# Tema 1: Sistems de representació

## Contingut

1. **Sistemes numèrics**
    - Sistemes de numeració i canvi de base
    - Aritmètica binària
    - Sistemes de codificació i representació dels nombres

2. **Codificació binària**
    - Representació binària de dades i instruccions
    - Característiques dels espais de representació

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de numeració i canvi de base

- Un sistema de numeració en *base* ***b*** utilitza per a la representació de nombres un alfabet compost per **b** símbols o xifres
- Exemples:

  **b = 10** (*decimal*) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

  **b = 16** (*hexadecimal*) {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}

  **b = 2** (*binari*) {0,1}

- El nombre s'expressa mitjançant una seqüència de xifres:

  $N \equiv \ldots\ n_4\ n_3\ n_2\ n_1\ n_0\ n_{-1}\ n_{-2}\ n_{-3}\ \ldots$

- El valor de cada xifra depén de la xifra en sí i de la posició que ocupa en la seqüència

# 1. Sistemes numèrics

**Sistemes de numeració i canvi de base**

- El valor del nombre es calcula a partir del polinomi:

  $N \equiv \ldots + n_3 \cdot b^3 + n_2 \cdot b^2 + n_1 \cdot b^1 + n_0 \cdot b^0 + n_{-1} \cdot b^{-1} \ldots$

  $$N \equiv \sum_i n_i \cdot b^i$$

- Exemples:

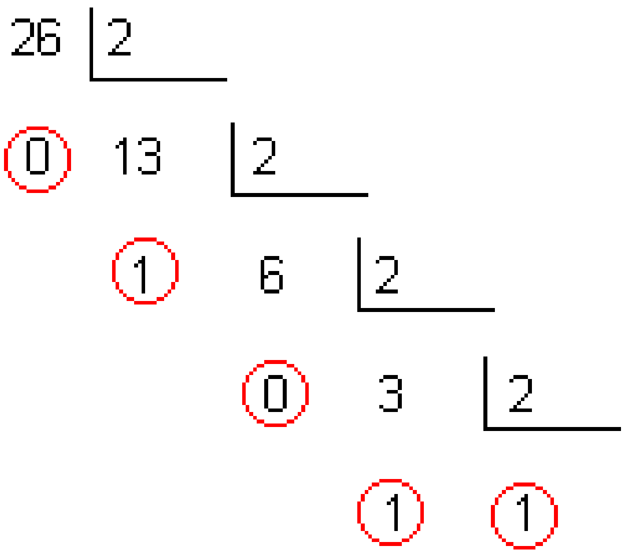
  $$3278{,}52_{10} = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + \\ + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

  $$175{,}372_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + \\ + 7 \cdot 8^{-2} + 2 \cdot 8^{-3} = 125{,}4882812_{10}$$

# 1. Sistemes numèrics

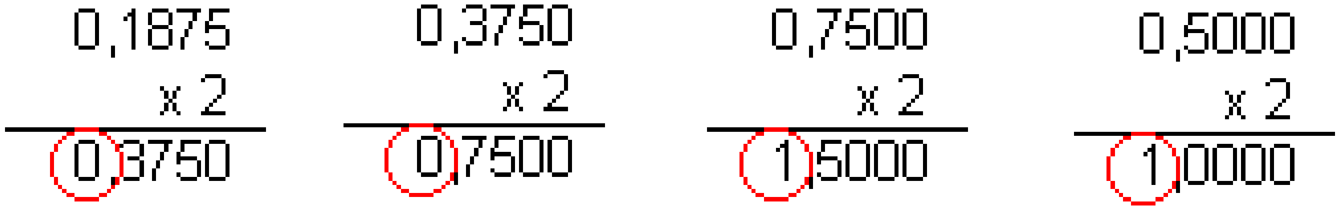
## Sistemes de numeració i canvi de base

- Conversió decimal - base b
  - Mètode de divisions succesives per la base **b**
  - Per a nombres fraccionaris es fan multiplicacions succesives per la base **b.**
  - Consideració de restes majores que 9 i *Error de truncament*
- Exemplos:




$26_{10} = 11010_2$

$0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2$




$26{,}1875_{10} = 11010{,}0011_2$

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de numeració i canvi de base

- **Rang de representació**: Conjunt de valors representable. Amb **n** xifres en la base **b** podem formar $b^n$ combinacions distintas. $[0..b^n-1]$
- **Sistema de numeració en base dos o binario**

**b = 2** (*binari*)

{0,1}

Nombres binaris del 0 al 7

| Decimal | Binari |
|---|---|
| 0 | 000 |
| 1 | 001 |
| 2 | 010 |
| 3 | 011 |
| 4 | 100 |
| 5 | 101 |
| 6 | 110 |
| 7 | 111 |

- Exemples:

$110100_2 = (1\cdot 2^5) + (1\cdot 2^4) + (1\cdot 2^2) =$

$= 2^5 + 2^4 + 2^2 = 32 + 16 + 4 = 52_{10}$

$0{,}10100_2 = 2^{-1} + 2^{-3} = (1/2) + (1/8) = 0{,}625_{10}$

$10100{,}001_2 = 2^4 + 2^2 + 2^{-3} = 16 + 4 + (1/8)$

$= 20{,}125_{10}$

# 1. Sistemes numèrics

## Aritmètica binària

- Operacions bàsiques

| A | B | A+B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 (1) |

| A | B | A*B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| A | B | A – B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 (1) |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| A | B | A/B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -- |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | -- |
| 1 | 1 | 1 |

# 1. Sistemes numèrics

## Aritmètica binària

- Exemples
  - Sumes i restes

```
   1110101          1101010
 + 1110110        - 1010111
 ---------        ---------
  11101011          0010011
```

  - Multiplicacions

```
   1101010          1010011
      x 11             x 10
 ---------        ---------
   1101010          0000000
  1101010          1010011
 ---------        ---------
 100111110         10100110
```

  - Divisió

```
1101.011 | 101
-101     |------
00110      10.101
  -101
   00111
    -101
      10
```

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de codificació i representació de nombres

- **Octal**

  **b = 8** (*octal*) {0,1,2,3,4,5,6,7}

  - Correspondència amb el binari

**8 = 2³** ⇒ Una xifra en octal correspon a 3 binàries

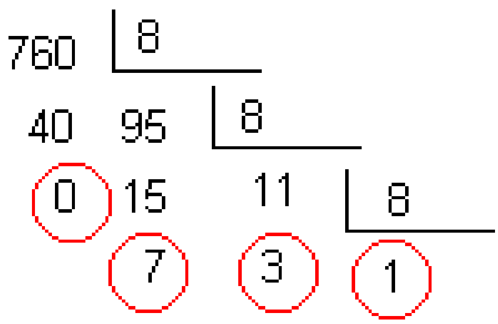
- Exemples

$$10001101100.11010_2 = 2154.64_8$$

$$537.24_8 = 101011111.010100_2$$

- Conversió Decimal - Octal

$$760.33_{10} \cong 1370.2507_8$$




| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.33 | 0.64 | 0.12 | 0.96 |
| x 8 | x 8 | x 8 | x 8 |
| 2.64 | 5.12 | 0.96 | 7.68 |

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- **Hexadecimal**

  **b = 16** (*hexadecimal*)

  {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,}

  - Correspondència amb el binari

**16 = 2⁴** $\Rightarrow$ Una xifra en hexadecimal correspon a 4 binàries

| Hexadecimal | Decimal | Binario |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0000 |
| 1 | 1 | 0001 |
| 2 | 2 | 0010 |
| 3 | 3 | 0011 |
| 4 | 4 | 0100 |
| 5 | 5 | 0101 |
| 6 | 6 | 0110 |
| 7 | 7 | 0111 |
| 8 | 8 | 1000 |
| 9 | 9 | 1001 |
| A | 10 | 1010 |
| B | 11 | 1011 |
| C | 12 | 1100 |
| D | 13 | 1101 |
| E | 14 | 1110 |
| F | 15 | 1111 |

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- Exemples

$1001011101 1111.1011101_2 = 25DF.BA_H$

- Conversió Decimal - Hexadecimal

$4373.79_{10} \cong 1115.CA3D_{16}$

4373 | 16
117 273 | 16
53 113 17 | 16
5 1 1 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.79 | 0.64 | 0.24 | 0.84 |
| X 16 | x 16 | x 16 | x 16 |
| 12.64 | 10.24 | 3.84 | 13.44 |

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- **Codi Gray**
  - Codi no ponderat, continu i cíclic
  - Basat en un sistema binari
  - Dos nombres successius només varíen en un bit

| 2 bits | 3 bits | 4 bits | Decimal |
|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 0 0 | 0 0 0 0 | 0 |
| 0 1 | 0 0 1 | 0 0 0 1 | 1 |
| 1 1 | 0 1 1 | 0 0 1 1 | 2 |
| 1 0 | 0 1 0 | 0 0 1 0 | 3 |
| | 1 1 0 | 0 1 1 0 | 4 |
| | 1 1 1 | 0 1 1 1 | 5 |
| | 1 0 1 | 0 1 0 1 | 6 |
| | 1 0 0 | 0 1 0 0 | 7 |
| | | 1 1 0 0 | 8 |
| | | 1 1 0 1 | 9 |
| | | 1 1 1 1 | 10 |
| | | 1 1 1 0 | 11 |
| | | 1 0 1 0 | 12 |
| | | 1 0 1 1 | 13 |
| | | 1 0 0 1 | 14 |
| | | 1 0 0 0 | 15 |

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- **Codi BCD** - *Binary Coded Decimal*
- Dígits decimals codificatss en binari

| Decimal | BCD natural | BCD exceso 3 | BCD Aiken | BCD 5421 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 0 0 0 | 0 0 1 1 | 0 0 0 0 | 0 0 0 0 |
| 1 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 0 1 |
| 2 | 0 0 1 0 | 0 1 0 1 | 0 0 1 0 | 0 0 1 0 |
| 3 | 0 0 1 1 | 0 1 1 0 | 0 0 1 1 | 0 0 1 1 |
| 4 | 0 1 0 0 | 0 1 1 1 | 0 1 0 0 | 0 1 0 0 |
| 5 | 0 1 0 1 | 1 0 0 0 | 1 0 1 1 | 1 0 0 0 |
| 6 | 0 1 1 0 | 1 0 0 1 | 1 1 0 0 | 1 0 0 1 |
| 7 | 0 1 1 1 | 1 0 1 0 | 1 1 0 1 | 1 0 1 0 |
| 8 | 1 0 0 0 | 1 0 1 1 | 1 1 1 0 | 1 0 1 1 |
| 9 | 1 0 0 1 | 1 1 0 0 | 1 1 1 1 | 1 1 0 0 |

- BCD natural té pesos 8421
- BCD Aiken té pesos 2421
- Exemple

$$9\ 8\ 3\ 2\ 5_{10} = 1001\ 1000\ 0011\ 0010\ 0101_{\text{BCD-natural}}$$

$$9\ 8\ 3\ 2\ 5_{10} = 1111\ 1110\ 0011\ 0010\ 1011_{\text{BCD-Aiken}}$$

# 1. Sistemes numèrics

**Sistemes de representació i codificació de nombres**

- **Representació de nombres enters**
  - Es necessita la representació del signe
  - S'utilitza una quantitat determinada de bits (n)
- **Signe i magnitud (SM)**
  - El signe es representa en el bit més a l'esquerra de la dada. Bit (n-1)
  - En la resta dels bits es representa el valor del nombre en binari natural. Bits (n-2)…..0
  - Inconvenient: Doble representació del 0.

$n = 6$

$10_{10} = 001010_{SM}$ $\quad$ $-4_{10} = 100100_{SM}$

$0_{10} = 000000_{SM}$ $\quad$ $0_{10} = 100000_{SM}$

$n = 4$

$-7_{10} = 1111_{SM}$ $\quad$ $-14_{10}$ = no representable

**Sistemes de representació i codificació de nombres**

- **Complement a la base menys u**
  - Els valors positius es representen en SM.
  - Els valors negatius s'obtenen restant el nombre a la base menys u.
  - Converteix les restes en sumes.
  - Inconvenient: Doble representació del 0.
  - Exemples en **Base 10**

n = 3 $\quad -63_{10} = 936_{C9} \Rightarrow 936 = 999 - 63$

$\quad -16_{10} = 983_{C9} \Rightarrow 983 = 999 - 16$

n = 4 $\quad -16_{10} = 9983_{C9} \Rightarrow 9983 = 9999 - 16$

Operación: 77 - 63

$$\begin{array}{r} 77 \\ -63 \\ \hline 14 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 077_{C9} \\ + & 936_{C9} \\ \hline & (1)013 \\ + & \hookrightarrow 1 \\ \hline & 014_{C9} \end{array}$$

# 1. Sistemes numèrics

**Sistemes de representació i codificació de nombres**

**Base 2**

- S'intercanvien zeros per uns i uns per zeros
- Rang : $[-2^{n-1} + 1, 2^{n-1} - 1]$
- Exemples:

$n = 6$ $C_1$ de $-10010_2 = 101101_{C1}$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ -\ 010010 \\ \hline 101101 \end{array}$$

$C_1$ de $-100111_2$ = no representable

$C_1$ de $0 = \{000000_{C1}\ ,\ 111111_{C1}\}$

Operación: $1000111_2 - 10010_2$

*Restant en binari natural*

$$\begin{array}{r} 1000111_2 \\ -\ \ 0010010_2 \\ \hline 0110101_2 \end{array}$$

*Sumant en C1 (n=8)*

$$\begin{array}{lr} & 01000111_{C1} \\ + & 11101101_{C1} \\ \hline & (1)00110100 \\ + & 1 \\ \hline & 00110101_{C1} \end{array}$$

# 1. Sistemes numèrics

Sistemes de representació i codificació de nombres

- **Complement a la base**
  - Els valors positius se representen en SM.
  - Els valors negatius s'obtenen restant el nombre a la base menys u i, després, sumant-hi u al resultat
  - Converteix les restes en sumes.
  - Exemples **Base 10**

$n = 3 \quad -63_{10} = 937_{C10} \quad \Rightarrow 937 = (999 - 63) + 1$

$-16_{10} = 984_{C10} \quad \Rightarrow 984 = (999 - 16) + 1$

$n = 4 \quad -16_{10} = 9984_{C10} \quad \Rightarrow 9984 = (9999 - 16) + 1$

Operació: 77 - 63

$$\begin{array}{rr} & 077 \\ + & 937 \\ \hline & (1)014 \end{array}$$

El ròssec, en cas d'existir, no es considera

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

**Base 2**

- S'intercanvien els zeros i els uns i es suma u
- Rango : $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$
- Exemples:

$n = 6 \quad C_2$ de $-10010_2 = 101110_{C2}$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ -\ 010010 \\ \hline 101101_{C1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101101 \\ +\qquad 1 \\ \hline 101110_{C2} \end{array}$$

$C_2$ de $-1110010_2$ = no representable

Operació: $11001_2 - 10010_2 = 111_2$

*Operant en C2*

*(n=6)*

$$\begin{array}{r} 011001_{C2} \\ +\ \ 101110_{C2} \\ \hline (1)000111_{C2} \end{array}$$

El ròssec no es considera

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- **Representació per excés**
  - La representació s'obté sumant un excés (quantitat) al valor del nombre
  - L'excés sol ser: $2^{n-1}$
  - Rang : $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$
  - Exemples **Base 2**

$n = 8 \Rightarrow$ Excés $= 2^{8-1} = 128_{10} = 1000\ 0000_2$

$11010_2 = 10011010_S$

$-11010_2 = 01100110_S$

$0_2 = 1000\ 0000_S$

$n = 4 \Rightarrow$ Excés $= 2^{4-1} = 8_{10} = 1000_2$

$1_2 = 1001_S$

$-1_2 = 0111$

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- Representació dels nombres reals
  - Representació en coma fixa
  - Representació en coma flotant

$$N = (-1)^{s}\, M \cdot B^{E}$$

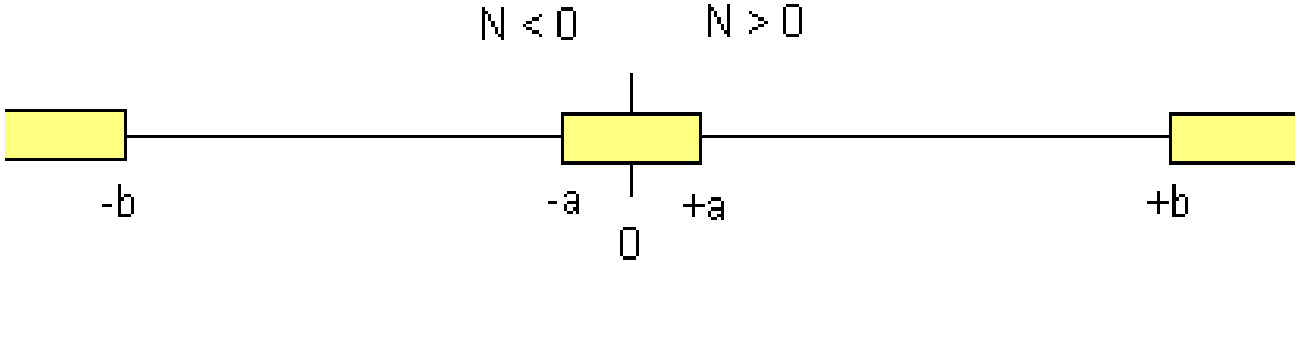
**N** ≡ Valor numèric **M** ≡ Mantissa **s** ≡ signe

**B** ≡ Base **E** ≡ Exponent

- Exemple en base 10:

$1.234535 \cdot 10^{3} = 1234.535 \cdot 10^{0} = 0.1234535 \cdot 10^{4} = 123453.5 \cdot 10^{-2} = 0.0001234535 \cdot 10^{7}$

  - Valors límit



# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- Exemple de format de 16 bits :

  •Exponent: 7 bits. Representació en C1
  •Mantissa: 9 bits. Representació en C2
  •Signe: El nombre té el signe de la mantissa.

| 15          9 | 8          0 |
|---|---|
| Exponent C1 | Mantissa C2 |

- Representar $-17'6251_{10}$

  1.- Convertir el nombre a binari:

  $-17'6251_{10} \approx -10001'101000000000011_2$

  2.- Prevore 8 xifres enteres per a la mantissa

  (se'n deixa una per al signe del C2)

$$-10001'1010000000000110_2 \approx -10001101_2 \cdot 2^{-3}$$

  3.- Es separen mantissa i exponent:

Mantissa $= -10001101_2 = 110001101_{SM} = 101110010_{C1} = 101110011_{C2}$
Exponent $= -3_{10} = 1000011_{SM} = 1111100_{C1}$

SOLUCIÓ

$$-17'6251_{10} = \mathbf{1111100\ 101110011}$$

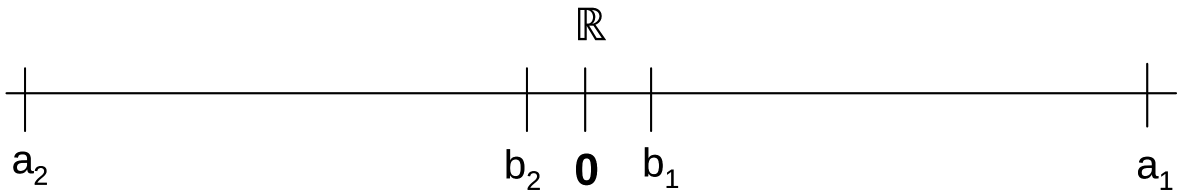
(representació compacta hexadecimal: F973)

# 1. Sistemes numèrics

## Sistemes de representació i codificació de nombres

- Ejemple de format de 16 bits (cont.) :

Rang de representació del format




$a_1$ = $\text{Mantissa}_{\text{màx\_positiva}} \cdot 2^{\text{Emàx\_positiu}}$
$b_2$ = $\text{Mantissa}_{\text{mín\_negativa}} \cdot 2^{\text{Emàx\_negatiu}}$

$b_1$ = $\text{Mantissa}_{\text{mín\_positiva}} \cdot 2^{\text{Emáx\_negatiu}}$
$a_2$ = $\text{Mantissa}_{\text{m`sx\_negativa}} \cdot 2^{\text{Emáx\_positiu}}$

$\text{Mantissa}_{C2} \in [-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$; $n = 9 \rightarrow \text{Mantissa}_{C2} \in [-256, 255]$

$\text{Exponent}_{C1} \in [-(2^{n-1}-1), 2^{n-1}-1]$; $n = 7 \rightarrow \text{Exponent}_{C1} \in [-63, 63]$

$\text{Mantissa}_{\text{màx\_positiva}} = 255$
$\text{Mantissa}_{\text{mín\_negativa}} = -1$

$\text{Mantissa}_{\text{mín\_positiva}} = 1$
$\text{Mantissa}_{\text{màx\_negativa}} = -256$

$E_{\text{màx\_positiu}} = 63$ $E_{\text{màx\_negatiu}} = -63$

Dons:

- $a_1 = 255 \cdot 2^{63}$
- $b_1 = 2^{-63}$
- $b_2 = -2^{-63}$
- $a_2 = -256 \cdot 2^{63}$

**rang** $\subseteq [-256 \cdot 2^{63}, -2^{-63}] \cup [2^{-63}, 255 \cdot 2^{63}]$

# 1. Sistemes numèrics

**Sistemes de representació i codificació de nombres**

- Valors límit
  - Si $|N| > |b| \Rightarrow$ desbordament a infinit
    OVERFLOW
  - Si $|N| < |a'| \Rightarrow$ desbordament a zero
    UNDERFLOW

- Consideracions sobre la aritmètica computacional
  - Quasi sempre hi ha arredoniment /truncament
  - Nombres excessivament menuts
  - Nombres excessivament grans
  - No sempre es compleix la propietat associativa: $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$

Exemple en computador de precisió $10^{-10}$:

$a=10^{7}$ $b=10^{-3}$ $c=10^{-8}$

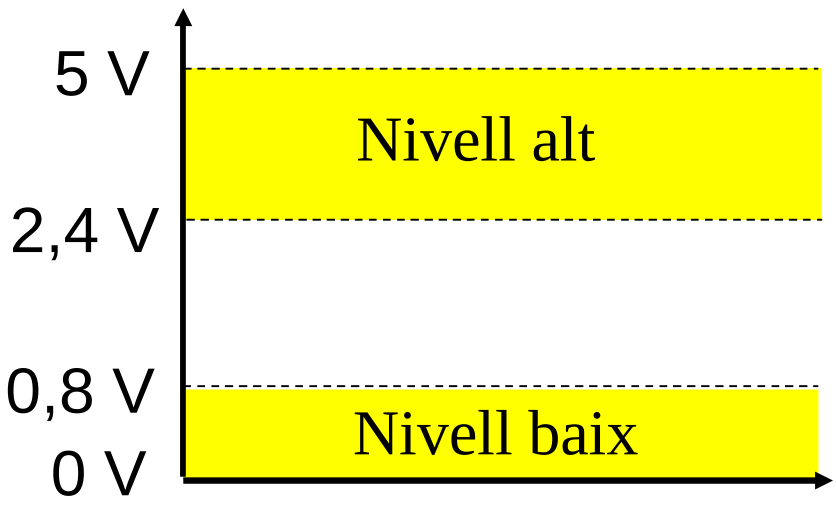
$$(10^{7}x10^{-3})x10^{-8} \neq 10^{7}x(10^{-3}x10^{-8})$$
$$10^{4}x10^{-8} \neq 10^{7}x\ 0$$
$$10^{-4} \neq 0$$

¡desbordament a 0!

# 2. Codificación binaria

## Representació binària de dades i instruccions

- Magnituds
  - **Analògiques**: prenen valors continus
  - **Digitals**: prenen un conjunt de valors discrets
  - La majoria de les magnituds físiques són de tipus analògic
- Sistema digital binari
  - Representació de les magnituds en base 2
  - Estats d'un interruptor [ENCÉS, APAGAT]
  - Els dígits {0, 1} corresponen a nivells de tensió elèctrica.




*Nivells lògics de la família tecnològica TTL*

# 2. Codificación binaria

## Característiques dels espais de representació

- Condicionants
  - Quantitat d'estats representables (digital, binari)
  - Quantitat d'elements representables (espai material finit)
  - Grandàries predefinides en les unitats del computador
  - Grandàries predefinides en la comunicació entre unitats del computador

- Unitats de codificació

| | | |
|---|---|---|
| **BIT** | **Byte = 8 bits** | **Paraula** |
| **1 KiloByte** | **(KB) = $2^{10}$ Bytes = 1024 Bytes** | |
| **1 MegaByte** | **(MB) = $2^{20}$ Bytes = 1024 KB** | |
| **1 GigaByte** | **(GB) = $2^{30}$ Bytes = 1024 MB** | |
| **1 TeraByte** | **(TB) = $2^{40}$ Bytes = 1024 GB** | |
| **1 PetaByte** | **(PB) = $2^{50}$ Bytes = 1024 TB** | |