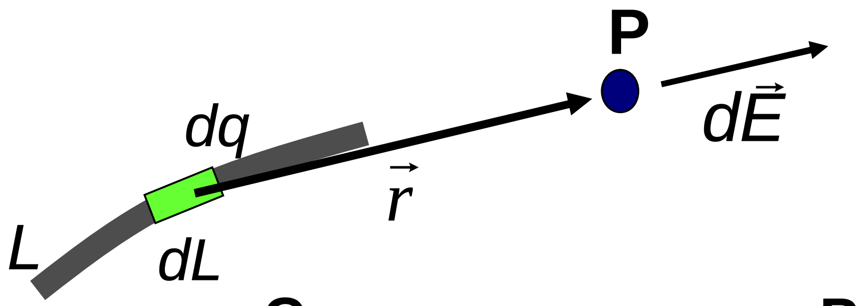
Tema 2: Distribuciones de carga.
Capacidad y energía electrostática
(1ª parte)

Densidades de carga

Flujo del campo eléctrico: Ley de Gauss:

Ejemplos de aplicación Ley de Gauss: carga esférica, carga lineal y plano

Densidades de carga



Cargas

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Ppo. Superposición (sumatorio)

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$$

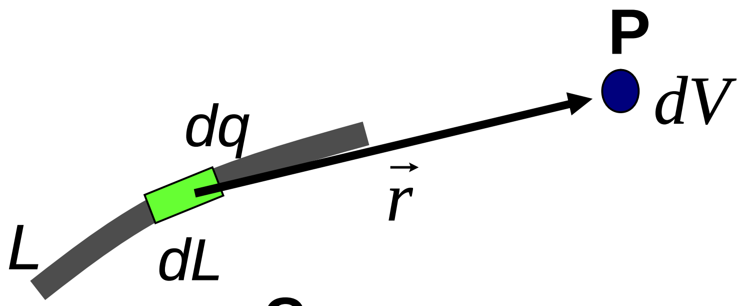
Distribución continua de cargas

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_{\mathrm{r}}$$

Ppo. Superposición (integración)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_{\mathbf{r}}$$

Densidades de carga



Cargas

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Ppo. Superposición (sumatorio)

$$V = \sum V_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

Distribución continua de cargas

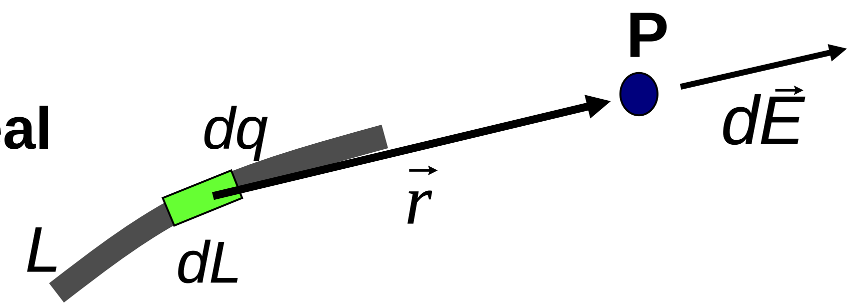
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Ppo. Superposición (integración)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

Densidades de carga

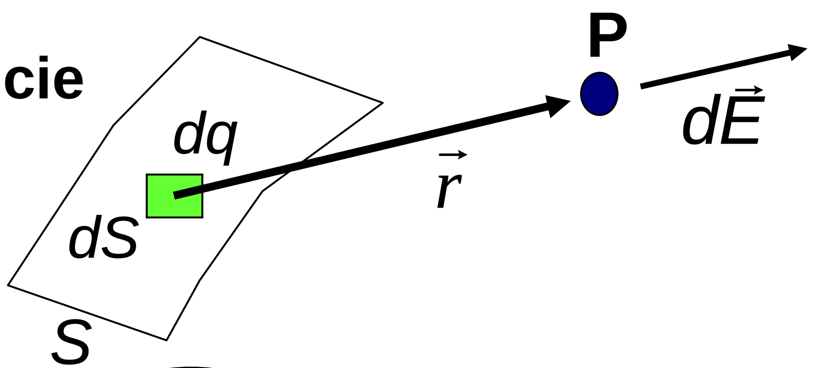
Lineal



Densidad lineal (C/m)

$$\lambda = \frac{dq}{dL} \qquad dq = \lambda\, dL$$

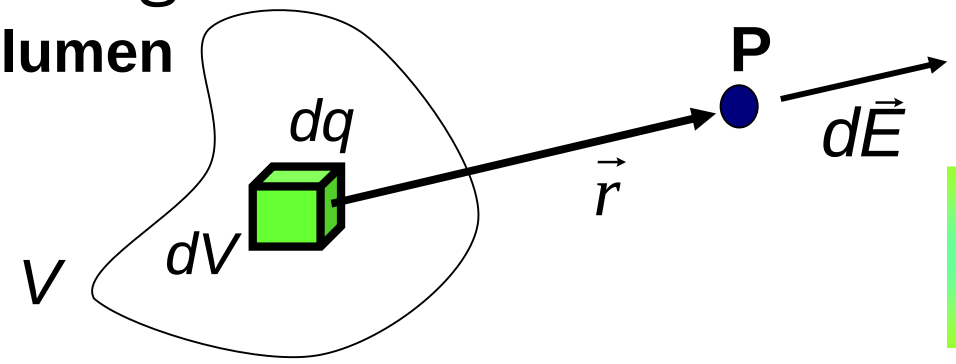
Superficie



Densidad superficial (C/m^2)

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad dq = \sigma\, dS$$

Volumen



Densidad volúmica (C/m^3)

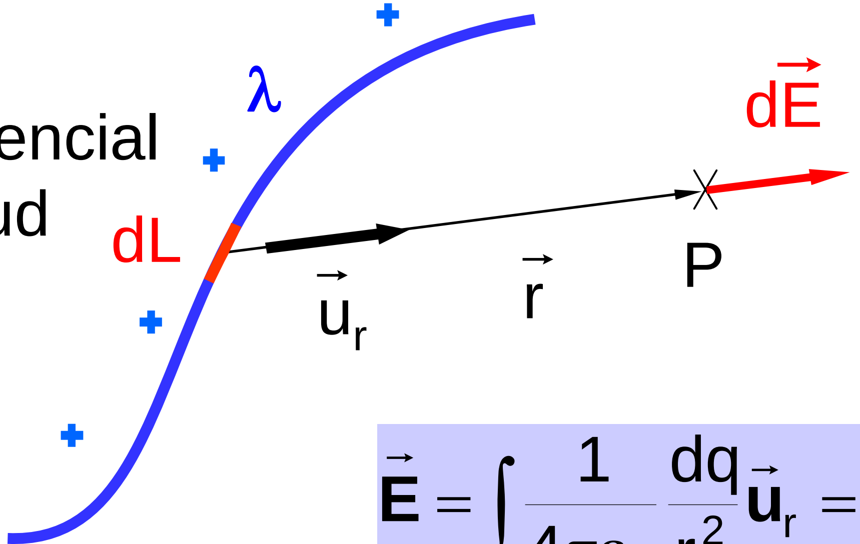
$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad dq = \rho\, dV$$

Densidades de carga

Distribución lineal de carga $\quad \lambda$: densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{dq}{dL}$$

dL : diferencial de longitud



$$dq = \lambda dL$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = \int_L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dL}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r$$

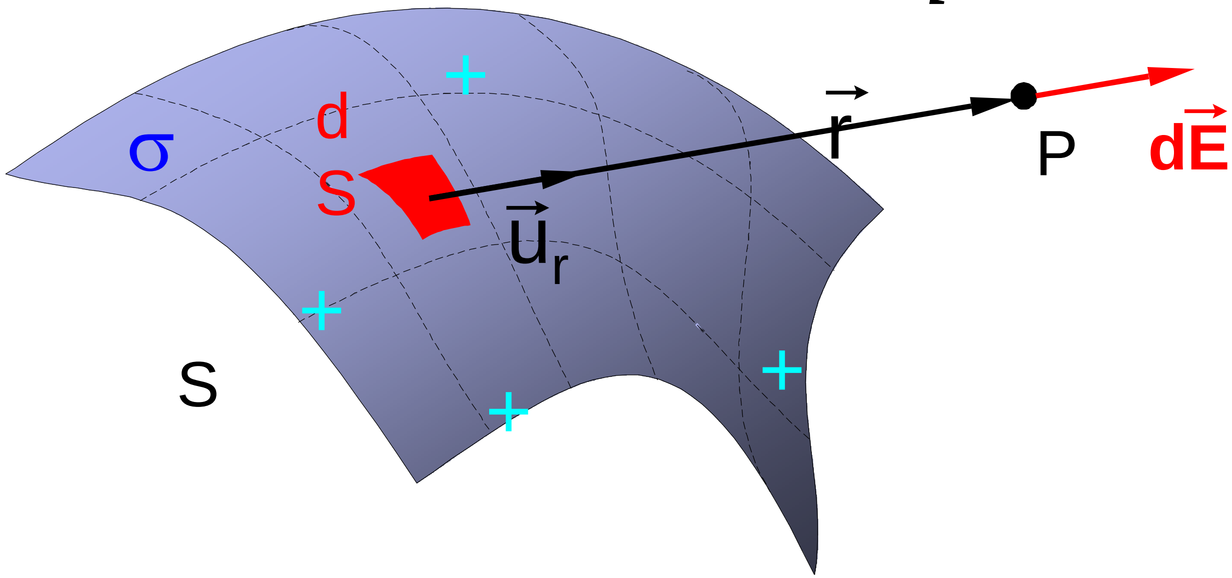
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dL}{r}$$

Densidades de carga

σ: densidad superficial de carga $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$

$$dq = \sigma\, dS$$

dS : diferencial de área



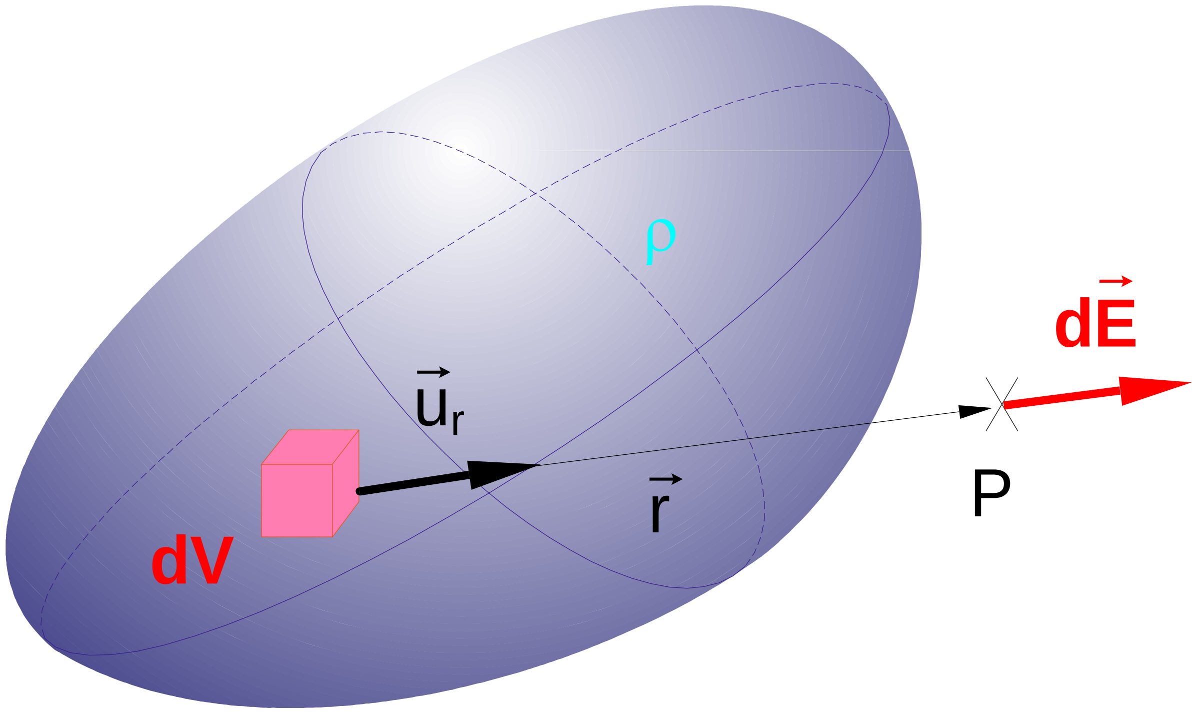
$$\vec{\mathbf{E}} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

Densidades de carga

ρ: densidad volumétrica de carga $\rho = \dfrac{dq}{dV}$

$$dq = \rho\, dV$$



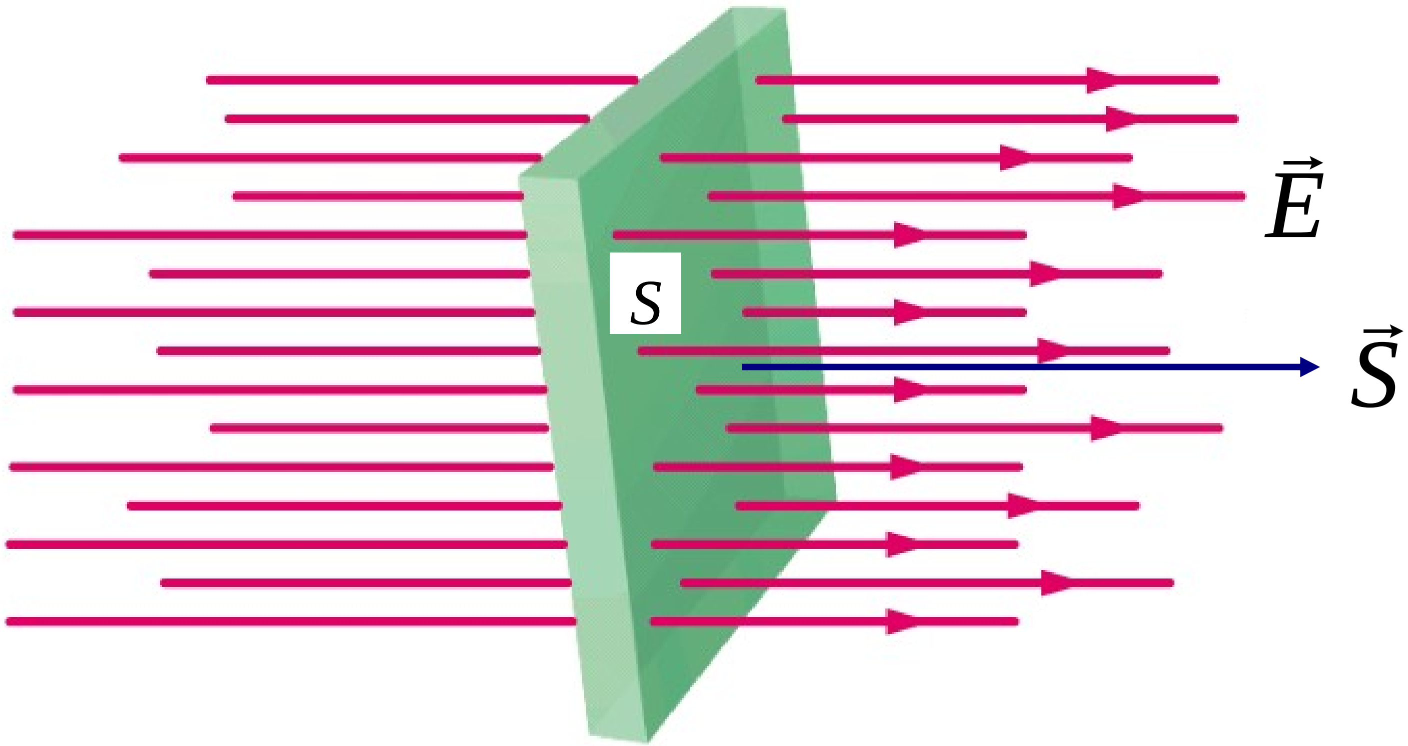
dV : diferencial de volumen

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{\mathbf{u}}_r$$

Flujo del campo eléctrico

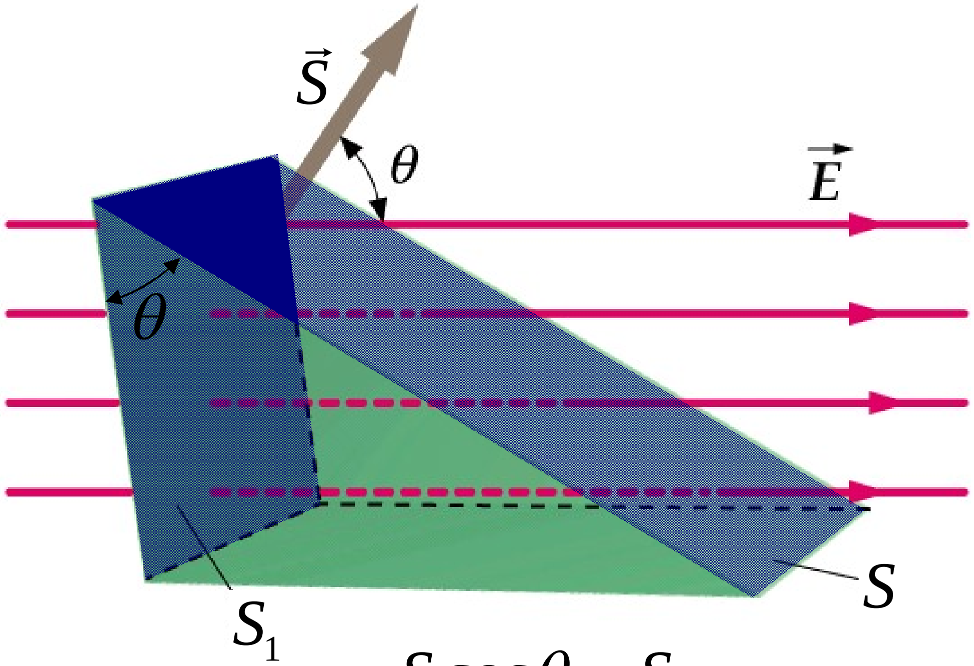
Campo eléctrico uniforme y superficie plana perpendicular



$$\Phi_E = ES$$

Flujo del campo eléctrico

Campo eléctrico uniforme y superficie plana ***inclinada***



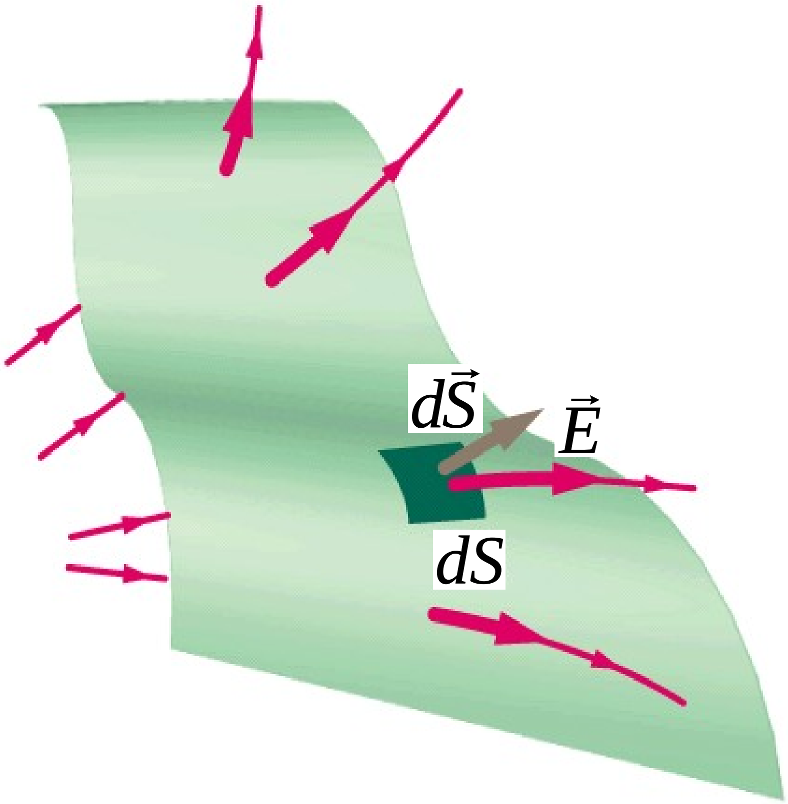
$$S\cos\theta = S_1$$

$$\Phi_E = ES_1 = ES\cos\theta$$

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S}}$$

Flujo del campo eléctrico

Caso más general:



$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

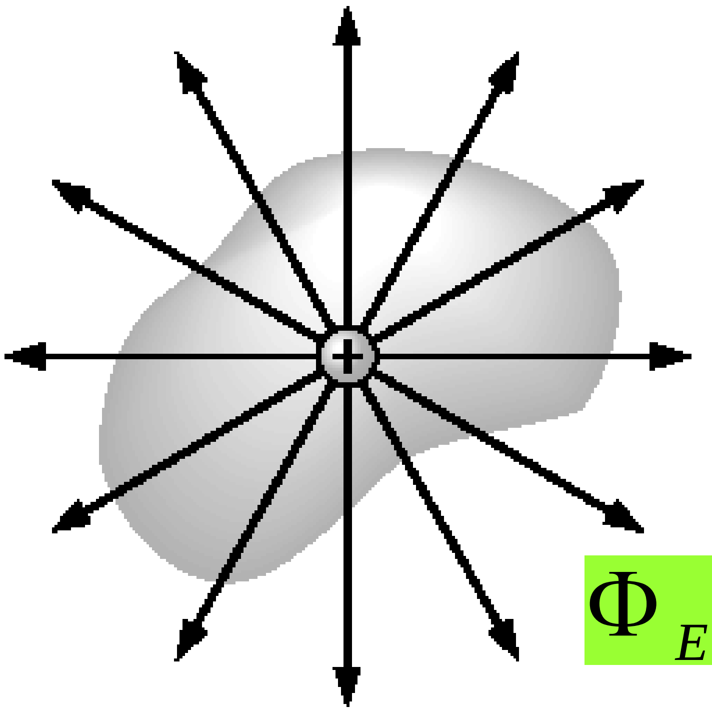
$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

Flujo del campo eléctrico

SUPERFICIE CERRADA (criterio de signos)**:**

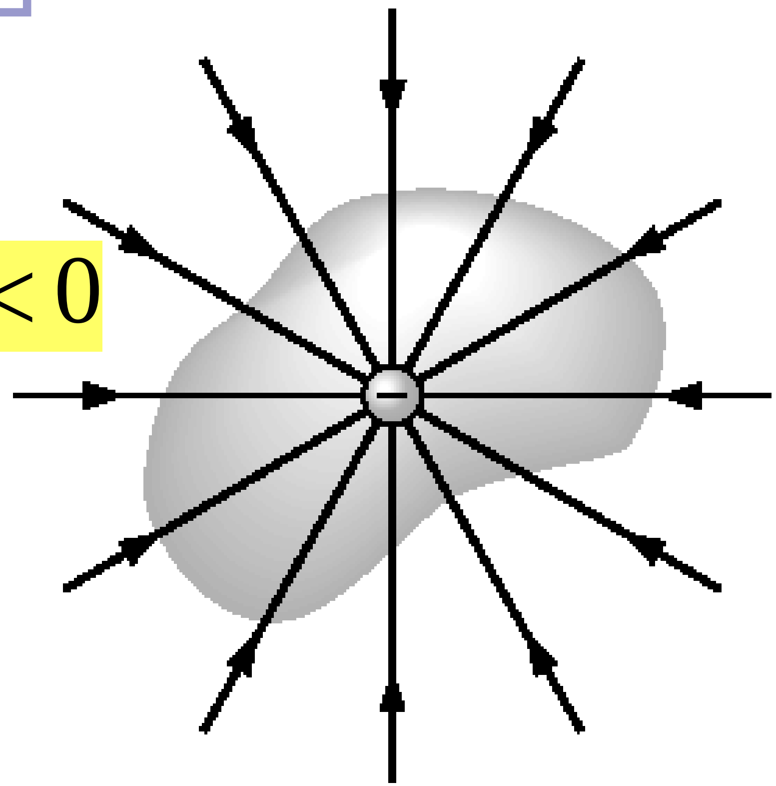
El flujo total puede ser positivo (**saliente**), negativo (**entrante**) o cero.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$



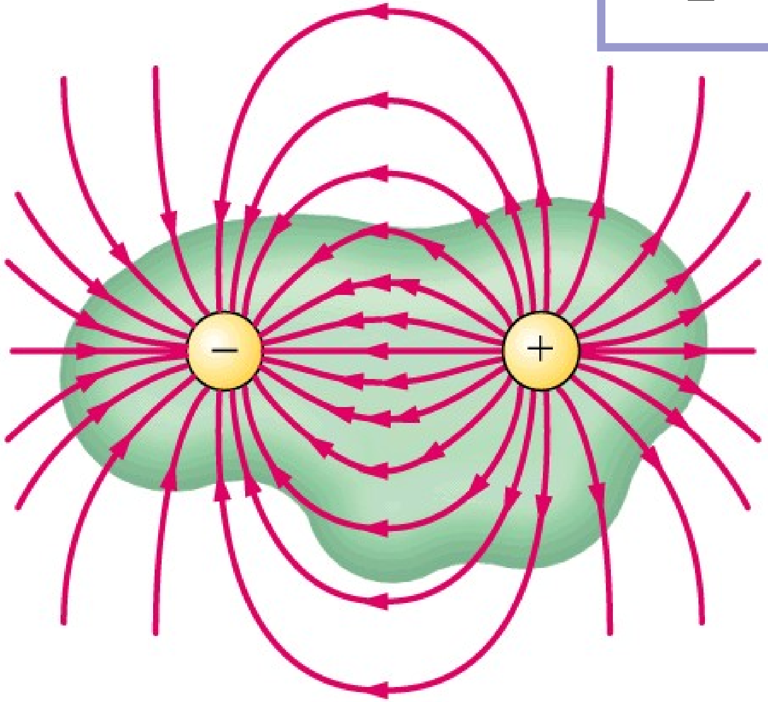
$$\Phi_E > 0$$

$$\Phi_E < 0$$

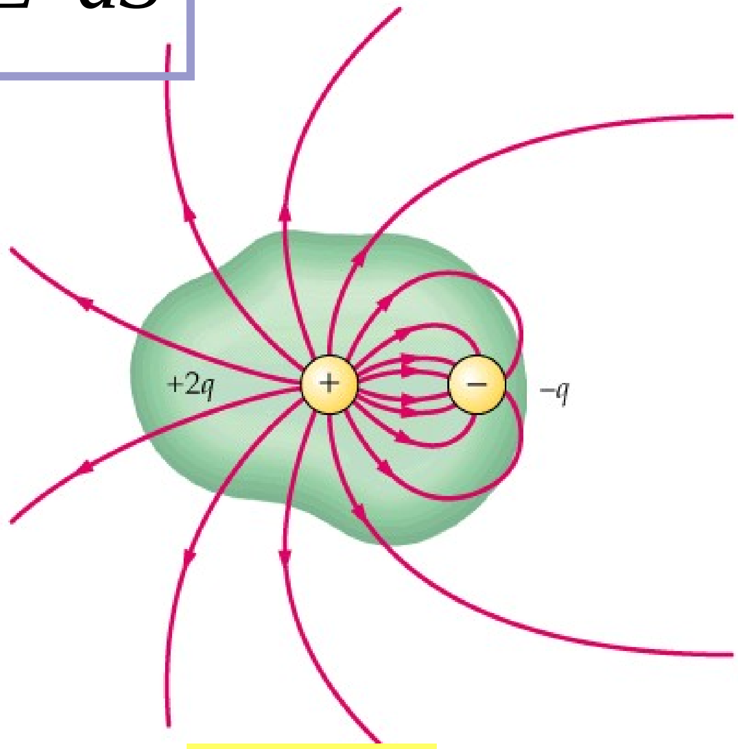


Flujo del campo eléctrico

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$\Phi_E = 0$$



$$\Phi_E > 0$$

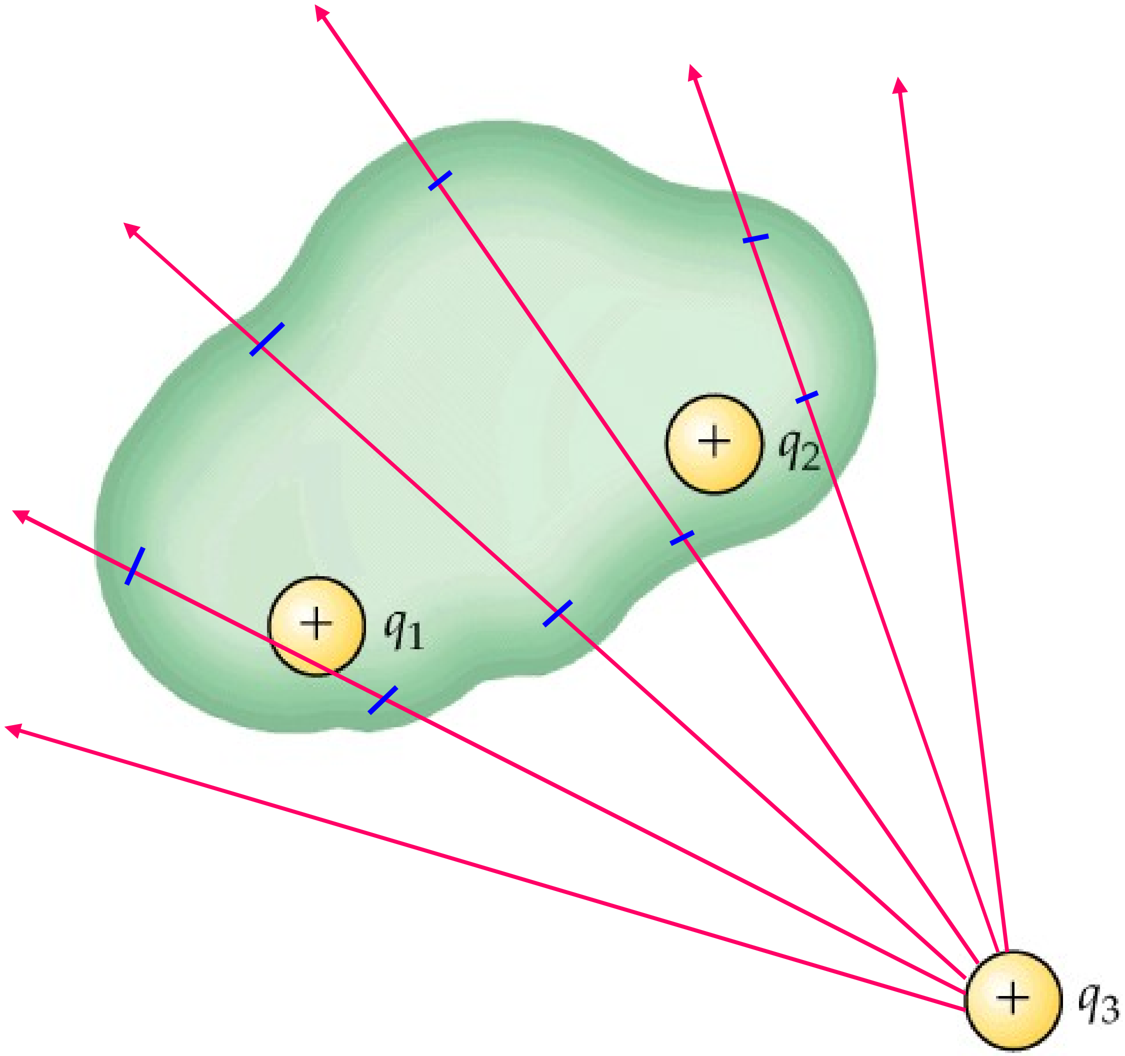
Ley de Gauss

"El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por la superficie".

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ley de Gauss

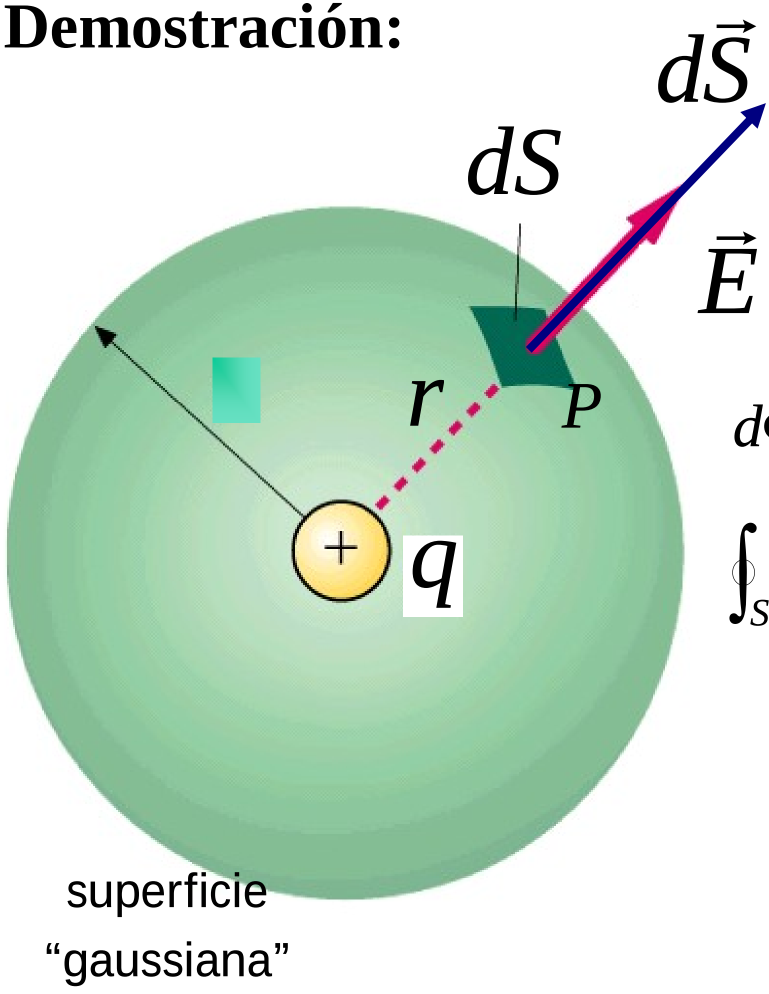


$$\Phi_E = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

Ley de Gauss

En Electrostática la Ley de Gauss es equivalente a la Ley de Coulomb.

Demostración:



$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

- ***simetrías*** para definir la ***s. gauss***.

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \ldots(\vec{E}, d\vec{S} \text{ paralelo})\ldots = E\,dS$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\,dS = \ldots E \text{ constante}\ldots =$$

$$= E\oint_S dS = E\,4\pi r^2$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r}$$

Aplicaciones

En **distribuciones continuas de carga** con **elevada simetría** la Ley de Gauss nos permite calcular fácilmente el **módulo del campo eléctrico**.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}}$$

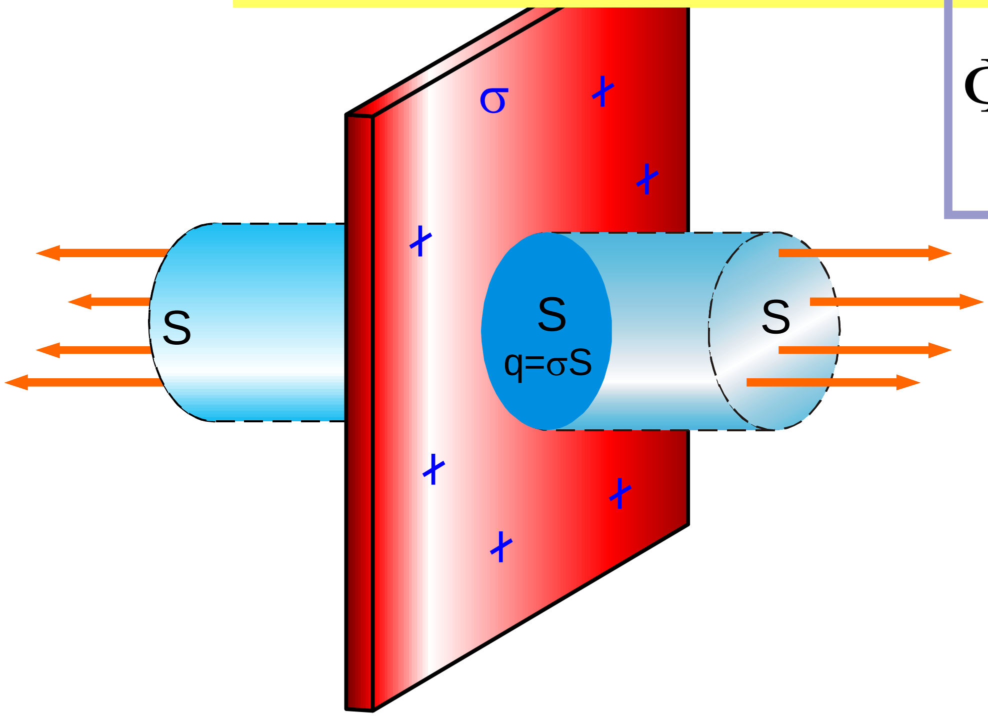
escoger **superficie gaussiana apropiada** en cada caso:

- E constante
- $\vec{E}, d\vec{S}$ paralelos o perpendiculares entre sí

Aplicaciones: plano indefinido cargado

σ uniforme

superficie gaussiana : cilindro perpendicular al plano

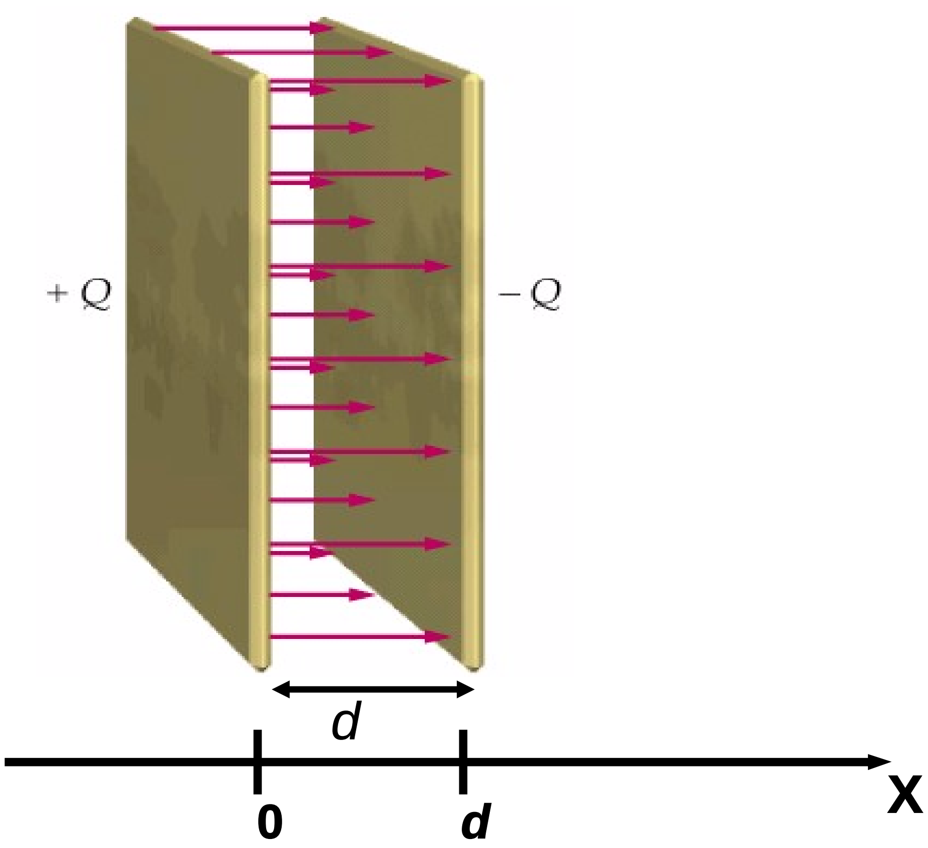


$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

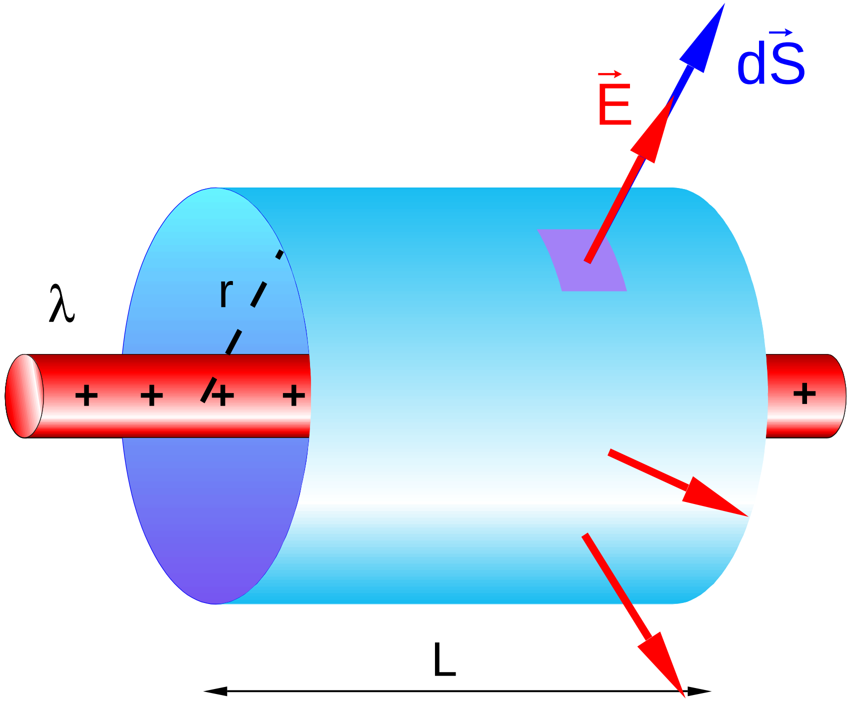
$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ (módulo)

ejercicio/ Campo creado por dos planos indefinidos cargados, separados una distancia ***d***, con igual densidad de carga pero de signo opuesto.



Aplicaciones: carga lineal indefinida



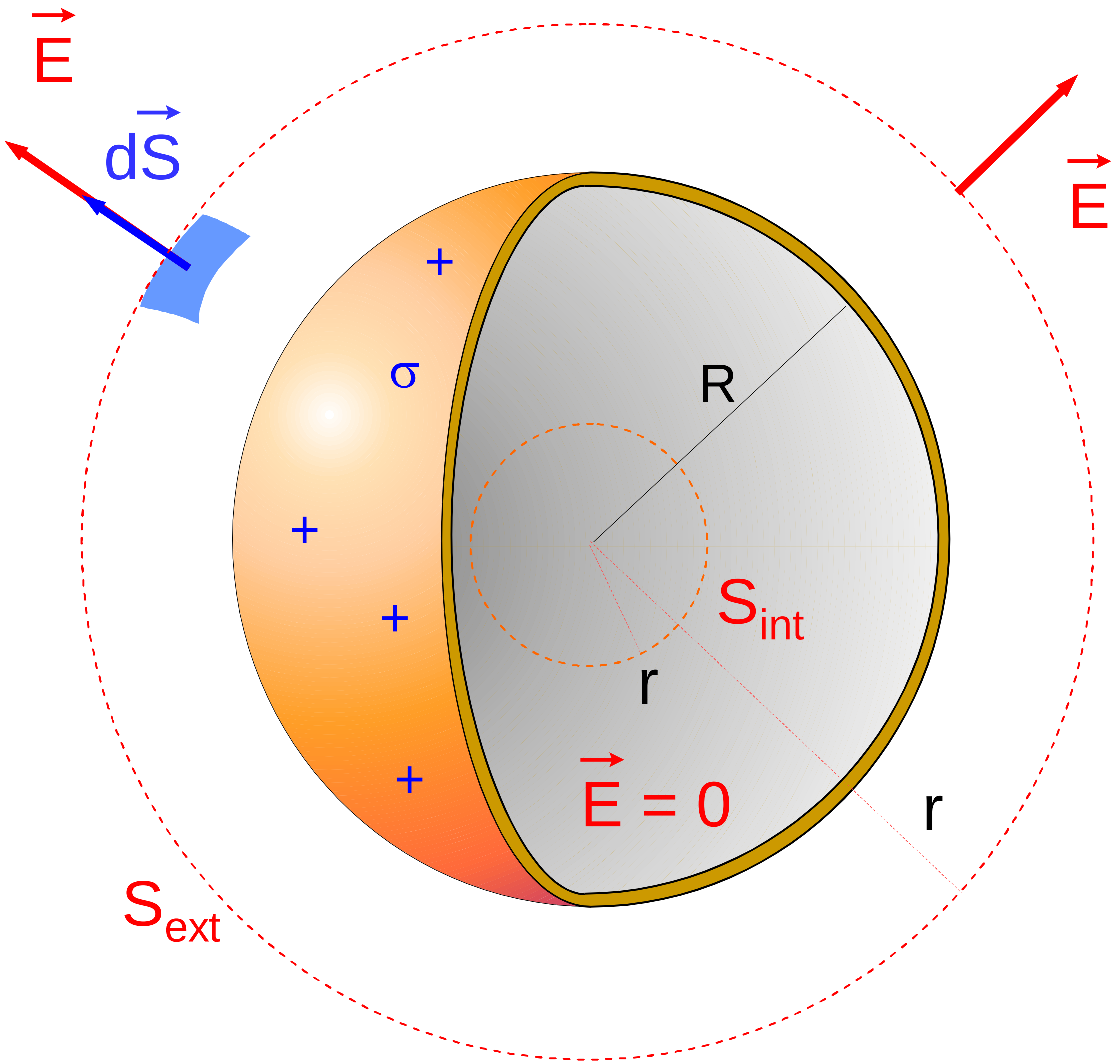
$$\oint_{\text{sup.cil.}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\mathbf{E}} // d\vec{\mathbf{S}}$$

$$E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \text{ (módulo)}$$

Aplicaciones: corteza esférica cargada



$r < R$

$$r < R \rightarrow \Phi = 0 \rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{int} = 0 \rightarrow V = cte$$

$r \geq R$

$$r \geq R \rightarrow \int_{S_{ext}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

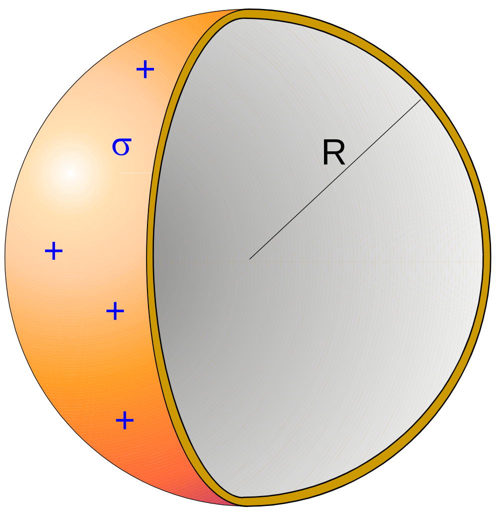
Aplicaciones: corteza esférica cargada

ejercicio/ Calcula la expresión del potencial eléctrico.

$$\boxed{V_P = -\int_{ref}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} \;\; (V_{ref} = 0)}$$

$r < R$ $\quad V_{\text{int}} = -\int \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l} = C_1$

$r \geq R$ $\quad V_{ext} = -\int \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$



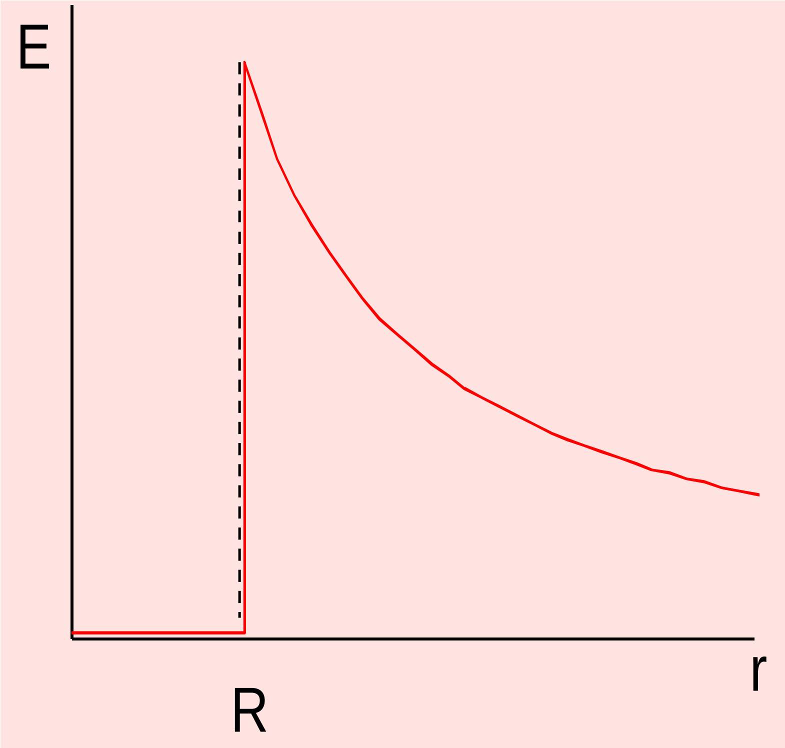
Condiciones:

- origen de potenciales $\quad V_\infty = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$
- continuidad en la frontera

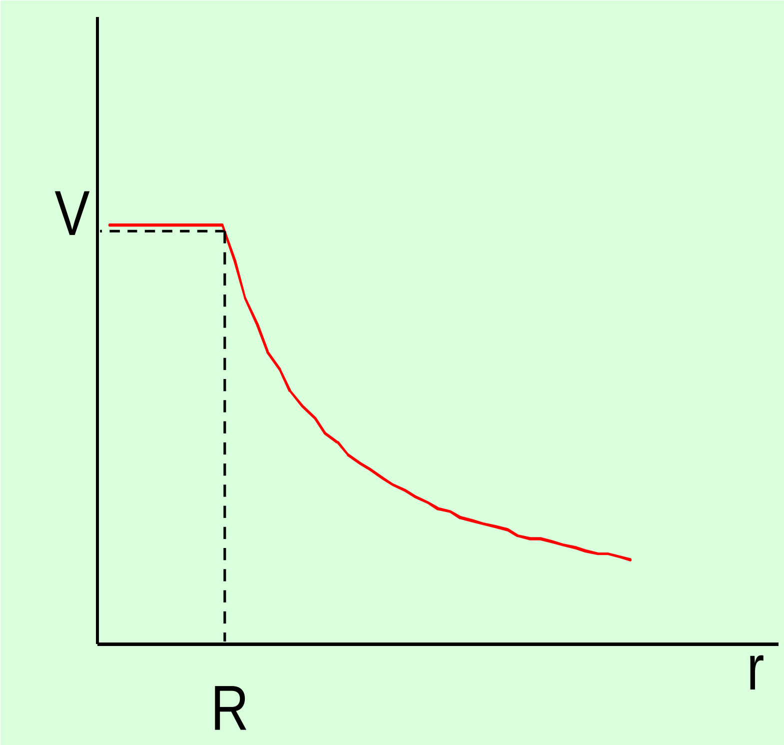
$$V_{\text{int}}(r = R) = V_{ext}(r = R) \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} ; V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Aplicaciones: corteza esférica cargada (cont.)



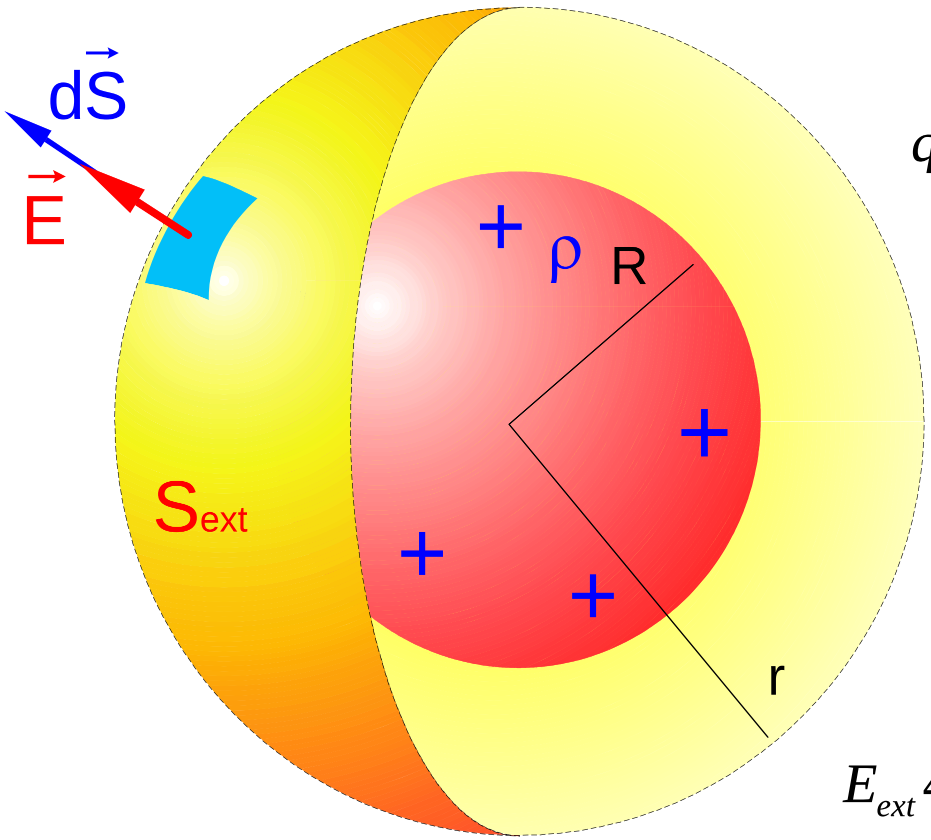
$$E_{\text{int}} = 0\,;\, E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,;\, V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Aplicaciones: distribución esférica de carga

ρ uniforme , *esfera* radio R



$r < R$

$$\int_{S_{\text{int}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\text{int}}\, 4\pi r^2;$$

$$q_e = \int_{V_{\text{int}}} \rho\, dV = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\boxed{E_{\text{int}} = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}}$$

$r \geq R$

$$\int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{ext}\, 4\pi r^2$$

$$q_e = \int_{V_{ext}} \rho\, dV = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = Q_{total}$$

$$E_{ext}\, 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\boxed{E_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$