Paso 2 del cálculo lógico:

SEMÁNTICA

Determinar si una estructura lógica

es **válida**

INTERPRETANDO

sus componentes (fórmulas lógicas fbfs).

Lógica de Primer Orden

Elementos semánticos

Lenguaje $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{S}$ *Conjunto de significados*

Fbf $\rightarrow$ { V, F } *Valores de verdad*

V : Verdadero
F : Falso

Principios semánticos

A : fbf cualquiera

No contradicción

$\neg(A \wedge \neg A)$ es verdadera

Lo que implica una contradicción es **falso**

→ *Útil: Demostraciones por reducción absurdo*

Tercero excluido

$A \vee \neg A$ es cierto

Interpretación: concepto semántico

Una **interpretación** I de una fbf es una asignación de significados a sus fórmulas componentes básicas con los que se da un valor semántico a la fbf

Ej. fbf: A v B

$\mathrm{I}_1 = \{ A \equiv V, B \equiv F \}$

Con I_1 la fbf se interpreta como V

Interpretaciones de una fbf

Una fbf tiene del orden de 2^n interpretaciones

n: número de variables proposicionales

Ej. fbf: A v B

Nº interpretaciones: 4

$I_1 = \{ A \equiv V, B \equiv V \}$

$I_2 = \{ A \equiv V, B \equiv F \}$

$I_3 = \{ A \equiv F, B \equiv V \}$

$I_4 = \{ A \equiv F, B \equiv F \}$

Tipos de interpretaciones

Modelo: interpretación que hace verdadera la fbf

Contramodelo/ contraejemplo: interpretación que hace falsa la fbf

Ej. fbf: A v B

Nº interpretaciones: 4

I_1 = { A ≡ V, B ≡ V } → fbf es V → I_1 modelo

I_2 = { A ≡ V, B ≡ F } → fbf es V → I_2 modelo

I_3 = { A ≡ F, B ≡ V } → fbf es V → I_3 modelo

I_4 = { A ≡ F, B ≡ F } → fbf es F → I_4 contramodelo

Semántica de proposiciones

- Interpretación de fbfs
  - Atómicas
  - Moleculares
- Interpretación de estructuras lógicas

Interpretación de fbfs atómicas

Toda fbf atómica es V o F

Es V conforme al hecho que la declara

Ej: fbf-P: q

2 interpretaciones

$I_1 = \{ q \equiv V \} \rightarrow$ fbf es V $\rightarrow$ I_1 modelo

$I_2 = \{ q \equiv F \} \rightarrow$ fbf es F $\rightarrow$ I_2 contramodelo

Interpretación de fbfs MOLECULARES

Depende:

>> Número de fbfs atómicas diferentes

>> Conectivas

Reglas semánticas para las conectivas

TABLA DE VERDAD

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
	F		F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
	F		F	F	V	V

Interpretación de fbfs MOLECULARES

- **Tautología:** si todas las I_i son **modelo** de la fbf

  Ej. A v ¬A; 2 I_i **I_1 = { A = V }, I_2 = { A = F }**

- **Contradicción**: si todas las I_i son **contraejemplo** de la fbf.

  Ej. A ∧ ¬A; 2 I_i **I_1 = { A = V }, I_2 = { A = F },**

- **Contingencia**: si existen I_i modelo y otras I_i contraejemplo

  Ej. A v B; 4 I_i **I_1 = { A = V, B = F }, I_2 = { A = F, B = F },**

Métodos semánticos para interpretar fbfs

- Estudio con tablas de verdad
- Método corto de valoración o del contraejemplo

- Interpretación de fbfs MOLECULARES

Estudio con tablas de verdad

Fbf-P: **ce ∧ ¬vi**

n = 2; → 2^n = 4 filas

1º Se construye TABLA VERDAD

Filas = 2^n

Columnas, una para::

→ cada Variable Proposicional distinta.

→ cada conectiva según prioridad en la fbf

ce	vi	¬vi	ce ∧ ¬vi

- Interpretación de fbfs MOLECULARES

Estudio con tablas de verdad

2º Se aplican reglas de conectivas y se obtienen filas

*Cada **fila i** es una interpretación* $\mathrm{I_i}$ *de la fbf*

ce	vi	¬vi	ce ∧ ¬vi

Fbf-P: CONTINGENCIA

La columna de la conectiva principal clasifica semánticamente la fbf

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 1: Interpretar la fbf en una tabla de verdad

Fbf-P1: $p \lor q \rightarrow \neg(\neg p \land \neg q)$

Jerarquía: $((p \lor q) \rightarrow (\neg((\neg p) \land$

La fbf es una **TAUTOLOGÍA** ya que todas las interpretaciones son modelo .

	p	q						
1	V	V						
2	V	F						
3	F	V						
4	F	F						

- Interpretación de fbfs MOLECULARES

Método corto de valoración / contraejemplo

Estudio de tautologías

- Se supone que la fbf es **falsa** (no es tautología)
y se buscan los valores de verdad de sus fbfs atómicas

- **Si** llegamos a **contradicción**
→ **no** existe interpretación contraejemplo que haga falsa la fbf
→ la fbf es **tautología**

- **Si** encontramos una interpretación que haga falsa la fbf
→ interpretación contraejemplo
→ la fbf **NO** es **tautología**

- Interpretación de fbfs MOLECULARES

Método corto de valoración / contraejemplo

Ej. Fbf-P2: $ll \rightarrow ve \wedge \neg pi$

Sup. $ll \rightarrow ve \wedge \neg pi \equiv F$

¿ Existe una interpretación contraejemplo (que haga falsa fbf-P2) ?

$I_i = \{ ll = V, ve = F, pi = V \}$

La Fbf-P2 NO es tautología

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 2 : Estudia si la fbf es una tautología aplicando el método del contraejemplo

$$(\neg p \rightarrow q \wedge r) \vee (\neg q \wedge p)$$

Interpretación de estructuras lógicas

Aspecto **semántico** de

Deducción correcta

La estructura lógica :

$R: P_1,\ldots P_n \Rightarrow Q$

R <u>es válida</u>

Si **NO** se pueden

interpretar las premisas

$P_i \equiv V$

y la conclusión

$Q \equiv F$

- **Recuerda :**
- **Estructuras lógicas válidas**

$$R: P_1,\ldots P_n \Rightarrow Q$$

- Premisas verdaderas ➔ conclusión verdadera
- Premisas falsas ➔ conclusión falsa / verdadera

"Me gusta mucho tener ideas ***contradictorias*** *porque así, si siempre estoy* ***equivocado****, siempre tengo la* ***razón****"*

- Interpretación de estructuras lógicas

Métodos semánticos para validar estructuras lógicas

- Tablas de verdad
- Método corto de valoración o del contraejemplo

1º Estudio de su fbf **asociada**

2º Estudio de la estructura

- Interpretación de estructuras lógicas

1º Estudio de la validez de un razonamiento a partir de su fbf asociada

$$R: P_1, \ldots P_n \Rightarrow Q$$

*R es **válido***

si y sólo si ($\leftrightarrow$)

*su **fbf asociada** es una*

tautología

- Interpretación de estructuras lógicas

Razonamiento vs fórmula lógica

Si

R: $P_1,\ldots P_n \Rightarrow Q$

es válido

Si

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$

es tautología

NO

existe interpretación

contraejemplo

$\Leftrightarrow$

NO

P_i = V $\forall i = 1,,,n$

Q = F

NO

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ **= V**

Q = F

- Interpretación de estructuras lógicas

Fórmula asociada a una razonamiento

R: $P_1,\ldots P_n \Rightarrow Q$ su fbf asociada es:

Fbf-R: $\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q}$

(y formas equivalentes)

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 3: Escribe de 2 formas equivalentes la Fbf-R

Fbf-R: $\neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \vee Q$ Div

Fbf-R: $\neg((P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q)$ Di $\wedge$

- Interpretación de estructuras lógicas

Pasos para demostrar la validez de un razonamiento estudiando su fbf asociada

- 1º Obtener fbf asociada al razonamiento.
- 2º Aplicar método semántico (Tabla V / Contraejemplo) y demostrar si la fbf es tautología.

- **Si** no aparece ninguna interpretación **contraejemplo ➔**

  fbf es una tautología ➔ R válido
- Si **existe algún** contraejemplo **➔**

  fbf no es tautología ➔ R NO válido.

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 4: Estudia la validez del razonamiento mediante su fbf asociada

R: Una condición necesaria para que no salgas de botellón es que hagas deporte y una condición suficiente para que no vayas a clase es que salgas de botellón. Luego es suficiente que no hagas deporte para que no vayas a clase

MC = { **bo**: salgo botellón;

de : hago deporte;

cl : vas clase}

Fbf-P1: $\neg bo \rightarrow de$

Fbf-P2: $bo \rightarrow \neg cl$

Fbf-Q: $\neg de \rightarrow \neg cl$

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 4: Estudia la validez del razonamiento mediante su fbf asociada

Fbf asociada a R:

Fbf-R: $P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$

$$(\neg bo \rightarrow de) \wedge (bo \rightarrow \neg cl) \rightarrow (\neg de \rightarrow \neg cl)$$

Aplicamos m. contraejemplo

Se supone que la fbf-R tiene, al menos, una interpretación contraejemplo

$$(\neg bo \rightarrow de) \wedge (bo \rightarrow \neg cl) \rightarrow (\neg de \rightarrow \neg cl)$$

F

sigue

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 4: Estudia la validez del razonamiento → fbf asociada

$$(\neg bo \to de) \wedge (bo \to \neg cl) \to (\neg de \to \neg cl)$$

V F F

obtenemos valores de verdad de variables

Si $\neg de \to \neg cl \equiv F$
$\neg de \equiv V$
$\neg cl \equiv F$

$\neg bo \to de \equiv V$
$de \equiv F$

$bo \to \neg cl \equiv V$
$\neg cl \equiv F$

$\neg bo \equiv F$
$bo \equiv V$

$bo \equiv F$

$bo \equiv V$
$bo \equiv F$
CONTRADICCIÓN

No existe contraejemplo
➔ *fbf tautológica*
➔ *R válido.*

Pasos para demostrar la validez de un razonamiento estudiando su estructura

$$\mathbf{R: P_1, \ldots P_n \Rightarrow Q}$$

- Método: TABLA de VERDAD

1º Crear TV con todas las fbfs de la estructura .

2º Comprobar si alguna fila es una interpretación contraejemplo.

SI

→ **R NO válido.**

NO

→ **R es válido.**

P1: **Si se enciende la lámpara A o la B, leemos**

P2: **Se enciende A**

Q: **Leemos**

R: A v B $\rightarrow$ L, A $\Rightarrow$ L

A	B	L	A v B	P1: A v B $\rightarrow$ L	P2: A	Q: L
V	V	V	V	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	V	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	F

R ***es válido***

en todos los casos en los que

fbf-Pi = ***V*** *(filas 1 y 3)*

Fbf-Q = ***V****.*

Las demás filas no nos

interesan.

Ejercicios de Lógica – Hoja2 :

Ejercicio 5 : Estudia la validez del razonamiento en tabla de verdad

P1: **Si se encienden las lámparas A y la B, leemos**

P2: **Se enciende A**

Q: **Leemos**

R: $A \wedge B \rightarrow L,\ A \Rightarrow L$

R ***<u>No</u> es válido,***

en *la fila 4 hay contraejemplo.*

Las demás filas no nos interesan.

$$I_4 = \{\ A \equiv V;\ B \equiv F;\ L \equiv F\ \}$$

Pasos para demostrar la validez de un razonamiento estudiando su estructura

$$R: P_1,\ldots P_n \Rightarrow Q$$

- Método: **CONTRAEJEMPLO**

1º Suponer que la estructura no es válida (Pi =V, Q=F).

2º Obtener valores de verdad de las fbfs componentes de la estructura.

3º Si se obtiene una interpretación que confirme la suposición entonces

SI → **R NO válido**

NO → **R válido**