

# Éléments de réponse examen MPRF 2011

---

## **PARTIE 1**

### **1- Calcul de portefeuille au risque minimum**

On a

$$E(P_{Rmax}) = \alpha_1 E(T_1) + \alpha_2 E(T_2) + \alpha_3 E(T_3) \text{ avec } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$E(P_{Rmax}) = \alpha_1 (E(T_1) - E(T_3)) + \alpha_2 (E(T_2) - E(T_3))$$

$$\text{Avec } E(T_1) = 8\%, E(T_2) = 12\% \text{ et } E(T_3) = 10\%$$

$$E(P_{Rmax}) = 0,02(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Comme  $0 \leq \alpha_1 \leq 1$  et  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$  alors la différence est maximale si  $\alpha_2 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$ , et donc que  $\alpha_3 = 0$

$$\text{Donc } P_{Rmax}(0\% T_1, 100\% T_2, 0\% T_3)$$

NB : si par exemple on substitue des variables autres que  $\alpha_3$ , on obtiendrait différentes équations dont le maximum peut différer (à vous de tester), l'essentiel est d'en choisir le plus grand qui correspond à la substitution choisie ci-haut.

**Calcul de  $\sigma_{P_{Rmax}}$  :**

$$\sigma_{P_{Rmax}} = \sqrt{\text{var}(P_{Rmax})} = \sqrt{X^T Z X} \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0054 & 0,0042 \\ -0,0054 & 0,0081 & -0,0063 \\ 0,0042 & -0,0063 & 0,0049 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{P_{Rmax}} = 9\%$$

• **Calcul  $R_{P1}$ ,  $\sigma_{P1}$  :**

$$R_{P1} = \frac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3) = 10\%$$

$$\sigma_{P1} = \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0054 & 0,0042 \\ -0,0054 & 0,0081 & -0,0063 \\ 0,0042 & -0,0063 & 0,0049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = 12,9\%$$

(car les trois titres sont à part égale)

- **Calcul  $R_{P2}$ ,  $\sigma_{P2}$**

$$R_{P2} = 0,25 * R_1 + 0,5 * R_2 + 0,25 * R_3 = 10,5\%$$

$$\sigma_{P1} = \sqrt{\left( \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0054 & 0,0042 \\ -0,0054 & 0,0081 & -0,0063 \\ 0,0042 & -0,0063 & 0,0049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right)} = 1,25\%$$

- **Calcul  $R_{P3}$ ,  $\sigma_{P2}$**

$$R_{P3} = 0,5 * R_1 + 0,5 * R_2 = 10\%$$

$$\sigma_{P3} = \sqrt{\left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0054 & 0,0042 \\ -0,0054 & 0,0081 & -0,0063 \\ 0,0042 & -0,0063 & 0,0049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)} = 1,5\%$$

- **Calcul  $R_{P4}$ ,  $\sigma_{P4}$**

$$R_{P4} = 0,5 * R_2 + 0,5 * R_3 = 11\%$$

$$\sigma_{P4} = \sqrt{\left( \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0054 & 0,0042 \\ -0,0054 & 0,0081 & -0,0063 \\ 0,0042 & -0,0063 & 0,0049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)} = 1\%$$

- **Portefeuille efficace/ non-efficace**

Dessiner les points de coordonnées  $(R_{Pi}, \sigma_{Pi})$  dans un graphe puis interpréter (allure du graphe similaire à celle dans le slide 58 du cours)

\*pour les deux dernières questions, nous n'avons malheureusement pas pu résoudre !

*\*ce corrigé est une collection d'idées d'étudiants → grand risque d'erreur*

*Bon courage*