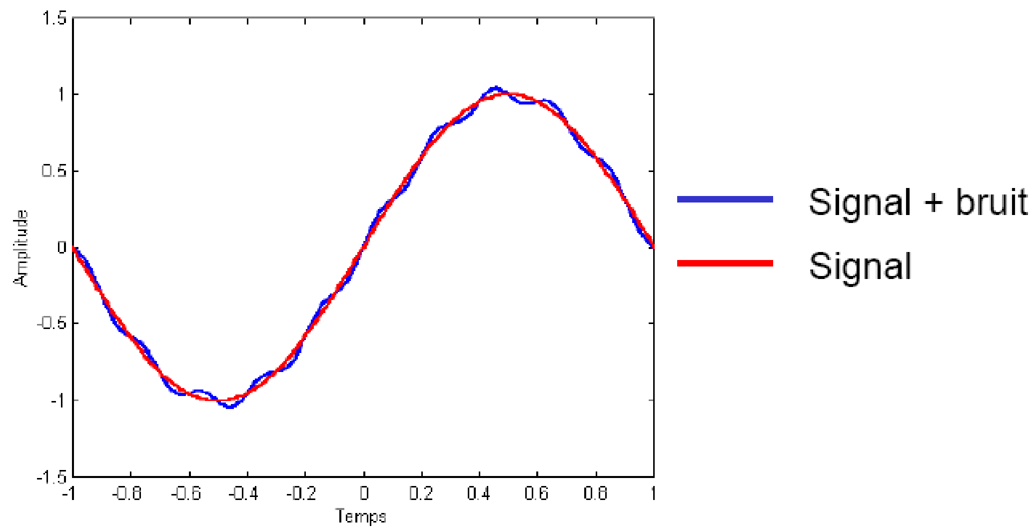
Rapport signal à Bruit

- Signal = composante déterministe + composante aléatoire.
- Déterminer la qualité d'un signal aléatoire ou déterministe => Introduction d'un rapport RSB quantifiant l’effet du bruit

$R_{S/B}$=0 dB



$R_{S/B}$=26 dB



Notions d'autocorrélation

Exprime le degrés de ressemblance d'un signal s(t) avec ses copies retardées au cours du temps

- Signaux à énergie finie :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

- Signaux à énergie infinie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)\,dt$$

- Propriétés
  - On a : $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$
  - Si $x(t)$ est périodique, alors $C_{xx}(t)$ est périodique de même période
  - $C_{xx}(t)$ est paire pour tous les signaux réels

Notion d'intercorrélation

L'intercorrélation compare un signal x(t) et un autre signal y(t) retardé

- Signaux à énergie finie :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\,dt$$

- Signaux à énergie infinie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) y^*(t-\tau)\,dt$$

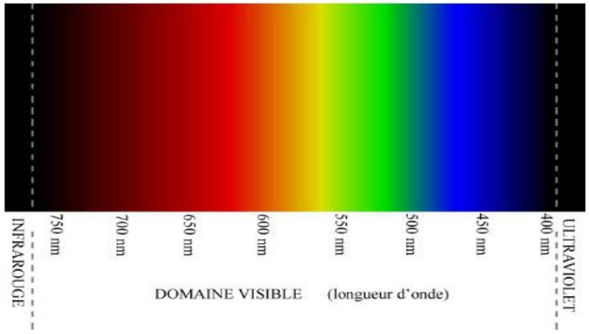
ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Introduction : Notion de fréquence (1)

- Une fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduise pendant un temps limité
- Une fréquence est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$
- Unité de mesure : le Hertz (Hz)
- Exemple 1 : Dans un signal sonore :
  - Sons graves : fréquences basses
  - Sons aigues : fréquence hautes
- Exemple 2 : Dans une image
  - Surface : basses fréquences
  - Contour : hautes fréquences

- Exemple 3 : onde lumineuse

  => Une couleur = une fréquence



Introduction : Notion de fréquence (2)

- Autres exemples d'application
  - Voix, téléphone portable, ADSL, Radar,….
- => Ces applications analysent et traitent le contenu fréquentiel de l'information

Question : Pourquoi a-t-on besoin d'une représentation fréquentielle ?

Vers une représentation fréquentielle..

- Soient les trois signaux suivants

$$s_1(t) = 4\sin(2\pi 50 t)$$

$$s_2(t) = 2\sin(2\pi 100 t)$$

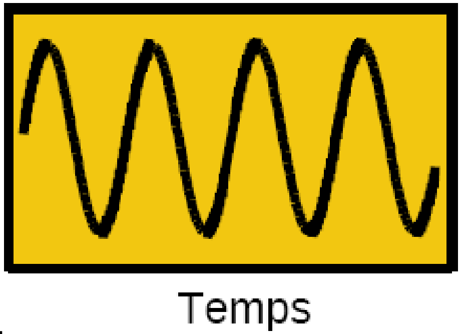
$$s_3(t) = 6\sin(2\pi 100 t)$$

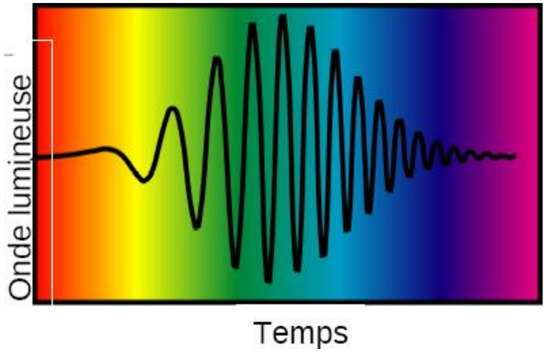
- Traçons, le signal s(t) = s1(t)+s2(t)+s3(t)

Une représentation fréquentielle de l'information est souvent plus facile à interpréter que la représentation temporelle

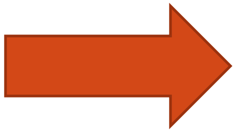
Vers une représentation fréquentielle

- Comment caractériser le comportement fréquentiel d'un signal
- Exemple 1 : signal sinusoîdal
- $s(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi)$: fréquence constante, facile
- Exemple 2 : onde lumineuse





Fréquence variable au cours du temps, représentation difficile !!!

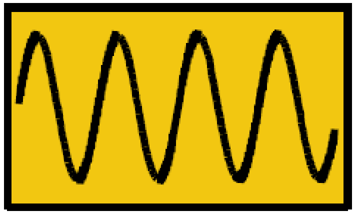


ANALYSE FREQUENTIELLE DES SIGNAUX

Représentation spectrale des signaux périodiques : cas des signaux sinusoîdaux

- Soit le signal sinusoîdal décrit par la fonction mathématique suivante :

$$s(t) = A\cos\left(2\pi f t + \varphi\right)$$



Temps

Amplitude

Fréquence

Phase

- Représentation de l'amplitude du signal en fonction de sa fréquence
- Représentation de la phase du signal en fonction de sa phase

Spectre de phase, Spectre d'amplitude

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux sinusoîdaux**

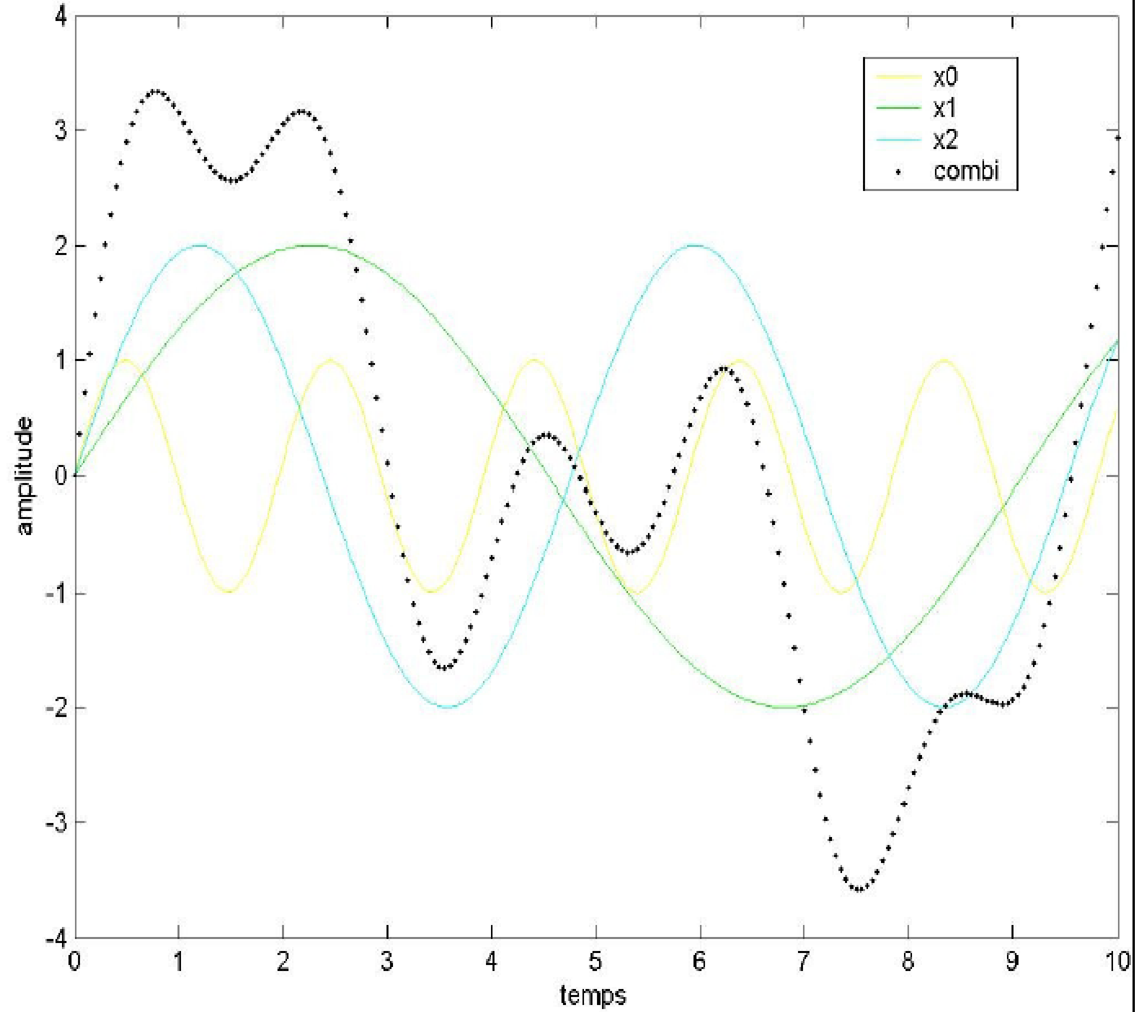
- Spectre d'amplitude : constitué de raie (batton) située à la fréquence de la sinusoîde et de longueur égale à son amplitude
- Spectre de phase : constitué de raie (batton) située à la fréquence de la sinusoîde et de longueur égale à sa phase
- Exercice d'application

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux quelconques**

```
% Code matlab
f0 = 0.51;  A0 = 1;
f1 = 0.11;  A1 = 2;
f2 = 0.21;  A2 = 2;

% déclaration de signaux de base
x0 = A0*sin(2*pi*f0*t);
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x2 = A2*sin(2*pi*f2*t);

% affichage des signaux + combinaison
plot(t, x0, 'y'); hold on;
plot(t, x1, 'g');
plot(t, x2, 'c');
plot(t, x0+x1+x2, 'k.');
```



Possibilité d'obtenir des signaux périodiques complexes à partir d'une combinaison linéaire de signaux élémentaires

→ **Décomposition en Série de Fourier (DSF)**

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux qcq, DSF**

- Principe :

  Tout signal périodique peut être vu comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

- Remarques:
  - Les fréquences d'un signal sinusoïdal apparaissent naturellement
  - Pour les signaux périodiques, la DSF contstitue le lien entre la représentation temporelle et la représentation fréquentielle
  - Pour les signaux apériodiques (non périodiques), Il s'agit bien de la Transformée de fourier

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux qcq, DSF**

- Forme mathématique :

Pour un signal périodique quelconque s(t), on a:

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n F_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n F_0 t)}$$

- Avec :

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\cos(2\pi n F_0 t)$$

$$S_0 = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} s(t) sin(2\pi n F_0 t)$$

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux qcq, DSF**

- S_0 n'est autre que la valeur moyenne du signal s(t)
- Si $s(t)$ est paire, alors $B_n = 0$
- Si $s(t)$ est impaire, alors $A_n = 0$
- On appelle *Fondamentale du signal* s(t), les sinusoides de la DSF ayant la même fréquence, F_0, que le signal périodique s(t)
- On appelle *Harmonique de rang* k , les sinusoides de la DSF ayant une fréquence k * celle du signal s(t)

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux qcq, DSF**

- Forme trigonométrique :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n F_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n F_0 t\right)$$

- Forme Complexe:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

avec

$$V_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}$$

On note également : $\mathbf{V_{-n} = V_n^*}$, et $\mathbf{V_0 = S_0}$

Représentation spectrale des signaux périodiques : **cas des signaux qcq, DSF**

- A l'aide de cette nouvelle variante de DSF, on appelle spectre bilatéral d'amplitude, la courbe donnant l'évolution du module de V_n en fonction de $F=nF_0$ avec n = -∞ à +∞, la courbe occupera deux cadrons (notion de courbe bilatérale)
- De même, on appelle spectre bilatérale de phase, le spectre donné par le tracé de l'argument de V_n en fonction de $F=nF_0$, le spectre de phase occupera deux cadrons aussi.

TRAVAUX DIRIGES

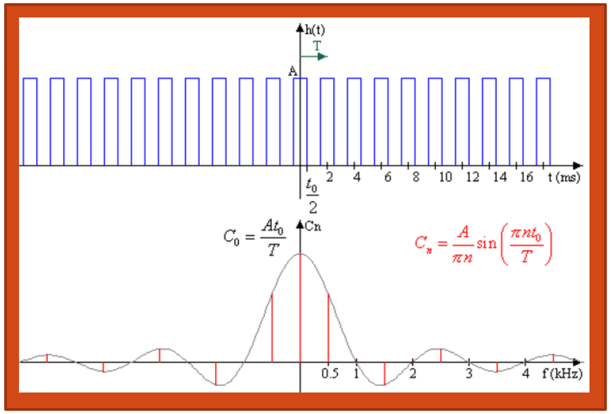
Pour résumer

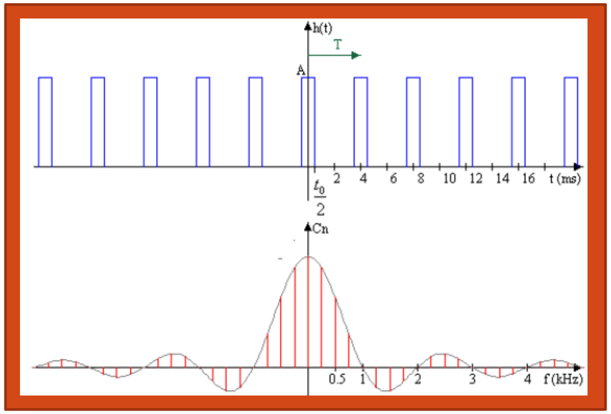
- La DSF n'est applicable que pour les signaux périodiques
- Signaux périodiques : T tend vers l'infini !!
- On tend vers une représentation fréquentielle continue
- Généralisation de série de fourier

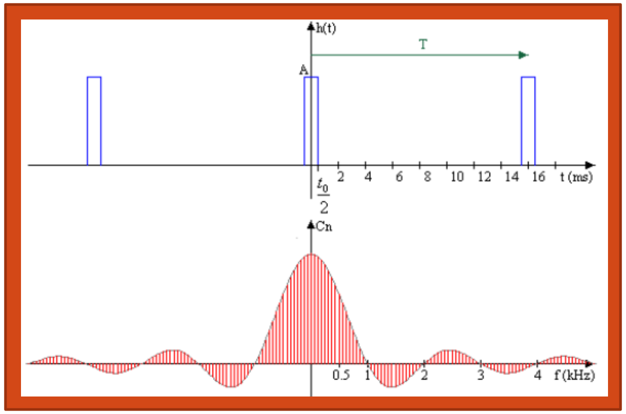
↓

Transformée de Fourier

Spectres de raie pour différentes périodes







Représentation fréquentielle desdes signaux périodiques : **Transformée de Fourier**

- Définition : soit un signal s(t) non périodique, la transformée de Fourier de x(t), si elle existe, est :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- $S(f)$: fonction complexe de la variable réelle f
  - Spectre d'amplitude : $A_f = |S(f)|$
  - Spectre de phase : $\phi(f) = \arg(S(f))$
- Transformée de Fourier Inverse :

  Si elle existe, la TF inverse est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+j2\pi f t}\, df$$

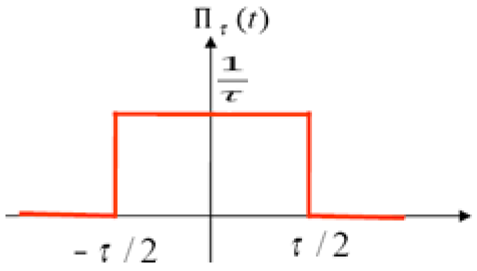
- A ne pas oublier :

$s(t)$ et $S(f)$ sont deux écritures équivalentes du même signal

Représentation fréquentielle des signaux périodiques : **Transformée de Fourier**

Exercice d’application :

Tracer le spectre d’amplitude du signal porte



TF : condition d'existence !!

- Soit un signal s(t) apériodique, pour que la TF de s(t) existe, il faut que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|dt < \infty}$$

Ou bien

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty}$$

- Signaux particuliers : Impulsions de Dirac

  Ces signaux sont traités au sens de disctribution, donc la Transformée de Fourier est toujours définie

TF : Propriétés

Linéarité

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

Décalage temporel

$$x(t - t_o) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_o} X(f)$$

L'amplitude A_f ne change pas. La phase est modifié de $-j2\pi\, f t_0$

Décalage fréquentiel

$$e^{j2\pi f_o t} x(t) \leftrightarrow X(f - f_o)$$

$x(at) arrow$

Changement d'échelle

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad a \in {}^*$$

La contraction dans le domaine temporel ($a \geq 1$) correspond à la dilatation dans le domaine fréquentiel et inversement

Dérivation

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f\; X(f)$$

Intégration

Soit $P[x(t)]$ la primitive de $x(t)$ $$P[x(t)] \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

La TF et la TF inverse ne sont pas toujours définies

TF : Propriétés

Inversion temporelle

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$$

Conjugaison complexe

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

Symétrie dans le cas de signaux réels

Si $x(t)$ est un signal réel alors $X(f) = X(-f)$

donc $|X(f)| = |X(-f)|$ et $\varphi(f) = -\varphi(-f)$

Le spectre d'amplitude est une fonction paire et le spectre d'argument est impair

Symétrie dans le cas de signaux imaginaires purs

Si $x(t)$ est un signal imaginaire pur alors $X(f) = -X(-f)$

Parité

- Si $x(t)$ est un signal réel et pair alors $X(f)$ est réelle et paire
- Si $x(t)$ est un signal réel et impair alors $X(f)$ est imaginaire pure et impaire

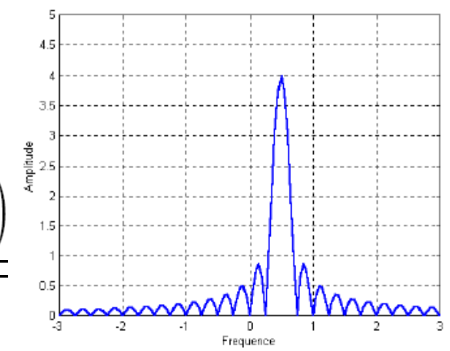
Exemple d'application de la TF : Décalage fréquentiel

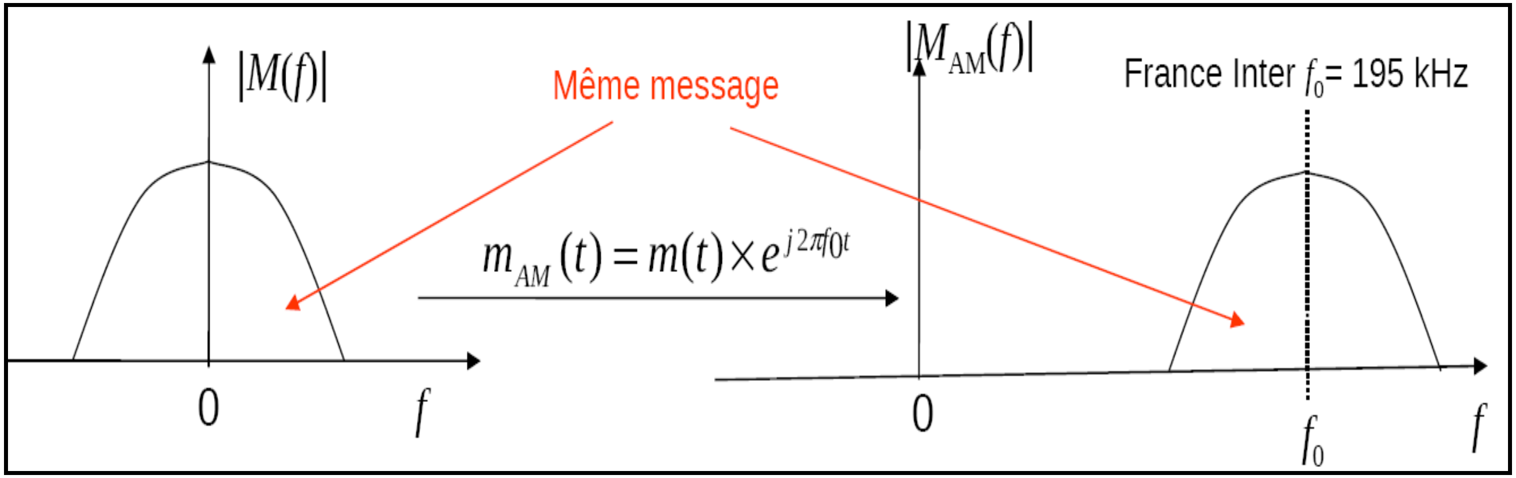
- Soit un signal x(t) : $x(t)=\prod(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}$

avec : $F\left(\prod(t)\right)=T\,\mathbf{sinc}(\pi f T)$

- En utilisant la propriété de décalage fréquentiel, on a : $\underline{\underline{X(f)=T\,\mathbf{sinc}(\pi(f-f_0)T)}}$

Module de $X(f)$





Ce résultat est très fondamental en **Modulation des signaux (voir cours 1A, TD)**

TF et conservation d'énergie

- Relation de Parseval

Si la Transformée de Fourier existe, alors :

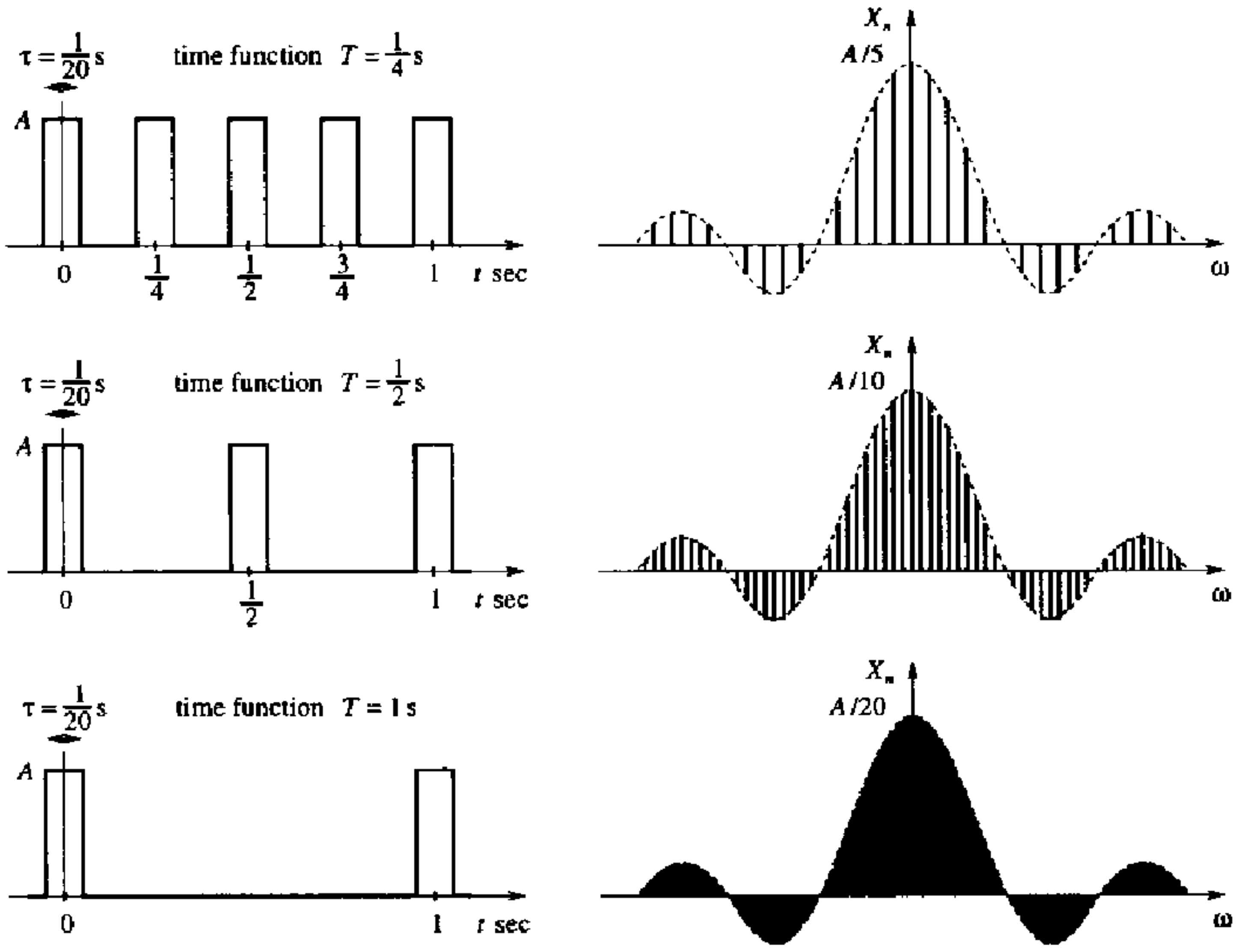
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

La Transformée de Fourier conserve l'énergie du signal

- Application

Montrer que l'énergie de $F_0 sinc(\pi t F_0)$ vaut F_0

TF d’un signal périodique



TF d'un peigne de Dirac

Un peigne de Dirac s'écrit $Ш_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

Comme le peigne est périodique, il admet une décomposition en Série de Fourier $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(jn\frac{2\pi}{T}t)$

avec $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Ш_T(t)\exp(-j2\pi\frac{n}{T}t)dt \longrightarrow c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\exp(-j2\pi\frac{n}{T}t)dt$

$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt$ D'où $c_n = \frac{1}{T}$

Donc $Ш_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi\frac{n}{T}t)$

et $\mathcal{F}[Ш_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left[\exp(j2\pi\frac{n}{T}t)\right]$ or $\mathcal{F}\left[\exp(j2\pi f\frac{n}{To}t)\right] = \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

d'où $\mathcal{F}[Ш_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

$$\mathcal{F}[Ш_T(t)] = F\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF)$$

La TF d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac

TF usuelles

$\mathrm{rect}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\mathrm{sinc}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\mathrm{sinc}^2(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot \mathrm{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$
$\mathrm{tri}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{a}\right)$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\frac{(\pi f)^2}{\alpha}}$
$e^{iat^2} = e^{-\alpha t^2}\big\rvert_{\alpha=-ia}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi^2 f^2}{a}-\frac{\pi}{4}\right)}$
$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos\left(\frac{\pi^2 f^2}{a}-\frac{\pi}{4}\right)$

1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
e^{iat}	$\delta(f-\frac{a}{2\pi})$
$\cos(at)$	$\frac{\delta(f-\frac{a}{2\pi})+\delta(f+\frac{a}{2\pi})}{2}$
$\sin(at)$	$i\frac{\delta(f+\frac{a}{2\pi})-\delta(f-\frac{a}{2\pi})}{2}$
t^n	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \delta^{(n)}(f)$
$\frac{1}{t}$	$-i\pi\cdot \mathrm{sgn}(f)$
$\frac{1}{t^n}$	$-i\pi\frac{(-i2\pi f)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{sgn}(f)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{i\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\pi f}+\delta(f)\right)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+i2\pi f}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

Systèmes Linéaire Continus

Plan du chapitre

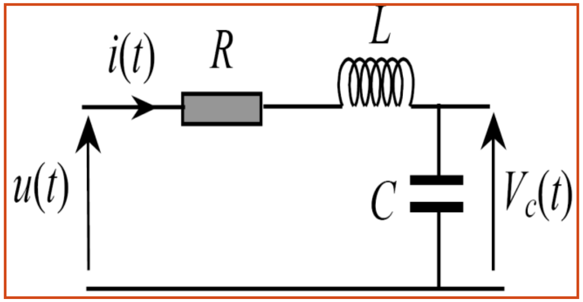
- Introduction
  - Définition d’un système
  - Classification des systèmes
- Réponse d’un système
  - Notion de convolution
  - Réponse impulsionnelle d’un système
- Réponse fréquentielle d’un système
  - Théorème de Plancherel
  - Fonction de Transfert d’un système
  - Transformée de Laplace
  - Notion de pôles et zeros

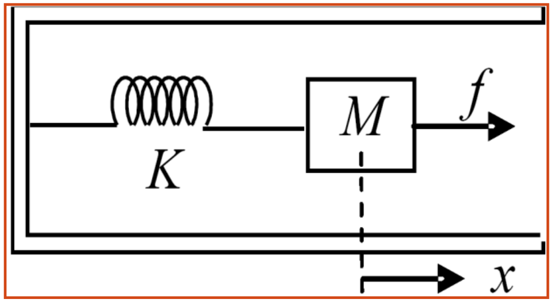
Introduction : Définition

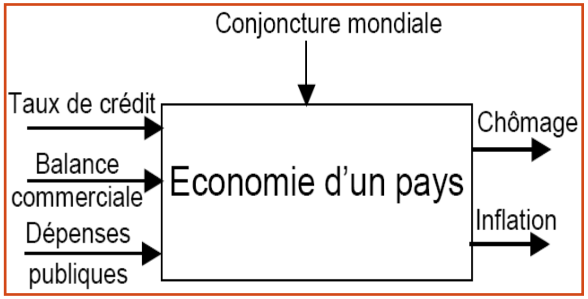
- Définition

Un Système est un ensemble d'éléments fonctionnels interagissant entre eux et qui établit un lieu de cause à effet entre ses signaux d'entrée et de sortie

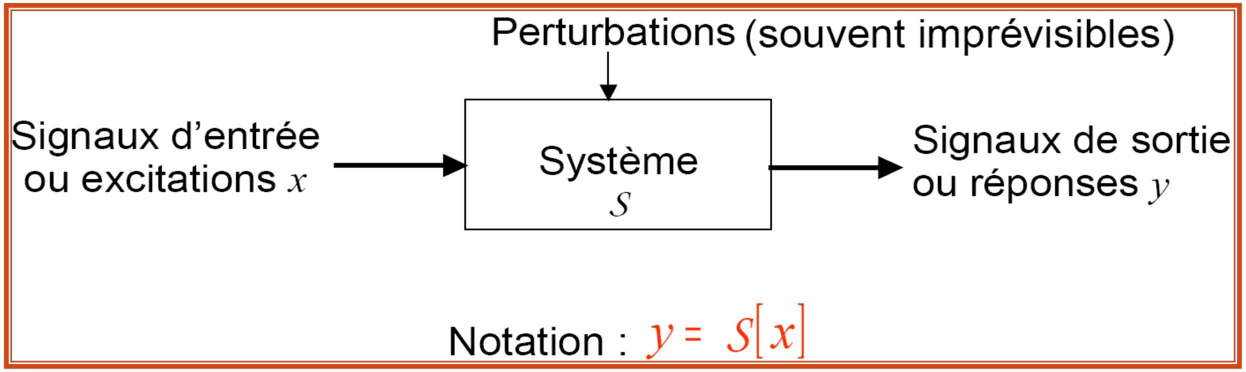
- Exemples



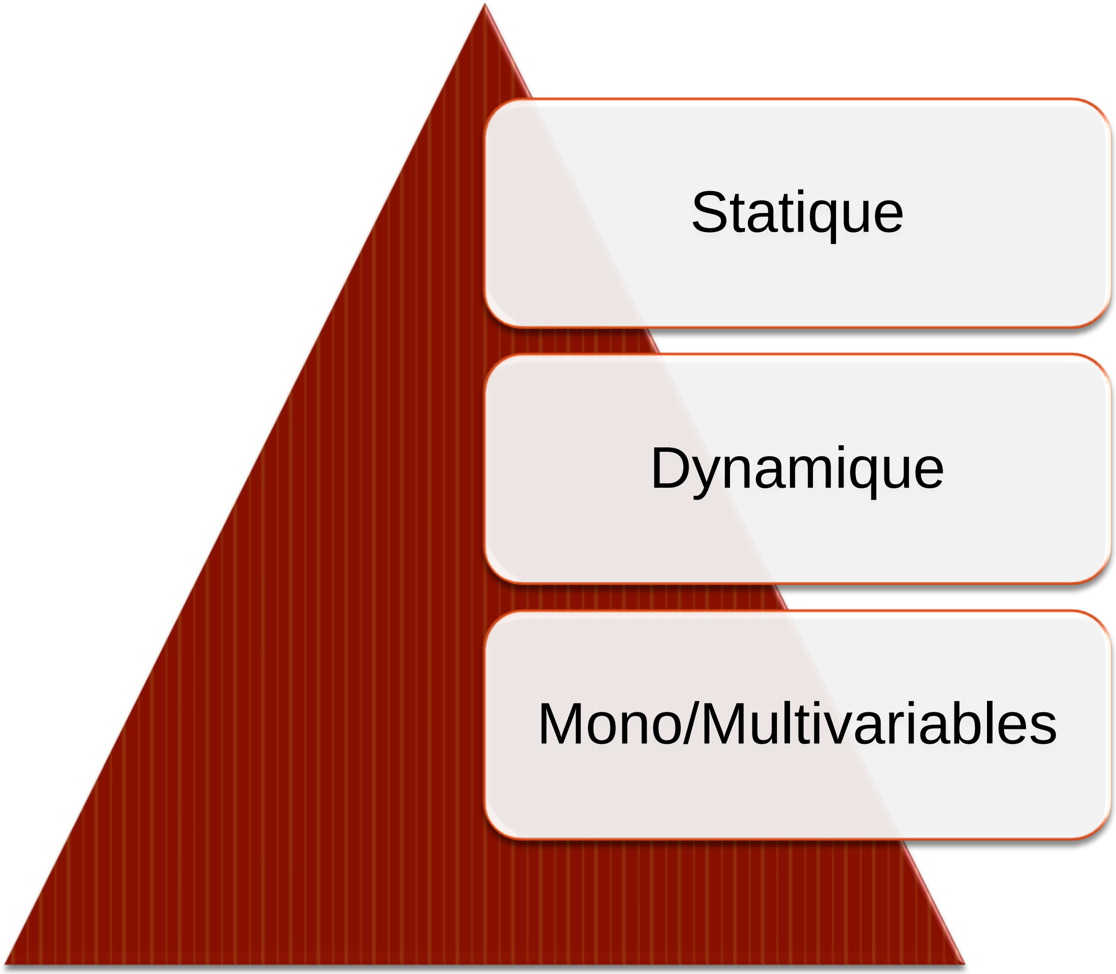




<u>Système électrique</u> <u>Système mécanique</u> <u>Système économique</u>



Introduction : Classification des systèmes



Introduction : Classification des systèmes

- Linéarité

Si $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$, *alors*, $y(t)=a_1S[x_1(t)]+a_2S[x_2(t)]$

- Causalité

La réponse du système ne peut pas se produire avant l'excitation qui l'engendre

Si $x(t)=0$ pour $t<0$ alors $y(t)=S[x(t)]=0$ pour $t<0$

- Invariance temporelle

Un décalage temporel en entrée induit le même décalage en sortie => La réponse du système est invariante par translation dans le temps

- Stabilité

Un système est dit stable, si, en réponse à une sortie bornée, sa sortie est bornée (=> système qui reprend son état initial après excitation)

Systèmes Monovariables, continus linéaires à temps invariant (LTI)

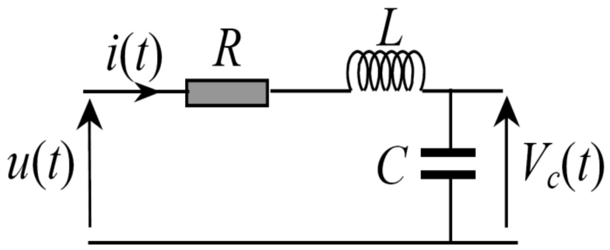
Systèmes LTI : Caractéristiques

- Relation entrée/sortie

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

avec : $y^{(i)} = \dfrac{d^i y(t)}{dt^i}$ (dérivée d'ordre i)

- Exemple :



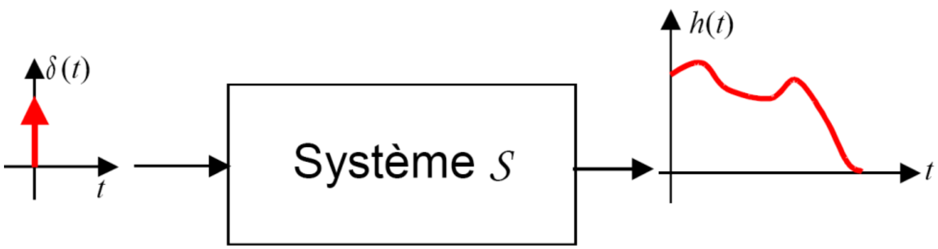
➢ Loi de l'électricité :

Entré du système : $x(t)=u(t)$
Sortie du système : $y(t)=V_c(t)$

Systèmes LTI : Caractéristiques

- Réponse impulsionnelle

La Réponse Impulsionnelle d'un système est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac



$$h(t) = S[\delta(t)]$$

- Avantages de la réponse impulsionnelle
  - Caractérisation complète du système
  - Permet de calculer la sortie du système LTI pour d'autres signaux d'entrée => Notion de convolution

Notion de convolution

- On appelle Produit de convolution de deux signaux $f(t)$ et $g(t)$, et on note $f * g$, l'expression :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

- *A ne pas confondre avec un produit de convolution !!!!*
- Cas particulier : signaux causaux *($f(t)=0$, $g(t)=0$ pour $t<0$)*

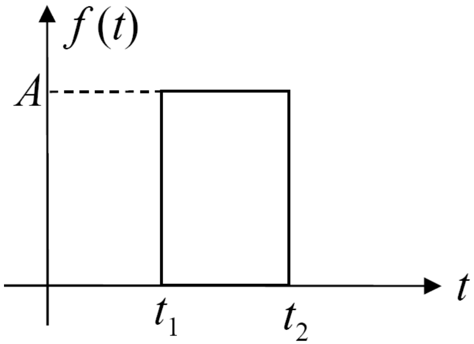
On a donc :

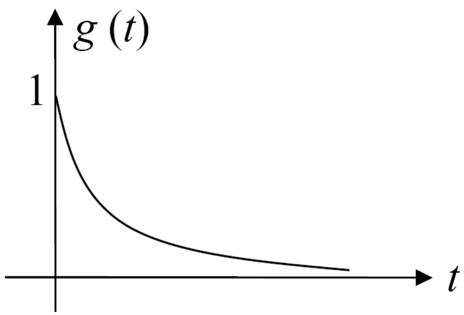
$$f(t) * g(t) = \int_{0}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Notion de convolution

- Exercice d’application :

Calculer le produit de convolution des signaux suivants





$g(t) = e^{-at}\Gamma(t)$

$a > 0$

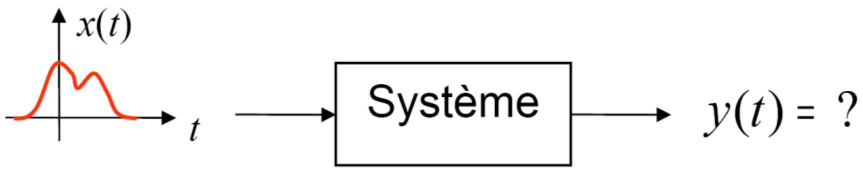
Produit de convolution : Propriétés

- Commutativité : $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$
- Associativité : $e(t)*f(t)*g(t)=e(t)*(g(t)*f(t))=e(t)*(f(t)*g(t))$
- Distributivité : $e(t)*(f(t)+g(t))=e(t)*f(t)+e(t)*g(t)$
- Elément neutre (Impulsion de Dirac) : $f(t)*\delta(t)=f(t)$
- Translation temporelle (Dirac) : $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
- Translation temporelle (Peigne de Dirac)

$$f(t) * Ш_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$

Réponse d'un SLTI à une entrée qcq

- Soit le système LTI suivant :



- En utilisant les propriétés de l'élement neutre de produit de convolution et de linéarité des SLTI, on obtient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

La réponse du système LTI à une entrée quelconque x est la convolution de x avec la réponse impulsionnelle h du système

Stabilité et réponse impulsionnelle

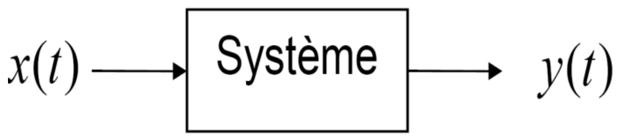
Un système est stable si sa sortie est bornée lorsque son entrée est bornée

- y(t) est bornée ssi h(t) est absolument intégrable

Un système est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable

Passons maintenant aux aspects fréquentiels des SLTIs….

Systèmes et TF



On considère le signal d'entrée $x(t)$, que vaut $y(t)$?

- On montre facilement que : $\boxed{y(t) = h(t) * x(t)}$

- Alors : $\boxed{Y(f) = H(f) * X(f)}$

$\mathcal{H}(f)$**: Fonction de Transfer**

Convolution en Temporel ⇔ Multiplication en Fréquentiel

Systèmes et TF

- Théorème de Plancherel

La Transformée de Fourier d'un Produit de Convolution est un produit Simple, et réciproquement

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f).Y(f)$$

$$x(t).y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

La TF n'est pas toujours définie, quelle solution ?

=> Introduction à la Transformée de Laplace

Transformée de Laplace : TL

- Introduction :
- Soit la TF : $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi f t)\,dt$
- La TF existe si l'intégrale converge !!
- On met : $X(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f}e^{-\sigma}\,dt$, avec $\sigma > 0$
- On pose : $s = j2\pi f + \sigma$, on a :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Définition de la Transformée de Laplace = Généralisation de la Transformée de Fourier

TL : Propriétés

Linéarité $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$

Convolution $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s).Y(s)$

Translation temporelle $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$

Translation fréquentielle $e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$

Idem TF

Dérivation

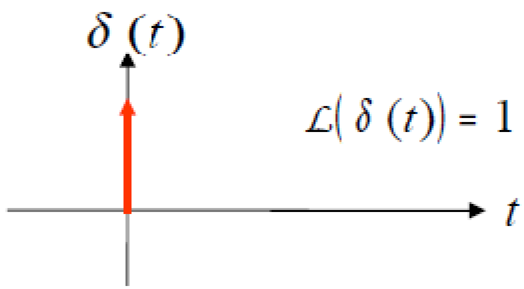
- $\dfrac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0^+)$ $x(0^+)$: condition initiale
- $x^{(k)}(t) \leftrightarrow s^kX(s) - s^{k-1}x(0^+) - s^{k-2}x^{(1)}(0^+) - \cdots - x^{(k-1)}(0^+)$

Avec : $x(0^+), x^{(1)}(0^+), \cdots, x^{(k-1)}(0^+)$: conditions initiales (souvent nulles => simplification)

Intégration $\int_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{X(s)}{s}$

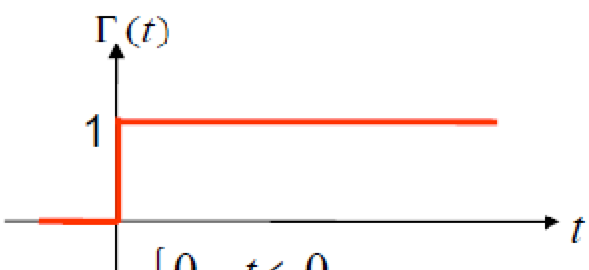
TL de quelques signaux usuels

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$



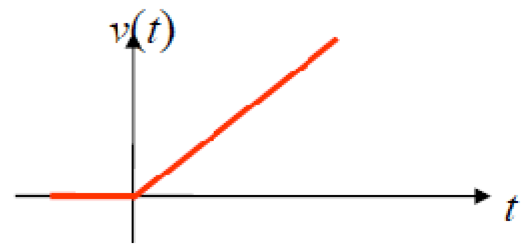
$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

- Echelon unité $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$

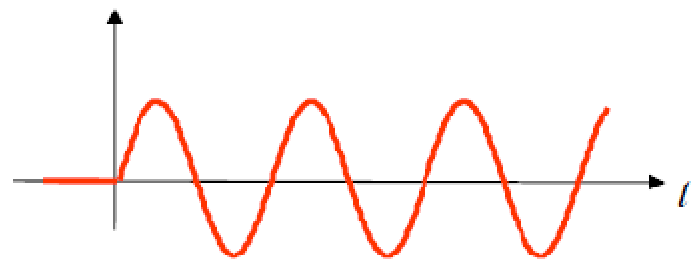
- Rampe ou échelon de vitesse



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

$$\mathcal{L}(v(t)) = \frac{1}{s^2}$$

- Signal sinusoïdal



$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Le plus utilisé : $x(t) = A\,\Gamma(t)e^{s_1 t} \rightarrow Laplacien = \dfrac{A}{s - s_1}$

Systèmes LTI et TL

- Rappel des STLI : Systèmes régis par une équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

- En utilisant la TL, on a :

- Donc :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Notions de Pôles et Zéros – critère de stabilité

- **Pôles** : Racines du polynôme *D(s)*
- **Zéros** : Racines du polynôme *N(s)*

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Fonction de Transfert et stabilité

Le système est stable ssi tous <u>les pôles</u> de H(s) sont à partie réelle <u>strictement négative</u>

- Exercices :

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1} \qquad H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-3)} \qquad H(s) = \frac{3}{s^2+5s+6}$$

Exemple d'application 1

- Soit le système caractérisé par l'eq. diff suivante :

$$\ddot{y}(t)+3\,\dot{y}(t)+2\,y(t)=\ddot{x}(t)+2\,\dot{x}(t)-x(t)$$

Donner la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

Exemple d’application 2

- Soit le système caractérisé par :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

  - Donner la fonction de transfert H(s)
  - Le système est-il stable ?
  - Donner sa réponse impulsionnelle h(t)

Du Continu au Signal Numérique

Echantillonnage – Quantification - Codage

Plan du chapitre

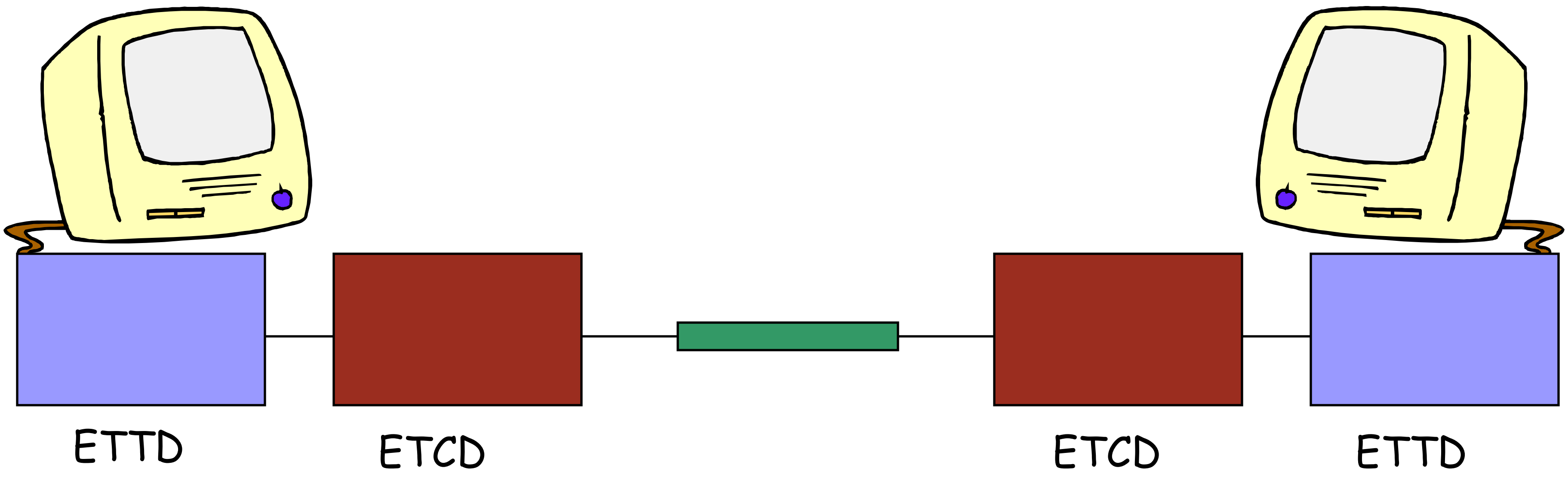
- Historique
- Principe de Fonctionnement de la CAN
- Echantillonnage
- Quantification (Uniforme – Non Uniforme)
- Codage

Structure de chaine de transmission

- Structure analogique
  - Information analogique (sinusoîdes), ex: Température, vitesse.
- Structure numérique
  - Information numérique (informations binaires), ex : entiers codés sous le forme d'informations binaires (0 et 1)

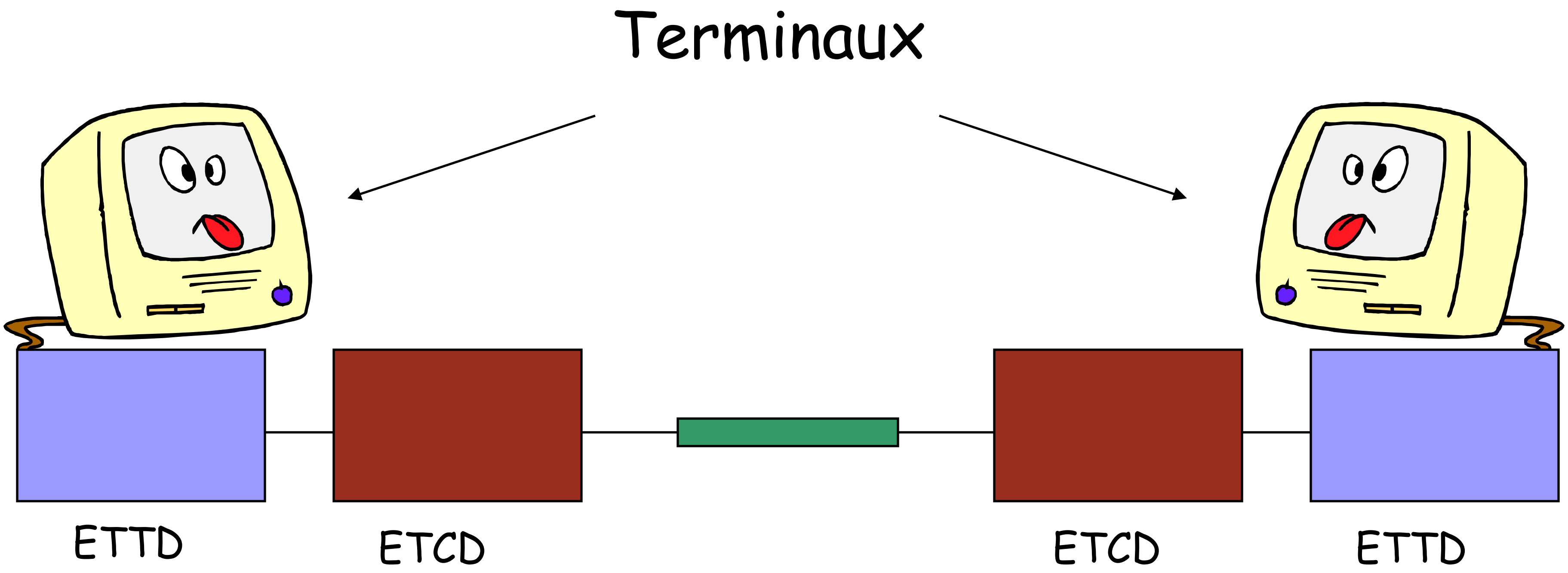
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



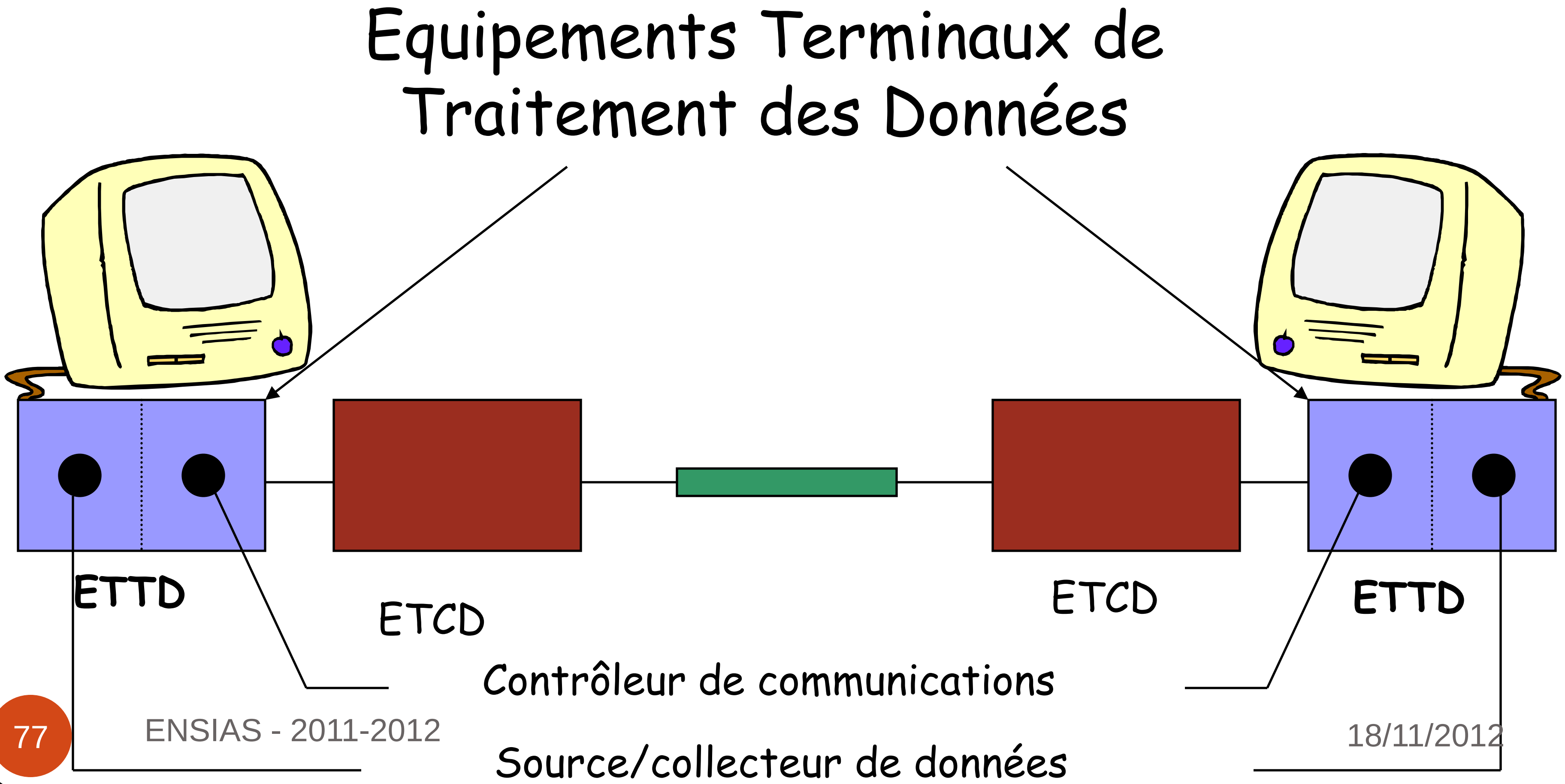
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



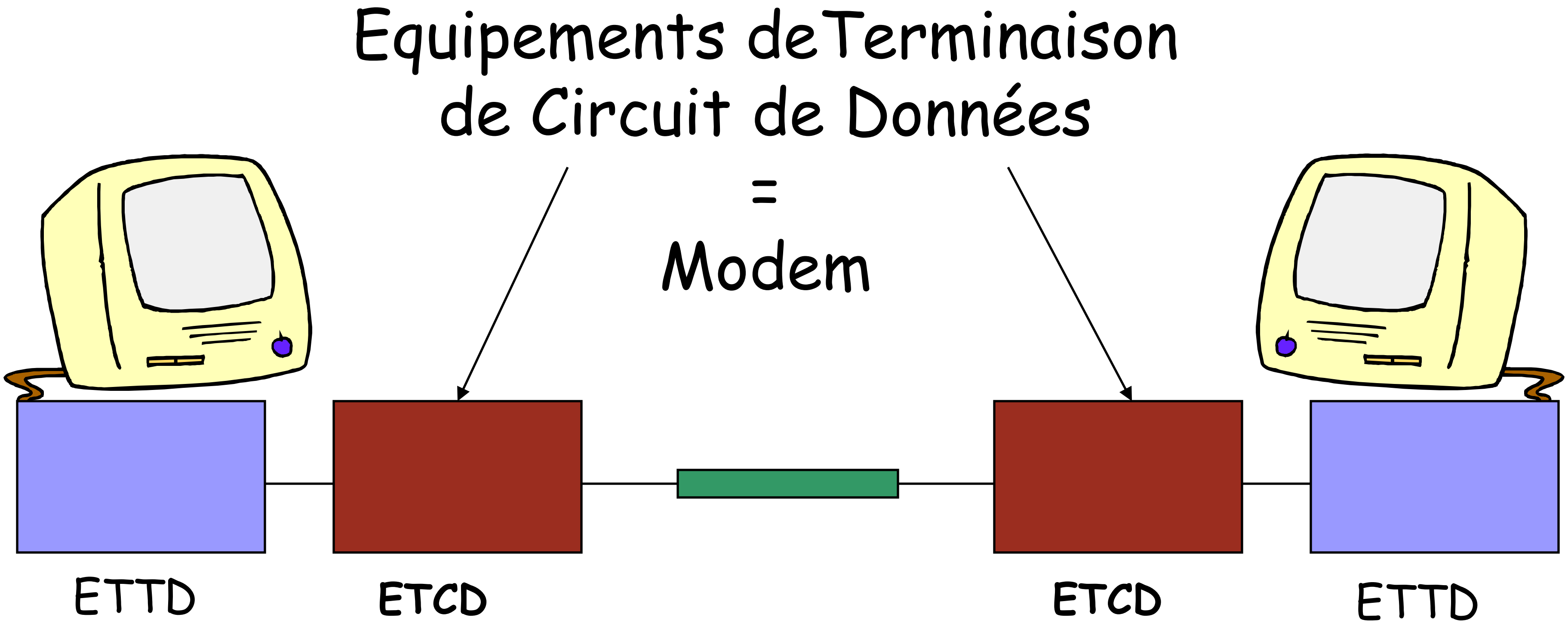
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



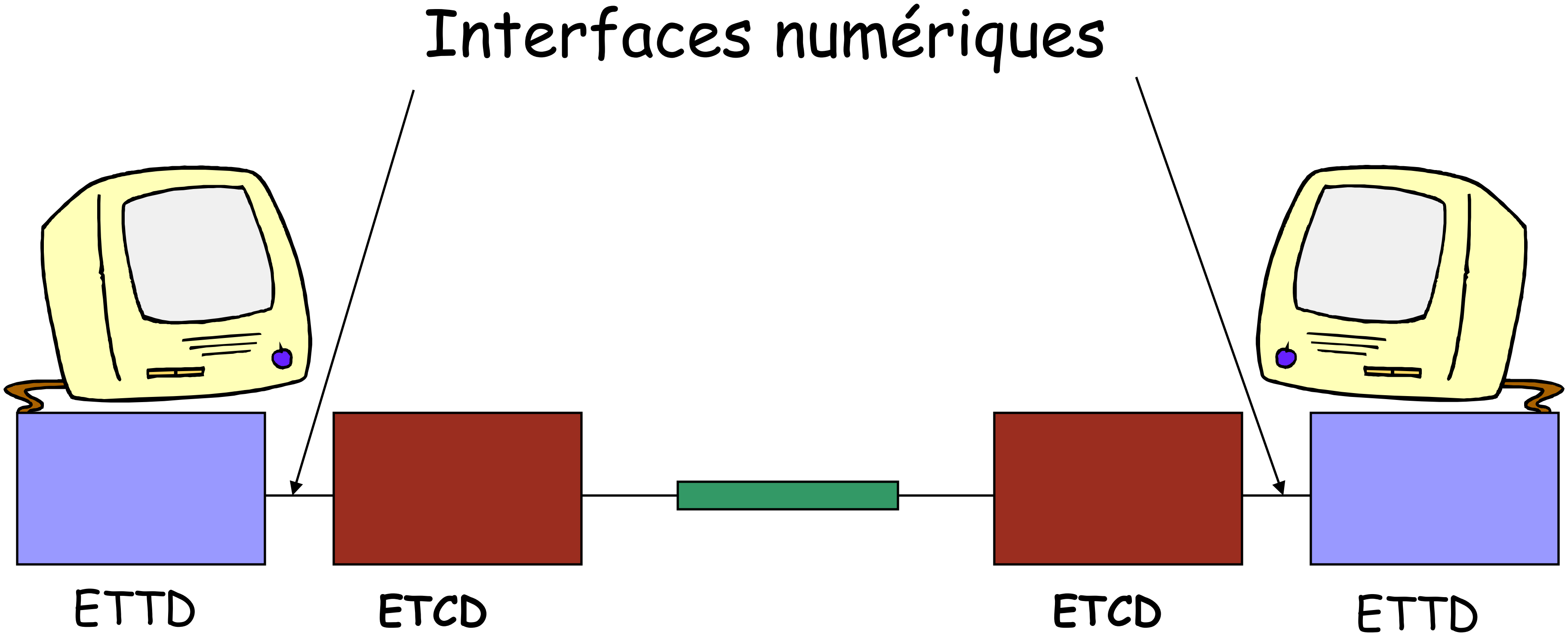
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



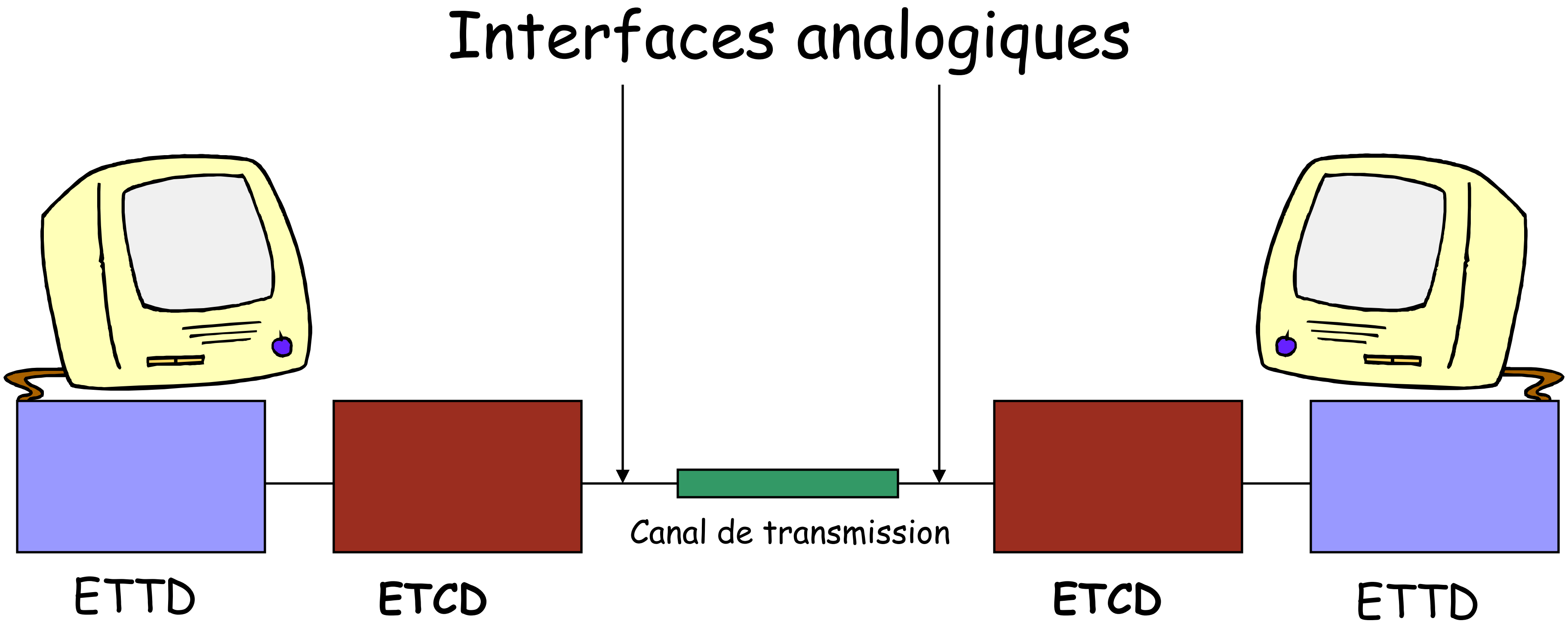
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



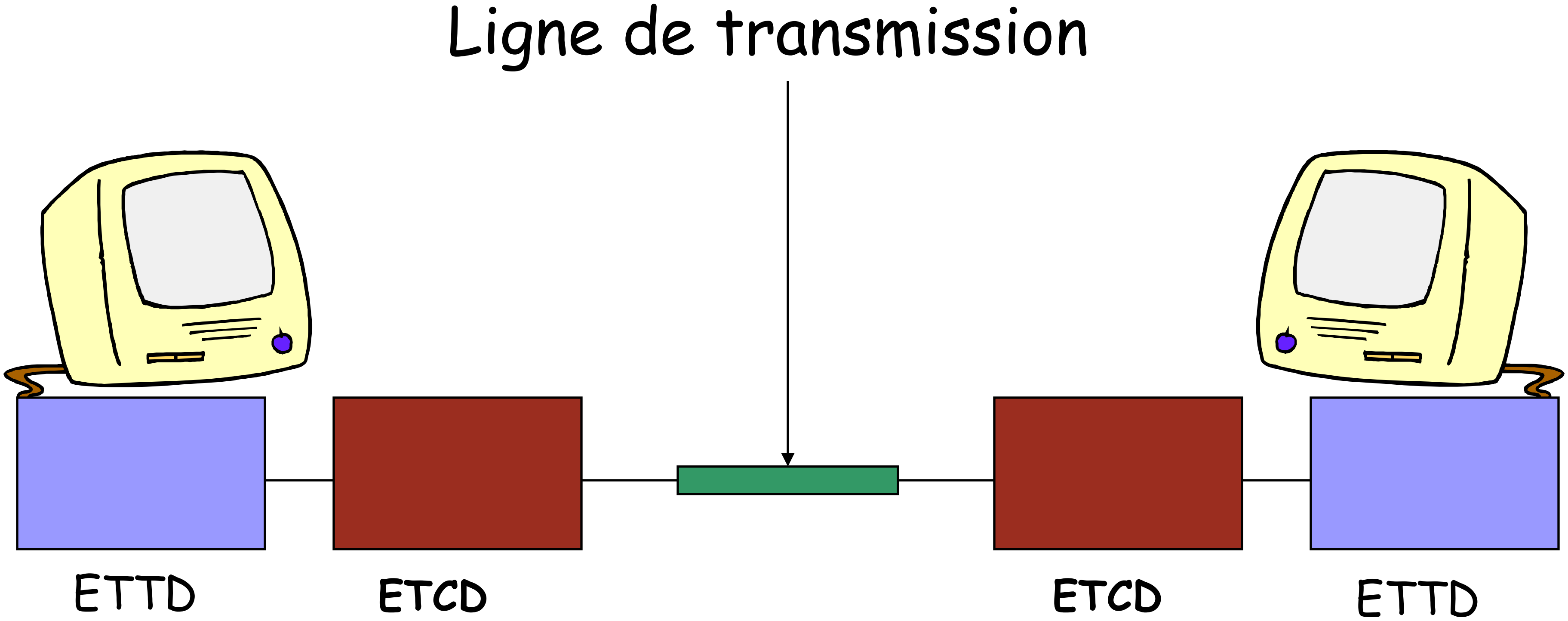
Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique

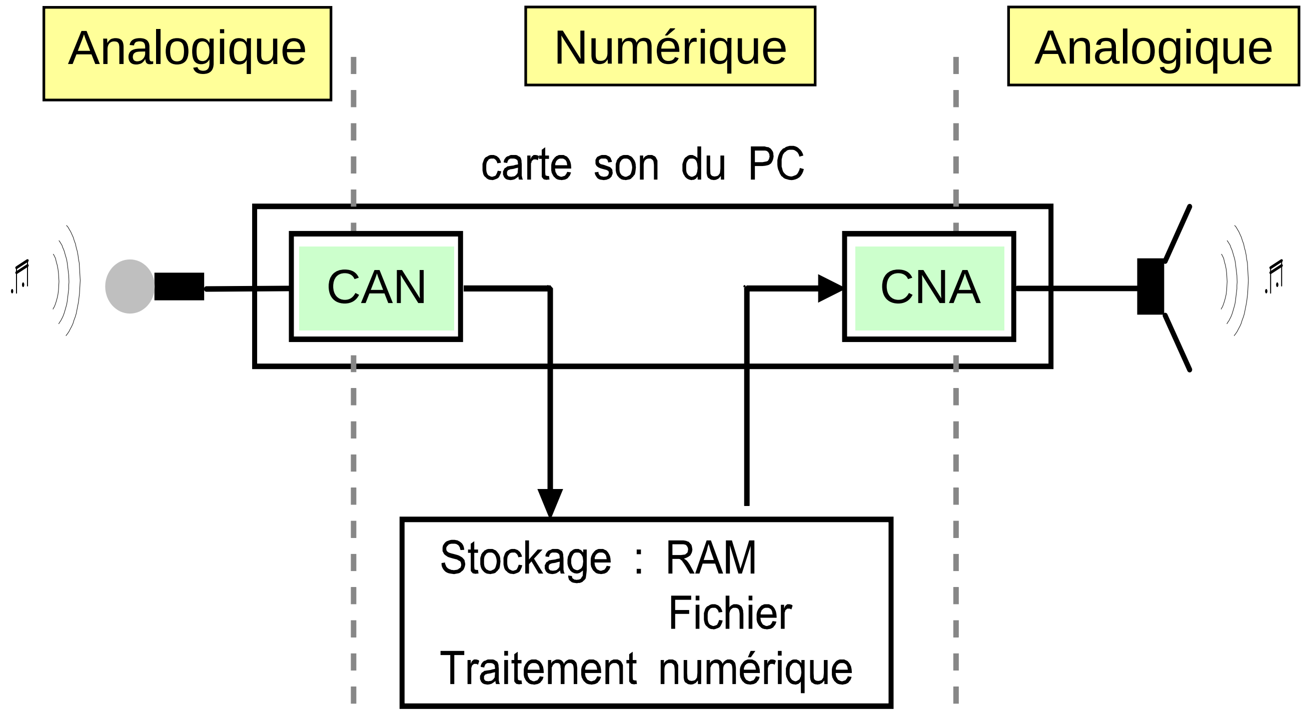


Structure de la chaîne de transmission

- Structure de la chaîne numérique



Exemple :


Analogique
Numérique
Analogique
carte son du PC
CAN
CNA
Stockage : RAM
Fichier
Traitement numérique

Historique

- 1937 : A. Reeves (ITTC) propose les transmissions par impulsions sur Faisceaux hertziens
- 1943 : SIGSALY, 1er équipement de codage de voix
  - Poids : 50 T
  - Puissance : 30Kw
  - Nombre de racks : 40
  - Salle bien conditionnée et airée
- 1962 : 1er système de transmission numérique aux USA

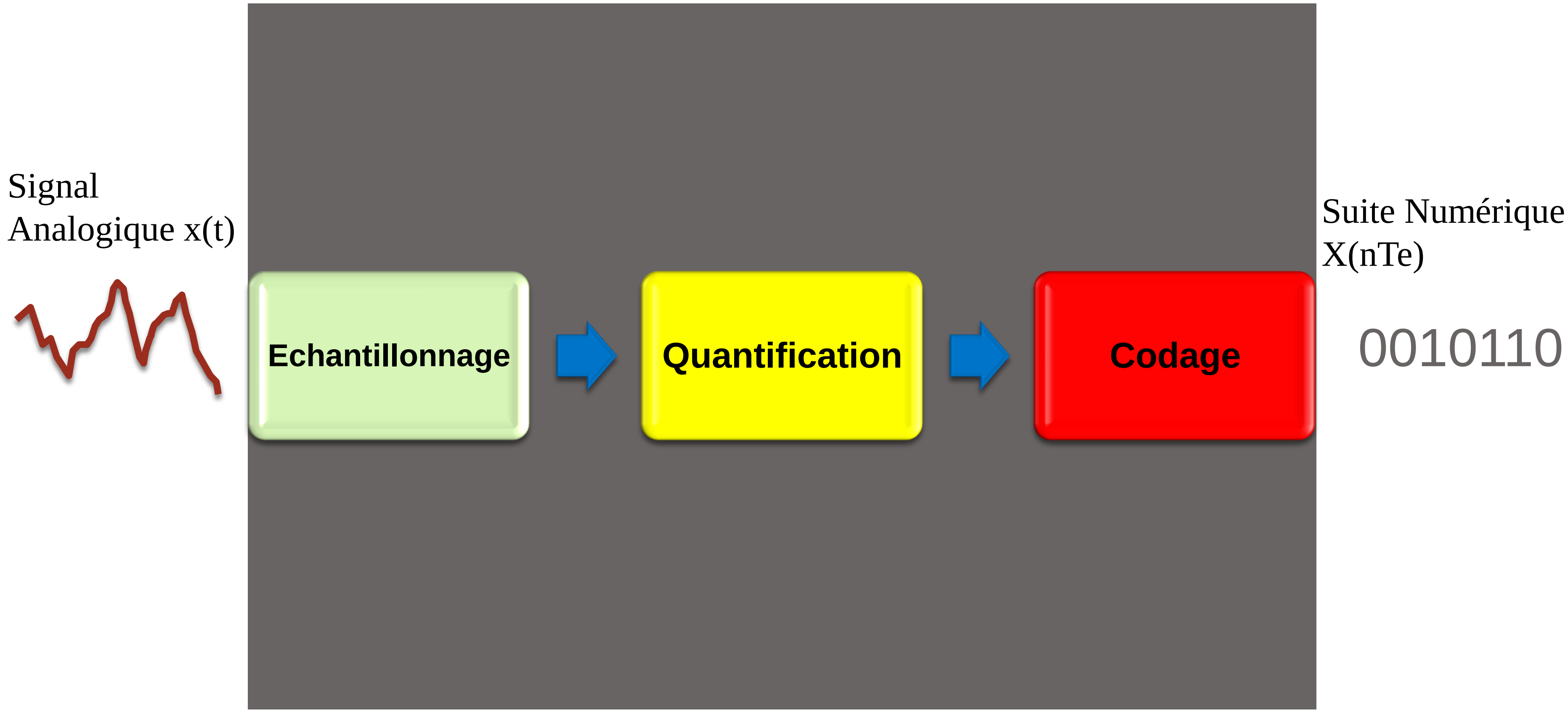
Historique

- 1962 : 1er système de transmission numérique aux USA

- 1970 : la MIC a été développée pour le réseau téléphonique en France

- Utilisée dans de diverses domaines de télécommunications (RTC, RNIS, VoIP…)

Vue générale de la CAN



Etapes de conversion A/N

Pourquoi Numériser ?

- Enregistrement, reproduction, transmission et filtrage du son musical, de la voix, de l'image fixe ou vidéo, reconnaissance vocale, etc
- Correction d'images fixes ou vidéo - élimination d'artefacts - modifications colorimétriques - montages, etc.
- Traitement de signaux industriels : déparasitage, lissage, régulation, analyse spectrale etc.

Pourquoi Numériser ?

- Manque de fiabilité des résultats due à l'inévitable dérive et dispersion des caractéristiques des composants
- Etude difficile et approximative car basée sur des phénomènes physiques *analogues* mais pas toujours identiques aux phénomènes réels.
- Inévitable introduction des parasites dûs au bruit des systèmes de traitement eux-mêmes. Bruit le plus souvent indissociable du signal.
- Coût des prototypes. Chaque application étant étroitement liée à son système matériel, toute modification impliquant pratiquement sa reconstruction matérielle.
- Coûts de construction en série élevés en raison du nombre considérable d'insertions de composants discrets analogiques à faible densité d'intégration fonctionnelle : résistances - condensateurs etc.

Pourquoi Numériser ?

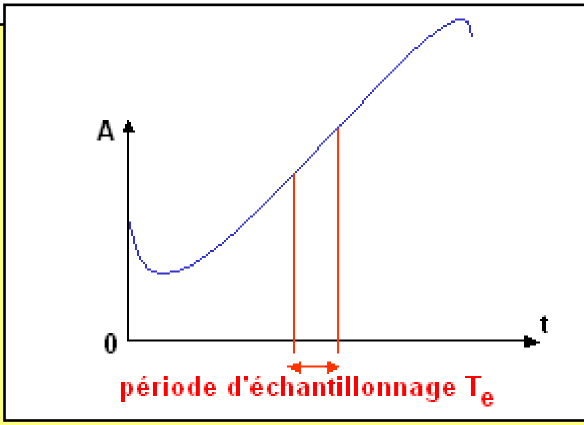
- L'avénement des machines de calcul numérique à forte densité d'intégration - microprocesseurs - a permis de substituer le traitement numérique des grandeurs physiques analogiques à leur traitement analogique.

- L'unité centrale peut effectuer des calculs sur les valeurs instantanées d'un signal et en déduire les corrections souhaitées.

D’un signal continu (analogique) à un signal discret (numérique): 3 étapes

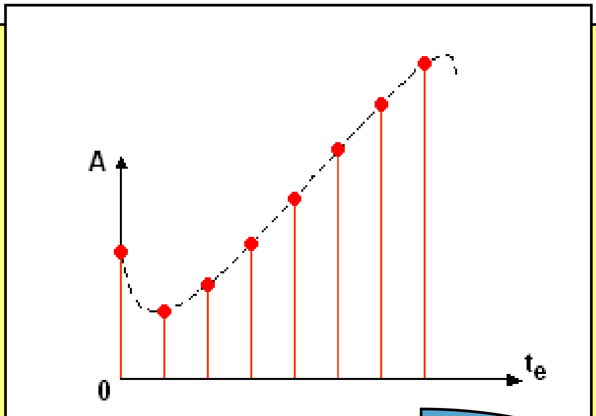
Chaîne de numérisation d’un signal temporel (1-D)

Signal continu (référence)



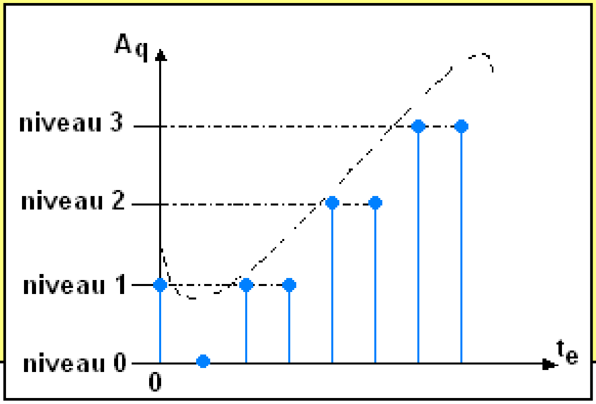
Étape 1

Signal échantillonné



Étape 2

Signal quantifié (4 niveaux)



Étape 3

Codage (4 niveaux ⇒ 2bits)

	CODAGE	
	Bit 2	Bit 1
niveau 3	1	1
niveau 2	1	0
niveau 1	0	1
niveau 0	0	0

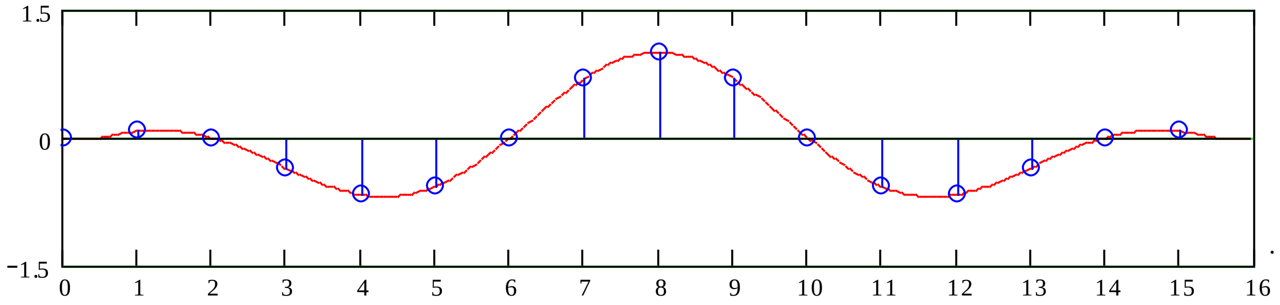
Principe de la CAN

- **Échantillonnage :** L'évolution du signal suivant la dimension « t » (ici le temps) est représentée par un nombre fini de ses valeurs. Les valeurs du signal sont prises régulièrement à une période d'échantillonnage Te.

- **Quantification :** L'amplitude du signal échantillonné est représentée par un nombre fini de valeurs d'amplitude (niveaux de quantification).

- **Codage :** les niveaux de quantification sont codés sous la forme d'un mot binaire sur k bits ($\Rightarrow$ 2^k niveaux possibles).

Echantillonnage



- L'échantillonnage consiste à prélever à intervalles de temps réguliers Te, des valeurs instantanées du signal
- Te : Période d'échantillonnage
- Fe : Fréquence d'échantillonnage
- On a :

Fe = 1/Te

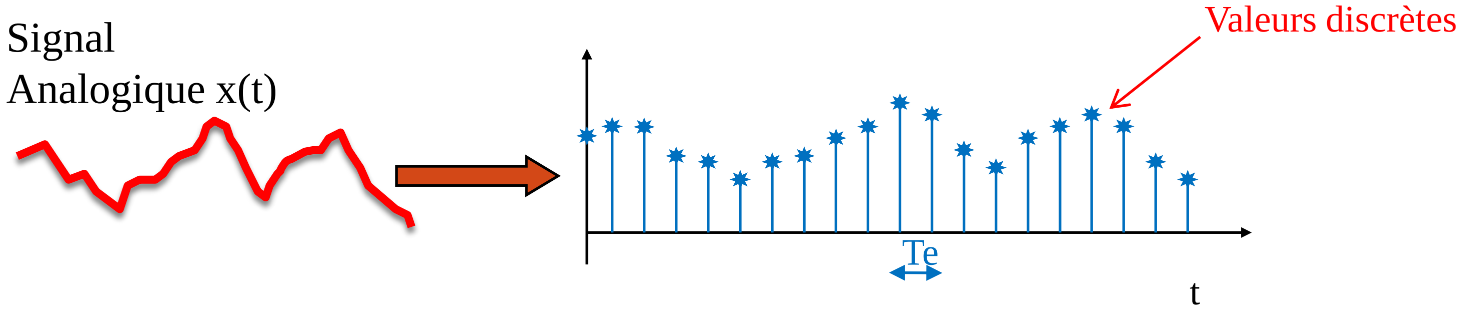
Echantillonnage

- Pour chaque signal continu x(t), on fait correspondre la suite de nombres suivante :

  {…,x(-2Te), x(-Te), x(0), x(+Te), x(+2Te)…}

- On a :

$$X_{ei}(t) = \begin{cases} x(nT_e) & si\ t = nT_e \\ 0 & si\ t \neq nT_e \end{cases}$$



Echantillonnage

- On a aussi :

$$X_{ei}(t) = \cdots + x(-T_e)\delta(t+T_e) + x(0)\delta(t) + x(T_e)\delta(t-T_e) + x(2T_e)\delta(t-2T_e)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t-nT_e)$$

$$= x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_e)$$

Echantillonnage

- En posant :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

- On aura :

$$x_{ei}(t) = x(t).\delta_{T_e}(t)$$

L'échantillonnage peut être modélisé par un produit de x(t) par une fonction $\delta(t)$

Echantillonnage : Spectre

- Pour représenter le spectre d'un signal exprimé dans le domaine temporel : Transformée de Fourier (TF)
- On a :

$$\boxed{x_{ei}(t) = x(t).\delta_{T_e}(t)}$$

- Donc :

Produit de convolution

$$\boxed{X_{ei}(f) = X(f) * \delta_{F_e}(f)}$$

Echantillonnage : spectre

- Avec :

$$\delta_{F_e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e)$$

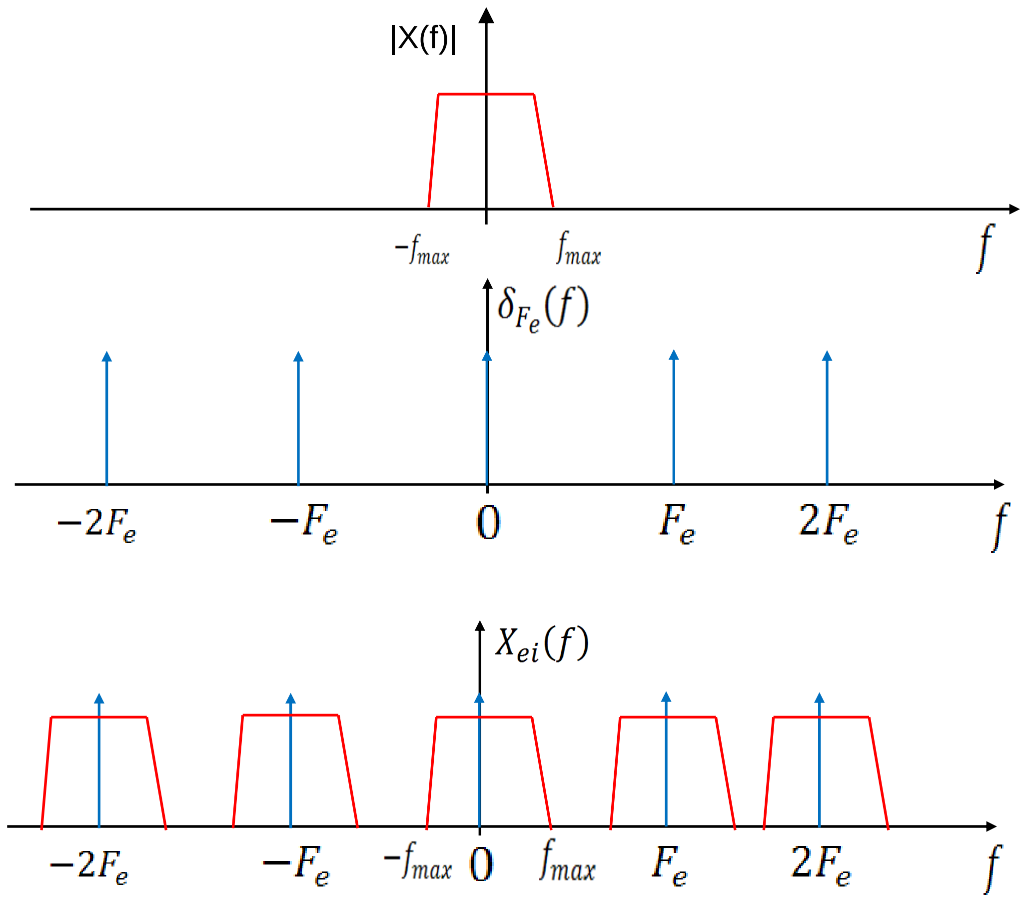
- Et :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f n T_e}$$

Transformée de Fourier de x(t)

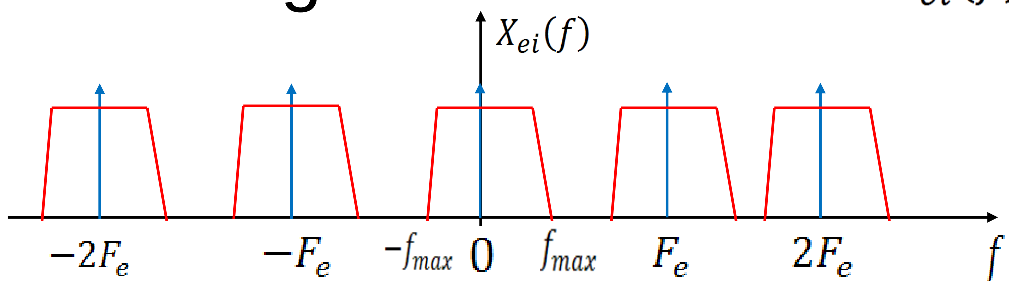
Echantillonnage : Spectre

- $X_{ei}(f)$ représente le spectre de $x_{ei}(t)$
- $X_{ei}(f)$ est constitué par les « translatés » du spectre *x(t)* autour de chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage



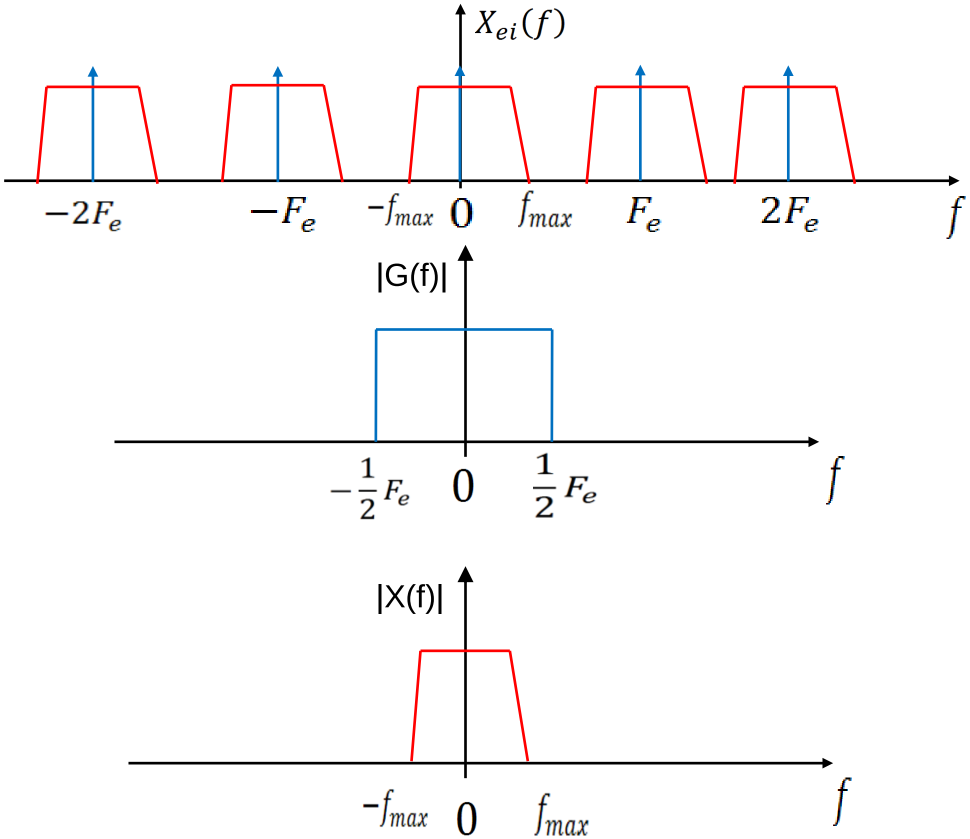
Echantillonnage : Théorème de Shannon

- On voit sur la figure qu'il n y a pas de chevauchement des différents translatés du spectre de *x(t)* car f_{max} est inférieure à $F_e/2$.
- Pour restituer le signal *x(t)*, on applique un filtre passe-bas de fréquence de coupure *Fe/2*.
- On ne gardera, donc, que la bande centrale du spectre du signal échantillonné $X_{ei}(f)$.



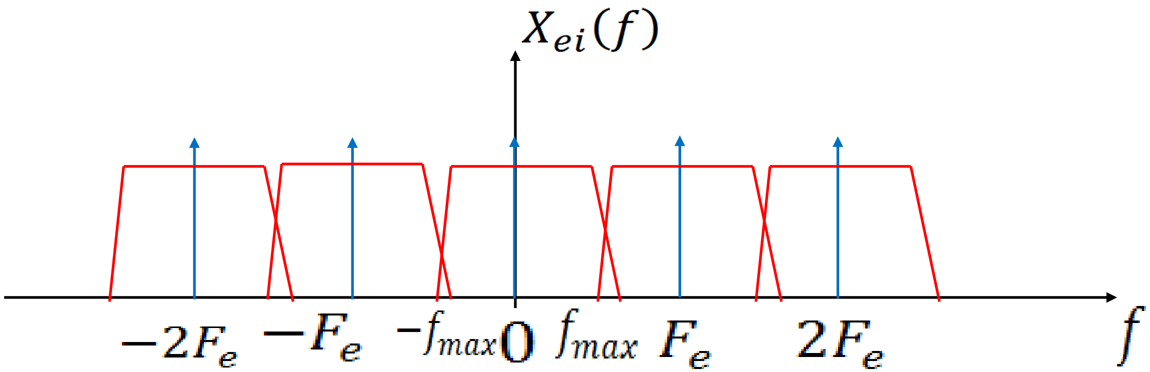
Echantillonnage : Théorème de shannon

- Processus de filtrage et de restitution du signal d'origine :



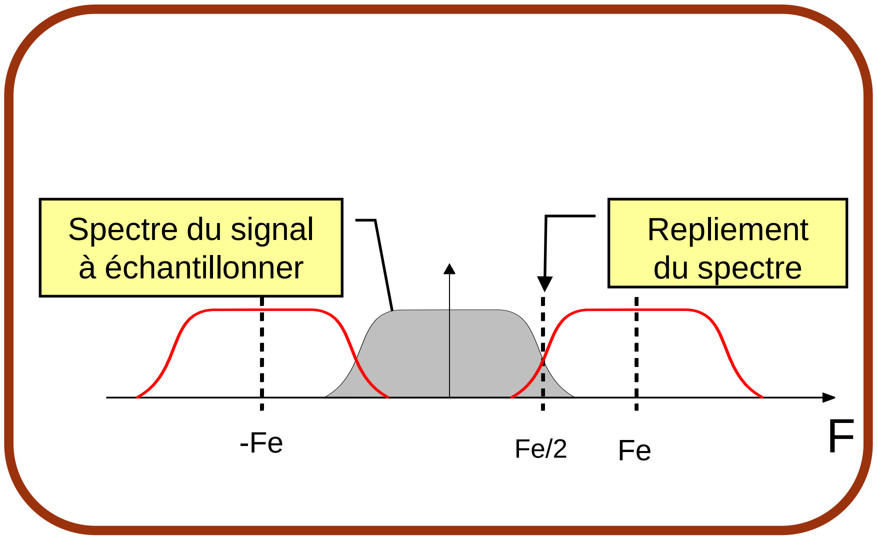
Echantillonnage : Théorème de Shannon

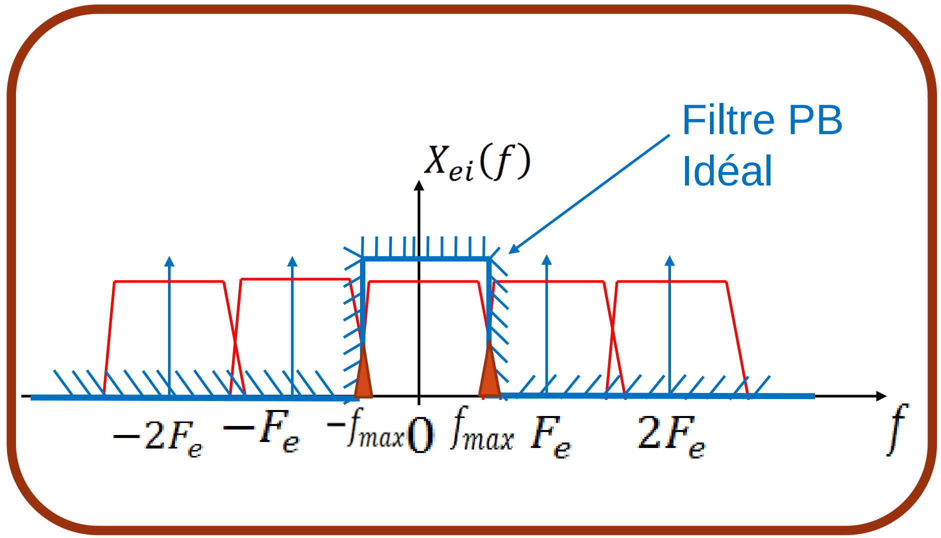
- On voit très bien que si $F_e \leq 2f_{max}$, on ne peut pas retrouver intégralement le signal de départ.



Phénomène de Répliement de Spectre

Phénomène de Repliement de spectre

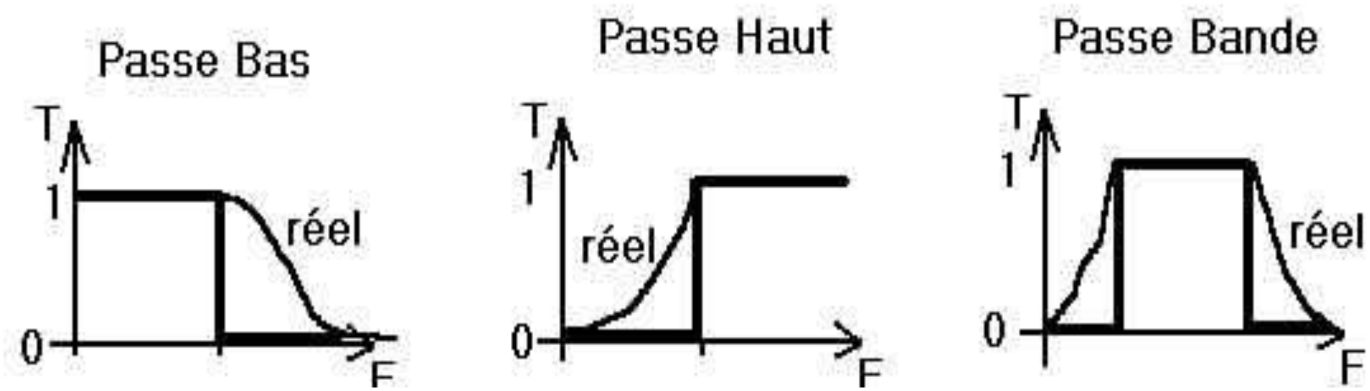




- Si le spectre du signal d'origine x(t) a une largeur de bande supérieure à F_e : **Répliement de spectre** : <u>échantillonnage non idéal</u>

Filtrage réel

- Filtre passe-bas : fonctionnement non idéal



- Il est souhaitable de choisir la valeur de F_e spot supérieure $2*F_{max}$

Encore plus : Filtrage d'entrée..!!

- Pour éviter que les harmoniques d'ordre élevé (hautes fréquences) perturbent le spectre du *signal échantillonné* $x_i(t)$, on fait passer le signal avant échantillonnage par un filtre PB pour éliminer les fréquences qui ne respectent pas la fréquence de Shannon, On parle de filtre **<u>anti-répliement</u>**

Echantillonnage : Théorème de Shannon

La fréquence d'échantillonnage, F_e, doit être, au moins, égale au double de la fréquence maximale du signal à transmettre ($F_e \geq 2f_{max}$). On retrouve le signal à partir de ses échantillons en les filtrant par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure *Fe/2.*

Exemple 1

- En Téléphonie, la largeur de Bande W = 3100Hz,
  - f_{min} = 300 Hz,
  - f_{max} = 3400 Hz
  - Donc : F_{ei} = 6800 Hz (Filtrage PB idéal)
  - => Fe = 8000 Hz (Filtrage PB réel)

Exemple 2

- En technologie Hi-Fi (compact CD)
  - f_{min} = 20 Hz,
  - f_{max} = 22000 Hz
  - Donc : F_{ei} = 44000 Hz (Filtrage PB idéal)
  - => Fe = 44100 Hz (Filtrage PB réel)

Quantification

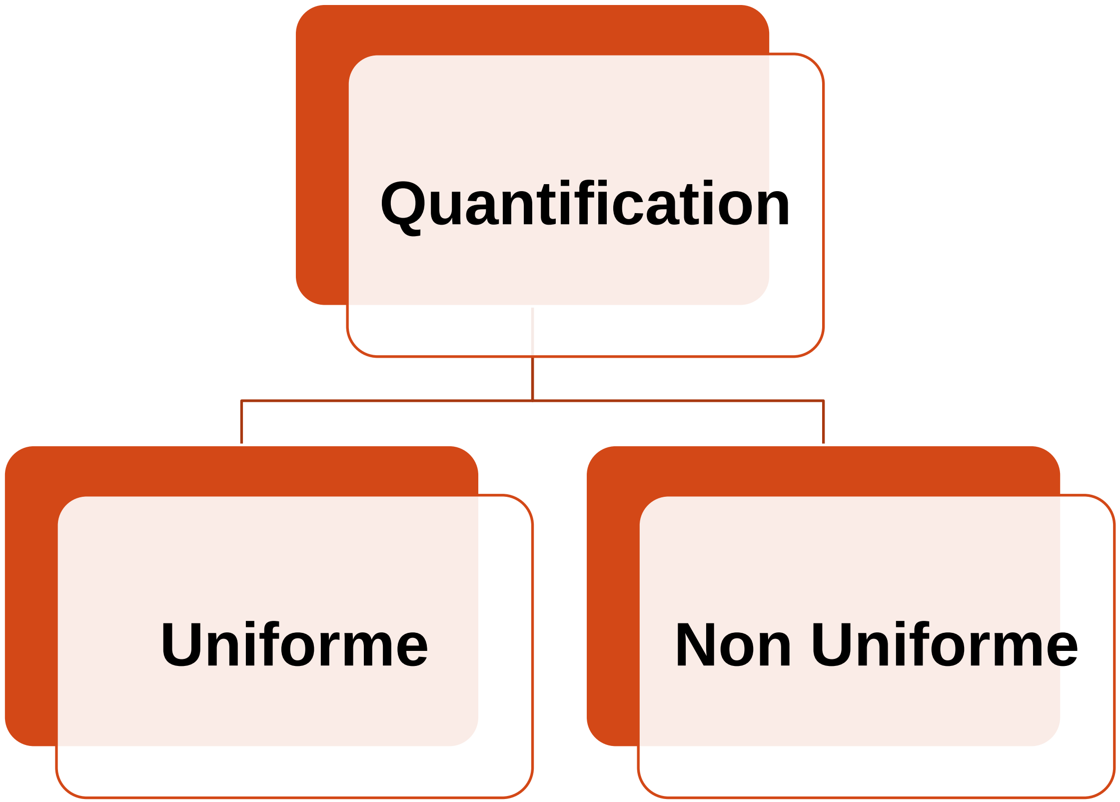
- Si l'on se limite à un intervalle [–V_{max},+ V_{max}] du signal d'origine, on aura une infinité de valeurs réelles, pour les coder en des 0 et des 1, on devrait avoir des mots binaires infiniment longs (Pas possible)
- On limite le raisonnement par rapport à un ensemble fini d'échantillons réel
- Cela revient à subdiviser l'intervalle [–V_{max},+ V_{max}] , à un ensemble de *niveaux* ou *échelons* (ou *plages*) => **QUANTIFICATION**

Quantification

- La Quantification consiste donc à graduer l’intervalle [–V_{max},+ V_{max}] en échelons et d’attribuer à chaque échantillon prélevé lors de l’échantillonnage, un mot binaire correspondant.
- Supposons que chaque mot binaire est constitué de *k* éléments binaires

  => 2^k niveaux possibles entre [–V_{max},+ V_{max}]
- Diviser l’intervalle [–V_{max},+ V_{max}] en (2^k) niveaux s’appelle **Quantification**.

Quantification



Dans le suite du cours, on ne va traiter que la **Quantification Uniforme**

Quantification

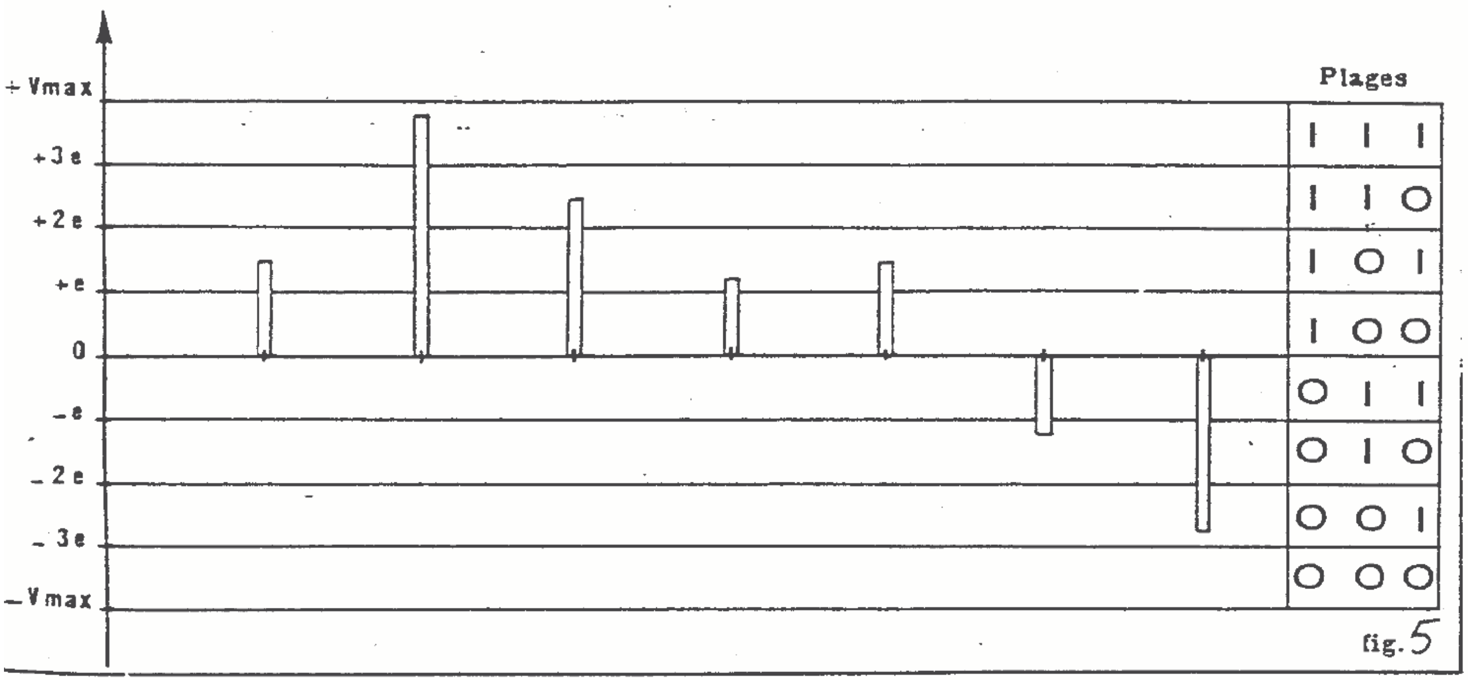
- **Uniforme :**

  La plage de conversion est subivisée en *pas de quantification* Δ égaux (Δ = Cste)

- **Non Uniforme:**

  La plage de conversion est subdivisée en pas de quantification non égaux.

Quantification uniforme



<u>Exemple de quantification (k=3)</u>

Quantification uniforme

- Division de la dynamique du signal $[-V_{max},+V_{max}]$ en *N* plages de taille Δ telle que :

$$\Delta = 2V_{max}/N$$
$$= 2V_{max}/2\hat{}k$$

- Avec N = 2^k
- « *k* » est le nombre de bits de codage
- Comme Δ est fixe, on parle de **Quantification Uniforme**
- Δ est appelé : **Pas de Quantification** ou **échelon**

Quantification uniforme

- Le nombre fini de symboles implique une quantité de valeurs possibles du signal limitée
- Quantifier un signal revient à approximer sa valeur instantanée par la valeur discrète la plus proche => Erreur de quantification
- Plus le nombre de valeurs numériques possibles est élevé, plus la valeur discrète sera proche de la valeur instantanée; le signal quantifié sera donc plus fidèle à l'original.

Quantification uniforme

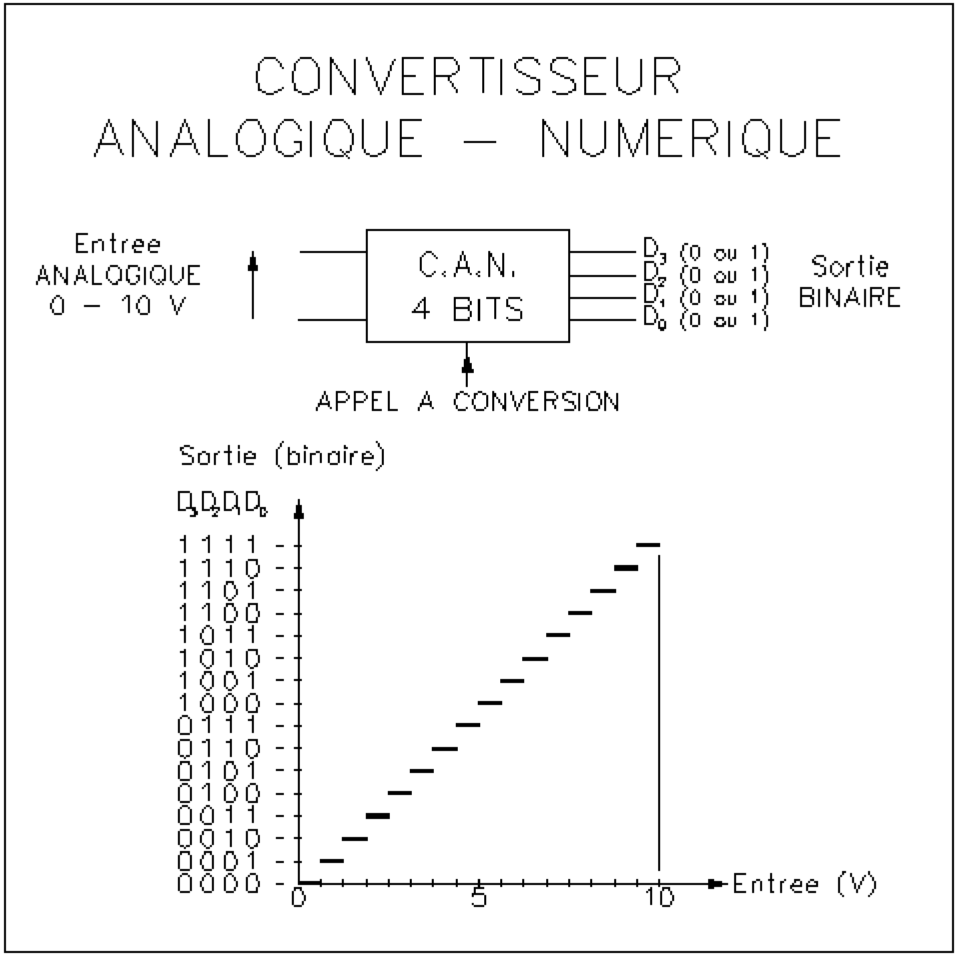
- On associe aux valeurs prélevées (échantillons) situées dans la même plage, la même mesure de quatification
- Question : Comment assurer cette association d’une manière efficace, transparente et la plus fidèle possible ?

Lois de Quantification

- Par défaut
  (ou troncature)
- Par Excès
- Par Arrondi

Quantification

- L'entrée V correspond aux valeurs discrètes $x(n)=x(nT_e)=x_n$
- La sortie binaire correspond aux valeurs quantifiées y(n) de l'entrée x(n)



Quantification

- Soit :
  - V_{max} est l'amplitude maximale de x(t)
  - $\Delta = x_{i+1} - x_i$
  - $1 \leq i \leq N$
  - y(n) est le signal quantifié (codé)
  - Q(x) : Opérateur de quantification, y = Q(x)

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R} \xrightarrow{\quad Q(x) \quad} \mathbf{y} \in \mathbf{D_q} ; \mathbf{D_q} = \{\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_n}\}$$

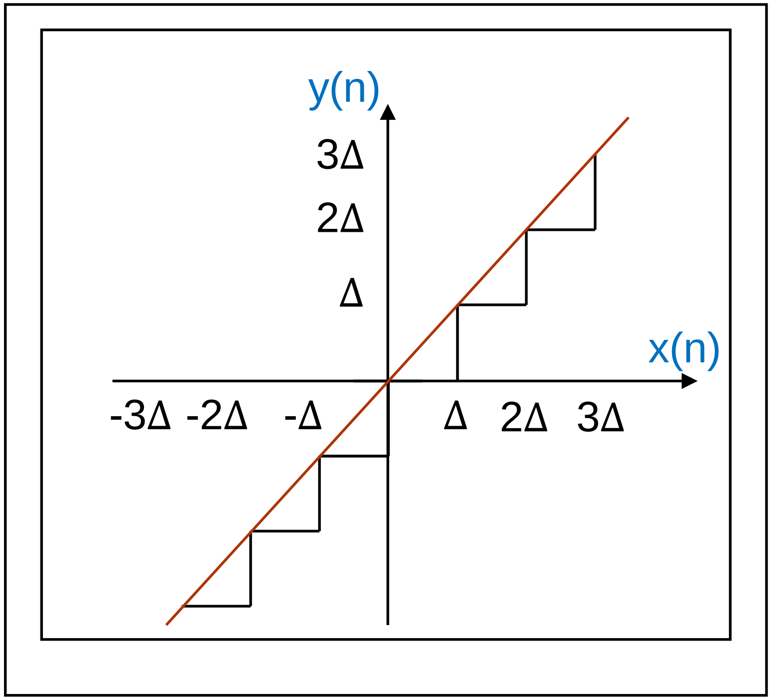
Quantification par Troncature

- Quantification par défaut
- Toutes les amplitudes situées dans la même plage sont représentées par l'*amplitude minimale.*
- Soit *k* un entier :

$$k\Delta \leq x(n) < (k+1)\Delta$$

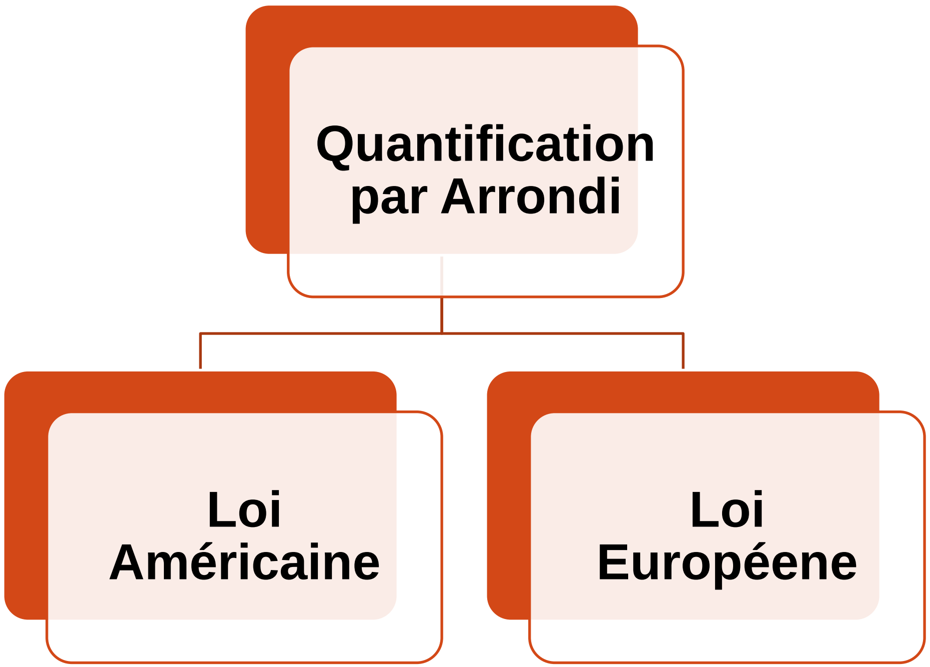
- Donc

$$y(n) = k\Delta$$



Quantification par Arrondi

- Toutes les amplitudes situées dans une même plage sont représentées par l'amplitude moyenne de la plage



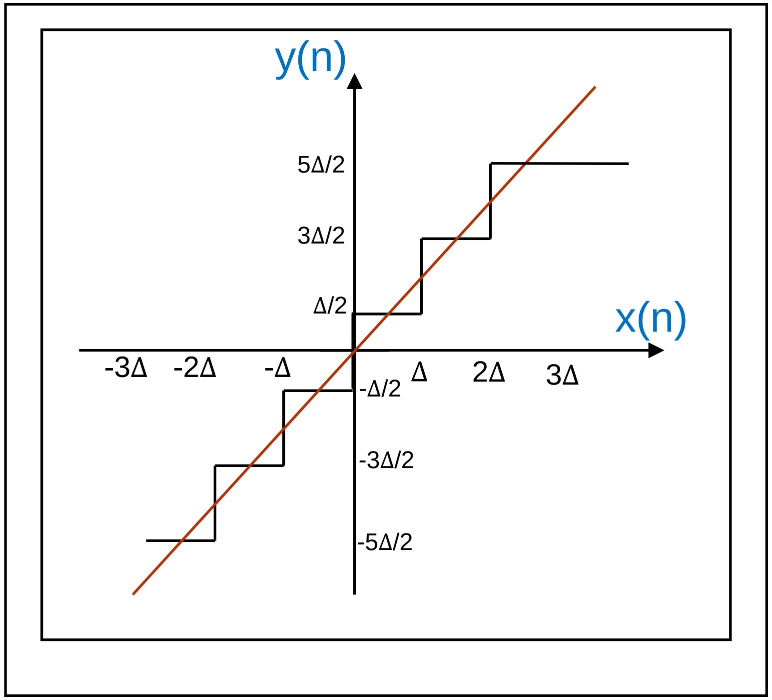
Quantification par Arrondi

- **Loi Européenne à mi-contre marche** :
  - L'expression de cette loi est :

$$(k-1)\Delta \leq x(n) < k\Delta$$

  - Alors :

$$y(n) = (2k-1)\Delta/2$$



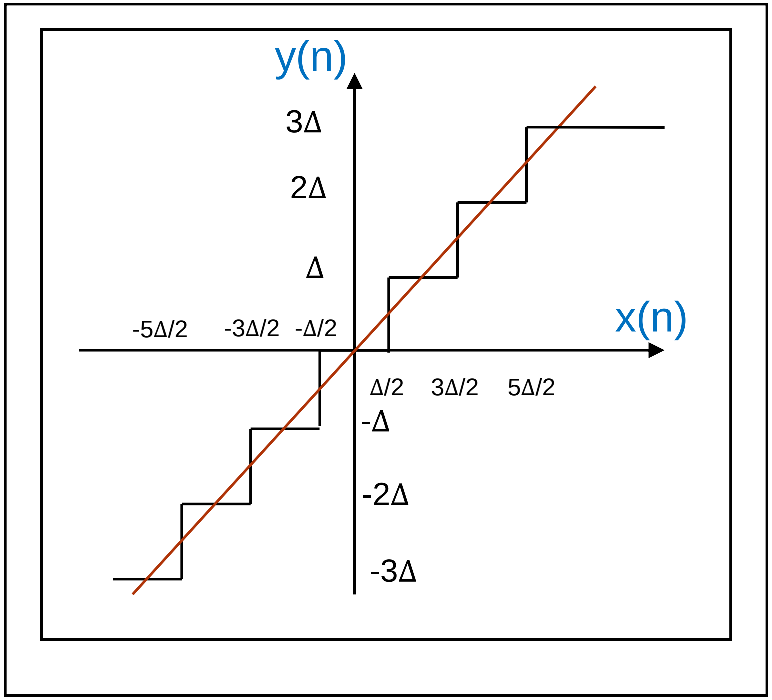
Quantification par Arrondi

- **Loi Européenne à mi-contre marche** :
  - Principe adopté en Europe et en Russe.
  - Pour les tensions comprises entre $-V_{max}$ et V_{max}, les valeurs échantillonnées sont obtenues par le principe de « courbe en escalier »
  - Pour les tensions de valeurs absolues supérieures à V_{max}, il n'y a plus de marche en escalier, mais uniquement de deux demi droites, il y a *écrêtage* !

Quantification par Arrondi

- **Loi Américaine à mi-marche :**
  - Le signal quantifié est nul entre]-Δ/2, Δ/2[
  - L'expression de la loi :

$$(k-1/2)\Delta \leq x(n) < (k+1/2)\Delta$$



- Alors :

$$y(n) = k\Delta$$

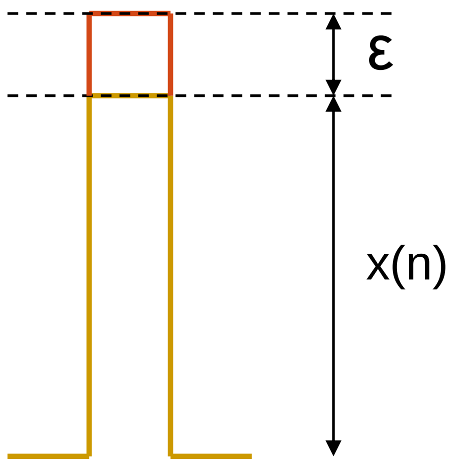
Bruit de Quantification

- La Conversion Analogique Numérique (CAN) introduit toujours une erreur de Quantification
- L'erreur de Quantification mesure l'écart entre le signal échantillonné non quantifié et le signal quantifié

$$\varepsilon = y(n)-x(n)$$

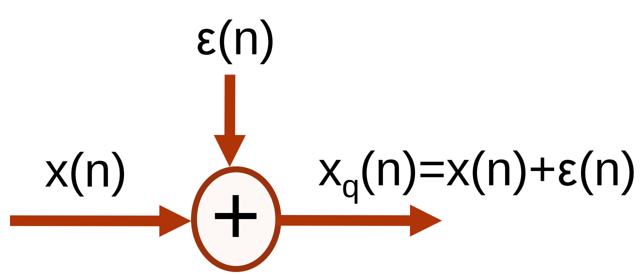
Bruit de Quantification

- Le bruit de quantification n'est pas constant
- L'erreur de quantification est d'autant plus faible que nombre de plages est grand



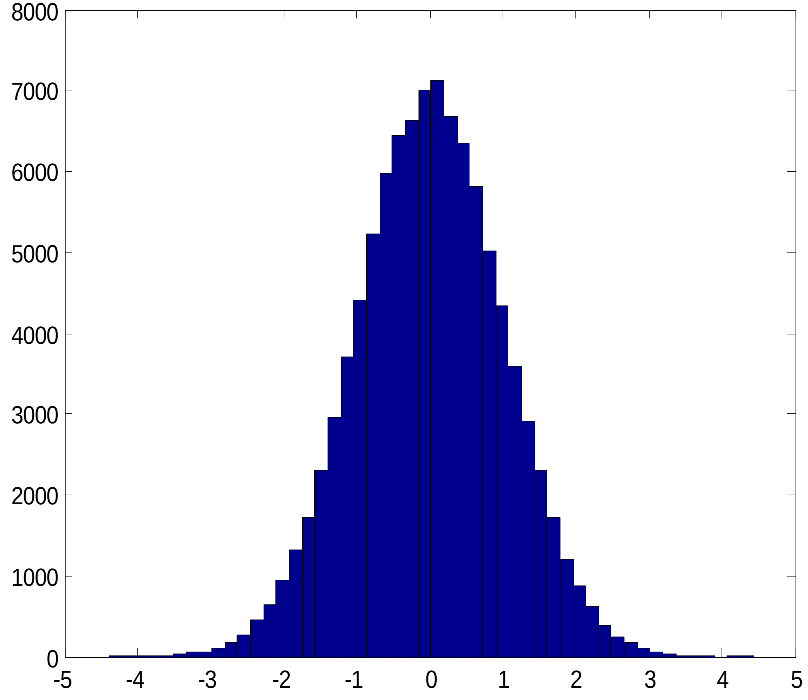
ε = Bruit de quantification

x(n) = niveau du Signal



Conventions

- Le signal de parole est considéré comme un signal aléatoire à moyenne nulle et variance σ_x^2.
- L’erreur quantification, est considérée un bruit gaussien à moyenne nulle $(0,\sigma_\varepsilon^2)$.



Puissance Moyenne du Bruit de Quantification

- Quantification par Arrondi:

$$\sigma_b^2 = \Delta^2/12$$

- Quantification par Troncature:

$$\sigma_b^2 = \Delta^2/3$$

Rapport Signal à Bruit de Quantification

- Le Rapport Signal à Bruit (RSB ou SNR) définit le rapport de puissance entre le signal d'information et le bruit

$$(RSB)_q = S/B = P_x/P_b = \sigma_x^2 / \sigma_b^2$$

- σ_x^2: Variance du signal x(t)
- σ_b^2 : Variance du bruit de quantification

Rapport Signal à Bruit de Quantification

- Or :
  - $\Delta = 2\,V_{max}/N$
  - $\sigma_b{}^2 = \Delta^2/12$ (MIC)
- Donc :

$$\boxed{S/B = 3N^2(\sigma_x/V_{max})^2}$$

- Soit en expression logarithmique :

$$\boxed{10\log(S/B) = 20\log(N) + 20\log(\sigma_x/V_{max}) + 4{,}7\ (dB)}$$

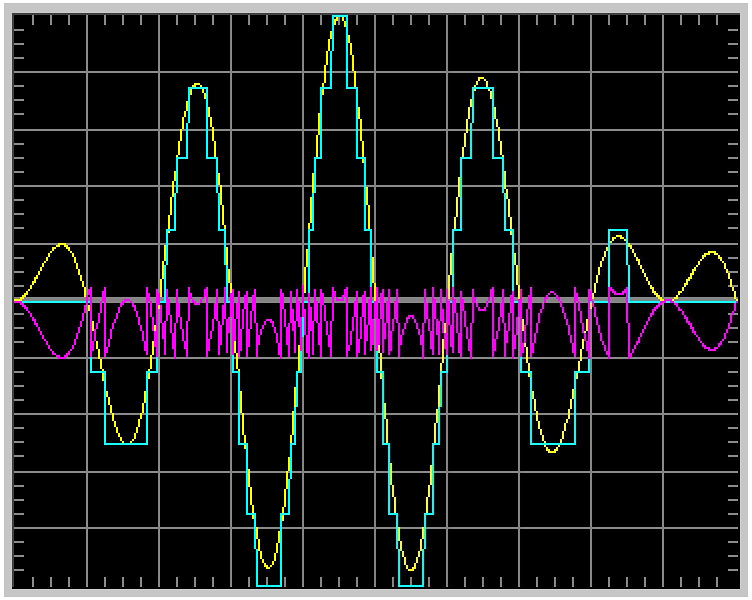
Rapport Signal à Bruit de Quantification

- Comme $N = 2^n$ et $V = 2V_{max}$, on obtient :

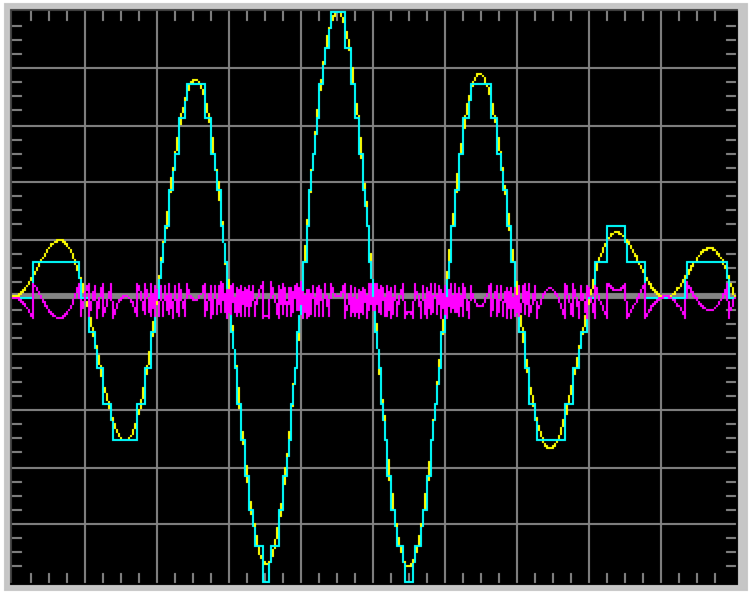
$$10 \log(S/B) = 6n + 20 \log(\sigma_x/V) + 10{,}8 \text{ (dB)}$$

- Avec :
  - *n* : le nombre de bits de codage

Rapport Signal à Bruit de Quantification



« N » niveaux de quantification



« 2N » niveaux de quantification

<u>Illustration de bruit en fonction du pas de quantification</u>

Rapport Signal à Bruit de Quantification

Le rapport Signal à Bruit de Quantification mesuré en décibels varie linéairement avec « n » et augmente de 6dB avec chaque bit supplémentaire

Rapport Signal à Bruit de Quantification -Cas de Téléphonie -

- En téléphonie, le Rapport Signal à Bruit de Quantification devrait être supérieure ou égale à 35dB :

$$10\mathrm{Log}(P_s/P_b) \geq 35 \text{ dB}$$

- Fe = 8KHz, Quantifications : 8 bits

Rapport Signal à Bruit de Quantification -Cas de CD Audio -

- En Technologie Steréo CD, le Rapport Signal à Bruit de Quantification du signal audio est :

$$10 \mathrm{Log}(P_s/P_b) \approx 96 \text{ dB}$$

- Fe = 44,1KHz, Quantification : 16 bits

Codage binaire des échantillons quantifiés

- Le codage (*coding)* fait correspondre à un niveau de quantification donné, déterminé par la loi de quantification, une expression numérique, généralement binaire, appelée mot de code (Mot PCM).
- La quantification et le codage sont effectués dans un même dispositif appelé codeur.
- Le codage n'a aucune influence sur la qualité de conversion et/ou transmission.

Codage binaire des échantillons quantifiés

- Le processus de quantification remplace la valeur exacte d'un échantillon par un nombre représentant l'intervalle dans lequel se trouve cette valeur.
- Le codage est la transcription de ce nombre en une expression logique, appelée mot de code (code)
- Le code est l'expression binaire qui définit les intervalles numérotées (intervalle de quantification).

Codage binaire des échantillons quantifiés - Rappels

- l'écriture d'un nombre M dans une base de numérotation b en fonction des chiffres de l'alphabet numérique se fait de la manière suivante :

$$M = a_{n-1} b_1^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m}$$

Codage binaire des échantillons quantifiés - Rappels

- Exemple 1 :

  Dans le système décimal : b = 10

  Les ensembles de la base sont : {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

- Exemple 2

  Dans le système binaire, b = 2

  Les ensembles de la bases sont : {0,1}

- Exemple 3

  Dans le système hexadécimal b=16

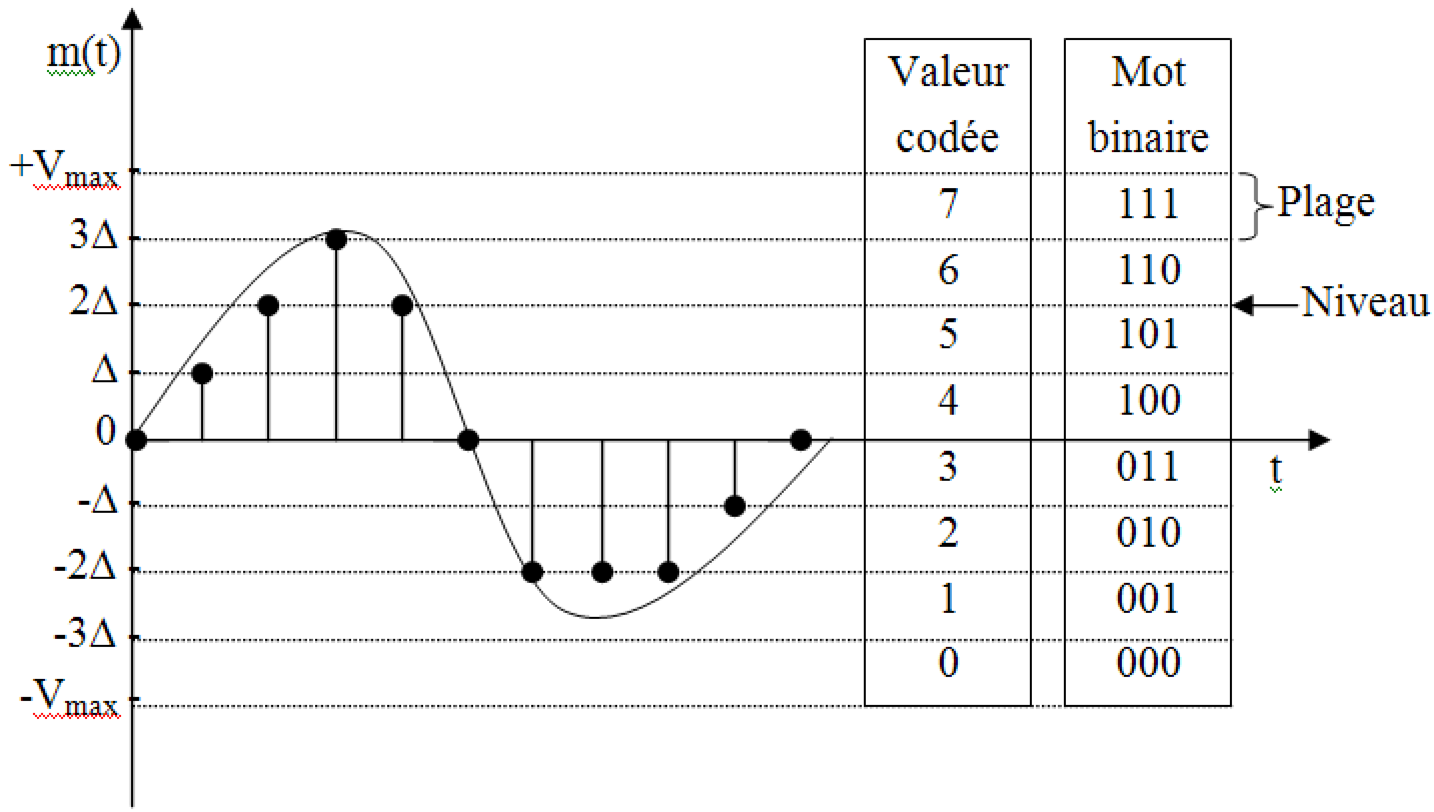
  Les ensembles de la bases sont: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

Codage binaire des échantillons quantifiés - Rappels

$M_{(10)}$	$M_{(2)}$	$M_{(8)}$	$M_{(16)}$	$M_{(10)}$	$M_{(2)}$	$M_{(8)}$	$M_{(16)}$
0	00000	00	00	10	01010	12	0A
1	00001	01	01	11	01011	13	0B
2	00010	02	02	12	01100	14	0C
3	00011	03	03	13	01101	15	0D
4	00100	04	04	14	01110	16	0E
5	00101	05	05	15	01111	17	0F
6	00110	06	06	16	10000	20	10
7	00111	07	07	17	10001	21	11
8	01000	10	08	…	…	…	…
9	01001	11	09				

<u>Quelques nombres et leurs correspondances dans les bases 2, 8 et 16.</u>

Codage binaire des échantillons quantifiés



<u>Exemple de codage des niveaux de quantification par défaut</u>

Codage binaire des échantillons quantifiés - Type de codes -

- Codes Purs
- Codes de Gray
- Code BCD

Codage binaire des échantillons quantifiés – Codes Purs-

- Plus simples
- Plus fréquents

$$M = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \, 2^i$$

- d_i = 0 ou 1

Codage binaire des échantillons quantifiés – Codes de Gray

- *Codes Binaire Réfléchi*
- Peut être déduit du code binaire pur !
- $d_{ng} = d_{nb}$
- $d_{ig} = d_{ib} \oplus d_{(i+1)b}$; $i = (n-1), (n-2), \ldots, 1$
- *Où* $\oplus$ désigne le OU-EXCLUSIF

Codage binaire des échantillons quantifiés – Codes de Gray

- Facile à réaliser : Electronique numérique
- Le passage d'un niveau à son voisin n'implique le changement que d'un seul bit
- Limitation de l’effet d’une erreur sur la valeur numérique de niveau de quantification
- Erreur égale à +/- Δ !!

Codage binaire des échantillons quantifiés – Codes de BCD -

- Binary Coded Decimal
- Codage normalisé sur 4 bits
- Le codage se fait par rapport à chaque valeur constituant le chiffre à coder
- Exemple :

$$(27)_{10}=(0010\ 0111)_{BCD}$$

- Utilisé dans l'électronique, puisque chaque chiffre sera traité dans un circuit à part

Codage binaire des échantillons quantifiés – Codes de BCD -

M	Binaire pur $d_3d_2d_1d_0$	Code de Gray	BCD 8421
15	1111	1000	
14	1110	1001	
13	1101	1011	
12	1100	1010	
11	1011	1110	…
10	1010	1111	0001 0000
9	1001	1101	1001
8	1000	1100	1000
7	0111	0100	0111
6	0110	0101	0110
5	0101	0111	0101
4	0100	0110	0100
3	0011	0010	0011
2	0010	0011	0010
1	0001	0001	0001
0	0000	0000	0000

Principaux codes unipolaires (n=4)

ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX DISCRETS

Plan du chapitre

- Rappels sur les signaux discrets
  - Définitions
  - Propriétés
- Transformée de Fourier à Temps Discrets
  - Définitions
  - Propriétés
- Transformée de Fourier Discrète
  - Définition
  - Propriétés
  - TF Rapide (FFT)

Rappels : Signaux discrets

Rappels de base :

$\mathbb{R}$ Ensemble des réels : 1,234 ; -1 ; π ; etc.

$\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, etc.

$\mathbb{Z}$ Ensemble des entiers relatifs : -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

$\mathbb{Q}$ Ensemble des nombres rationnels (quotient de deux $\mathbb{Z}$). ex : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Signal discret

Soit un signal $x(t)$ échantillonné à une période T_e. Le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_n x(nTe)\delta(t - nTe)$$

En considérant une période d'échantillonnage normalisée ($T_e = 1$) , on a :

$$x_e(t) = \sum_n x(n)\delta(t - n)$$

On obtient la suite de valeurs $\{x(n)\}$ appelée signal discret.

- Ainsi, un signal discret est une suite $\{x(n)\}$ représentée par la fonction de $\mathbb{Z} \to \mathbb{C} : n \to x(n)$

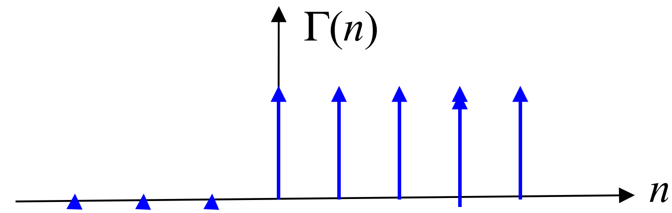
➢ Remarque : la normalisation permet de considérer la suite de valeurs $x(nT_e)$ *indépendamment* du processus de discrétisation qui l'a générée.

Signaux discrets particuliers

Echelon unité

$$\Gamma(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

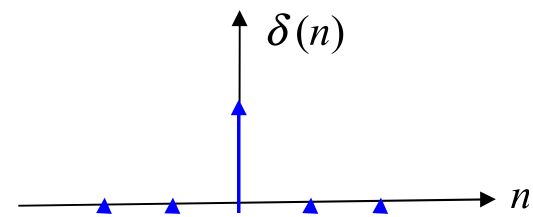
➢ Remarque : $\Gamma(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} \delta(n-r)$



Impulsion discrète (fonction delta de Kronecker)

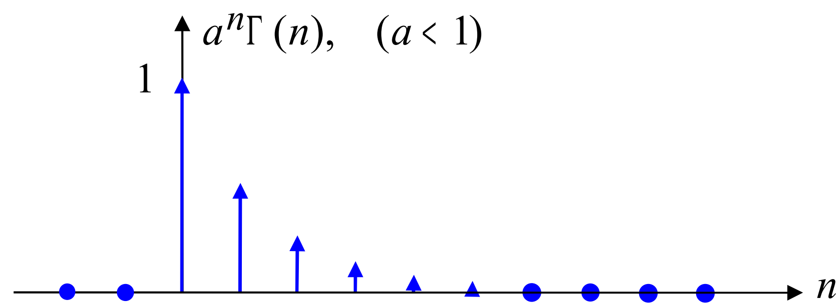
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

➢ Remarque : $\delta(n) = \Gamma(n) - \Gamma(n-1)$



Exponentielle décroissante causale

$$x(n) = a^n \Gamma(n), \quad a < 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

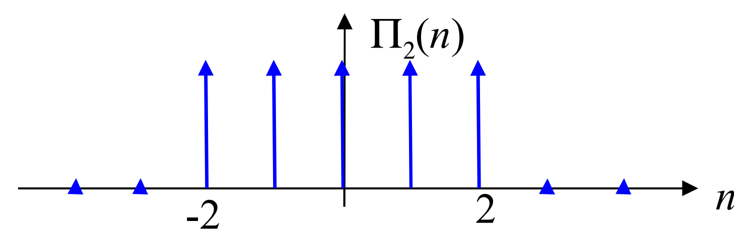


Signal rectangulaire

$$\Pi_T(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T \leq n \leq T \quad T \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le signal est de longueur $2T+1$

➢ Remarque : $\Pi_T(n) = \Gamma(n+T) - \Gamma(n-(T+1))$



Signaux discrets périodiques

❑ Définition de la périodicité

Un signal discret est périodique de période N si :

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x(n+N) = x(n) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

➢ Remarque : la plus petite valeur de N est la période fondamentale

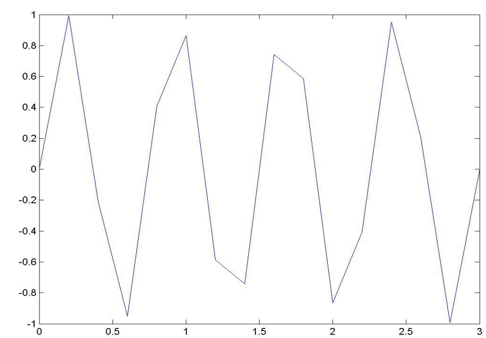
❑ Exemples

- Signal sinusoïdal : $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

- Signal exponentiel complexe : $x(n) = ae^{j\omega_0 n}$

⚠ En discret, les signaux sinusoïdaux ne sont pas nécessairement périodiques.

- Condition de périodicité : $\omega_0 n = 2\pi k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$



soit $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{n}{k}$ avec $\dfrac{n}{k} \in \mathbb{Q}$

La période est l'entier naturel N (s'il existe) tel que $N = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

➢ Remarque : en continu, la condition de périodicité s'énonce $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{n}{k} \in \mathbb{R}$ et est moins restrictive.

Energie et puissance des signaux discrets

Energie

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Puissance moyenne

Si le signal est à énergie infinie, on définit la puissance moyenne

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- Exemple : signal échelon discret

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\Gamma(n)|^2 \rightarrow P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 \rightarrow P = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

Puissance moyenne d'un signal périodique

Si N est la période alors $P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{N} |x(n)|^2$ Energie sur une période : $E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

Opération sur les signaux discrets

Soit $\{x(n)\} = \{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y(n)\} = \{y(n), n \in \mathbb{Z}\}$, des signaux discrets

- Multiplication par un scalaire

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\{x(n)\} = \{\lambda x(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Somme de signaux discrets

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

- Multiplication de signaux discrets

$$\{x(n)\} \times \{y(n)\} = \{x(n) \times y(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

Ces opérations sur les signaux discrets donnent des signaux discrets.

- Signaux définis par une relation de récurrence :

Aux équations différentielles dans le cas continu correspondent des équations de récurrence dans le cas discret. Ces équations permettent de décrire des signaux discrets et des opérations sur ces signaux à l'aide d'additions et multiplications scalaires.

- Exemple : considérons l'équation récurrente :

$x(n) = ax(n-1)$ avec $x(0) = c$ (condition initiale)

On montre aisément que la solution à cette équation est : $x(n) = c\, a^n\, \Gamma(n)$

Transformée de Fourier des signaux à temps discret (TFTD)

Question : Comment faire l'analyse fréquentielle de signaux discrets ?

Soit $x_e(t)$ un signal issu de l'échantillonnage de $x(t)$: $x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

- Que donne la TF "classique" du signal échantillonné ?

$$X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \right) e^{-j2\pi ft} dt \longrightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) e^{-j2\pi ft} dt}$$

En utilisant la définition de la distribution de Dirac, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi nfT_e}$

Par conséquent : $X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi nfT_e}$

La TF d'un signal échantillonné est une combinaison linéaire d'exponentielles complexes pondérées par la valeur des échantillons.

- Normalisation de la période d'échantillonnage :
  dorénavant et sauf mention contraire, on considerera que Te=1

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

TFTD

Définition

Soit $x(n)$ un signal discret. La TFTD $X(f)$ de ce signal est donnée par l'expression :

$$\boxed{X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}}$$

f est une variable continue

<u>La TF d'un signal discret</u> est une fonction continue ou non de la <u>variable continue f</u>

Remarque : idem que la TF d'un signal quelconque, avec une somme à la place de l'intégrale.

Condition d'existence de la TFTD

La TF d'un signal discret $x(n)$ existe si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$ i.e. si le <u>signal est absolument sommable</u>.

L'existence de la TFTD est donc liée à la <u>convergence absolue</u> de la série $x(n)$

(Exemple d'une série semi-convergente : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est finie mais pas $\sum_{n\geqslant 1} |\frac{(-1)^n}{n}|$)

TFTD

Périodicité de la TFTD

Soit $X(f)$ la TFTD du signal discret $x(n)$: $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}$

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi n(f+1)}$$

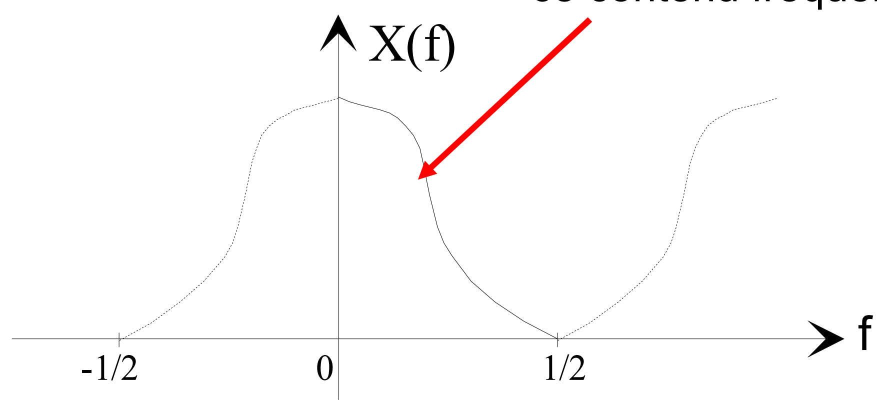
$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}e^{-j2\pi n}$$

$$X(f+1) = X(f)$$

- La TF des signaux discrets est périodique de période f=1

- Toute l'information fréquentielle du signal est localisée dans l'intervalle de fréquence : $f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$x(n)$ est caractérisé par ce contenu fréquentiel



➢ Remarque

Si $x(n)$ est réel, $|X(f)|$ est paire et $\arg(X(f))$ est impair. On réduit donc l'analyse de $X(f)$ sur l'intervalle de fréquence $f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

TFTD

Périodicité de la TFTD : généralisation avec Fe ≠ 0

Pour un signal échantillonné à la fréquence F_e, sa TFTD $X_e(f)$ est périodique de période F_e

→ l'information fréquentielle est contenue dans la bande $f \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$

On retombe sur un résultat connu, par un calcul différent !

TF inverse des signaux discrets

TFTD : $$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

Comme la TF des signaux discrets est périodique de période 1, l'expression de la TFTD inverse est donnée par :

$$\boxed{x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi nf}\, df}$$

Remarque : Intégrale car *f* est une variable continue

Représentation spectrale

$x(n)$, signal discret (support discret)

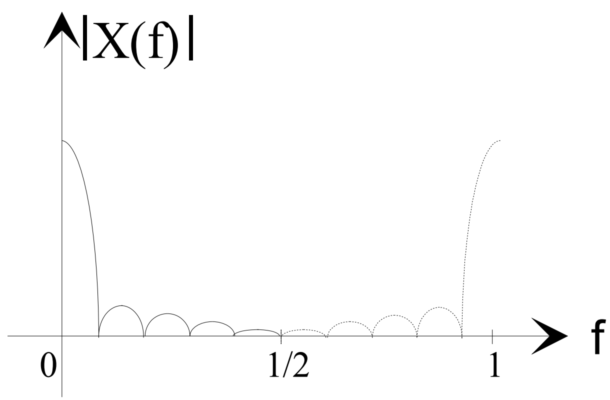
En fonction de la nature (périodique ou non) de $x(n)$, on a deux types de représentation spectrale possibles :

- $x(n)$ non périodique

$$\Big\downarrow \text{TFTD}$$

$X(f)$ est à support continu

Ex. : $x(n) = \begin{cases} 1 & n \in [-N,\ N-1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

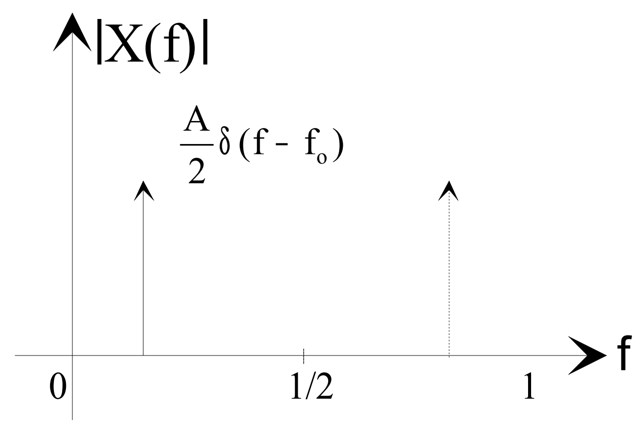


- $x(n)$ périodique

$$\Big\downarrow \text{TFTD}$$

$X(f)$ est à support discret

Ex. : $x(n) = A.\cos(2\pi f_0 n)$



Exemple de TFTD

Soit $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

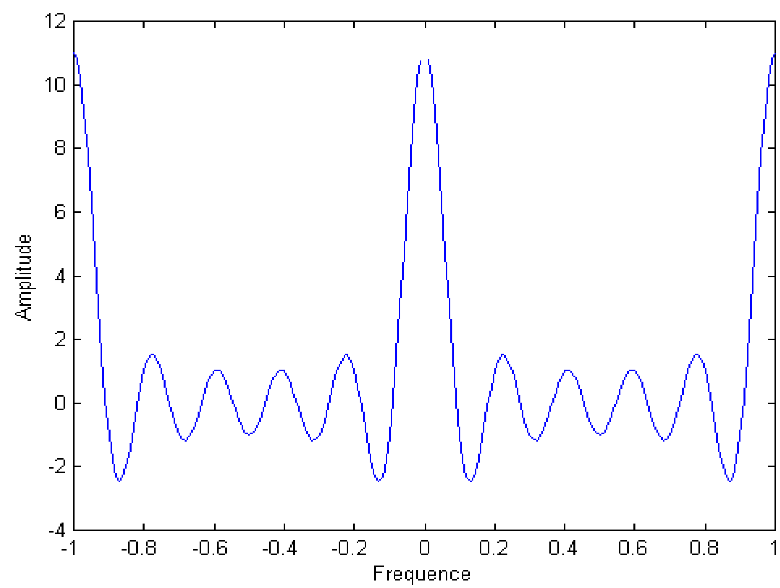
On a $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf} \longrightarrow X(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi nf}$

$X(f)$ est la somme de $N+1$ termes d'une suite géométrique de raison $e^{-j2\pi f}$ et de premier terme $e^{j\pi Nf}$

$$X(f) = e^{j\pi Nf} \frac{1 - e^{-j2\pi(N+1)f}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

$$X(f) = \frac{e^{-j\pi f}\left(e^{j\pi(N+1)f} - e^{-j\pi(N+1)f}\right)}{e^{-j\pi f}\left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right)} = \frac{\sin \pi f (N+1)}{\sin \pi f}$$

$X(f)$



Remarques (pour Te = 1)
-Toute l'info est contenue dans [-½ , ½]
- Périodique de période 1

Propriétés de la TFTD

Globalement, la TFTD possède les mêmes propriétés que la TF :

- $X(f)$ est une fonction complexe. Si $x(n)$ est réel :

$|X(f)|$: spectre d'amplitude est une fonction paire

$\arg(X(f))$: spectre de phase est une fonction impaire

Etude sur l'intervalle de fréquence $f \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

- Linéarité $\quad a.x(n) + b.y(n) \to aX(f) + bY(f)$

- Décalage temporel $\quad x(n - n_0) \to X(f)e^{-j2\pi f n_0}$

- Décalage fréquentiel (ou modulation) $\quad x(n)e^{j2\pi f_0 n} \to X(f - f_0)$

Propriétés de la TFTD

- TF de la dérivée du signal $$\frac{dx(n)}{dn} \rightarrow j2\pi f\, X(f)$$

- Relation de Parseval (conservation de l'énergie) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df$$

- Relations de Plancherel $$x(n) * y(n) \rightarrow X(f).Y(f)$$

$$x(n).y(n) \rightarrow X(f) * Y(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X(u)Y(f-u)du$$

- TFTD Inverse $$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi nf} df \quad \text{ou} \quad x(n) = \int_{0}^{1} X(f)e^{j2\pi nf} df$$

<u>Bilan sur la TFTD :</u>

- La TF fonctionne sur un signal à temps discret
- Mais en fréquence, on repasse en continu

= on perd l'avantage du numérique !

De la TFTD à la Transformée de Fourier Discrète (TFD)

TFTD de $x(n)$: $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi nf}$

- **Objectif :** On veut calculer la TF d'un signal discret à l'aide d'un calculateur

- **Difficultés**
  - Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.)
  - Le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est forcément discrète = un nombre fini de points fréquentiel $f_{n,}$ alors que f varie continûment ...

- **Solution :** Transformée de Fourier Discrète (TFD)
  - Limiter la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels
  - Discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels)

  A un nombre fini de valeurs $x(1)$, …, $x(N)$, on fait correspondre un nombre fini de valeurs $X(f_1)$, …, $X(f_L)$ telle que la TFD de x soit une approximation aussi bonne que possible de $X(f)$

- **Question**
  - Quelle est l'influence du nombre de points temporels N et du nombre de points fréquentiels L sur l'observation spectrale ?

Détermination de la TFD

Soit $\{x(0), x(1), \ldots, x(N\text{-}1)\}$ un signal discret de durée finie N. Sa TFTD est :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nf}$$

- **Discrétisation de la fréquence sur L points :**

$X(f)$ est périodique de période 1, donc :

$$f = k\Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{1}{L} \quad \text{et} \quad k = 0, \ldots, L-1$$

L'approximation discrète de la TFTD de ce signal est :

F=k/L

$$X\left(\frac{k}{L}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{L} n}$$

k et n ne jouent pas le même rôle :

n : variable temporelle $n = 0, \ldots, N-1$

k : variable fréquentielle $k = 0, \ldots, L-1$

- Notation : $X\left(\frac{k}{L}\right) = X(k)$ avec $k = 0, \ldots, L-1$

- La TFTD inverse de $x(n)$ est

$$x(n) = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi nf} df$$

car $X(f)$ est périodique de période 1

- L'approximation discrète de la TFTD inverse est

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{L} n}$$

<u>c'est la TFD inverse.</u>

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Définition

- La TFD évaluée sur un nombre L de points fréquentiels d'un signal discret est définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{L} n}$$

N : nombre de points temporels

n : variable temporelle $n = 0, \ldots, N-1$

L : Nombre de points fréquentiels

k : variable fréquentielle $k = 0, \ldots, L-1$

- Remarque : $X(k)$ est périodique de période L

- La TFD inverse est :

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{L} n}$$

- Remarque

$\tilde{x}(n)$ est une suite périodique de période L.
La discrétisation de *x(k)* a entrainé une périodisation de *x(n)*

Dans la suite, sans perte de généralités et sauf mention contraire, on considérera $L=N$

- Remarque

On a vu avec la TFTD que : *Discrétisation en temporel* → *Périodisation en fréquentiel*

Ici avec la TFD : *Discrétisation en fréquentiel* → *Périodisation en temporel*

TFD d'un signal périodique

- Que se passe t'il si l'on applique la TFD à un signal périodique ?

Soit $x_p(n)$, un signal périodique de période N. Pour calculer sa TFD, on se restreint à une période

- La TFD $$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- La TFD inverse $$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Si $x(n)$ est une suite périodique de période N et $x(n)$ coincide exactement avec $x_p(n)$

Ce n'est pas le cas pour un signal quelconque !

$$\text{Suite } x(n) \text{ périodique de période } N \;\underset{\text{TFD inverse}}{\overset{\text{TFD}}{\rightleftarrows}}\; \text{Suite } X(k) \text{ périodique de période } N$$

Propriétés de la TFD

La TFD possède les propriétés classiques de la TFTD mais tous les calculs d'indice k et n se font modulo N

- Périodicité

$X(k)$ est périodique de période N

- Linéarité

$$a.x(n) + b.y(n) \rightarrow aX(k) + bY(k)$$

- Décalage temporel

$$x(n - n_0) \rightarrow X(k)e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0}$$

- Décalage fréquentiel ou modulation

$$x(n)e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} \rightarrow X\left((k - k_0) \bmod N\right)$$

- Relation de Parseval : conservation de l'énergie

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Transformée de Fourier Rapide (FFT)

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- D'après la définition ci-dessus, il faut, pour calculer 1 valeur en fréquence de la TFD d'un signal de N points :
  - N-1 sommes complexes et N produits complexes
- Pour calculer une TFD à N points , il faudra donc :
  - N(N-1) sommes complexes N^2 produits complexes
- Sur un signal son wav de 6 secondes qui a 6*44100 = 264 600 points, on arrive à :
  - 10^{11} opérations complexes !!!
- La FFT va permettre de diminuer cela

Transformée de Fourier Rapide

- **Objectif :** trouver un algorithme de calcul efficace de la TFD de $\{x(n)\}$

La TFD de $\{x(n)\}$ s'écrit : $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$ $\longrightarrow$ $\boxed{X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n.k}}$ avec $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

◆ Propriétés de W_N

- $W_N^{k+l} = W_N^k . W_N^l$
- $W_N^{l+kN} = W_N^l$
- $W_N^{2.n.k} = W_{N/2}^{n.k}$

Ecriture matricielle (avec N pair)

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{\frac{N}{2}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^2 & \cdots & \cdots & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ 1 & W^4 & \cdots & \cdots & W^{4\left(\frac{N}{2}-1\right)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} & & & W^{2\left(\frac{N}{2}-1\right)\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ W & W^3 & \cdots & \cdots & W^{(N-1)} \\ W^2 & W^4 & \cdots & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} & W^{3\left(\frac{N}{2}-1\right)} & & & W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = T_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & W & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & W^2 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & W^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \end{bmatrix} T_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} X_{0\cdots\frac{N}{2}-1} &= T_{\frac{N}{2}} x_{pair} + D T_{\frac{N}{2}} x_{impair} \\ X_{\frac{N}{2}\cdots N-1} &= T_{\frac{N}{2}} x_{pair} - D T_{\frac{N}{2}} x_{impair} \end{aligned}}$$

Conclusion

- TFTD
  - Idem TF mais avec une somme.
  - Signal non périodique -> support en fréquence continu.
  - Signal périodique -> support discret.
  - La TFTD d'un signal est Périodique de période Fe.
  - Mais impossible à exploiter par un calculateur ...
- TFD
  - Limitation de la durée du signal par fenêtrage.
  - Discrétisation de la fréquence ...
  - ... d'où une périodisation dans le temps.
  - Le fenêtrage implique des déformations du spectre fréquentiel.
  - Gourmand en calcul => FFT !