SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CONTROL DEL TEMA 3

Ejercicio A. Las medidas de dos características de cierta población de coleópteros tiene la función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}\cdot(2x+3y), & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Hállese:

a) $P(X>0'7)$

b) $P(X>0'7)$ sabiendo que $Y = 0'4$.

Solución:

Hay que calcular las marginales de x y de y, ya que son necesarias para resolver los tres aparatados.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{2}{5}\cdot(2x+3y)dy=\frac{2}{5}\left[2xy+3\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{2}{5}\left(2x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{5}\cdot(4x+3);\ x\in[0,1]$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\frac{2}{5}\cdot(2x+3y)dx=\frac{2}{5}\left[x^2+3yx\right]_0^1=\frac{2}{5}(1+3y);\ y\in[0,1]$$

a) $P(X>0'7)=\int_{0'7}^1 f_1(x)dx=\int_{0'7}^1\frac{1}{5}\cdot(4x+3)dx=\frac{1}{5}\cdot\int_{0'7}^1(4x+3)dx=\frac{1}{5}\left[2x^2+3x\right]_{0'7}^1=$

$$=\frac{1}{5}\left[(2+3)-(0'98+2'1)\right]=\frac{1}{5}\cdot(5-3'08)=\frac{1'92}{5}=0'384$$

b) Se pide:

$$P((X>0'7)/(Y=0'4))=\int_{0'7}^1 g_1(x/Y=0'4)dx=\int_{0'7}^1\frac{f(x,0'4)}{f_2(0'4)}dx=\int_{0'7}^1\frac{\frac{2}{5}\cdot(2x+3\cdot0'4)}{\frac{2}{5}\cdot(1+3\cdot0'4)}dx=$$

$$=\int_{0'7}^1\frac{2x+1'2}{1+1'2}dx=\frac{1}{2'2}\cdot\int_{0'7}^1(2x+1'2)dx=\frac{1}{2'2}\cdot\left[x^2+1'2x\right]_{0'7}^1=\frac{1}{2'2}\cdot\left[(1+1'2)-(0'49+0'84)\right]=$$

$$=\frac{1}{2'2}\cdot(2'2-1'33)=\frac{1}{2'2}\cdot0'87=0'3955$$

Ejercicio B. Dada la variable bidimensional continua (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in [1,2] \times [2,5] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcular las funciones de densidad marginales
¿Son independientes las variables X e Y?
Calcular la función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Solución:

Primero se calcula el valor de k

$$1 = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = k\int_1^2 \left[\int_2^5 dy\right] dx = k\int_1^2 [y]_2^5\, dx = 3k[x]_1^2 = 3k$$

Con lo que k=1/3

a) Funciones de densidad marginales

$f_1(x) = \int_2^5 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}[y]_2^5 = 1$ Entonces $f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 0 & resto \end{cases}$

$f_2(y) = \int_1^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}[x]_1^2 = \frac{1}{3}$ Entonces $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y \in [2,5] \\ 0 & resto \end{cases}$

b) Para ver si son independientes hay que comprobar si $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

Para valores de (x,y) fuera de [1,2]x[2,5], las funciones valen todas 0, luego se cumple la igualdad. Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]:

$f(x,y) = 1/3$

$f_1(x) = 1$ y $f_2(y) = 1/3$. Entonces $f_1(x)f_2(y) = 1 \times 1/3 = 1/3$

Luego también se cumple que $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ y por tanto X e Y son independientes.

c) Función de densidad condicional $g_1(x/y)$

Para valores de (x,y) en [1,2]x[2,5]

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Ejercicio C. Dada la función de cuantía (función de probabilidad) conjunta de la variable (X, Y):

Y					
	4	0'12	0'08	0'07	0'07
	3	0'06	0'09	0'15	0'03
	2	0'08	0'08	0'08	0'09
		0	***1***	***2***	***3***
					X

Hállese:

a) $g_1(x/y=3)$
b) $g_2(y/x=0)$
c) $P(x \leq 2/y=3)$

Solución:

a) Por definición: $g_1(x/y=3)=\dfrac{f(x,3)}{f_2(3)}$; luego hay que calcular la marginal de *y*.

y	2	3	4
$f_2(y)$	0'33	0'33	0'34

Por tanto:

$x \,/\, Y = 3$	0	1	2	3
$g_1(x/y=3)=\dfrac{f(x,3)}{f_2(3)}$	6/33	9/33	15/33	3/33

b) Por definición: $g_2(y/x=0)=\dfrac{f(0,y)}{f_1(0)}$; luego hay que calcular la marginal de x.

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	0'26	0'25	0'30	0'19

Por tanto:

$y \,/\, X = 0$	2	3	4
$g_2(y/x=0)=\dfrac{f(0,y)}{f_1(0)}$	8/26	6/26	12/26

c) $P(x \leq 2/y=3)=\sum_{x\leq 2} g_1(x/Y=3)=\dfrac{6}{33}+\dfrac{9}{33}+\dfrac{15}{33}=\dfrac{30}{33}$

Ejercicio D. Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 1 rojas. Se extraen al azar dos bolas de la bolsa. Se consideran las variables:
B = {nº de bolas blancas}, N = {nº de bolas negras}, R = {nº de bolas rojas}
Calcular la función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) y la función de probabilidad condicional $g_1(n/R=1)$

Solución:

a) La función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de la variable bidimensional (N, R) es:

R				
1	$3/15$	$2/15$	0	
0	$3/15$	$6/15$	$1/15$	
	0	1	2	N

(Todas las probabilidades se calculan como nº de casos favorables/nº de casos posibles. No importa el orden ni se pueden repetir los elementos, con lo que se cuenta todo a partir de combinaciones. Los casos posibles son siempre $C_{6,2}=15$. Los casos favorables por ejemplo para N=1 y R=1 serían $C_{2,1} \times C_{1,1} = 2 \times 1 = 2$)

b) Para calcular la función de probabilidad condicional $g_1(n/R=1)$ calculamos primero la función de probabilidad marginal de R:

R	0	1
$f_2(R)$	10/15	5/15

Calculamos ahora la función de probabilidad condicional:

$$g_1(n/R=1) = \frac{f(n, R=1)}{f_2(R=1)}$$

para cada valor de la variable N y ponemos las probabilidades en la tabla:

$N \mid R=1$	0	1
g_1	$3/5$	$2/5$