Lliçó 2.
ACCESSIBILITAT I CONNECTIVITAT

1. ACCESSIBILITAT

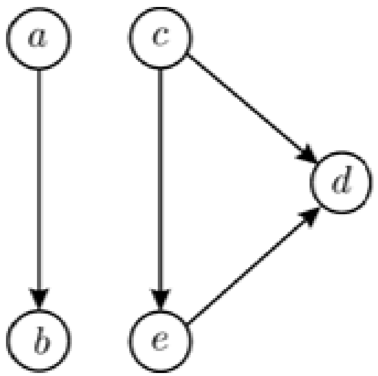
DEFINICIONS: Siga $G = (V,A)$ un graf dirigit.

1. Siguen $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j \in V$, direm que $\mathbf{x}_j$ és **abastable** des de $\mathbf{x}_i$ o que $\mathbf{x}_i$ **abasta** a $\mathbf{x}_j$ si hi ha un camí dirigit de $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_j$.

2. Siga $V = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. Anomenarem **matriu d'accessibilitat** associada al graf G a la matriu quadrada d'orde n definida per

$$R = [r_{ij}] \;/\; r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ abasta a } x_j, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

EXEMPLE:



$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Índex

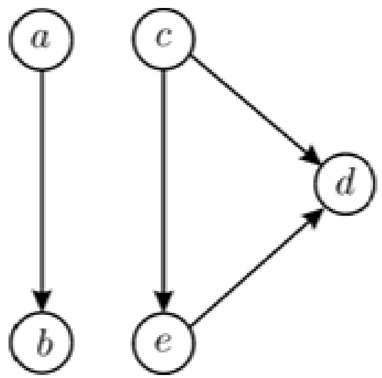
1. ACCESSIBILITAT

3. Siga $V = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. Anomenarem **matriu d'accés** associada al graf *G* a la matriu quadrada d'orde *n* definida per

$$Q = [q_{ij}] \ / \ q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \text{ abasta a } x_i, \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas.} \end{cases}$$

PROPOSICIÓ: $Q = R^T$.

EXEMPLE:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Índex

2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

Siga $G = (V,A)$ un graf dirigit.

MÈTODE 1.

Etapa 1. Inicialitzar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$.

Etapa 2. Prendre $v_i \in V^{(i)}$.

Etapa 3. Calcular $R(v_i) \cap Q(v_i)$.

Fer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim R(v_i) \cap Q(v_i)$.

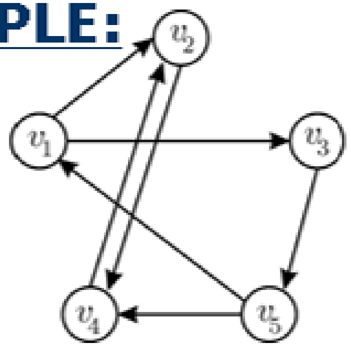
Fer $i \leftarrow i + 1$.

Etapa 4. Si $V^{(i)} = \emptyset$, aleshores STOP.

En qualsevol altre cas, tornar a Etapa 2.

2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

EXEMPLE:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inicialitzar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Prendre un vèrtex de $V^{(1)}$, per exemple, v_2.

Primera component connexa: $R(v_2) \cap Q(v_2)$,

$R(v_2) \cap Q(v_2) = \{v_2, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4\}$.

$V^{(2)} = V^{(1)} \sim R(v_2) \cap Q(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$.

$i \leftarrow 2$.

Prendre un vèrtex de $V^{(2)}$, per exemple, v_1.

Segona component connexa: $R(v_1) \cap Q(v_1)$,

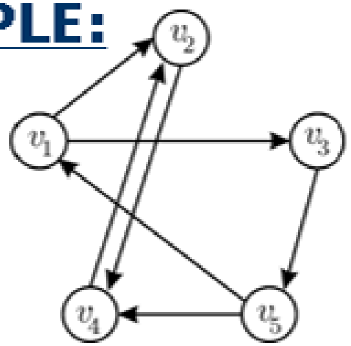
$R(v_1) \cap Q(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_1, v_3, v_5\} = \{v_1, v_3, v_5\}$.

$V^{(3)} = V^{(2)} \sim R(v_1) \cap Q(v_1) = \emptyset$.

Índex

2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

EXEMPLE:

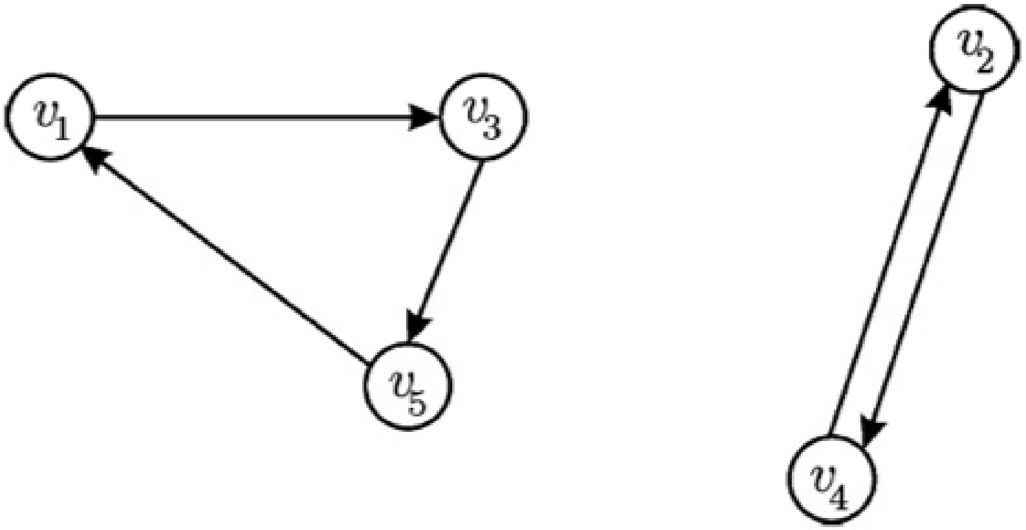


$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les components connexes són:

$$\{v_2, v_4\},\ \{v_1, v_3, v_5\}.$$

GRÀFICAMENT

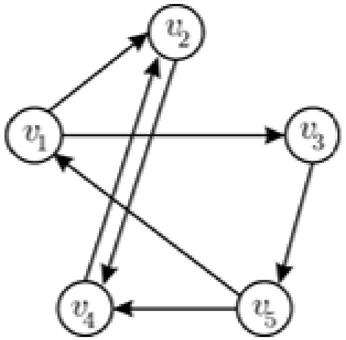


2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

MÈTODE 2.

Una altra forma de calcular les components connexes és calcular $R \otimes Q$. La component connexa de x_i es calcula veient quines columnes tenen un 1 en la fila i.

EXEMPLE:



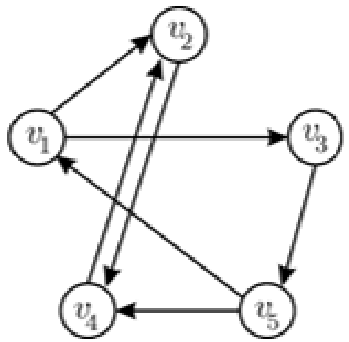
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \otimes Q = R \otimes R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Índex

2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

EXEMPLE:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \otimes Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La 1a, 3a i 5a fila indiquen que una component connexa està formada per.

$$\{v_1, v_3, v_5\}$$

La 2a i 4a fila indiquen que una altra component connexa està formada per.

$$\{v_2, v_4\}$$

2. CÀLCUL DE COMPONENTS CONNEXES

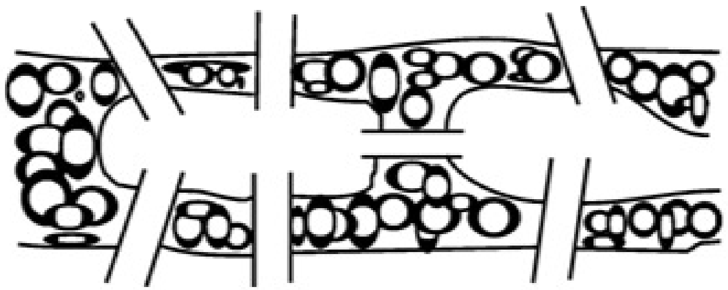
Observació: En el cas no dirigit és obvi que la component connexa associada a un vèrtex x_i pot ser calculada obtenint el conjunt.

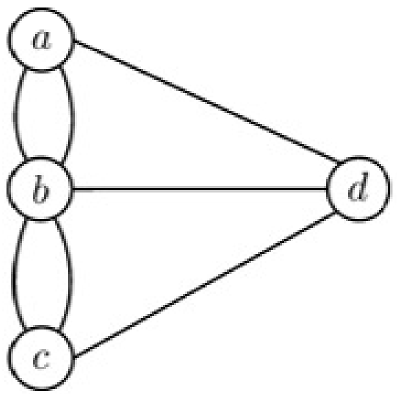
$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^p(v_i), \quad p \leq n$$

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

En segles passats Königsberg va ser una populosa i rica ciutat de la zona oriental de Prússia. Estava situada a la vora del riu Pregel, que en el segle XVIII estava travessada per set ponts situats com mostra la figura i que permetien enllaçar els distints barris.

Problema: És possible planificar un passeig de manera que eixint d'un punt es puga tornar després d'haver travessat cada un dels ponts una sola vegada? Leonardo Euler, un matemàtic suís natural de Basilea (1707-1783) va donar la solució a aquest problema.





3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

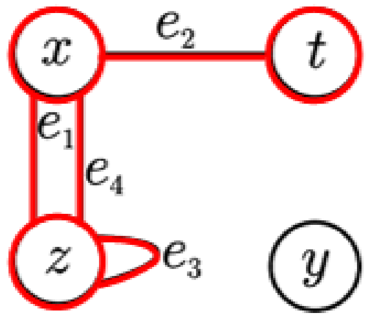
DEFINICIONS:

Siga *G* un graf connex i en general no simple.

1. Anomenarem **tour** de *G* a una cadena tancada que travessa cada aresta de *G* almenys una vegada.

   EXEMPLE:

   La cadena $te_2xe_1ze_3ze_4xe_2t$ és un tour.



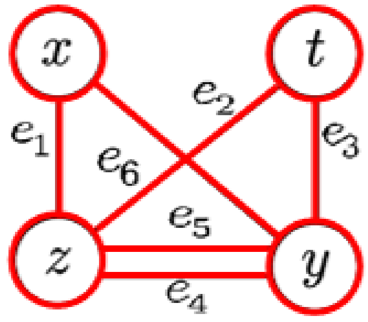
3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

2. Anomenarem **tour eulerià** de *G* a un tour de *G* que travessa cada aresta exactament una vegada.

EXEMPLE:

La cadena $te_3ye_4ze_1xe_6ye_5ze_2t$

és un tour eulerià.



3. Anomenarem **graf eulerià** a aquell en què podem trobar un tour eulerià.

EXEMPLE: El graf anterior és un graf eulerià.

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

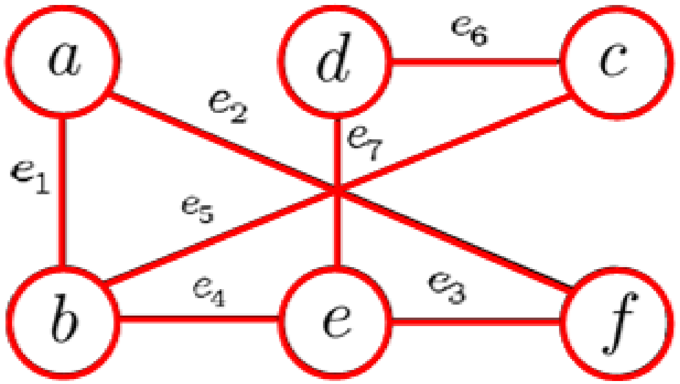
4. Anomenarem **camí eulerià** a una cadena (simple) que travessa cada aresta exactament una vegada.

EXEMPLE:

La cadena

$\boldsymbol{b e_1 a e_2 f e_3 e e_4 b e_5 c e_6 d e_7 e}$

és un camí eulerià.



3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

TEOREMA

Siga *G* un graf no dirigit i connex.

1. *G* es eulerià si, i només si, no té vèrtexs de grau imparell.
2. *G* conté un camí eulerià si i només si té exactament dos vèrtexs de grau imparell.

TEOREMA

Siga *G* = (*V*,*A*) un graf dirigit i dèbilment connex.

1. *G* és eulerià si, i només si, per a tot vèrtex $v, d_e(v) = d_s(v)$.
2. *G* conté un camí eulerià si, i només si,

$$d_e(v) = d_s(v),\ \forall v \neq p, q$$

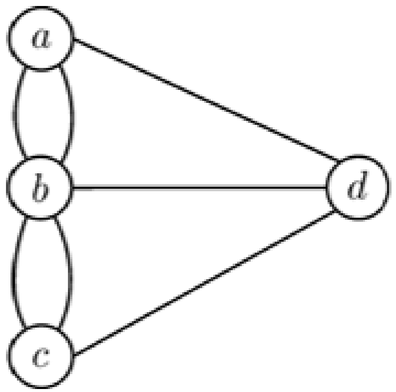
$$d_e(p) = d_s(p) - 1, \quad d_e(q) = d_s(q) + 1.$$

Sent *p* i *q* els vèrtexs inicial i final, respectivament, del camí.

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

EXEMPLE:

El graf dels ponts de Königsberg no és eulerià ja que no tots els seus vèrtexs tenen grau parell.



Tampoc conté un camí eulerià.

Per tant, el problema dels ponts de Königsberg no té solució.

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

ALGORITME DE FLEURY

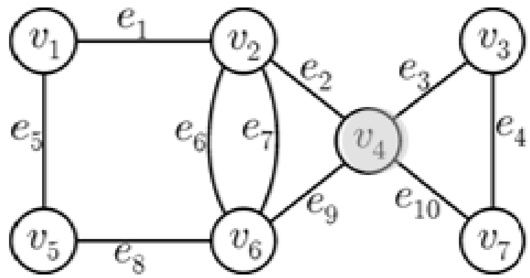
El següent algoritme troba un tour o camí eulerià en un graf no dirigit.

Si el graf és eulerià, a partir d'un vèrtex qualsevol de G, construirem una cadena simple de manera que no es repetisquen arestes i no es trien arestes de tall llevat que no hi haja una altra alternativa. Al finalitzar aquest procés, és a dir, quan hàgem esgotat totes les arestes, haurem obtingut un tour eulerià.

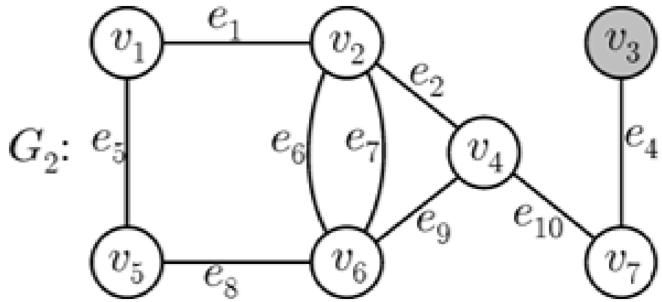
Si el graf conté un camí eulerià començarem amb un vèrtex de grau imparell seguint el procés descrit.

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

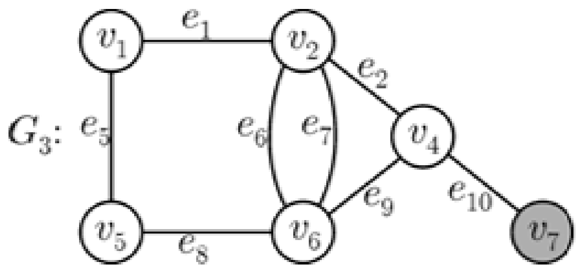
EXEMPLE: El següent graf és connex i el grau de tot vèrtex és parell, per tant, posseeix un tour eulerià. Aplicarem l'algoritme de Fleury.



A partir de $\boldsymbol{v_4}$ podem triar 4 possibles arestes; cap d'elles desconnecta el graf.
Triant l'aresta $\boldsymbol{e_3}$ podem eliminar-la del graf i afegir-la al tour: $\boldsymbol{T=e_3}$.

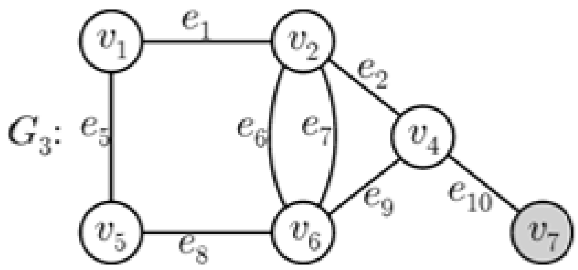


El vèrtex $\boldsymbol{v_3}$ només incideix amb $\boldsymbol{e_4}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_4}$ i $\boldsymbol{v_3}$.
Afegim $\boldsymbol{e_4}$ al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4}$.

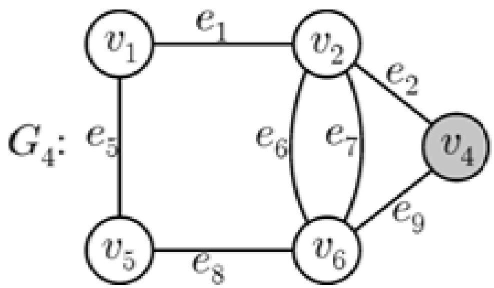


3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

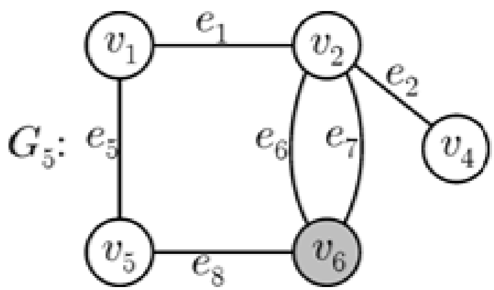
Situació actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4}$.



El vèrtex $\boldsymbol{v_7}$ és incident només amb $\boldsymbol{e_{10}}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_{10}}$ y $\boldsymbol{v_7}$.
Afegim $\boldsymbol{e_{10}}$ al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}}$.

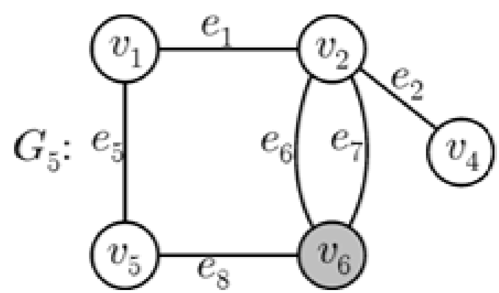


A partir de $\boldsymbol{v_4}$ podem triar 2 arestes i cap desconnecta el graf: triem $\boldsymbol{e_9}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_9}$ i la afegim al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9}$.

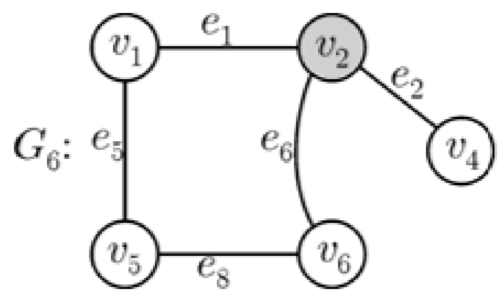


3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

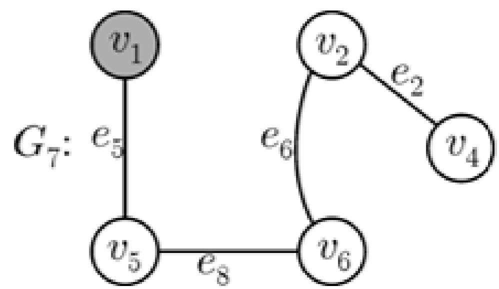
Situació actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9}$.



A partir de $\boldsymbol{v_6}$ podem triar 3 arestes i cap desconnecta el graf: triem $\boldsymbol{e_7}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_7}$ i la afegim al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7}$.

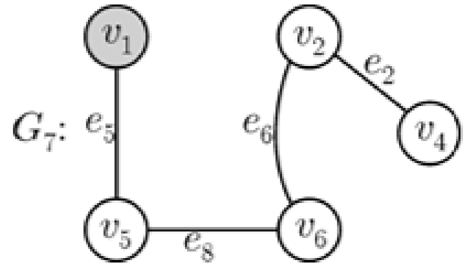


A partir de $\boldsymbol{v_2}$ podem triar $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ o $\boldsymbol{e_6}$. $\boldsymbol{e_2}$ és una aresta de tall, així que no podem triar-la: triem $\boldsymbol{e_1}$ que no és de tall.
Eliminem $\boldsymbol{e_1}$ i la afegim al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1}$.

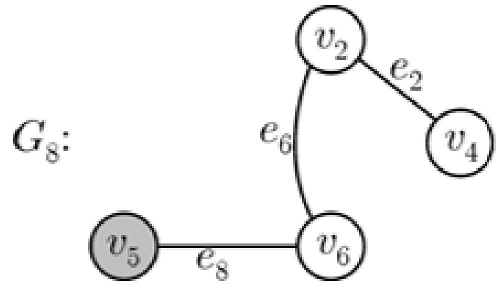


3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

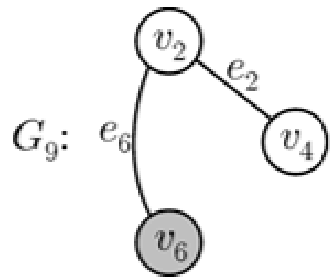
Situació actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1}$.



El vèrtex $\boldsymbol{v_1}$ és incident només amb $\boldsymbol{e_5}$. Eliminem $\boldsymbol{e_5}$ y $\boldsymbol{v_1}$. Afegim $\boldsymbol{e_5}$ al tour: $T=\boldsymbol{e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5}$.

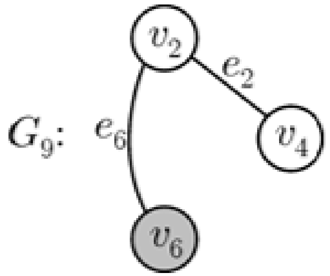


El vèrtex $\boldsymbol{v_5}$ és incident només amb $\boldsymbol{e_8}$. Eliminem $\boldsymbol{e_8}$ y $\boldsymbol{v_5}$. Afegim $\boldsymbol{e_8}$ al tour: $T=\boldsymbol{e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5e_8}$.

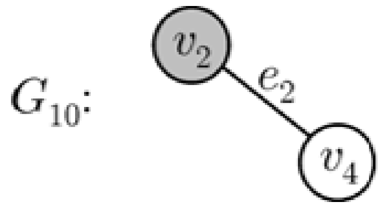


3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

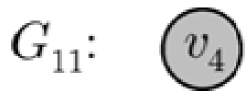
Situació actual: T=$\boldsymbol{e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8}$.



El vèrtex $\boldsymbol{v_6}$ es incident només amb $\boldsymbol{e_6}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_6}$ y $\boldsymbol{v_6}$. Afegim $\boldsymbol{e_6}$ al tour:
T=$\boldsymbol{e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6}$.



El vèrtex $\boldsymbol{v_2}$ es incident només amb $\boldsymbol{e_2}$.
Eliminem $\boldsymbol{e_2}$ i $\boldsymbol{v_2}$. Afegim $\boldsymbol{e_2}$ al tour:
$\boldsymbol{T=e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6 e_2}$.



Com no hi ha més arestes, el tour eulerià buscat és
$\boldsymbol{T=e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6 e_2}$.

ALGORITME DE FLEURY: MODIFICACIÓ PER A GRAFS DIRIGITS

El següent algoritme troba un tour o camí eulerià en un graf dirigit.

Si el graf és eulerià, a partir d'un vèrtex qualsevol de G construïm una cadena simple de manera que no es repetisquen arcs i no es trie mai un arc si a l'eliminar-ho augmenta el nombre de components connexes del graf no dirigit associat, llevat que no tinguem una altra alternativa.

Si el graf conté un camí eulerià, comencem amb un vèrtex $\boldsymbol{p}$ tal que $d_e(\boldsymbol{p}) = d_s(\boldsymbol{p}) - 1$, seguint el procés descrit.

3. PROBLEMES DE RECORREGUT D'ARESTES

EXEMPLE:

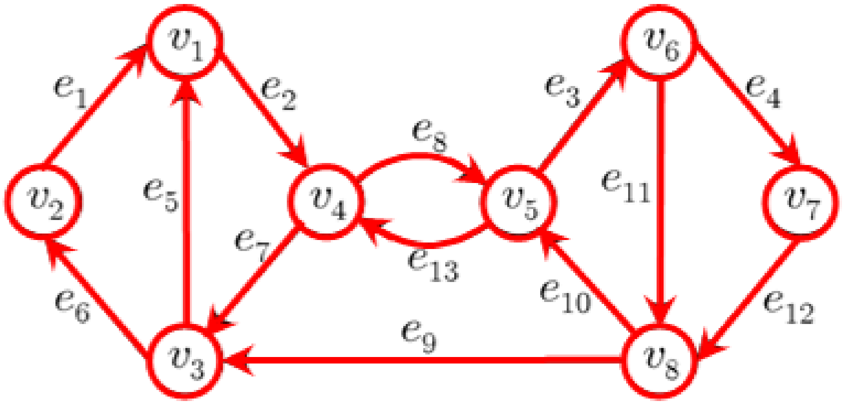
Considerem el següent graf G=(V,A) dirigit:

El graf és dèbilment connex i verifica:

$d_e(\mathbf{v}_i)=d_s(\mathbf{v}_i)$ per a tot $i\neq 1,6$

$d_e(\mathbf{v}_6)=d_s(\mathbf{v}_6)-1,$

$d_e(\mathbf{v}_1)=d_s(\mathbf{v}_1)+1$



Posseeix un camí eulerià que comença en $\mathbf{v}_6$ i finalitza en $\mathbf{v}_1$.

En aquest punt, si triem l'arc $\mathbf{e}_7$, augmenta el nombre de components connexes del graf no dirigit associat. Per tant, triem $\mathbf{e}_8$.

En aquest punt, si triem l'arc $\mathbf{e}_{13}$, augmenta el nombre de components connexes del graf no dirigit associat. Per tant, triem $\mathbf{e}_3$.

El camí eulerà és $C=e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}e_7e_6e_1$

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

En 1857 el matemàtic irlandés William Hamilton va idear el joc següent:

Donat un dodecaedre regular (poliedre de dotze cares, les cares del qual són pentàgons regulars i iguals), si en cada un dels seus vèrtexs es posa el nom d'una ciutat, és possible trobar un cicle a través de les arestes del dodecaedre que passe per cada ciutat una sola vegada?

Aquest joc, que ha donat lloc a la teoria de recorregut de vèrtexs, va ser venut a un fabricant de joguets que va pagar a Hamilton 25 guinees.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

DEFINICIONS:

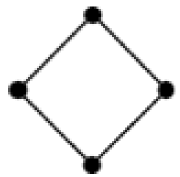
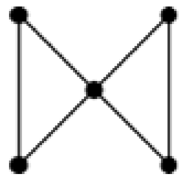
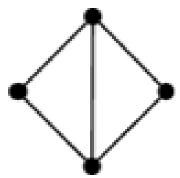
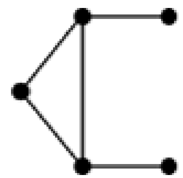
1. Un **camí Hamiltonià** en un graf *G* és un camí que travessa cada vèrtex del graf exactament una vegada.
2. Un **cicle Hamiltonià** en un graf *G* és un cicle que travessa cada vèrtex del graf exactament una vegada.
3. Un graf és **Hamiltonià** si conté un cicle Hamiltonià.

Els problemes de recorregut d'arestes i vèrtexs no estan relacionats

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

DEFINICIONS:

1. Un **camí Hamiltonià** en un graf *G* és un camí que travessa cada vèrtex del graf exactament una vegada.
2. Un **cicle Hamiltonià** en un graf *G* és un cicle que travessa cada vèrtex del graf exactament una vegada.
3. Un graf és **Hamiltonià** si conté un cicle Hamiltonià.

	Graf hamiltonià	**Graf no hamiltonià**
Graf eulerià		
Graf no eulerià		

REGLES BÀSIQUES PER A CONSTRUIR CAMINS I CICLES HAMILTONIANS

Regla 1. Si G no és connex, no posseeix cicles Hamiltonians.

Regla 2. Si G és un graf amb n vèrtexs, aleshores un camí Hamiltonià ha de tindre exactament $n - 1$ arestes, i un cicle Hamiltonià n arestes.

Regla 3. Si v és un vèrtex del graf, aleshores un camí Hamiltonià ha de tindre almenys una aresta incident amb v i com a màxim dos.

Regla 4. Si G és Hamiltonià, aleshores $d_G(v)$ ha de ser major o igual que 2.

Regla 5. Si $v \in V$ té grau 2, aleshores les dos arestes incidents amb v han d'aparéixer en qualsevol cicle Hamiltonià de G.

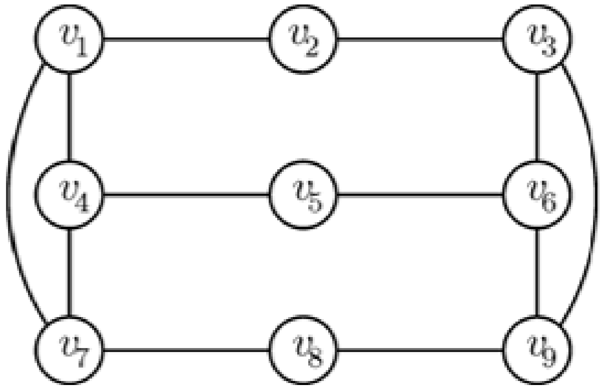
Regla 6. Si $v \in V$ té grau major que 2, aleshores quan s'intenta construir un cicle Hamiltonià, una vegada que es passe per v, les arestes incidents no utilitzades es deixen de tindre en compte.

Regla 7. Al construir un cicle o camí Hamiltonià per a G, no es pot donar el cas d'obtindre un cicle per a un subgraf de G a menys que continga tots els vèrtexs de G.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

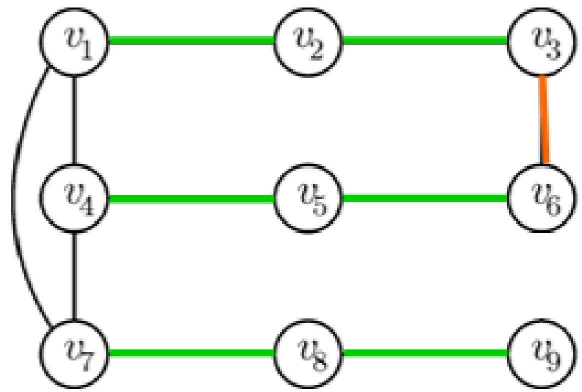
EXEMPLE: Vegem si el següent graf és hamiltonià.

Aplicant la regla 5 sobre els vèrtexs $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_5}$ i $\boldsymbol{v_8}$ tenim que les següents arestes deuen aparèixer en qualsevol cicle hamiltonià.



4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

EXEMPLE: Vegem si el següent graf és hamiltonià.



Aplicant la regla 5 sobre els vèrtexs $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_5$ i $\boldsymbol{v}_8$ tenim que les següents arestes deuen apareixer en qualsevol cicle hamiltonià.

Situant-nos en el vèrtex $\boldsymbol{v}_3$ tenim 2 opcions:

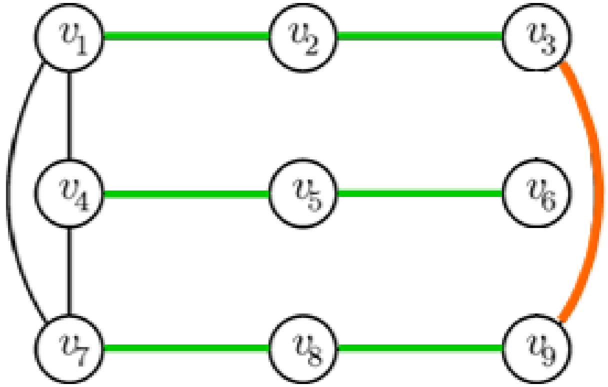
1. Utilitzar l'aresta $\{\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_6\}$.

   Per la regla 6, eliminem les dos arestes no utilitzades incidents amb els vèrtexs $\boldsymbol{v}_3$ i $\boldsymbol{v}_6$.

   Com $\boldsymbol{v}_9$ només té una aresta incident amb ell, per la regla 4, el graf no pot ser hamiltonià.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

EXEMPLE: Vegem si el següent graf és hamiltonià.



Aplicant la regla 5 sobre els vèrtexs v_2, v_5 i v_8 tenim que les següents arestes deuen apareixer en qualsevol cicle hamiltonià.

Situant-nos en el vèrtex v_3 tenim 2 opcions:

1. Utilitzar l'aresta $\{v_3,v_6\}$.

   Per la regla 6, eliminem les dos arestes no utilitzades incidents amb els vèrtexs v_3 i v_6.

   Com v_9 només té una aresta incident amb ell, per la regla 4, el graf no pot ser hamiltonià.

2. Utilitzar l'aresta $\{v_3,v_9\}$.

   Per la regla 6, eliminem les dos arestes no utilitzades incidents amb els vèrtexs v_3 i v_9.

   Com v_6 només té una aresta incident amb ell, per la regla 4, el graf no pot ser hamiltonià.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

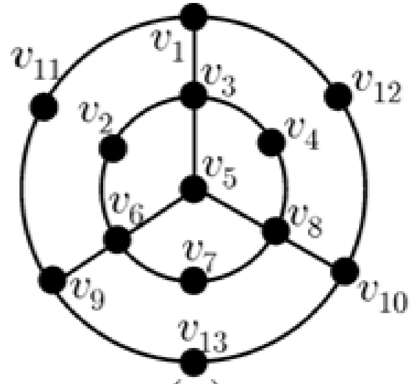
TEOREMA

Siga *G* un graf bipartit amb partició *{X,Y}.*

1. Si *G* té un cicle Hamiltonià, aleshores *card(X)=card(Y).*
2. Si *G* té un camí Hamiltonià, aleshores *card(X)* i *card(Y)* difereixen com a màxim en 1.

El recíproc és cert per a grafs bipartits complets amb més de dos vèrtexs.

EXEMPLE: La següent figura és un graf connex i volem saber si té un cicle o un camí hamiltonià.



(a)

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

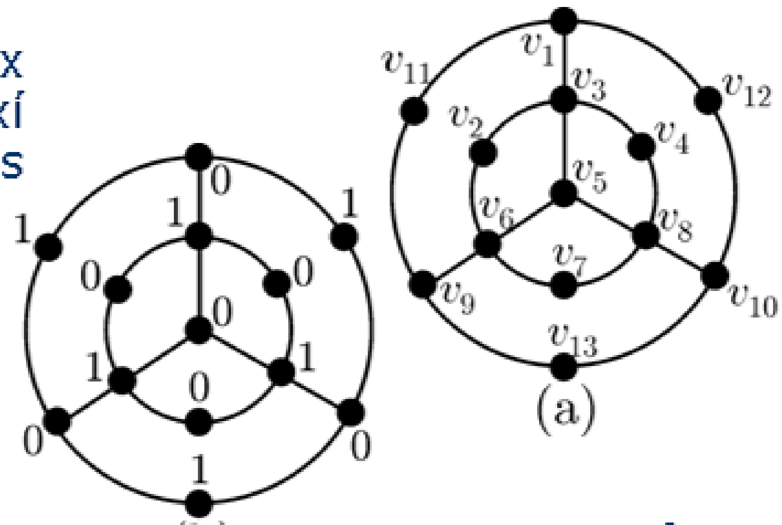
TEOREMA

Siga *G* un graf bipartit amb partició *{X,Y}*.

1. Si *G* té un cicle Hamiltonià, aleshores *card(X)=card(Y)*.
2. Si *G* té un camí Hamiltonià, aleshores *card(X)* i *card(Y)* difereixen com a màxim en 1.

El recíproc és cert per a grafs bipartits complets amb més de dos vèrtexs.

EXEMPLE: Si etiquetem amb un 0 el vèrtex v_5 i amb un 1 els vèrtexs adjacents, i així successivament fins a etiquetar tots els vèrtexs, obtenim la següent figura.



(b) (a)

Índex

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

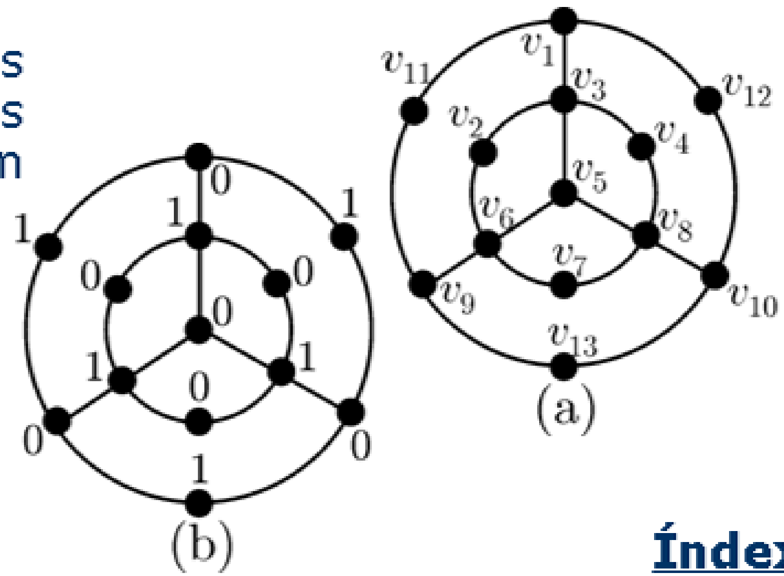
TEOREMA

Siga *G* un graf bipartit amb partició *{X,Y}*.

1. Si *G* té un cicle Hamiltonià, aleshores *card(X)=card(Y).*
2. Si *G* té un camí Hamiltonià, aleshores *card(X)* i *card(Y)* difereixen com a màxim en 1.

El recíproc és cert per a grafs bipartits complets amb més de dos vèrtexs.

<u>**EXEMPLE:**</u> Com cada parell de vèrtexs adjacents estan marcats amb etiquetes distintes, el nostre graf és bipartit i podem aplicar el teorema anterior.



4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

TEOREMA

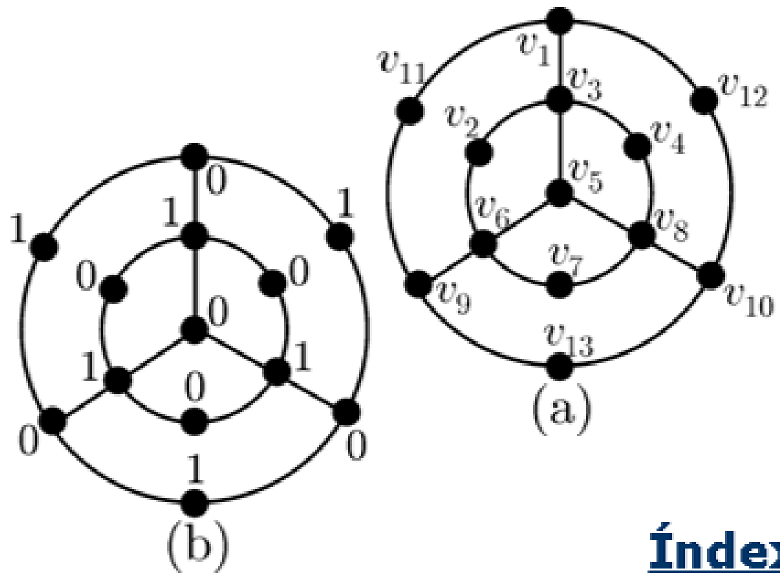
Siga *G* un graf bipartit amb partició *{X,Y}*.

1. Si *G* té un cicle Hamiltonià, aleshores *card(X)=card(Y)*.
2. Si *G* té un camí Hamiltonià, aleshores *card(X)* i *card(Y)* difereixen com a màxim en 1.

El recíproc és cert per a grafs bipartits complets amb més de dos vèrtexs.

EXEMPLE: La partició és:

$X=\{\mathbf{v}_i \in V \ / \ \text{l'etiqueta de } \mathbf{v}_i \text{ és } 0\}=$
$=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_9, \mathbf{v}_{10}\}$
$Y=\{\mathbf{v}_i \in V \ / \ \text{l'etiqueta de } \mathbf{v}_i \text{ és } 1\}=$
$=\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_8, \mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{13}\}$.



Índex

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

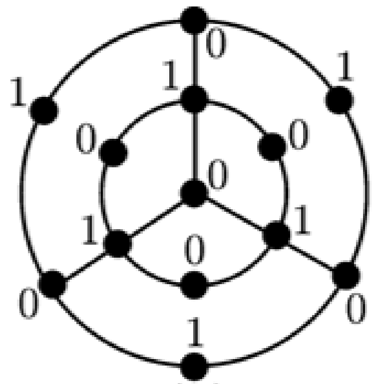
TEOREMA

Siga *G* un graf bipartit amb partició *{X,Y}*.

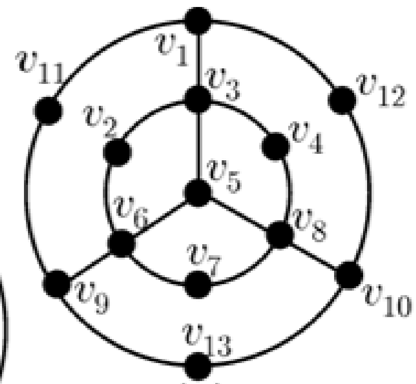
1. Si *G* té un cicle Hamiltonià, aleshores *card(X)=card(Y)*.
2. Si *G* té un camí Hamiltonià, aleshores *card(X)* i *card(Y)* difereixen com a màxim en 1.

El recíproc és cert per a grafs bipartits complets amb més de dos vèrtexs.

EXEMPLE: Tenim card(X)=7 i card(Y)=6, pel que, pel teorema anterior, el graf no posseeix cap cicle hamiltonià.
No obstant això, el teorema no nega ni afirma l'existència d'un camí hamiltonià.



(b)



(a)

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

TEOREMA DE DIRAC

Tot graf simple amb n vèrtexs, $n \geq 3$, en el que tot vèrtex té grau almenys $n/2$, té un cicle Hamiltonià.

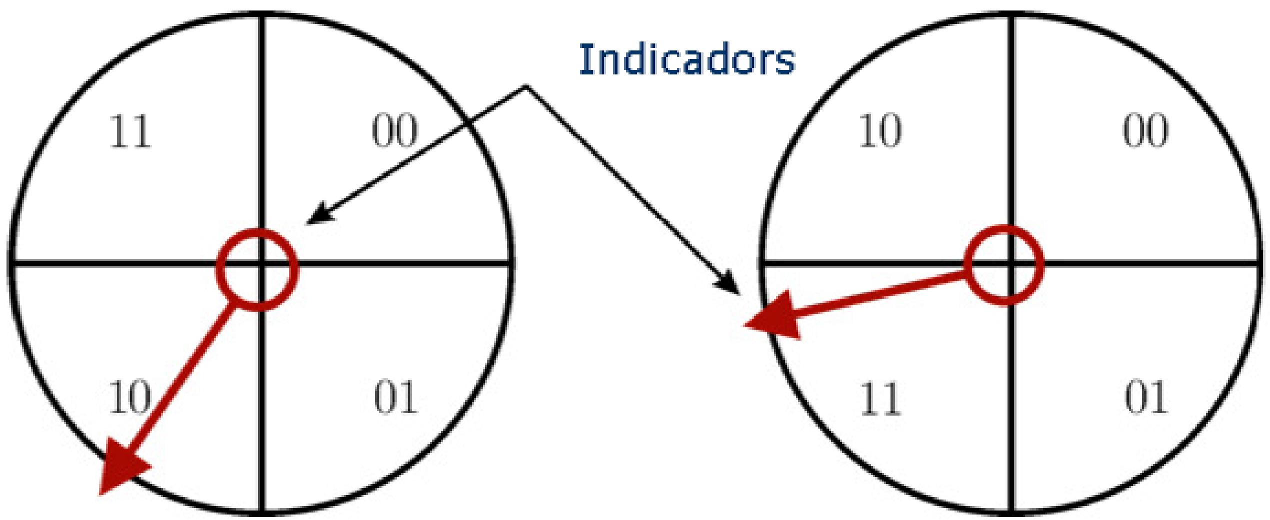
COROL·LARI

Si G és un graf complet simple amb n vèrtexs, $n \geq 3$, aleshores G té un cicle Hamiltonià.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

APLICACIÓ: CODIS DE GRAY

Una manera de convertir la posició angular d'un indicador rotatiu a forma digital és dividir el cercle en 2^n sectors iguals, etiquetar els segments amb nombres binaris de 0 a $2^n - 1$ i registrar el nombre de segment que assenyala l'indicador per mitjà d'algun sistema digital.



4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

Per a llegir l'etiqueta per mitjà de l'ús de sensors podem col·locar *n* anells concèntrics segmentats, de manera que l'indicador faça contacte amb l'anell *i* si, i només si, l'*i*-ésim dígit de l'etiqueta és un 1.

Figura (a): Si l'indicador està en 00 però prop de la frontera entre 00 i 11, una xicoteta irregularitat en el contacte pot fer que es llitja 01 (sector adjacent llunyà), o 11 (sector adjacent), o 10 (sector oposat). Errors en els dos dígits.

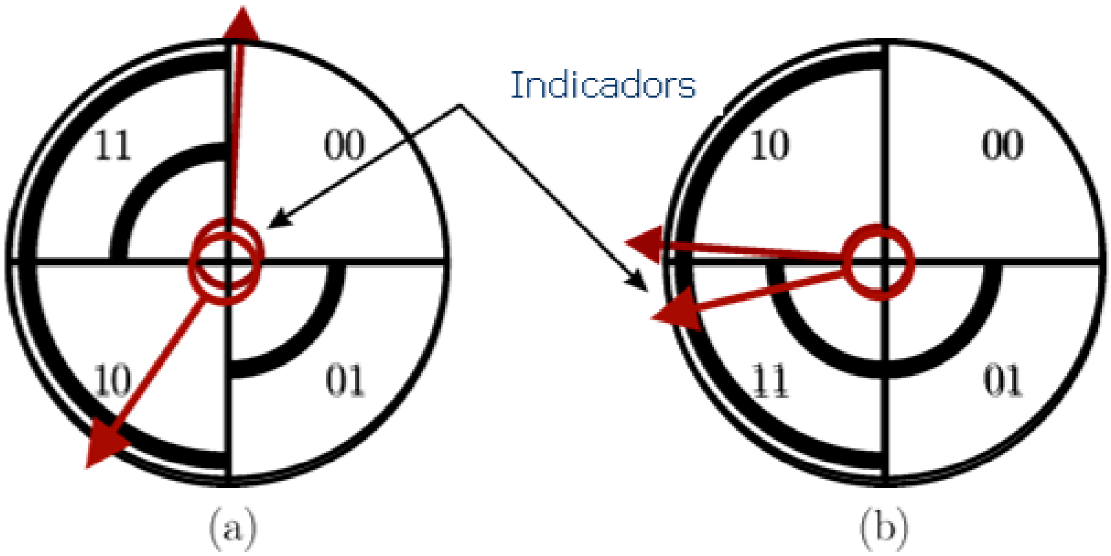
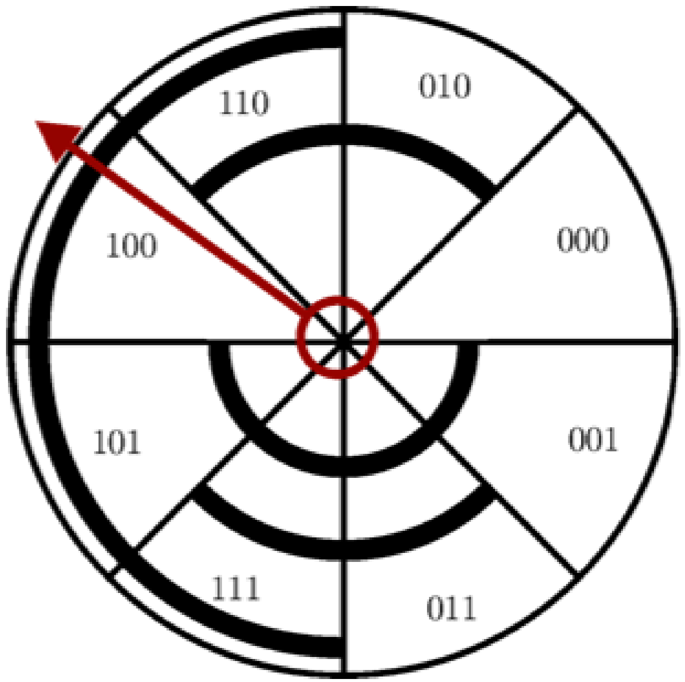


Figura (b): Només es poden produir errors en un sol dígit i en cas de produir-se l'error ens porta sempre al sector més adjacent.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

DEFINICIÓ

Un **codi de Gray de longitud n** és una assignació d'etiquetes als 2^n sectors iguals del cercle amb expressions binàries de longitud n, de manera que les etiquetes de sectors adjacents diferisquen exactament en un dígit.



4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

Podem veure la construcció d'un codi de Gray com un problema de grafs:

Considerem com a conjunt de vèrtexs

$$V = \{0, 1\}^n$$

és a dir, nombres binaris de longitud n, i unim dos vèrtexs $u, v \in V$ amb una aresta si u i v difereixen en exactament un dígit.

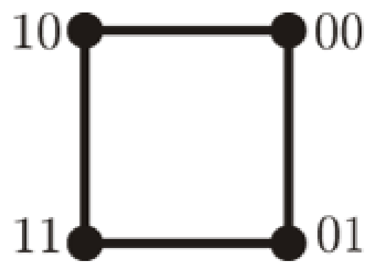
Es pot demostrar per inducció que aquest graf és Hamiltonià per a $n \geq 2$; rep el nom de n-cub i es representa per Q_n.

És evident que un codi de Gray correspon a un cicle Hamiltonià en Q_n.

4. PROBLEMES DE RECORREGUT DE VÈRTEXS

EXEMPLE

El següent graf mostra la gràfica de Q_2.



El següent graf mostra la gràfica de Q_3.

I el codi de Gray corresponent a un dels seus 12 cicles Hamiltonians