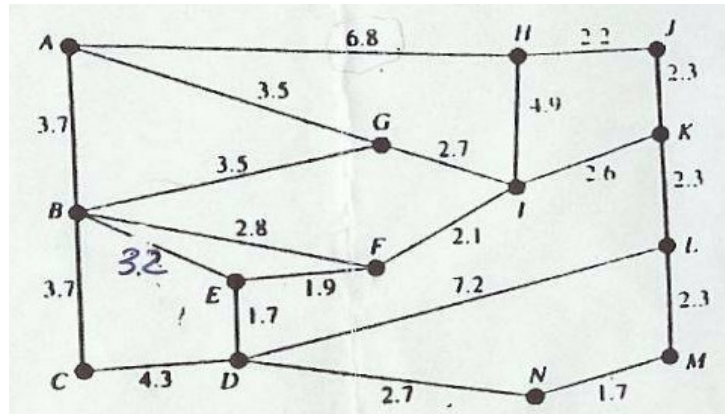


1 A.- Da la definición de árbol generador e ilústralo con un ejemplo. Modifica el algoritmo de Kruskal para obtener un árbol generador de máximo peso (es decir un árbol generador en el que la suma de los pesos asociados a sus aristas sea máxima). (1 punto)

B.- El siguiente grafo representa los flujos de agua posibles a través de un sistema de tuberías que unen distintas parcelas de una urbanización. Determina que tuberías deben instalarse de manera que se maximice el flujo, para que todas las viviendas dispongan de agua y se minimice el coste de construcción, suponiendo que el coste de instalación de cada tubería permanece constante. (1 punto)

C.-Razona si la instalación obtenida en el Apartado anterior es única. Explica teóricamente dos casos en los que creas que la obtención de un árbol generador de máximo peso en un grafo no dirigido conexo es único. (0.75 puntos)



2 Carolina quiere salir. La llaman sus amigas a las 17:00 para saber a que hora pasar a recogerla. Carolina contesta: Necesito construir un Pert con las tareas siguientes:

- Tardare 15 minutos en tomar mi ducha, mientras tanto mi madre planchará mi vaquero, tardara unos 10 minutos.
- Mi pelo es muy largo y tardará 25 minutos en secarse.
- Poner mi crema favorita después de ducharme, para lo que tardare 5 minutos, pero tardara 15 en secarse.
- Mi maquillaje será un tanto complejo, y tardaré 20 minutos en ponérmelo, mientras se seque mi crema.
- Ponerme los vaqueros son 2 minutos, pero solo una vez secada mi crema, después de acabar mi maquillaje, y claro después que mi madre haya acabado.
- Después, y una vez secado mi pelo, me pondré la camisa en 2 minutos y podré salir.

Ayuda a Carolina a determinar la hora para que no haga esperar a sus amigas, ni que ella espere. Dinos también en que actividades no se podrá atrasar sin llegar tarde. (1.5 puntos)

La vecina llama a la madre de Carolina porque se ha perdido el último episodio de su culebrón preferido. Explica de cuánto tiempo disponía su madre para contárselo todo sin atrasar el plan de su hija. (1 punto)

3.- Una empresa tiene un presupuesto de 917.000 pts para comprar monedas de dos tipos a los precios siguientes: 29.900 y 17.000 pts. Determinar cuantos se comprarán de cada modelo si del primero de ellos se precisan al menos 10. (2.5 puntos) ,

4.-Se desea calcular el número de soluciones enteras que tiene un determinada ecuación lineal que relaciona tres variables c_1 , c_2 y c_3 , con ciertas restricciones se sabe que el problema se reduce a calcular el coeficiente de x^{12} en la función generadora:

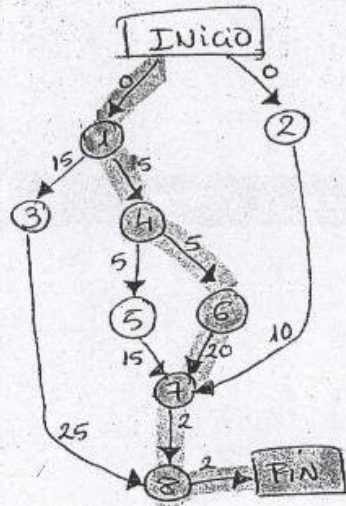
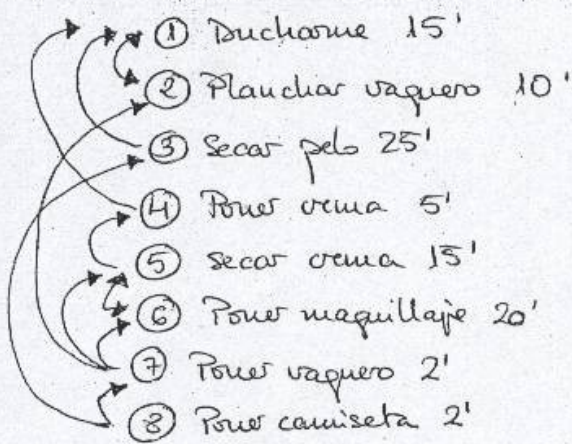
$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} x^{4r} \right) (x^4 + x^5 + x^6) \left(\frac{1 - x^{18}}{1 - x^3} \right)$$

Obtén la ecuación lineal de partida, sus restricciones y el coeficiente. (2.25 puntos)

Nota:. No olvidéis detallar y justificar correctamente cada pregunta utilizando conceptos vistos en la asignatura. Una respuesta no justificada se considerará incorrecta.

Examen Junio '97

2.) Actividades del PERT :



1.) Dibujar grafo :

2.) Renumerar, pero en este caso no hace falta pq todas las actividades están bien colocadas.

3.) Hallar los pesos de los C.C. con las ecuaciones de Bellman modificadas.

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$u_3 = \max \{ u_1 + w_{13} \} = \max \{ 0 + 15 \} = 15$$

$$u_4 = \max \{ u_1 + w_{14} \} = \max \{ 0 + 5 \} = 5$$

$$u_5 = \max \{ u_4 + w_{45} \} = \max \{ 5 + 15 \} = 20$$

$$u_6 = \max \{ u_4 + w_{46} \} = \max \{ 5 + 20 \} = 25$$

$$u_7 = \max \{ u_5 + w_{57}, u_6 + w_{67}, u_2 + w_{27} \} = \max \{ 20 + 15, 25 + 20, 0 + 10 \} = 40$$

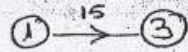
$$u_8 = \max \{ u_3 + w_{38}, u_7 + w_{78} \} = \max \{ 15 + 25, 40 + 2 \} = 42$$

$$u_{fin} = \max \{ u_8 + w_{8,fin} \} = \max \{ 42 + 2 \} = 44 //$$

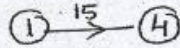
4.) Dibujar los C.C :

$$u_1 = 0 ; u_2 = 0$$

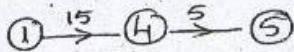
$$u_3 = w_{13} = 15'$$



$$u_4 = w_{15} = 15'$$



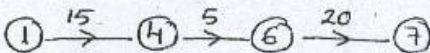
$$u_5 = w_{45} = 20'$$



$$u_6 = w_{46} = 20'$$



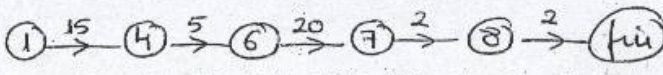
$$u_7 = w_{67} = 40'$$



$$u_8 = w_{78} = 42'$$



$$C.C \Rightarrow u_{fin} = w_{8,fin} = 44'$$

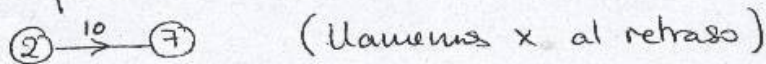


* Significado del CAMINO CRÍTICO es el mínimo número de ~~días~~ minutos para completar el proyecto [$u_{fin} = 44 \text{ min}$], sus actividades se llaman críticas y no se pueden atrasar sin atrasar el proyecto global.

5.) Dibujar el C.C en el grafo :

6.) Posible retraso de la actividad (2) (la de la madre) :

② se puede conectar al C.C de una manera :



$$u_2 + x + w_{27} \leq u_7$$

$$0 + x + 10 \leq 40$$

$$x \leq 40 - 10$$

$$\boxed{x \leq 30 \text{ min}}$$

La madre de Carolina podrá disponer como máximo de media hora por contárselo a su hija.

|| No sé si está bien !!

Ex. Junio '97

3º) Una empresa tiene un presupuesto de 917.000 pts para comprar modems de dos tipos a los precios siguientes: 29.000 pts y 17.000 pts. Determinar cuántos se comprarán de cada modelo si del primero de ellos se precisan al menos 10. (2,5 pts).

— Ec. Diofántica —

$$\left. \begin{array}{l} 29.000x + 17.000y = 917.000 \\ ax + by = dn \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 29x + 17y = 917 \\ ax + by = dn \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ec.} \\ \text{Diof.} \end{array}$$

1º) $\text{mcd}(29, 17)$:

$$29 = 17 \cdot 1 + 12$$

$$17 = 12 \cdot 1 + 5$$

$$12 = 5 \cdot 2 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{mcd}(29, 17) = 1}} \quad (\text{el último resto no nulo})$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0,$$

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 17} \quad 17 \overline{) 12} \quad 12 \overline{) 5} \quad 5 \overline{) 2} \\ \underline{12} \quad 1 \quad \underline{5} \quad 1 \quad \underline{2} \quad 2 \quad \underline{1} \quad 2 \end{array}$$

2º) Identidad de Bezout:

$$29s + 17t = 917 \rightarrow \text{Ec. Bezout}$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 ; \quad 1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$12 = 5 \cdot 2 + 2 ; \quad 2 = 12 - 5 \cdot 2$$

$$17 = 12 \cdot 1 + 5 ; \quad 5 = 17 - 12 \cdot 1$$

$$29 = 17 \cdot 1 + 12 ; \quad 12 = 29 - 17 \cdot 1$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$1 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2$$

$$1 = 5 - 12 \cdot 2 + 5 \cdot 4$$

$$1 = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2$$

$$1 = (17 - 12 \cdot 1) \cdot 5 - 12 \cdot 2$$

$$1 = 17 \cdot 5 - 12 \cdot 5 - 12 \cdot 2$$

$$1 = 17 \cdot 5 - 12(5 + 2) \quad \rightarrow \text{ó: } +12(-5-2)$$

$$1 = 17 \cdot 5 - 12 \cdot 7$$

$$1 = 17 \cdot 5 - (29 - 17 \cdot 1) \cdot 7$$

$$1 = 17 \cdot 5 - 29 \cdot 7 + 17 \cdot 7$$

$$\text{Bezout } (s, t) = (-7, 12) \quad 1 = 29 \cdot (-7) + 17(5+7)$$

3.) Determinar α y β :

$$\left. \begin{array}{l} a = \alpha \cdot d \\ b = \beta \cdot d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 29 = \alpha \cdot 1 \\ 17 = \beta \cdot 1 \end{array} \right\} \underline{\underline{\alpha = 29}} \quad \underline{\underline{\beta = 17}}$$

4.) Solución particular de la ecuación original:

$$\left. \begin{array}{l} d = 1 \\ du = 917 \end{array} \right\} 1 \cdot n = 917 \rightarrow \underline{n = 917}$$

$$(x_0, y_0) = (n \cdot s, n \cdot t) = (917 \cdot (-7), 917 \cdot 12) \\ \underline{\underline{(-6419, 11004)}}$$

5.) Solución general de la ecuación original $29x + 17y = 917$:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + K \cdot \beta \\ y = y_0 - K \cdot \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = -6419 + K \cdot 17 \\ y = 11004 - K \cdot 29 \end{array} \right\} \forall K \in \mathbb{Z}$$

Esta es la comprobación si no hubiera restricciones:

6.) Comprobación, con un K particular $\neq 0$:

p.ej. $K = 2$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -6419 + 2 \cdot 17 \\ y = 11004 - 2 \cdot 29 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = -6385 \\ y = 10946 \end{array} \right\} //$$

Ahora sustituyo en la ecuación original:

$$29 \cdot (-6385) + 17 \cdot 10946 = 917$$

$$-185165 + 186082 = 917$$

pero si que hay

restricciones

$$917 = 917$$

OK

Comprobación final:

$$29 \cdot 24 + 17 \cdot 13 = 917$$

$$696 + 221 = 917$$

$$917 = 917 \quad OK //$$

5.b

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Condición}$$

$$-6419 + 17K \geq 10 \rightarrow K \geq \frac{6419 + 10}{17} = 378,176$$

$$11004 - 29K \geq 0 \rightarrow K \leq \frac{11004}{29} = 379,448$$

$$\begin{array}{ccc} 378,18 & & 379,45 \\ | & & | \\ 379 & & \end{array}$$

luego $K = 379$

$$\left. \begin{array}{l} x = -6419 + 379 \cdot 17 \\ y = 11004 - 379 \cdot 29 \end{array} \right\}$$

$x = 24$ de 29.000 pts