MATEMÁTICAS 1
2018-19

LÓGICA

DIME … Y TE DIRÉ

DEDUCCIÓN NATURAL

Paso 3: cálculo lógico

Deducción

Proceso de razonamiento que permite

obtener nuevo conocimiento

a partir de otro conocimiento

¿Qué es una Deducción Natural (DN)

Método de **cálculo** que nos permite **inferir** **nuevas fbfs** a partir de otras conocidas.

Es un **método sintáctico** que **"manipula"** las fbfs según **reglas** del sistema

Ejemplo

Fbf-1: $\mathbf{A \wedge B}$

Nueva fbf: **B**

Regla aplicada a Fbf-1: **EC**

¿Para qué sirve?

Para demostrar la validez de un razonamiento

Ejemplo de razonamiento correcto "muy" evidente:

"En invierno hace frío, y ahora estamos en invierno por eso hace frío".

Aplicando reglas del sistema se demuestra

MC = { A: es invierno; B: hace frío}

1	$\mathbf{A \rightarrow B}$
2	$\mathbf{A}$
3	$\mathbf{B}$

Busca en la hoja de reglas la que tenga la forma $\mathbf{A \rightarrow B, A \Rightarrow ???}$ a ver qué deduce....

¿Para qué NO sirve?

Para demostrar la **NO** validez de un razonamiento

Ejemplo de razonamiento **NO** correcto "muy" evidente:

"Si es de día, no es de noche, y como no es día, entonces es de noche".

No lo demuestras con reglas …otro método (contraejemplo, por ejemplo).

MC = { D: es de día; N: es de noche}

1	$D \to \neg N$
2	$\neg D$
3	**???**

Busca en la hoja de reglas la que tenga la forma

$D \to \neg N, \neg D \Rightarrow$ **???**

Aplica contraejemplo

Componentes de una Deducción natural

Premisas
En filas numeradas precedidas por guion

-1 Fbf-P1
-2 Fbf-P2
……
-n Fbf-Pn

Fbf inferida
En fila numerada

X Y Z

X: Nº línea
Y: Fbf obtenida
Z: Justificación fbf Y: Regla aplicada a fbf(s) conocida y nº de línea de dicha fbf(s).

Fbf "supuesta" cierta
En fila numerada indentada

X Y Z

X: Nº línea
Y: Fbf que se supone cierta >> premisa de una subdeducción
Z: Justificación de fbf Y: escribir supuesto

Ejemplo 1 de una Deducción

Premisas

-1 $\neg A \wedge B$
-2 $\neg A \rightarrow R$
-3 $R \wedge B \rightarrow D$

Fbfs inferidas

	4. $\neg A$	EC, 1
	5. B	EC, 1
	6. R	MP, 2, 4
	7. $R \wedge B$	IC, 5, 6
Fbf conclusión	8. D	MP, 3, 7

Ejemplo 2 de una Deducción

	1, 2: Premisas	**-1 $\neg B$**	
		-2 $A \rightarrow B$	
Sub-deducción: supuesto provisional	**3: Fbf supuesta cierta:** Premisa dl supuesto	**3 A**	**supuesto**
		4 B	**MP 2,3**
	5: Conclusión dl supuesto	**5 $B \wedge \neg B$**	**IC 1,4, cierre supuesto**
	6: Fbf conclusión	**6 $\neg A$**	**IN 3-5**

¿ Cómo se hace una deducción ? ESTRATEGIAS

Asumimos fbfs premisas

-1 $\neg A \wedge B$

-2 $\neg A \rightarrow R$

-3 $R \wedge B \rightarrow D$

Consideramos la fbf **conclusión** que se debe **obtener**

Q: D

Según la **ESTRUCTURA LÓGICA** de la conclusión
>> **Elegimos Estrategia y reglas de inferencia**

Reglas de básicas de deducción

Una regla de deducción es un razonamiento propuesto por el sistema cuya validez ha sido comprobada.

Regla que introduce conectiva **IC** $A,\ B \Rightarrow A \wedge B$

Regla que elimina conectiva **EC** $A \wedge B \Rightarrow A$

→ Otra representación

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{EC}\\ A \wedge B \\ \hline A\end{array}}$$

Reglas básicas de deducción

CONJUNCIÓN — Aceptar

IC

$$\frac{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}}{P \wedge Q}$$

EC

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

DISYUNCIÓN — Aceptar

ID

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

ED
(Prueba por Casos)

$$\frac{\begin{array}{l}P \vee Q\\ \left[\begin{array}{l}P\\ R\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}Q\\ R\end{array}\right.\end{array}}{R}$$

NEGACIÓN — Aceptar

IN
(Reducción al Absurdo)

$$\frac{\left[\begin{array}{l}P\\ Q \wedge \neg Q\end{array}\right.}{\neg P}$$

EN

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

IMPLICACIÓN — Aceptar

TD
(Teorema de la deducción)

$$\frac{\left[\begin{array}{l}P\\ Q\end{array}\right.}{P \rightarrow Q}$$

MP
(Modus Ponendo Ponens)

$$\frac{\begin{array}{l}P \rightarrow Q\\ P\end{array}}{Q}$$

CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL — Aceptar

IU
(con restricciones)

$$\frac{P(a)}{\forall x P(x)}$$

EU

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL — Aceptar

IE

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

EE
(con restricciones)

$$\frac{\begin{array}{l}\exists x P(x)\\ \left[\begin{array}{l}P(a)\\ Q\end{array}\right.\end{array}}{Q}$$

Otras reglas no básicas (ver hoja reglas)

Ejemplo

MT (Modus tollens) $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$

Estrategias para hacer deducciones

IMPORTANTE *: Decide la estrategia al comenzar la deducción.*

Cada sub-deducción lleva su propia estrategia

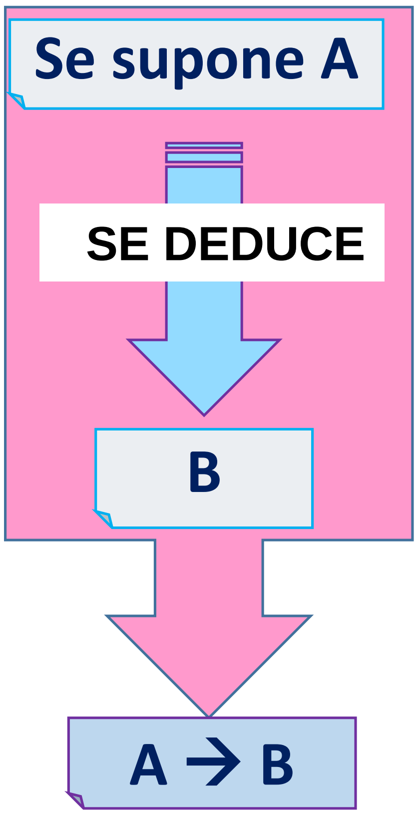
>> **Prueba directa** : se quiere introducir un condicional:
basada en la regla **TD: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \rightarrow B$**

>> **Prueba por casos:** para fórmulas disyuntivas
basada en la regla **ED: $A \vee B, (A \Rightarrow C), (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$**

>> **Reducción al absurdo:** se supone la negación de la fbf que se quiere obtener
basada en regla **IN: $(A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$**

PRUEBA DIRECTA >> TD: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \rightarrow B$

Objetivo: obtener **condicional** $A \rightarrow B$



- Suponer cierta la fbf antecedente del condicional. **A**
- **A** : premisa del supuesto.
- Aplicar reglas hasta obtener **B**.
- **B:** conclusión del supuesto.
- Se justifica **cierre** del supuesto con Regla: **TD**
- Se añade $A \rightarrow B$ a la deducción.

  Si $A \rightarrow B = Q$ → Fin deducción principal.

  eoc, **seguir** hasta obtener Q.

Ejercicio 1. Hoja 4. Deducción natural

$$\neg bo \to de, \quad bo \to \neg cl \quad \Rightarrow \quad \neg de \to \neg cL$$

Estrategia: Prueba Directa.

TD

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \ldots \\ B \end{array}\right.}{A \to B}$$

Q: $\neg de \to \neg cl$

- 1	$\neg bo \to de$	
- 2	$bo \to \neg cl$	
3	$\neg de$	supuesto
4	bo	MT 1,3
5	$\neg cl$	MP 2,4, cierre supuesto
6	$\neg de \to \neg cl$	TD 3-5

Ejercicio 2. Hoja 4. Deducción natural

$$P \to Q,\ P \to (Q \to R) \Rightarrow P \to R$$

Estrategia: Prueba Directa.

TD

A

…

B

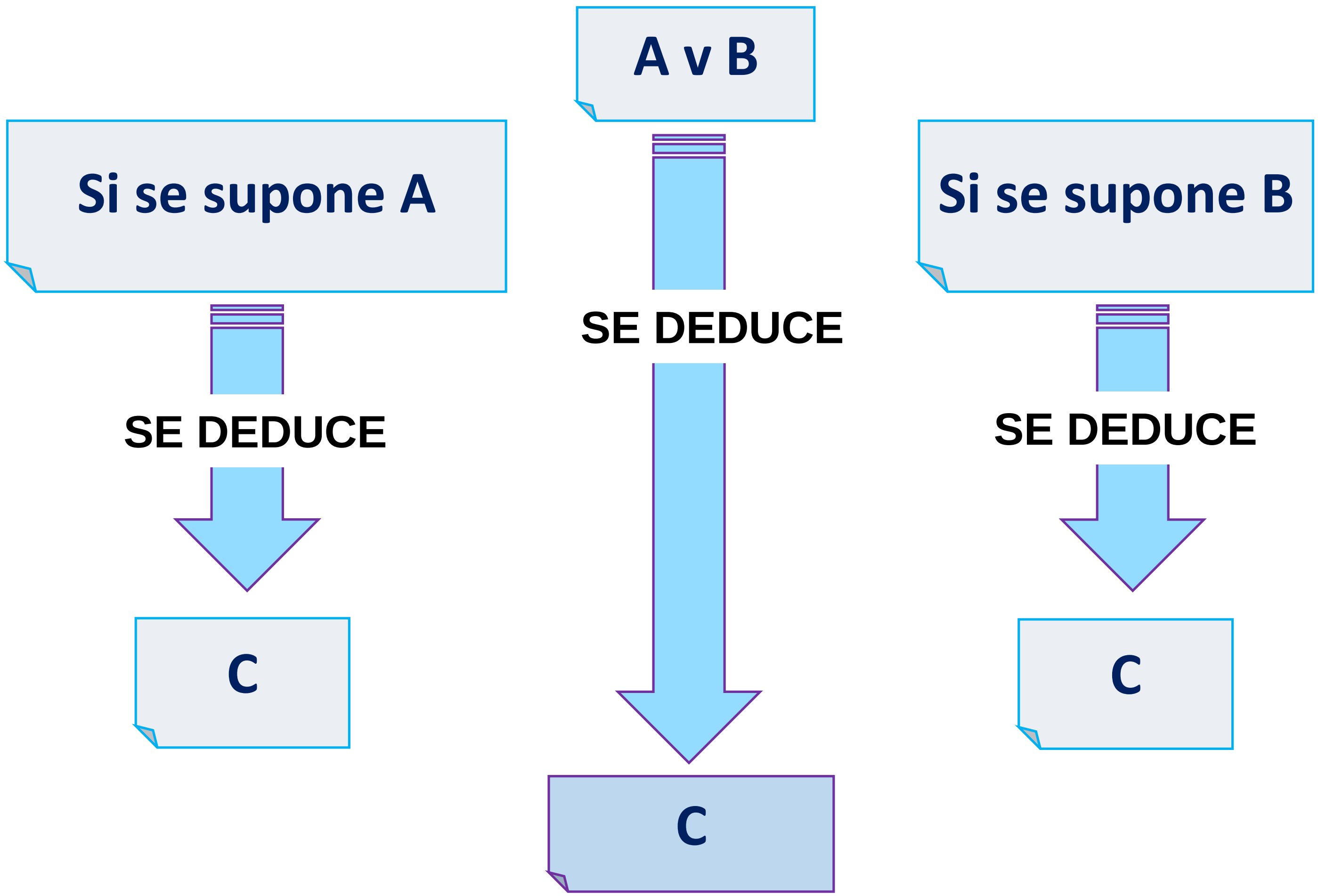
$A \to B$

Q: $P \to R$

-1	$P \to Q$	
-2	$P \to (Q \to R)$	
3	P	supuesto
4	$Q \to R$	MP 2,3
5	Q	MP 1,3
6	R	MP 4,5, cierre sup.
7	$P \to R$	TD, 3-6

Estrategias

PRUEBA POR CASOS >> ED : $A \vee B, (A \Rightarrow C), (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$



Ejercicio 3. Hoja 4. Deducción natural

vo v ve, vo → ll, ve → es ⇒ ll v es

Estrategia: Prueba por casos

ED

A ∨ B

[**A**
 . . .
 C

[**B**
 . . .
 C

C

Q: ll v es

- 1	vo v ve	
- 2	vo → ll	
- 3	ve → es	
[4	vo	supuesto
5	ll	MP 2,4
6	ll v es	ID 5, cierre sup.
[7	ve	supuesto
8	es	MP 4,7
9	es v ll	ID 8, cierre sup.
10	ll v es	ED 1, 4-6, 7-9

Ejercicio 4. Hoja 4. Deducción natural

Estrategia: **Prueba por casos**

P1: El gato y el perro han entrado en casa.

P2: Al menos uno de los dos ha pisado el charco.

P3: Si el gato lo ha pisado, habrá dejado pisadas

P4: Si fue el perro, habrá dejado pisadas

Q: Hay pisadas

MC = { ga: gato entra casa;
pe: perro entra en casa;
gac: gato pisa charco;
pec: perro pisa charco;
pi: hay pisadas}

ED

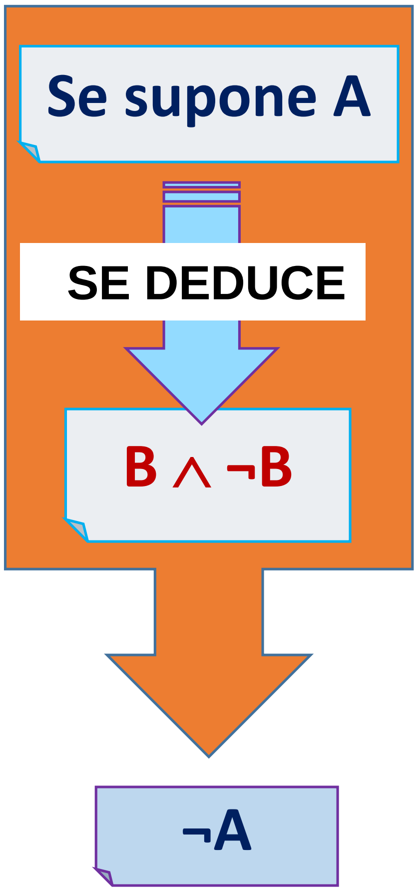
$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \quad \left[\begin{array}{l} A \\ \dots \\ C \end{array}\right. \\ \quad B \\ \quad \left[\begin{array}{l} \dots \\ C \end{array}\right. \\ \hline \quad C \end{array}$$

Q: pi

- 1 ga $\wedge$ pe,
- 2 gac v pec,
- 3 gac $\rightarrow$ pi,
- 4 pec $\rightarrow$ pi

5.	gac	Supuesto1
6.	pi	MP 3,5, cierre sup1
7.	pec	Supuesto2
8.	pi	MP 4,7, cierre sup2.
9.	pi	ED, 2, 5-6, 7-8

REDUCCIÓN ABSURDO: IN: $(A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$



Objetivo: Obtener **contradicción**

- Se supone cierta la **negación** de la fbf objetivo.
- Se obtiene **contradicción** en la sub-deducción.
- Se **cierra** el supuesto con la fbf que es contradicción
- Se justifica el cierre del supuesto con la regla

(IN) $(A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$

Ejercicio 5. Hoja 4. Deducción natural

Estrategia: Reducción al absurdo

IN

A

…

$B \wedge \neg B$

$\neg A$

Q: F

-1	$T \rightarrow C$	
-2	$\neg T \rightarrow D$	
-3	$\neg C \wedge \neg D$	
4	$\neg F$	supuesto
5	$\neg C$	EC,3
6	$\neg T$	MT,1,4
7	$\neg D$	EC,3
8	$\neg\neg T$	MT 2,7
9	T	EN,8
10	$T \wedge \neg T$	IC 6,9, cierre supuesto
11	F	IN,4-10

Puedes hacer la deducción aplicando directamente

las reglas de inferencia

a las premisas

sin usar las estrategias anteriores…

Ejercicio 6. Hoja 4. Deducción natural

Estrategia: Aplicar reglas a las premisas

MC = { hu: tiro huevo;
rev: huevo revienta;
ma: huevo mancha pared;
du: dueño se enfada;
de: dueño denuncia }

P1: Si tiro un huevo contra la pared, revienta

P2: Al reventar el huevo, se mancha la pared

P3: Si la pared se mancha, el dueño se enfada

P4: Si el dueño se enfada conmigo, me denuncia

P5: Tiro un huevo a la pared

Q: ***Me denuncia el dueño***

- 1 $hu \rightarrow rev$
- 2 $rev \rightarrow ma$
- 3 $ma \rightarrow du$
- 4 $du \rightarrow de$
- 5 hu

6	rev	MP 1,5
7	ma	MP 2,6
8	du	MP 3,7
9	de	MP 4,8

Q: de

Ejercicio 6. Hoja 4. Deducción natural

Estrategia: Reducción al absurdo

IN

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A \\ \dots \\ B \wedge \neg B \end{array} \right. \\ \hline \neg A \end{array}$$

- 1 hu → rev
- 2 rev → ma
- 3 ma → du
- 4 du → de
- 5 hu

Q: de

6 ¬de	supuesto
7 ¬du	MT 4,6
8 ¬ma	MT 3,7
9 ¬rev	MT 2,8
10 ¬hu	MT 1,9
11 hu ∧ ¬hu	IC, 5, 10 cierre sup.
12 de	IN 6-11

Ejercicio 7. Hoja 4. Deducción natural

Estrategia: Reducción al absurdo

P1: Sólo si llego pronto no se me enfría el café.

P2: No llego pronto a menos que el tráfico vaya bien, suene el despertador y no me quede dormido.

P3: Pero o no suena el despertador o estoy sordo.

P4: Oigo bien (no estoy sordo).

Q: Por lo tanto, se me enfría el café.

MC = { ca: enfría café;
p: llego pronto; t: tráfico bien;
sd: suena despertador;
d: me quedo dormido;
s: estoy sordo }

IN

$$\begin{array}{|l} A \\ \ldots \\ B \wedge \neg B \end{array}$$
$$\overline{\quad\neg A\quad}$$

Q: ca

- 1	$\neg ca \rightarrow p$	
- 2	$p \rightarrow t \wedge sd \wedge \neg d$	
- 3	$\neg sd \vee s$	
- 4	$\neg s$	
5	$\neg ca$	supuesto
6	p	MP,1,5
7	$t \wedge sd \wedge \neg d$	MP,2,6
8	sd	EC, 7
9	s	SD,3,8
10	$s \wedge \neg s$	IC,4,9, cierra sup
11	$\neg\neg ca$	IN,5-10
12	ca	EN 11

Reto 1: Coge una verdad lógica e intenta demostrarla.

Ejemplo: $P \wedge P \Rightarrow P \vee P$.

Reto 2: Para practicar la reducción al absurdo coge una mentira, niégala, e intenta demostrar esa fórmula.

Ejemplo: $\neg(A \wedge (A \to B) \wedge \neg B)$.

Reto 1: Coge una verdad lógica e intenta demostrarla.

Ejemplo: $P \wedge P \Rightarrow P \vee P$.

-1	$P \wedge P$	
2	P	
3	$P \vee P$	ID, 2

Reto 2: Para practicar la reducción al absurdo coge una mentira, niégala, e intenta demostrarla.

Ejemplo: $\neg(P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q)$.

IN

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \ldots \\ B \wedge \neg B \end{array}\right.}{\neg A}$$

1 $P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	
2 P	**EC 1**
3 $P \rightarrow Q$	**EC 1**
4 $\neg Q$	**EC 1**
5 Q	**MP 2,3**
6 $Q \wedge \neg Q$	**IC 4,5**
7 $\neg(P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge \neg Q)$	**IN 1-6**