Université Paris Dauphine – MMD1

Gestion de Portefeuilles
Mini-projet 2

18 décembre 2007

1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

On considère un marché financier formé par deux actifs. Un actif sans risque S^0 et un actif risqué S. On considère ce marché sur une période de temps $[0, T]$. Les investisseurs interviennent sur ce marché aux dates $t_k^n := k\frac{T}{n}$, $0 \leq k < n$, où $n > 0$, pour effectuer des transactions (ventes/achats des actifs S et S^0). On s'intéresse au résultat de la stratégie de marché d'un investisseur au bout de l'horizon de temps $[0, 1]$.
On s'intéresse à la dynamique du prix de l'actif risqué $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$.

1.1 Modèle binomial à une période.

On suppose que $n = 1$ et que le prix de l'actif risqué à la date $t = T$ peut prendre deux valeurs possibles, avec la même probabilité, $S_T = su$ où $S_T = s/u$ où $u > 1$. C'est le modèle le plus élémentaire d'un marché financier !
On note R la rentabilité de l'actif sans risque et on suppose que $S^0(0) = 1$. $\rightsquigarrow$ modèle probabiliste : on considère l'espace de probabilité $(\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où

$$S_T(\omega_u) = su \ , \ S_T(\omega_d) = s/u \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\omega_u) = p \ , \ \mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p \in]0, 1[$$

Proposition 1.1 *On montre dans ce modèle binomiale que*
1. *L'absence d'opportunités d'arbitrage est équivalente à l'existence de $q^\star \in]0, 1[$ tel que*

$$s \quad = \quad q^\star \frac{su}{1+R} + (1 - q^\star) \frac{s/u}{1+R}$$

le réel $q^\star$ définit la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}^\star$ dans ce modèle de marché :

$$\mathbb{Q}^\star(\omega_u) = q^\star \quad \textit{et} \quad \mathbb{Q}^\star(\omega_d) = 1 - q^\star$$

2. *Tout actif contingent de pay-off $\Phi(S)$ peut être répliqué. son prix peut être calculé comme l'espérance actualisée de son pay-off.*

$$prix(\Phi(S)) \;=\; \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\star}[\frac{\Phi(S)}{S_T^0}] = q^\star \frac{\Phi(S)(\omega_u)}{1+R} + (1-q^\star)\frac{\Phi(S)(\omega_d)}{1+R}$$

1.2 Modèle binomial à n périodes

La dynamique du prix de l'actif risqué est telle que : $S_{t^n_{k+1}} = S_{t^n_k} u$ ou $S_{t^n_k}/u$ avec la même probabilité.
On note par r le taux d'intérêt de l'actif sans risque (en composition continue) et on suppose que $S^0(0) = 1$.
$\rightsquigarrow$ modèle probabiliste : on considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et la marche aléatoire standard $(X_k)_{k \geq 0}$. C'est à dire

$$X^0 = 0 \quad \text{et pour } k \geq 1 \quad X^k = \sum_{i=1^k} \xi^i$$

où $(\xi^i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires iid telle que

$$\mathbb{P}(\xi^i = 1) = \mathbb{P}(\xi^i = -1) = \frac{1}{2} \qquad i \geq 1 \; .$$

On suppose que

$$S_{t^n_k} \;:=\; S_0 e^{\lambda X_k} \quad \text{avec} \quad \lambda := \ln(u) > 0 \; , \quad k = 0, \cdots, n.$$

Proposition 1.2 *On montre dans ce modèle binomial que*
1. *L'absence d'opportunités d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une unique mesure de probabilité $\mathbb{Q}^\star$ sous-laquelle le prix actualisé de l'actif risqué est une martingale. Cette mesure de probabilité peut être décrite par la 'probabilité élémentaire' $q^\star \in]0,1[$ d'une hausse sur l'arbre binomiale*

$$q^\star \;=\; \frac{e^{r*T/n} - \frac{1}{u}}{u - e^{r*T/n}}$$

2. *Tout actif contingent de pay-off $\Phi(S)$ peut être répliqué. son prix peut être calculé comme l'espérance actualisée de son pay-off.*

$$prix(\Phi(S)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\star}[e^{-rT}\Phi(S)].$$

1.3 Travail Demandé

1.3.1 Arbitrage et couverture dans le modèle binomial à une période

1. Montrez la Proposition 1.1

1.3.2 Implémenter l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein

2. Implémentez la fonction **function arbre = CRR-tree(s,u,T)** permettant de générer l'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein

s	prix initial de l'action
u	coefficient de montée sur un noeud de l'arbre
T	nombre de périodes sur l'arbre

3. Ecrire un programme qui permet de calculer sur tous les noeuds de l'arbre binomial le prix d'une option d'achat européenne.

1.3.3 Calibration des modèles

On veut résoudre le problème de l'évaluation d'un call européen à la monnaie sur l'action S de maturité $T = 1an$.
Les données historiques sur l'action S recueillies sur la période $1985 - 2007$ donnent un rendement moyen mensuel de 6% avec un écart-type de 4.4%. On suppose que l'on peut également placer de l'argent au taux sans risque de 4% par an.
4. Calculer le prix de cette option sur l'arbre binomial en supposant que les transactions ont lieu avec une fréquence mensuelle , avec une fréquence journalière, toutes les 5 minutes.

2 Critère de Kelly pour la selection de portefeuille.

On considère le marché financier décrit dans la section précédente.
On suppose que le taux d'intérêt de l'actif sans risque (en composition continue)est $r = 0$ et que $S^0(0) = 1$.
modèle probabiliste pour S : on considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on suppose que

$$S_{t_k^n} \;:=\; S_{t_{k-1}^n}\mathcal{U} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}(\mathcal{U} = 1 + p^+) \; = \mathbb{P}(\mathcal{U} = 1 - p^-) = \frac{1}{2}\;,$$

où p^+ et p^- sont deux réels strictement positifs donnés.

2.1 Critère de Kelly : croissance optimale à levier constant

Une stratégie de portefeuille à levier constant et une stratégie où, à chaque date t_k^n, l'investisseur réparti sa richesse entre S^0 et S en allouant la même proportion ℓ de sa richesse à l'action S.
Le taux de croissance associé au levier constant ℓ, noté $G(\ell)$, est défini par

$$G(\ell) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(\frac{W_T^\ell}{W_0^\ell})$$

où $W_{t_k^n}^\ell$ est la valeur à la date $t_k^n \in \{0, \frac{1}{n}, \cdots T\}$ de la richesse associée au levier constant ℓ.
Le critère de Kelly consiste à choisir le levier $\ell^\star$ qui réalise le maximum de $G(\ell)$.

2.2 Travail demandé

2.2.1 Solution de Kelly

1. Déterminez l'expression de $W_{t_k^n}^\ell$ en fonction de ℓ, p^+ et p^-

2. Montrez que $\ell^\star = \frac{1}{2}\frac{p^+ - p^-}{p^+ p^-}$.

2.3 Simulation du prix de l'actif

On donne $p^+ = 1$ et $p^- = \frac{2}{3}$. On fixe le nombre de périodes à $n = 100$. **3.** Simulez le prix de l'action sur 100 périodes. Représentez graphiquement le prix.
4. Faire 1000 simulations du prix terminal $S(T)$. Afficher le graphique des 1000 prix terminaux et calculer à partir de ces simulations la moyenne empirique, la variance empirique, la skewness empirique et la kurtosis empirique.

2.3.1 Simulation portefeuille de Kelly

5. Faire plusieurs simulations du processus de richesse associé au levier constant $\ell^\star$ sur $n = 100$ périodes.