① LES SIGNAUX DISCRETS

LES SIGNAUX DISCRETS

I GENERALITES – SIGNAL – MESURE - CAPTEURS.

I.1 Généralités sur les signaux:

Un signal est une grandeur physique accessible à la mesure. En général, un signal dépend des coordonnées d'espace (l'endroit où il se situe et le temps) soit {x,y,z,t}. On attribue à un signal des propriétés élémentaires comme l'intensité, la puissance, l'énergie… Ce sont ces grandeurs auxquelles sont sensibles les capteurs qui constituent l'instrument de mesure du signal.

Un capteur mesure l'un des aspects du signal par exemple:

- Signal électrique: intensité (ampères), tension (volts), puissance (watts).
- Signal thermique: intensité (°C, Kelvin), énergie (calorie ou joule).
- Signal lumineux: intensité (lumen), puissance (watts), énergie (joules)…
- Mélange chimique: concentration (mol/l), acidité (pH), taux de calcaire(tH)
- Signal magnétique (tesla).
- Signal barométrique (hectopascal).
- Vitesse d'un mobile (m/s, rd/s), accélération….
- Etc……..

Bon nombre de capteurs sont aussi en général des transducteurs c'est à dire qu'ils transforment la grandeur physique étudiée en une autre grandeur physique éventuellement proportionnelle et plus aisée à traiter avec les outils modernes d'où la grande vogue des signaux électriques (tensions ou courants).

I.2 Classification des signaux:

Les signaux sont classables selon des grands groupes de propriétés:

- Signaux continus ou discrets.
- Signaux périodiques ou non.
- Signaux déterministes ou aléatoires.

I.3 Modélisation des signaux-Théorie du signal

Afin de pouvoir prévoir des comportements ou de concevoir des appareils susceptibles de modifier, d'analyser les signaux il est intéressant de les modéliser grâce à des outils mathématiques les plus puissants possibles.

La modélisation du signal peut se faire grâce à des "fonctions" mathématiques plus ou moins compliquées décrivant la manière dont le signal évolue dans l'espace et le temps s(x,y,z,t). Pour l'étude d'un signal en un point de l'espace la fonction sera uniquement dépendante du temps: s(t). Si le signal est une image statique formée par exemple sur une barrette CCD, la fonction devient s(x). S'il s'agit d'une image statique: s(x,y), d'une image à 3 dimensions (hologramme,…): s(x,y,z). Si ces images sont animées on retrouve soit s(x,t) soit s(x,y,t) soit s(x,y,z,t).

L'étude du signal de manière élémentaire se fait sur des fonctions d'une seule variable s(t) ou s(x). La généralisation à plusieurs dimensions utilise les mêmes concepts, seule est ajoutée un peu de complexité.

I.4 Systèmes - Filtres:

Les signaux sont traités par des systèmes ou filtres dont le but est de les modifier pour leur conférer certaines propriétés ou d'en extraire des informations. De même que les signaux, les systèmes se classent en grandes catégories: continus ou discrets. Dans l'une et l'autre de ces catégories le cas particulier des systèmes linéaires invariants par translation (SLI, LTI) est particulièrement intéressant car nous disposons pour l'étude de ceux-ci d'outils mathématiques performants tout en restant d'approche relativement aisée.

Outils mathématiques:

<table>
<tr><th></th><th>Modélisation</th><th>Energie ou puissance</th><th>Analyse fréquentielle</th></tr>
<tr><td>Signaux continus</td><td>Fonctions
Distribution δ</td><td rowspan="6">Analyse par corrélation, intercorrélation
et
moments temporels</td><td rowspan="5">Transformée de Fourier des fonctions et des distributions</td></tr>
<tr><td>Signaux discrets</td><td>Distributions</td></tr>
<tr><td>Systèmes continus</td><td>Convolution
Transformée de Laplace</td></tr>
<tr><td>Systèmes discrets</td><td>Convolution discrète
Transformée en Z</td></tr>
<tr><td>Signaux aléatoires</td><td>Moments statistiques
Corrélations statistiques</td></tr>
<tr><td>Signaux périodiques</td><td></td><td>Série de Fourier et transformée de Fourier discrète</td></tr>
</table>

II SIGNAUX DISCRETS

II.1 Signaux continus, discrets, échantillonnés:

Signal continu:

Classe de signaux largement étudiée dans les cours précédents. Un signal continu est connu à chaque instant t sauf en un nombre de points de mesure nulle (discontinuités de première espèce).

Les signaux élémentaires ont déjà été largement étudiés :

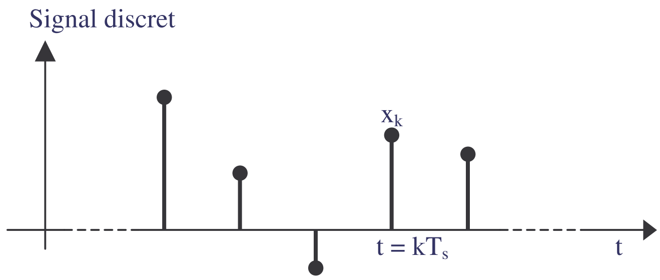
- l'échelon d'Heaviside e(t)
- $e^{-\alpha t}e(t)$
- t e(t)
- $\cos(\omega t+\varphi)$
- $e^{j2\pi ft}$.
- ……

Signal discret:

Un signal discret n'est connu qu'à certains instants t_k soit un tableau de valeurs numériques $\{x(t=t_k)\}$.

Le cas le plus simple et le plus important est celui où : $(t_{k+1}-t_k) = cste = T_s \ \forall k$. Le signal est alors connu par sa série de valeurs contenues dans un tableau $\{x(kT_s)\} \equiv \{x_k\}$.

La représentation d'un signal discret par un tableau de valeurs $\{x_k\}$ n'est pas vraiment satisfaisante car un tableau n'est pas un objet mathématique aisé à manipuler tel quel en comparaison avec les fonctions. La représentation graphique liée à ce modèle (modèle physique) sera:



Nous allons voir ensuite comment lui associer un modèle mathématique plus intéressant à manipuler.

Signal échantillonné:

Un signal échantillonné est un signal discret dont les valeurs $\{x_k\}$ sont prélevées (mesurées) sur un signal continu. Par convention cela se schématise comme suit:

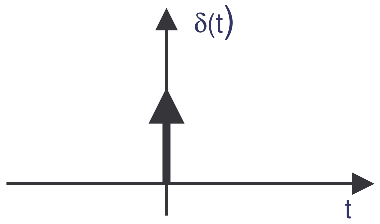
II.2.Signaux élémentaires – distributions:

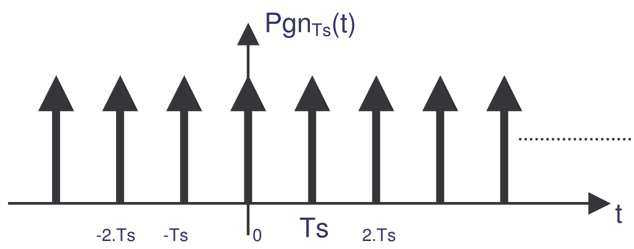
Nous verrons par la suite que les signaux discrets et périodiques sont intimement liés. Pour palier à l'insuffisance de la modélisation par un tableau de valeurs et ainsi pouvoir manipuler les signaux discrets de manière analytique il est intéressant d'utiliser la théorie des distributions de Laurent Schwartz (1915-2002). Cette même théorie permet de modéliser les signaux périodiques et constitue ainsi un excellent outil pour l'étude globale des signaux discrets. Par ailleurs rappelons que c'est la seule approche satisfaisante pour l'étude de la dérivation généralisée dans le cas des signaux continus ayant des discontinuités de première espèce.

Il n'est pas nécessaire de reprendre les détails de cette théorie développée dans les cours de mathématiques mais simplement de rappeler les quelques résultats élémentaires qui nous intéressent.

Deux signaux fondamentaux seront ainsi utilisés :

La distribution de Dirac δ(t) **Le peigne de Dirac** $Pgn_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$





Propriétés mathématiques fondamentales de la distribution de Dirac :

- parité: **δ(-t) = δ(t)**
- facteur d'échelle: **δ(at) = (1/|a|) δ(t)** avec a∈ *R*
- produit d'une fonction (distribution régulière) par la distribution de Dirac **:**
  $x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$
- produit de convolution d'une fonction (ou d'une distribution) par la distribution de Dirac : **$x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$.**
- Le produit de deux distributions de Dirac n'existe pas: $\delta(t-t_1).\delta(t-t_2)$ n'a pas de sens. Le produit de convolution de deux distributions existe en particulier : **$\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$**.
- Transformée de Fourier: **TF[δ(t)] = 1.**

Ces propriétés ne dépendent bien évidemment pas de la variable (ici le temps t), nous pouvons l'utiliser dans tout autre espace comme celui des fréquences: par exemple $y(f) \otimes \delta(f-f_0) = y(f-f_0)$ ce qui représente la translation fréquentielle.

Propriété mathématique fondamentale du peigne de Dirac:

Le peigne de Dirac est une distribution périodique nous savons calculer sa transformée de Fourier:

$$\boxed{TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right] = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{k}{T_s}) = f_s\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kf_s)}$$

⇨ "**La transformée d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac**".

Attention au coefficient $f_s=1/T_s$.

Représentation des signaux périodiques:

Un signal périodique est constitué par une fonction motif $x_m(t) = x(t)$. La modélisation complète du signal est obtenue en périodisant à la période T_0 le motif $x_m(t)$ puis en superposant les composantes obtenues soit:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_m(t-nT_0)$$

Un cas particulier très utilisé pour les représenter est de définir $x_m(t)$ pour $t\in[0,T_0]$ (ou tout autre intervalle de largeur T_0) et nulle en dehors de la période T_0

La convolution par la distribution de Dirac fournissant la représentation d'une translation, nous aurons:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_m(t-nT_0) = x_m(t)\otimes\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$$

"**Périodicité ≡ convolution par un peigne de Dirac**".

Remarque: ceci est aussi valable pour tout autre variable que t en particulier la fréquence f.

Représentation des signaux discrets et des signaux échantillonnés:

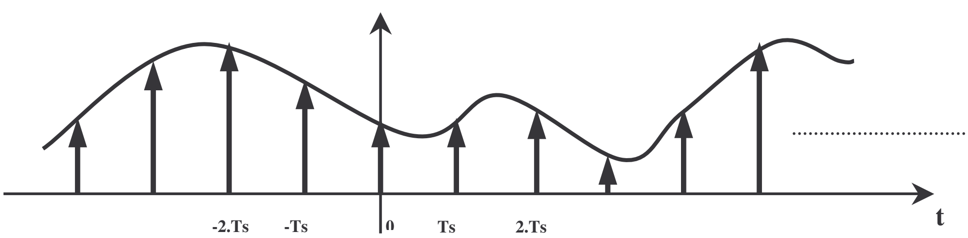
Par définition, la modélisation mathématique d'un signal discret est effectuée par un peigne de Dirac pondéré par les échantillons du signal :

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\,\delta(t-kT_s)}$$

Un signal échantillonné est un signal discret obtenu à partir d'un signal continu dont on prélève les valeurs à intervalles de temps réguliers T_s (période d'échantillonnage) :

$$\boxed{x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\,\delta(t-kT_s) = x(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)}$$

"**Echantillonner ≡ produit simple par un peigne de Dirac**".

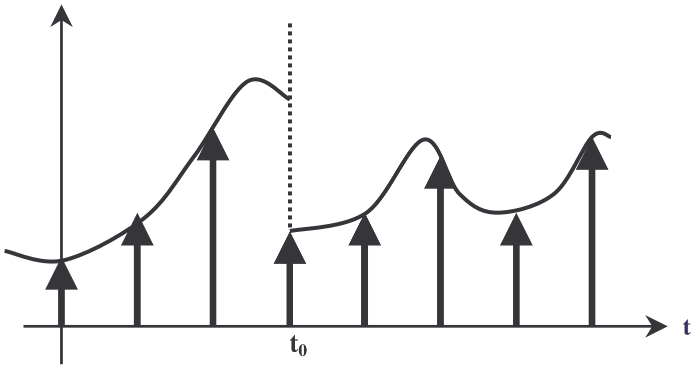


Un problème pratique pour l'échantillonnage:

Certains signaux continus, en tout cas leur représentation mathématique (signaux définis presque partout sauf en un ensemble de points de mesure nulle), présentent des discontinuités de première espèce: e(t), signal carré,….Les propriétés d'une de ces discontinuités à $t = t_0$ sont:

- A l'instant t_0 le signal n'est pas connu. Seule hypothèse: sa valeur est bornée.
- $f(t_0^+) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 + \varepsilon)] \neq f(t_0^-) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 - \varepsilon)]$ et $\Delta f(t_0) = f(t_0^+) - f(t_0^-)$.
- La dérivée n'existe qu'au sens des distributions: $f'(t_0) = \Delta f(t_0)\ \delta(t - t_0)$.

Que se passe-t-il si nous échantillonnons un tel signal à l'instant $t = t_0$? La valeur de l'échantillon ne peut être $f(t_0)$ qui n'existe pas. Si nous considérons la discontinuité en t_0 comme un cas limite, selon le cas choisi la valeur sera $f(t_0^-)$, $f(t_0^+)$, $½[f(t_0^-) + f(t_0^+)]$. Ce raisonnement est purement théorique.



Si nous nous intéressons au problème pratique, l'échantillonnage est réalisé par un circuit électronique type SAH (sample and hold), convertisseur analogique-numérique,…..Quelque soit le circuit utilisé, entre l'instant où il reçoit l'ordre d'effectuer l'échantillonnage et l'instant de réalisation, il y aura toujours un retard (même extrêmement faible: qqs ns ou µs). Cette façon de voir les choses nous amène donc à considérer que la valeur de l'échantillon en t_0 sera systématiquement $f(t_0^+)$.

Sauf indication contraire nous choisirons par la suite cette valeur. Ce n'est en aucun cas rigoureux et nous parlerons alors de "convention d'échantillonnage réel".

II.3 signaux discrets et périodiques:

Un signal peut être à la fois échantillonné et périodique. Sa représentation devient simple lorsque le nombre d'échantillons dans une période est entier soit: $T_0 = N.T_s$ avec N entier.

Sa représentation peut se faire de trois façons complètement équivalentes :

Motif discret périodisé : $$x_{ed}(t) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_k\ \delta(t - kT_s)\right] \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

Motif continu échantillonné et périodisé : $$x_{ed}(t) = \left[x(t).\sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - kT_s)\right] \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

Motif continu périodisé et échantillonné : $$x_{ed}(t) = \left[x_m(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\right] . \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

III ANALYSE FREQUENTIELLE

III.1 Transformée de Fourier:

L'analyse de Fourier largement utilisée dans le domaine du signal permet de décomposer une fonction sur une base d'exponentielles:

Transformation directe : $$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformation inverse : $$TF^{-1}[X(f)] = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

Cette transformée définie au sens des fonctions de L[1] est étendue aux distributions tempérées avec les résultats suivants:

- Translation temporelle - Déphasage fréquentiel $TF[\delta(t - t_0)] = e^{-j2\pi ft_0}$ => $|TF[\delta(t - t_0)]| = 1$
- Déphasage temporel - Translation fréquentielle $TF[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$

La dérivation généralisée appliquée aux séries de Fourier à termes complexes permet d'établir les formules de Poisson: $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT_0} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

Ce qui permet d'établir les formules déjà rappelées pour le peigne de Dirac (avec $f_0T_0=1$):

$$\boxed{\begin{array}{l} TF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT_0} = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0) \\ TF^{-1}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)\right] = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \end{array}}$$

III.2 Application aux signaux périodiques:

Spectre discret (méthode n°1):

Un signal périodique possède une décomposition en série de Fourier à termes complexes :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi nf_0 t} \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) e^{-j2\pi nf_0 t} dt$$

$$\Rightarrow \quad TF[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, TF\left[e^{j2\pi nf_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \delta(f - nf_0)$$

d'où le résultat important suivant: la transformée de Fourier d'un signal <u>périodique</u> est <u>discrète.</u>

Signal périodique ⇔ TF discrète

Spectre discret (méthode n°2):

En utilisant l'expression du signal périodique défini à partir de sa fonction motif $x_m(t)$:

$$TF[x(t)] = TF[x_m(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)] = X_m(f).f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_m(nf_0).f_0\ \delta(f - nf_0)$$

Le résultat est toujours un peigne de Dirac pondéré => la transformée de Fourier est discrète.

Lien série-transformée:

Les deux méthodes précédentes sont équivalentes et aboutissent bien sûr à la même conclusion. En comparant les deux résultats il vient:

$$\boxed{C_n = f_0.X_m(nf_0)}$$

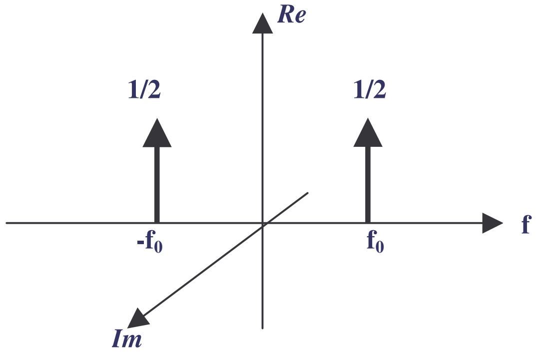
Ce résultat nous permet de concevoir différemment le coefficient de décomposition en série de Fourier à termes complexes : le coefficient C_n est obtenu par discrétisation fréquentielle d'intervalle f_0 de la transformée de Fourier du motif du signal périodique multipliée par f_0.

Cas particulier des sinusoïdes:

Les sinusoïdes peuvent être exprimées par les formules d'Euler:

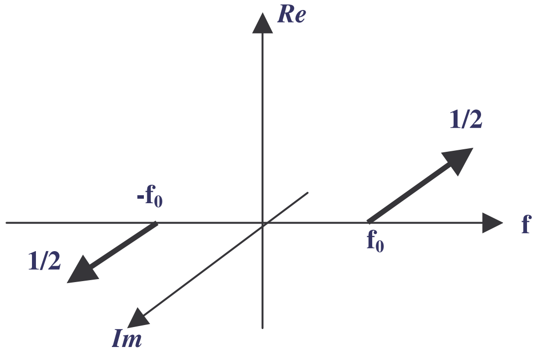
$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$TF[\cos(2\pi f_0 t)] = \tfrac{1}{2}\delta(f - f_0) + \tfrac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

$$TF[\sin(2\pi f_0 t)] = \tfrac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \tfrac{1}{2j}\delta(f + f_0)$$



III.3 Application aux signaux discrets:

Signaux discrets (méthode n°1):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, \delta(t - kT_s) \ \Rightarrow\ TF[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{-j2\pi k T_s f}$$

C'est une série de Fourier à termes complexes dans le domaine des fréquences => TF[x(t)] est une fonction périodique de la fréquence f.

$$\boxed{\text{Signal discret} \Leftrightarrow \text{TF périodique}}$$

conséquence:

Les x_k sont des coefficients de décomposition en série de Fourier à termes complexes nous pouvons donc les retrouver à partir de la transformée de Fourier :

$$\boxed{X(f) = TF[x(t)] \Rightarrow x_k = \frac{1}{f_s}\int_{f_s} X(f)e^{j2\pi kT_s f}df = T_s\int_{1/T_s} X(f)e^{j2\pi kT_s f}df}$$

Signaux échantillonnés (méthode n°2):

Cette propriété peut être établie de manière plus élégante en faisant intervenir les distributions. Le signal échantillonné x(t) est obtenu à partir du signal continu $x_c(t)$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\,\delta(t-kT_s) = x_c(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s) \quad \Rightarrow \quad TF[x(t)] = X_c(f)\otimes f_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_s) = f_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_c(f-nf_s)$$

Nous retrouvons ainsi la périodicité du spectre.

Bande de fréquence de Shannon :

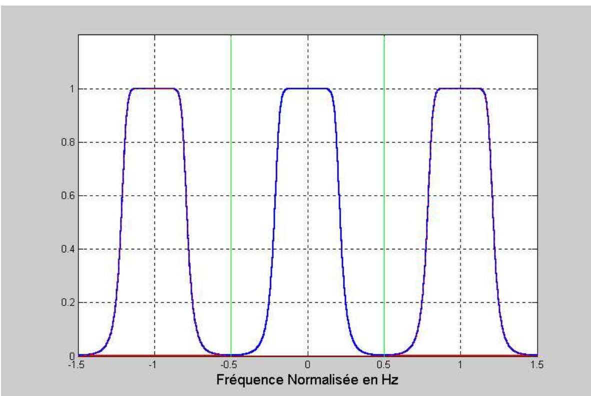
Pour étudier le spectre d'un signal discret, il suffit de le connaître sur une période fréquentielle de durée f_s le reste du spectre étant obtenu par périodisation de ce motif. Par convention, nous utiliserons la **bande de fréquence de Shannon** (ou de Nyquist) $[-f_s/2 , f_s/2] \equiv [-1/(2T_s) , 1/(2T_s)]$. L'utilisation de fréquences normalisées justifiant la notation abrégée [-1/2 , 1/2].

Pour les calculs, bon nombre de logiciels utilisent la bande de fréquences $[0 , f_s]$ soit [0 , 1] en fréquences normalisées. Ceci sera utilisé en particulier avec la transformée discrète (TFD) et son algorithme rapide (FFT).

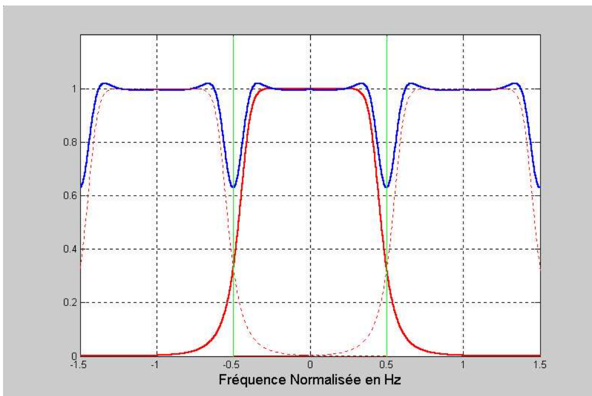
Phénomène de recouvrement fréquentiel :

(repliement, folding, aliasing)

Si le spectre $f_s\,X_c(f)$ est plus étendu que la bande de Shannon, la périodisation va introduire un recouvrement dont la conséquence est que $X(f) \neq f_s\,X_c(f)$ ce qui interdit par simple filtrage (troncature fréquentielle) de retrouver le signal continu d'origine.



Absence de repliement



Repliement important

THEOREME DE SHANNON (1916-2001):

C'est le premier résultat fondamental de la théorie des signaux discrets.

Si on appelle f_M la fréquence maximale du spectre $X_c(f)$ du signal continu, celui-ci pourra être retrouvé sans distorsion si on respecte la condition :

$$\mathbf{f_s \geq 2.f_M \quad => \quad T_s \leq 1/(2.f_M)}$$

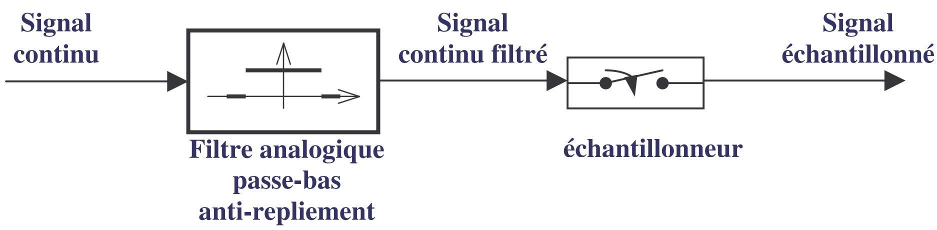
$1/(2f_M)$ est la période d'échantillonnage critique (pour un signal sinusoïdal, 2 échantillons par période).

Remarque :

En pratique, pour un grand nombre de signaux, le spectre de Fourier n'est pas limité mais tend asymptotiquement vers 0 lorsque $f \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, $f_M = +\infty$ et il est impossible de respecter rigoureusement la condition de Shannon. On peut quand même chercher à la respecter approximativement par exemple en négligeant dans le spectre toutes les fréquences pour lesquelles le module de la transformée de Fourier du signal est inférieur à α% de son maximum.

Conséquences expérimentales:

Expérimentalement il est nécessaire de supprimer toutes les fréquences supérieures f_M en particulier celles qui peuvent être dues à des bruits. Il faut donc de procéder au préalable à un filtrage du signal par un filtre passe-bas : **le filtre anti-repliement**. Ce filtre ne peut être évidemment réalisé que de manière analogique puisqu'il précède l'échantillonnage.



Principe de la chaîne d'acquisition d'un signal continu et de sa transformation en signal discret

III.4 Reconstruction d'un signal échantillonné:

Celle-ci est théoriquement possible si la condition d'échantillonnage de Shannon a été respectée. Il suffit de faire le raisonnement suivant :

- Isoler le spectre du signal continu dans la bande de Shannon : $X_c(f) = (1/f_s).X(f).\mathrm{rect}(f/f_s)$
- Effectuer la transformation de Fourier inverse : $x_c(t) = TF^{-1}[X_c(f)]$

$$x_c(t) = \frac{1}{f_s} x(t) \otimes f_s \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta(t - kT_s) \otimes \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} \quad => \quad \boxed{x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \frac{\sin(\pi f_s (t - kT_s))}{\pi f_s (t - kT_s)}}$$

Connaissant les échantillons x_k nous sommes donc capables de reconstituer le signal. Il y a cependant un inconvénient : cette reconstruction n'est pas causale puisque, à un instant t donné, il nous faut tous les échantillons y compris ceux qui interviennent dans le futur. Elle nécessite le calcul avec tous les échantillons qui peuvent être en nombre infini => temps de calcul prohibitif.

Cette technique peut néanmoins être utilisée en temps différé sur des signaux possédant un nombre limité d’échantillons. Dans la pratique nous levons ces inconvénients en s’adressant à des techniques de reconstruction approximatives mais causales et de temps de calcul raisonnable.

La formule exprime quand même le fait théorique important qui est que, si on respecte la condition de Shannon, le signal échantillonné possède la totalité des "informations" contenues dans le signal continu.

III.5 Signaux discrets et périodiques:

Ils seront étudiés en détail dans le chapitre sur la transformée de Fourier discrète. Compte tenu des chapitres précédents, le spectre aura les deux propriétés de périodicité et de discrétisation.

Signal discret ⇔ TF périodique
Signal périodique ⇔ TF discrète

$\Downarrow$

Signal périodique et discret⇔ TF discrète et périodique

III.6.Signaux réels :

Signaux dont la mesure est exprimée par un nombre réel ($x_k \in$ R) c'est à dire la grande majorité des signaux traités dans la pratique. Que le signal soit discret ou continu leur spectre a les mêmes propriétés générales. Ce sont ces propriétés déjà établies dans le cas continu qui sont ici brièvement rappelées.

Propriétés de la transformée de Fourier d'un signal réel:

Utilisons les propriétés de la transformée de Fourier (cf preuve en fin de paragraphe):

$$X(f) = TF[x(t)] \qquad X(-f) = \overline{TF[\overline{x(t)}]} = TF[x(-t)]$$

Pour un signal x(t) réel :

$$TF[x(t)] = X(f) = A(f) + j\,B(f) \quad \text{où } A(f) \text{ et } B(f) \text{ sont réels}$$
$$X(-f) = A(-f) + j\,B(-f) = \overline{TF[x(t)]} = A(f) - j\,B(f)$$

⇒ La transformée de Fourier d'un signal réel est telle que:

- sa partie réelle A(f) est paire

- sa partie imaginaire B(f) est impaire.

X(f) peut être exprimée aussi sous la forme module-argument: $X(f) = |X(f)|\,e^{j\varphi(f)}$

Cas du module: $|X(f)|^2 = |A(f)|^2 + |B(f)|^2 = |X(-f)|^2$

Cas de l'argument: $\varphi(f) = Arg[X(f)] = Arctg[B(f)/A(f)] = -Arg[X(-f)]$

⇒ La transformée de Fourier d'un signal réel est telle que:

- le module |X(f)| est pair

- l'argument Arg[X(f)] est impair.

Application au calcul de la transformée de Fourier d'un signal réel:

Dans le cas d'un signal réel et discret, il suffit de calculer la transformée de Fourier sur la moitié de la bande de Shannon [0 ; 0,5] l'autre partie [-0,5 ; 0] ou [0,5 ; 1] étant complétée:

- par symétrie pour le module qui est pair.
- par antisymétrie pour l'argument qui est impair.

Cas particulier d'un signal pair:

Si x(t) est pair ⇒ la transformée de Fourier est paire: X(f)=X(-f).

Si de plus il est réel ⇒ seul A(f) existe ⇒ X(f) est réel.

La transformée de Fourier d'un signal réel et pair est réelle et paire.

Cas particulier d'un signal impair:

Si x(t) est impair ⇒ la transformée de Fourier est impaire: X(f)=-X(-f).

Si de plus il est réel ⇒ seul B(f) existe ⇒ X(f) est imaginaire.

La transformée de Fourier d'un signal réel et impair est imaginaire et impaire.

Annexe: propriétés de la transformée de Fourier d'un signal réel:

Cas de signaux continus:

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi ft} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}\, e^{-j2\pi ft} dt} = \overline{TF[\overline{x(t)}]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi ft} dt = TF[x(-t)]$$

Cas de signaux discrets:

$$TF[x(t)] = TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, \delta(t - kT_s)\right] = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{-j2\pi kT_s f}$$

$$X(-f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{j2\pi kT_s f} = \overline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{x_k}\, e^{-j2\pi kT_s f}} = \overline{TF[\overline{x(t)}]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{-k}\, e^{-j2\pi kT_s f} = TF[x(-t)]$$

III.7.Transformée de Fourier, transformée de Laplace et transformée en Z:

Ce sujet est plus largement discuté dans l'étude de la transformation en Z dont nous rappelons ici les points essentiels.

La transformée de Fourier n'existe que pour les signaux de $L^{(1)}$ (ensemble des signaux stables). En continu, elle a été généralisée par la transformée de Laplace (moyennant quelques conditions de convergence) et l'extension de cette transformation de Laplace peut se faire avec précautions aux distributions et en particulier à la distribution de Dirac. Nous sommes ainsi en mesure de l'étendre à l'étude des signaux discrets.

$TL[x(t)] = X(p = \sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt$ au sens des fonctions.

$TL[\delta(t)]=1$ $\qquad$ $TL[\delta(t-\tau)]=e^{-p\tau}$ $\qquad$ pour les distributions.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, \delta(t - kT_s) \Rightarrow TL[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{-kpT_s}$$

La transformée de Laplace d'un signal discret ne se met plus sous forme polynomiale comme dans le cas continu ce qui nous fait perdre un outil puissant. Pour le retrouver un changement de variable complexe suffit et amène à définir la transformée en Z d'un signal discret :

$$z=e^{pTs} \quad \Rightarrow \quad \boxed{TL[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{-kpT_s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, z^{-k} = TZ[x(t)]}$$

Le passage de cette transformée en Z à la transformée de Fourier se fait en posant $z = e^{j\omega Ts}$ et n'est possible que si le cercle unité appartient à l'anneau de convergence de la transformée en Z étudiée (cf: notions de base sur la transformée en Z)