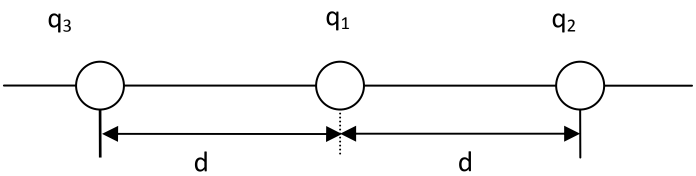
Aclaraciones:

- *Examen de cuestiones (nota sobre 10- NC) y de problemas(nota sobre 10-NP)*
- *Las preguntas sobre tratamiento de errores (NL) sólo se entregarán a los alumnos con nota de laboratorio menor que 4 en la primera convocatoria. El resto mantiene la calificación de enero.*

- *Calificación final en la convocatoria de julio: NF = 0.5 x NC + 0.4 x NP + 0.1 x NL*
  Es necesario obtener al menos 5 puntos para aprobar la asignatura.

Cuestiones:

C1. Tres cargas puntuales q_1, q_2 y q_3 están separadas una distancia d entre ellas, tal y como muestra la figura. Las cargas q_1 y q_2 están fijas y la q_3 puede moverse libremente ¿Qué relación debe existir entre q_1 y q_2 para que q_3 permanezca en reposo? [2 puntos]



RESOLUCIÓN:

La carga q_3 está en equilibrio si el campo eléctrico es nulo en el punto donde se encuentra. Este campo está creado por las cargas q_1 y q_2:

$$\bar{E}_{P_1} + \bar{E}_{P_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot \frac{q_1}{d^2} \cdot \left(-\bar{i}\right) + k \cdot \frac{q_2}{(2 \cdot d)^2} \cdot \left(-\bar{i}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{q_1}{d^2} = \frac{q_2}{(2 \cdot d)^2} \Rightarrow q_2 = -4 \cdot q_1$$

C2. Dos esferas conductoras, una de radio 6 cm y la otra de radio 12 cm están cargadas cada una con una carga de 3 x 10^{-8} C. Las esferas están separadas por una gran distancia que permite despreciar los efectos de influencia mutua. Si las esferas se unen mediante un hilo conductor de capacidad despreciable, describir el movimiento de las cargas y calcular la carga final de cada esfera [2 puntos].

RESOLUCIÓN: Inicialmente: $Q_{i1} = Q_{i2}$ siendo : $R_1 = (1/2)\, R_2$

Al interconectar las esferas se igualan sus potenciales y por tanto la carga inicial se redistribuye entre ambas esferas para conseguir la igualdad del potencial, cumpliéndose además que la carga total debe mantenerse.

$$k \cdot \frac{Q_{f1}}{R_1} \cdot = k \cdot \frac{Q_{f2}}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{f1}}{R_1} = \frac{Q_{f2}}{2R_1} \quad \Rightarrow \quad Q_{f2} = 2Q_{f1}$$

$$\text{y} \quad Q_{f1} + Q_{f2} = 6 \cdot 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad Q_{f1} = 2 \cdot 10^{-8}\ \text{C} \quad \text{y} \quad Q_{f2} = 4 \cdot 10^{-8}\ \text{C}$$

C3. Un condensador de láminas plano-paralelas de $0.5 \cdot 10^{-8}$ F se carga a una diferencia de potencial de 100 V. Una vez cargado se desconecta de la fuente de alimentación y se coloca un dieléctrico de ε_r=5 entre sus láminas de modo que rellene todo el espacio existente entre ambas. Calcula la variación de la energía almacenada en el condensador [2 puntos]

RESOLUCIÓN:

La carga que adquiere el condensador es: $Q = C_0 \cdot V = 0.5 \cdot 10^{-8} \cdot 100 = 0.5\ \mu\text{C}$

La carga permanece constante en el resto del proceso ya que una vez cargado se desconecta la fem. Ahora, al introducir el dieléctrico la capacidad es: $C_f = \varepsilon_r C_0 = 5C_0$, por lo tanto:

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{-4}{5C_0}\right) = -\frac{2 \cdot (0.5 \cdot 10^{-6})^2}{5 \cdot 0.5 \cdot 10^{-8}} = -2 \cdot 10^{-5}\ J$$

C4. Un cable está formado por un cilindro conductor hueco de 4 mm de radio por el que circula una corriente de 2 A. Calcula el módulo del campo magnético a distancias r_1 = 3mm y r_2 = 5mm, medidas desde el eje del cilindro [2 puntos]. Dato $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ u.S.I.

RESOLUCIÓN: La ley de Ampére establece que: $\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

Escogiendo un camino cerrado circular de radio *r* centrado en el eje, la integral de la izquierda es, simplemente, el campo magnético por la longitud de dicho camino, es decir,

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \sum I_i \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sum I_i}{r}$$

Sustituyendo *r* por los valores de r_1 y r_2 y el sumatorio de corrientes por la corriente neta enlazada por el camino cerrado, podemos despejar B en cada caso.

r_1 = 3mm, como $\sum I_i = 0 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0 \text{ T}$

r_2 = 5mm, como $\sum I_i = 2 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \dfrac{2}{5 \cdot 10^{-3}} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

C5. Un solenoide tiene 600 vueltas, una sección circular de radio a=2.5 cm y una longitud l = 6 cm. Una corriente I=10 A fluye a través de este solenoide. En un momento dado la corriente cae a 0 A en 0,1 segundos. Calcula la autoinducción del solenoide [1 punto] y la fuerza electromotriz inducida en el mismo [1 punto].

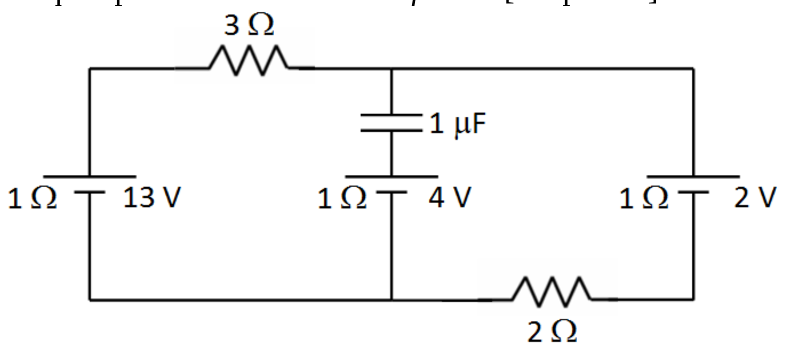
RESOLUCIÓN:

$$L_{solenoide} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi a^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{600^2}{6 \cdot 10^{-2}} \pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-2})^2 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ H}$$

$$\varepsilon = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -1.48 \times 10^{-2} \frac{0-10}{0.1} = 1.48 \text{ V}$$

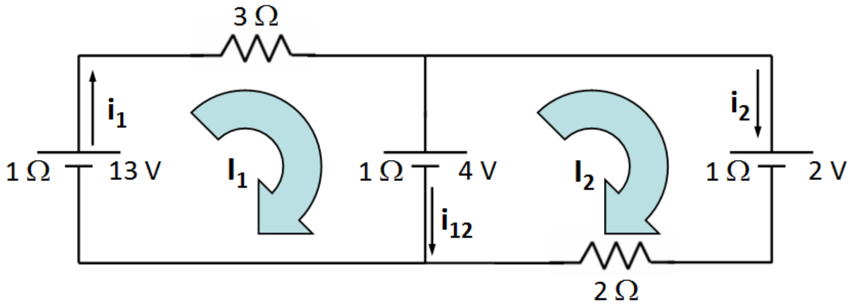
Problemas:

P1. En el circuito de la figura, en el instante inicial (t=0 s), el condensador de 1 μF se encuentra completamente descargado. Calcula: (a) La corriente que circula en t=0 s por cada una de las *f.e.m.* del circuito así como la potencia aportada o consumida (según sea el caso) por cada una de ellas [3.5 puntos]. (b) Cuando el condensador se ha cargado por completo, alcanzándose el equilibrio, ¿cuál es la corriente que circula por la *f.e.m.* de 4 V y qué potencia que aporta o consume dicha *f.e.m.*? [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN:

(a) En t=0 s el condensador se encuentra completamente descargado y se comporta como un cortocircuito, por lo que se puede sustituir por un trozo de cable. Aplicando mallas (ver figura):

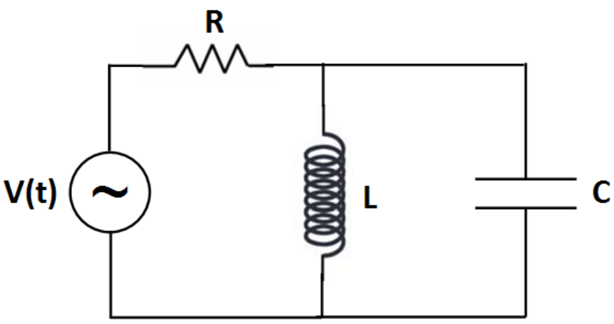


$$\left.\begin{array}{r} 5I_1 - I_2 = 9 \\ -I_1 + 4I_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ multiplicando por 5 la segunda ecuación $$\left.\begin{array}{r} 5I_1 - I_2 = 9 \\ -5I_1 + 20I_2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ sumando ambas ecuaciones: $19I_2 = 19 \Rightarrow I_2 = 1\,\mathrm{A}$, $\rightarrow$ $5I_1 - 1 = 9 \Rightarrow 5I_1 = 10 \Rightarrow I_1 = 2\,\mathrm{A}$. Así pues tenemos que:

- *Por la F.e.m.* de 13 V circula $i_1 = I_1 = 2$ A en el sentido indicado en la figura, y por tanto **aporta** una potencia: $$P_{AP,13\,\mathrm{V}} = 13 \cdot i_1 - 1 \cdot i_1^2 = 13 \cdot 2 - 1 \cdot 2^2 = 22 \ \mathrm{W}.$$
- *Por la F.e.m.* de 4 V circula $i_{12} = I_1 - I_2 = 1$ A en el sentido de I_1. Por lo tanto **consume** una potencia $$P_{C,4\,\mathrm{V}} = 4 \cdot i_{12} + 1 \cdot i_{12}^2 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 = 5 \ \mathrm{W}.$$
- *Por la F.e.m.* de 2 V circula $i_2 = I_2 = 1$ A en el sentido indicado en la figura, y por tanto **consume** una potencia: $$P_{C,2\,\mathrm{V}} = 2 \cdot i_2 + 1 \cdot i_2^2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 = 3 \ \mathrm{W}.$$

(b) Cuando el condensador de 1 μF se ha cargado por completo, alcanzándose el equilibrio, se comporta como un circuito abierto y por la rama donde se encuentra el condensador no circula corriente. Y como la *f.e.m.* de 4 V se encuentra en la misma rama que el condensador, al ser la corriente nula su potencia es de 0 W, es decir, ni consume ni aporta potencia.

P2. En el circuito de la figura, calcula: (a) Las impedancias de la resistencia, bobina y condensador [0.5 puntos]. (b) La impedancia equivalente de la asociación de la bobina y el condensador [1 punto]. (c) La corriente *I(t)* que circula por la resistencia y la potencia que disipa dicha resistencia. A partir de esta potencia indica, razonadamente, cuál es la potencia aportada por la fuente de alterna [2.5 puntos]. Datos: $V(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t)\ \mathrm{V}$, R = 5Ω, L = 0.002 H y C = 0.001 F



RESOLUCIÓN: (a) $\overline{Z}_R = R = 5\ \Omega$; $\overline{Z}_L = j\omega L = j1000 \cdot 0.002\ \Omega = j2\ \Omega \ \rightarrow\ \overline{Z}_L = 2|\underline{90^\circ}\ \Omega$

$$\overline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{1000 \cdot 0.001}\ \Omega = -j1\ \Omega \ \rightarrow\ \overline{Z}_C = 1|\underline{-90^\circ}\ \Omega$$

(b) La bobina y el condensador están asociados en paralelo, por tanto:

$$\overline{Z}_{LC} = \frac{\overline{Z}_L \cdot \overline{Z}_C}{\overline{Z}_L + \overline{Z}_C} = \frac{\left(2|\underline{90^\circ}\right)\cdot\left(1|\underline{-90^\circ}\right)}{j2 + (-j1)} = \frac{2|\underline{0^\circ}}{j1} = \frac{2|\underline{0^\circ}}{1|\underline{90^\circ}} = 2|\underline{-90^\circ}\ \Omega, \quad \rightarrow\ \overline{Z}_{LC} = -j2\ \Omega.$$

(c) $V(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t)\ \text{V} \quad \rightarrow \quad \overline{V} = V_{ef}\left|\underline{\phi}\right. = 10\left|\underline{0^o}\right.\ \text{V}$.

La resistencia R está en serie con la asociación en paralelo de la bobina y el condensador. Por tanto la impedancia en los bornes de la *f.e.m.* es: $\overline{Z}_T = \overline{Z}_R + \overline{Z}_{LC} = 5 + (-j2)\,\Omega = 5 - j2\,\Omega$.

Como $\sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ y $\arctan\left(\frac{-2}{5}\right) = -21.8^o$, $\rightarrow$ $\overline{Z}_T = \sqrt{29}\left|\underline{-21.8^o}\right.\ \Omega$.

$$\Rightarrow \overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_T} = \frac{10\left|\underline{0^o}\right.}{\sqrt{29}\left|\underline{-21.8^o}\right.} = \left(\frac{10}{\sqrt{29}}\right)\left|\underline{0^o - (-21.8^o)}\right. = 1.857\left|\underline{21.8^o}\right.\ \text{A}.$$

Por lo tanto, la corriente real que circula a través de la resistencia es:

$$I(t) = 1.857\sqrt{2}\cos(1000t + 21.8^o)\ \text{A} = 2.63\cos(1000t + 21.8^o)\ \text{A}.$$

La potencia disipada en la resistencia es: $P_R = I_{ef}^2 R = \left|\overline{I}\right|^2 R = (1.857)^2 \cdot 5 = 17.24\ \text{W}$.

Y como el único elemento que consume potencia (activa) es la resistencia, y el único elemento que puede entregar dicha potencia (activa) es la *f.e.m.* alterna, **la potencia entregada por la *f.e.m.* alterna es necesariamente igual a** $P_R = 17.24\ \text{W}$.

P3. Una onda EM posee un campo eléctrico asociado $\vec{E}(y,t) = 6\cos(4\pi \times 10^6 y + 8\pi \times 10^{14} t)\vec{k}$ [V/m]. Se pide: (a) La longitud de onda, frecuencia, velocidad y dirección y sentido de propagación de la onda, especificando si es posible que dicha onda esté viajando en el vacío [1 punto]. (b) El campo magnético asociado [1 punto].

RESOLUCIÓN:

(a) Comparando la ecuación del campo eléctrico con la ecuación general $\vec{E}(r,t) = A\cos(kr \pm \omega t)\vec{u}_i$ sabemos el número de onda k y la frecuencia angular ω de donde obtenemos la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.5 \times 10^{-6}$ m y la frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi} = 4 \times 10^{14}$ Hz.

La velocidad de fase de la onda se puede calcular como $v = \frac{\omega}{k} = \lambda f = 2 \times 10^8$ m/s

Esta velocidad es inferior a la de las ondas EM en el vacío (3 x 10^8 m/s). Por tanto, esta onda EM no pude estar propagándose en el vacío.

La dirección de propagación a lo largo del eje Y, sentido negativo ($-\vec{j}$).

En una onda EM, el campo eléctrico y magnético están en fase y son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Por tanto, necesariamente, el campo magnético ha de oscilar en la dirección del eje X. Su amplitud se calcula como $B_0 = \frac{E_0}{v} = 3 \times 10^{-8}$ T, de donde:

$$\vec{B}(y,t) = 3 \times 10^{-8}\cos(4\pi \times 10^6 y + 8\pi \times 10^{14} t) \cdot (-\vec{i})\ \text{T}$$

Ya que así el sentido de $\vec{E} \otimes \vec{B}$ (en este caso $\vec{k} \otimes (-\vec{i})$) nos proporciona el sentido de propagación de la onda [negativo del eje Y (- $\vec{j}$), considerando la expresión de $\vec{E}$ del enunciado]
