Clase 5

TEMA 3- SUBESPACIOS VECTORIALES

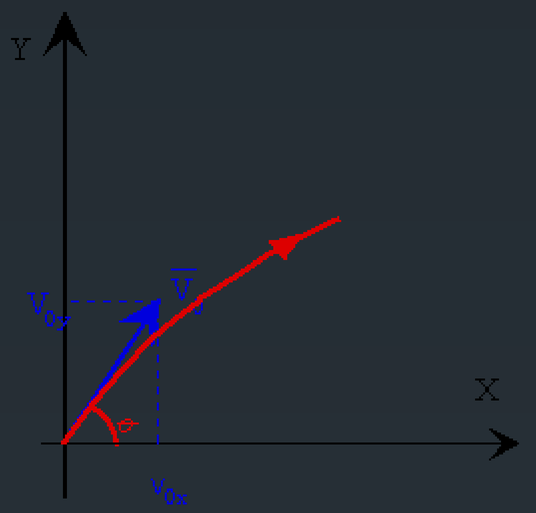
BASES Y DIMENSIÓN

- **Espacio vectorial R^n y Subespacios**
- **Combinación lineal de vectores.**
- **Independencia lineal.**
- **Subespacios de una matriz : Fila, Col, Nul.**

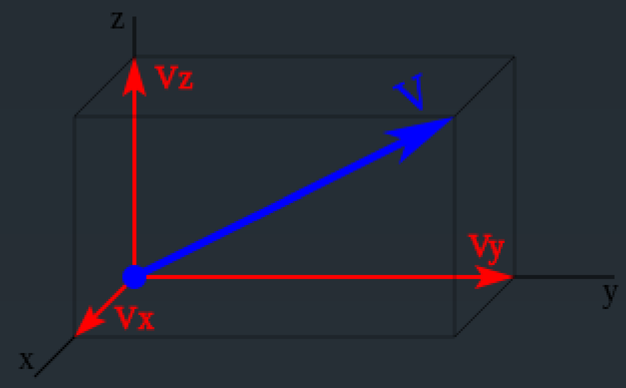
- **Estudiamos los importantes conjuntos de vectores en R^n : subespacios.**
- **Subespacios de la matriz A que informan sobre Ax = b**

Conocemos un vector **v** por su

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA



vector de R^2



vector de R^3

vector → sentido más general como elemento de un conjunto con operaciones determinadas

Conjunto → **espacio vectorial**
Sin representación geométrica

Son vectores /**elementos del conjunto**→
- los vectores
- los polinomios,
- las matrices…

ESPACIO VECTORIAL V

Conjunto de **elementos de V,** que con las operaciones **suma y producto por escalar** obtienen **otro** elemento del conjunto.

Ej: La suma de 2 vectores es un vector y no un punto

Si V = M(mxn) las operaciones EV aplicadas a M obtienen otra M

Consideramos EV sobre el cuerpo **R**
Los elementos de un EV se llaman vectores

→ **Suma** (op. Interna)

u + v

Conmutativa,

Asociativa,

Distributiva,

E. Neutro y opuesto

→ **Producto escalar** (op. Externa)

α v

Asociativa,

Distributiva,

E. Unidad

ESPACIO VECTORIAL V

Un hecho importante de los EV es que sus elementos se pueden sumar y multiplicar por escalares y se pueden formar **combinaciones lineales** de vectores obteniendo nuevos elementos del EV

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \ldots \alpha_p \mathbf{u}_p$$

Con esto tenemos que dentro de un EV puede haber conjuntos que a su vez sean EV

SUBESPACIOS VECTORIALES

Subconjuntos cerrados bajo las operaciones del EV

SubESPACIO VECTORIAL

Un **Sub-espacio Vectorial** de R^n es todo subconjunto no vacío $S \subseteq R^n$:

a) El vector nulo está en S, $\mathbf{0} \in \mathbf{S}$

b) Si un vector está en S, tb lo están sus múltiplos.

$$\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{S},\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S},\ \alpha \in \mathbf{R}$$

c) Si dos vectores están en S.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S},\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$$

S es subespacio vectorial sii toda combinación lineal de elementos de S es a su vez un elemento de S.

Ejemplo

El plano XY formado por vectores (x,y,0) es subespacio de R^3 ya que

a) Contiene al vector (0,0,0), x = 0, y = 0

b) Es cerrado para la suma y producto por escalar:

- Suma: (x,y,0) + (x',y',0) = (x+x', y+y', 0) que es un elemento del plano.
- Producto por un escalar: λ, λ(x,y,0)=(λx, λy, 0) que es un elemento del plano.

¿Cómo generar subespacios vectoriales del espacio vectorial $\boldsymbol{R^n}$ *?*

Conceptos necesarios:

>> ***Combinación Lineal de vectores***

>> ***Independencia entre vectores***

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES N-DIMENSIONALES

Un vector **v** $\in$ **R**^{n} es **combinación lineal** (CL) de los vectores $\mathbf{u_1, u_2,\ldots u_p}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_p$ tales que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \ldots \alpha_p \mathbf{u_p}$$

Ejemplo

a) (1,2) $\in R^2$ CL de (1,0) y (0,1) ya que (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)

b) (2,1,1) $\in R^3$ **no** es CL de los vectores (1,0,0) y (1,1,0) ya que:

$$(2,1,1) \neq a(1,0,0) + b(1,1,0)$$

Falla ecuación: **1 = 0.a + 0.b**

→ *Relacionamos CL entre vectores con buscar la solución de un SL.*

Para **demostrar** que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es **CL** de **p** vectores

$\mathbf{u_1,\ldots u_p}$ / $u_i \in R^n$

se **construye** un **SL** a partir de la ecuación paramétrica que plantea a "**v**" como **CL** de los vectores $\mathbf{u_i}$:

$$\mathbf{v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p}$$

$v = (v_1, \ldots v_n)$

$u_1 = (u_{11}, u_{21} \ldots u_{n1})$

$u_2 = (u_{12}, u_{22} \ldots u_{n2})$,

…

$u_p = (u_{1p}, u_{2p} \ldots u_{np})$,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \ldots + \alpha_p u_{1p} \\
v_2 &= \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \ldots + \alpha_p u_{2p} \\
&\ldots \\
v_n &= \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \ldots + \alpha_p u_{np}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{12} + \ldots + \alpha_p u_{1p} \\ v_2 &= \alpha_1 u_{21} + \alpha_2 u_{22} + \ldots + \alpha_p u_{2p} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \alpha_1 u_{n1} + \alpha_2 u_{n2} + \ldots + \alpha_p u_{np} \end{aligned}$$

Se resuelve

Au = v

Si el sistema es **SCD** → v es **CL** de los vectores u_i de forma **ÚNICA**

Si el sistema es **SCI** → v es **CL** de los vectores u_i de **infinitas formas**

Si el sistema es **INCOMPATIBLE** → **v** **NO** **es CL** de los vectores u_i

Ej-1 (Hoja 5)

Para demostrar si el vector **u = (4,5,4)** es **CL** de **(1,1,1), (1,-2,0), (3,-2,1)**

Se construye un SL a partir de la siguiente ecuación paramétrica:

$$(4,5,4) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,-2,0) + \alpha_3(3,-2,1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 4 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 4 \end{aligned}} \Longrightarrow [A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}\,[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

SCD → u es CL de los vectores

(4,5,4) = **3**(1,1,1) -**2**(1,-2,0) +**1**(3,-2,1)

En la última columna tenemos los valores $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=1$

Ej-2 (Hoja 5)

Se demuestra si **u = (25, 22, 8)** es **CL** de **v_1 = (3,4,2) y de v_2 = (5,3,2)**

Sol:

$$(25,22,8) = \alpha_1(3,4,2) + \alpha_2(5,3,2)$$

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 25 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 22 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 25 \\ 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SL **Incompatible** → no hay forma de combinar v_1 y v_2 para obtener u

El vector **u** **NO** es CL de los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$

Teorema 4.1:

Ax = b es **compatible**

si y sólo si,

b es **combinación lineal** de las **columnas de A**

$$[A|u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

SCD → la columna b es CL de las otras

(4,5,4) = **3**(1,1,1) -**2**(1,-2,0) +**1**(3,-2,1)

Sub-espacio generado por un conjunto de vectores

Dado un conjunto de vectores $\mathbf{u_1,\ldots,u_p} \in R^n$, el conjunto de **todos** los vectores que pueden escribirse como **CL** de ellos recibe el nombre de **Envoltura lineal** de dichos vectores.

Se escribe : $\mathbf{Env\{u_1,\ldots,u_p\}}$

Los vectores $\mathbf{u_1,\ldots,u_p}$ son:

vectores generadores

o conjunto generador del espacio R^n.

La envoltura es un conjunto infinito de vectores.

Ej-4 (Hoja 5)

Calcular la envoltura o el subespacio que generan los vectores

$u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ en el espacio R^3

Sol:

Se comprueba si un vector genérico: (a, b, c) es CL de u_1, u_2 →

$$(a, b, c) = c_1\,(1,0,0) + c_2\,(0,1,0)$$

1º Se plantea SL → vectores en columnas de una matriz

2º Se resuelve SL.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

SL es SCD si $c = 0$

$y = b$

$x = a$

u_1 y u_2 generan el subespacio:

$$\text{Env}\,\{\,(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,\} = \{\,(a, b, 0) : a, b \in R\}$$

➔ Todo espacio vectorial **V** posee un nº finito de vectores que describen por completo a dicho espacio.

PROCEDIMIENTO

para determinar si los vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_k}$ <u>**generan**</u> el Espacio vectorial **V** :

Paso1: **Seleccionar** un vector arbitrario de $v \in V$, $v = (a, b, c\ldots)$

Paso2: Determinar si **v es CL** de los vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_k}$.

Si es CL → $\mathbf{u_1, \ldots ,u_k}$ **generan a V;**

Si no es CL → $\mathbf{u_1, \ldots ,u_k}$ **no generan** a V

Ojo: paso 2: determinar si el SL generado es compatible.

Ej-6-bis1 (Hoja 5)

Sea V el espacio vectorial R^3 y sean $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (1,1,0)$

Comprueba si v_1, v_2, v_3 generan a V

Sol:

Paso 1. Sea $v = (a, b, c) \in R^3$, $a, b, c \in R$

Paso 2. Se comprueba si v es CL de $v_1, v_2, v_3 \Leftrightarrow$

$(a, b, c) = c_1 (1,2,1) + c_2 (1,0,2) + c_3 (1,1,0)$

Se **estudia SL**:

$$\begin{cases} a = c_1 + c_2 + c_3 \\ b = 2c_1 + c_3 \\ c = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = (-2a + 2b + c)/3 \\ c_2 = (a - b + c)/3 \\ c_3 = (4a - b - 2c)/3 \end{cases}$$

Como para cada a, b, c existe una solución $\rightarrow$ v_1, v_2, v_3 generan a V

En algunos casos una **CL** de vectores

da como resultado el **vector nulo (0,…0)**

Ej: -(4,5,4) + 3(1,1,1) -2(1,-2,0) + (3,-2,1) = (0,0,0)

Veamos este concepto…..

Independencia lineal

Def: Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Independientes** (LI) si no existen escalares $a_1, \ldots a_p$ **no todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots a_pu_p = 0$

Def: Los vectores $\mathbf{u_1 \ldots u_p} \in R^n$ son **Linealmente Dependientes** (LD) si existen escalares $a_1, \ldots a_p$ **no todos nulos** / $a_1u_1 + \ldots a_pu_p = 0$

*>> Un conjunto de vectores es **Linealmente Independiente** si **ninguno** de ellos puede ser expresado como una **combinación lineal de los restantes.***

PROCEDIMIENTO

para establecer si los vectores $\mathbf{u_1,\ldots u_n}$ son **LI /LD**

Paso 1.- Plantear la ecuación $\mathbf{a_1u_1+\ldots a_nu_n = 0}$ que lleva a un **SH**

Paso 2.- Resolver el **SH**.

- Si SH tiene **<u>sólo</u>** solución trivial (**SCD**) → los vectores son **LI**
- Si SH tiene solución no trivial (**SCI**) → los vectores son **LD**

Independencia lineal

Se estudia si los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2=(1,0,1)$, $v_3=(0,1,1)$ son **LD o LI**

Sol: $a_1 (1, 1, 1) + a_2 (1, 0, 1) + a_3 (0, 1, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a1 = a2 = a3 = 0.$

Los escalares son todos nulos → vectores $\mathbf{v_1, v_2, v_3}$ → **LI**

Ej-7 (Hoja 5)

Estudiar si $S = \{(4, 5, 4), (1,1,1), (1,-2, 0), (3,-2, 1)\}$ es LD o LI

Sol:

$$a_1 (4, 5, 4) + a_2 (1, 1, 1) + a_3 (1,-2, 0) + a_4 (3,-2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 4a_1 + a_2 + a_3 + 3a_4 &= 0 \\ 5a_1 + a_2 - 2a_3 - 2a_4 &= 0 \\ 4a_1 + a_2 + \ a_4 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a_4 parámetro → **SCI** infinitas soluciones

Luego S es LD

$$(3,-2, 1) = (1)\,(4, 5, 4) + (-3)\,(1, 1, 1) + (2)\,(1,-2, 0)$$

Un conjunto de vectores LI en R^n contiene como máximo n vectores.

Los vectores (2,-3,4), (4,7,-6) , (18, -11, 4) y (2,-6,3) son LD

ya que forman un conjunto de 4 vectores de 3 componentes (R^3)

¿cuál de los 4 vectores es CL de los otros ?

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 18 & 2 \\ -3 & 7 & -11 & -6 \\ 4 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_4} \end{matrix} \end{array} \qquad \text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$(2,-6,3) = (-0.4)\, v_1 + (-0.5)\, v_2 + (0.2)\, v_3$$

Se debe calcular el

conjunto <u>mínimo</u> de vectores de un

espacio **V** que describe completamente a **V**

Esto nos lleva al concepto de base

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición: Una **base B** es el **menor conjunto** de vectores **LI** que generan todo el espacio **S**.

Cualquier vector **u** se escribe como **CL** de los elementos de la **base B**:

$$\mathbf{u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n},$$

a_k : escalares;
v_k $(k = 1, \ldots, n)$: elementos de la base B.

Los vectores $\mathbf{v_1,\ldots v_n}$ del espacio vectorial **S** forman una base para S si

a) $v_1,\ldots v_n$ generan S

b) $v_1,\ldots v_n$ son LI

Si S admite base finita $B = \{v_1,\ldots v_n\}$ de n-vectores ➔
dim(S) = n

$v_1 \neq v_2 \ldots \neq v_n$

No nulos v_k

Propiedades Sea **B** base de **S**, **espacio vectorial /dim(S)=n**

→ Todos los elementos de **B** pertenecen al espacio **S**.

→ Todas las bases de **S** tienen **n-vectores**.

→ Cada vector de **S** se escribe, de forma única, como **CL** de los vectores de **B**

→ Los elementos de **B** forman un sistema de vectores **LI**.

→ Las bases no son únicas. Todo conjunto de n-vectores **LI** en R^n es una base en R^n

→ Una base tiene el **mínimo** nº de vectores **LI** que generan todos los vectores del espacio **S**.

→ Todas las bases de un espacio vectorial tienen **el mismo** nº de vectores.

Ej-9 (Hoja 5)

Demuestra que B = {(1,0,0), (1,1,0), (0,2,-3)} es base de R^3

Sol:

a) **B es sistema generador de R^3,** (a,b,c) $\in R^3$ es CL de vectores de B

$$(a,b,c)= c_1\,(1,0,0)+ c_2\,(1,1,0)+ c_3\,(0,2,-3)$$

Sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad\quad &= a \\ c_2 + 2c_3 &= b \\ -3c_3 &= c \end{aligned}$$

SCD solución $c_3 = -c/3$; $c_2 = b - 2c/3$; $c_1 = a - b + 4c/3$

b) Vectores **LI** → [A|0] → SCD- solución sólo trivial (columnas que tienen 1p).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{reff}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ej-10 (Hoja 5)

Estudiar si el conjunto de vectores C de R^4 es LI /buscar base

$C = \{(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1), (2,-1,1,-1)\}$

Sol:

→Nº de vectores = 5 > 4 es nº de componentes del vector → vectores LD

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En rref(A) las columnas sin 1's son vectores dependientes

columna 5 → vector (2,-1,1,-1) es CL del resto → lo quitamos

Base de R^4 = {(2,1,1,1), (1,1,1,1), (3,1,1,2), (0,1,2,1)}

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz $A=[a_{ij}]$ mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacio Columna: Col A

Las columnas de $A = [\ a_{:1}, \ldots\ a_{:n}\ ]$ consideradas como **n-vectores** de R^m

Generan un subespacio de R^m

$$\boxed{\text{Col } A = \text{Env}\{\ a_{:1}, \ldots a_{:n}\ \}}$$

$$a_{:1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Columna 1 de A

La base ColA está formada por los vectores de A que en rref(A) tienen 1's principales

BASE Y DIMENSIÓN del subespacio Col

Ej-11 (Hoja 5)

Hallar base y dimensión del subespacio Col A / $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Sol: 4 columnas de A → 2 vectores son **LD** (espacio R^2)

(1,1), (1,0), (2,3), (-1,1)

→ base formada, como mucho, por 2 vectores LI

Averiguamos cuáles son en la reducida de A:

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Las Columnas de la reducida de A que tienen 1 principal forman la **base** del subespacio Col(A)

Base(Col A) : { (1,1), (1,0) }

Dim (Col A) = 2

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz $A=[a_{ij}]$ mxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Subespacio Fila: Fil A

Las filas de

$A = [a_{1:}\ ;\ a_{2:}\ ; \ldots a_{m:}\ ]$

consideradas como

m-vectores de R^n

Generan un subespacio de R^n

$$\boxed{\text{Fil } A = \text{Env}\{\, a_{1:},\ a_{2:}\ , \ldots a_{m:}\ \}}$$

$a_{1:} = (a_{11}\ a_{12\ldots}\ a_{1n}\ )$

Fila 1 de A

La base FilA está formada por los vectores de A que en rref(A) tienen 1's principales

Ej-11 (Ej4)

Hallar base y dimensión del subespacio Fil A /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Las dos filas de la reducida de A tienen 1's principales luego

$$\boxed{\text{Fil } A = \text{Env}\{(1,1,2,-1),\ (1,0,3,1)\}}$$

$$\boxed{\text{Dim Fil } A = 2}$$

SUBESPACIOS NOTABLES QUE PROPORCIONA la matriz A mxn

Subespacio nulo: **Nul A**

El espacio nulo de una matriz A (mxn), Nul A

es el conjunto de todas las **soluciones del SH**

$$\mathbf{Ax = 0}$$

En notación de conjuntos:

$$\text{Nul } A = \{\, x \;/\; x \in R^n,\; Ax = 0 \}$$

*El subespacio nulo se llama **núcleo** de la matriz*

Ej-12 (Hoja 5)

Hallar base y dimensión del subespacio Nul A / $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

Sol: **Nul A = soluciones de Ax=0**

$$\text{rref}[A|0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 & 9/7 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & -4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nº 1 principales = 2
<
Nº vectores → vectores LD

Solución general del SH:

$$x_1 \quad - 9/7x_3 + 9/7x_4 = 0;$$
$$x_2 - 3/7x_3 - 4/7x_4 = 0;$$
$$0 = 0$$

Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 9/7x_3 - 9/7x_4$$
$$x_2 = 3/7x_3 + 4/7x_4$$
$$x_3$$
$$x_4$$

$$(9/7x_3 - 9/7x_4,\ \ 3/7x_3 + 4/7x_4,\ \ x_3,\ \ x_4) = x_3\,(9/7,3/7,1,0) + x_4\,(-9/7, 4/7,0,1)$$

BASE Nul A : {(9/7, 3/7, 1, 0), (-9/7, 4/7, 0, 1)}

Ej-13 (Hoja 5)

Hallar base y dimensión del subespacio Nul A /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sol: **Nul A = soluciones de Ax=0**

Solución general del SH:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 + \ x_4 &= 0; \\ x_2 - \ x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 - \ x_4 \\ x_2 &= \ x_3 + 2x_4 \\ x_3 & \\ x_4 & \end{aligned}$$

$$(-3x_3 - x_4,\ x_3 + 2x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3\,(-3, 1,1,0) + x_4\,(-1, 2,0,1)$$

BASE Nul A : { (-3, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1) }

Ej-14
(Hoja 5)

Determinar si u pertenece al espacio nulo de A

$A = [1,-3,-2; -5,9,1]$ **$u = [5,3,-2]^T$**

Sol:

Para probar que u satisface **Au = 0**, sólo hay que calcular

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

u está en Nul A.

Teorema

Sea **Ax = 0**, las **columnas de A** forman un conjunto **LD**

si y sólo si,

el **SH es indeterminado**

Sea A matriz cuyas columnas son los vectores $u_1 \ldots u_n$

- Las **columnas de A son LI** sii, todas ellas son columnas con 1's principales.

- Las **columnas de A son LD** sii, alguna columna no tiene 1's principales

Las columnas con 1's principales son LI

Conclusiones:

El <u>espacio nulo</u> de una matriz A mxn es un subespacio de R^n.

También, el conjunto de todas las <u>soluciones</u> de un sistema $Ax = 0$

de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas

es un subespacio de Rn.

Ej-5 (Hoja 5)

Calcula la envoltura que generan los vectores (1,0,1) y (0,1,1)

Sol:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c - a - b \end{bmatrix}$$

Si $c - a - b = 0 \rightarrow$ **SCD**

Env { (1,0,1), (0,1,1) } = { (a, b, c) $\in$ R^3 / c – a – b = 0 }