4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

Sea un grafo ponderado tal que $\mathbf{w}_{ij} \geq 0$.

Este algoritmo encuentra los caminos más cortos y sus pesos desde el vértice 1 al resto.

Se asignan varias etiquetas a los vértices del grafo. En algún momento algunos vértices podrán tener etiquetas variables y el resto etiquetas fijas.

Denotaremos al conjunto de vértices con etiqueta fija por P y al conjunto de vértices con etiqueta variable por T.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

ALGORITMO DE DIJKSTRA

Paso 1. Inicialización:

$$P = \{1\} \quad T = \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_j = w_{1j} \quad j \in \Gamma(1)$$
$$u_j = \infty \quad j \notin \Gamma(1)$$

Paso 2. Designación de etiqueta variable como fija.

Determinar $k \in T \ / \ u_k = \text{mín}_{j \in T}\{u_j\}$

Hacer $T := T \sim \{k\}$ y $P := P \cup \{k\}$

Si $T = \emptyset$, STOP; u_j es el peso del camino más corto de 1 a j, $j = 2, 3, \ldots, n$

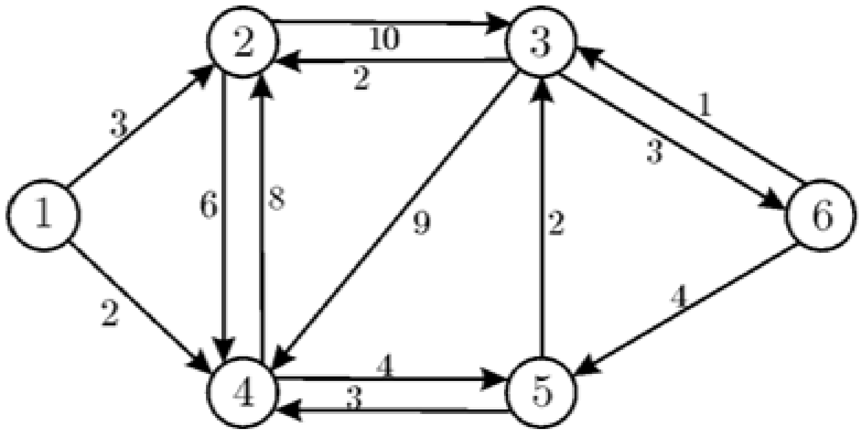
Paso 3. Actualización:

$$\forall j \in \Gamma(k) \cap T, \quad u_j := \text{mín}\{u_j, u_k + w_{kj}\}$$

Ir al Paso 2.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

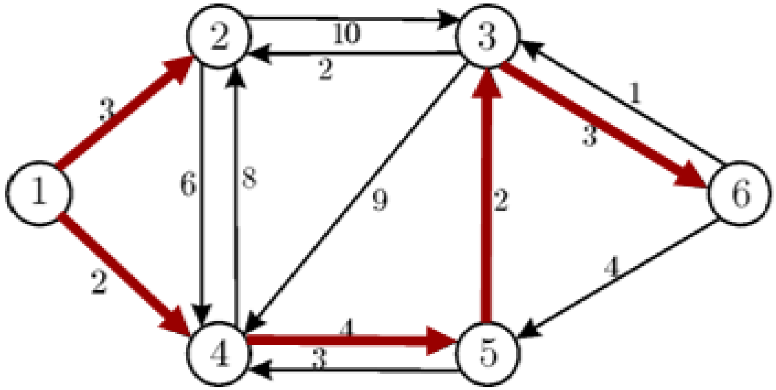
EJEMPLO: Consideremos el siguiente grafo ponderado:



Deseamos calcular los caminos más cortos y sus pesos desde el vértice 1 al resto. Aplicaremos el algoritmo de Dijkstra.

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

EJEMPLO:



Inicialización Iteración 1
$T = \{2,3,4,5,6\}$
$P = \{1\}$,
$u_1 = 0$
$u_2 = w_{12} = 3$
$u_3 = \infty$
$\boxed{u_4 = w_{14} = 2}$
$u_5 = \infty$
$u_6 = \infty$

Iteración 2
$T = \{2,3,5,6\}$
$P = \{1,4\}$, $\Gamma(4) \cap T = \{2,5\}$
$\boxed{u_2 = \text{mín}\{\underline{u_2}, u_4 + w_{42}\} = \text{mín}\{3, 2+8\} = 3}$
$u_3 = \infty$
$u_5 = \text{mín}\{u_5, \underline{u_4 + w_{45}}\} = \text{mín}\{\infty, 2+4\} = 6$
$u_6 = \infty$

Iteración 3
$T = \{3,5,6\}$
$P = \{1,4,2\}$, $\Gamma(2) \cap T = \{3\}$
$u_3 = \text{mín}\{u_3, \underline{u_2 + w_{23}}\} = \text{mín}\{\infty, 3+10\} = 13$
$\boxed{u_5 = 6}$
$u_6 = \infty$

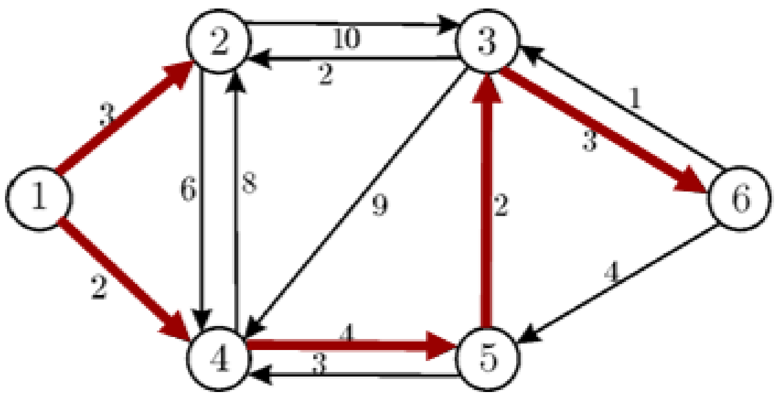
Iteración 4
$T = \{3,6\}$
$P = \{1,4,2,5\}$, $\Gamma(5) \cap T = \{3\}$
$\boxed{u_3 = \text{mín}\{u_3, \underline{u_5 + w_{53}}\} = \text{mín}\{13, 6+2\} = 8}$
$u_6 = \infty$

Iteración 5
$T = \{6\}$
$P = \{1,4,2,5,3\}$, $\Gamma(3) \cap T = \{6\}$
$\boxed{u_6 = \text{mín}\{u_6, \underline{u_3 + w_{36}}\} = \text{mín}\{\infty, 8+3\} = 11}$

Iteración 6
$T = \emptyset$
$P = \{1,4,2,5,3,6\}$, STOP

4. ALGORITMO DE DIJKSTRA

EJEMPLO:



	Camino	*Peso*
De 1 a 2	1 2	$u_2 = 3$
De 1 a 3	1 4 5 3	$u_3 = 8$
De 1 a 4	1 4	$u_4 = 2$
De 1 a 5	1 4 5	$u_5 = 6$
De 1 a 6	1 4 5 3 6	$u_6 = 11$

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

Llamaremos u_{ij} al peso del camino más corto de i a j.

Utilizaremos las variables:

$u_{ij}^{(m)}$: peso del camino más corto del vértice i al j con la restricción de que no contenga a los vértices m, $m+1$, ..., n (exceptuando a los extremos i y j en su caso).

Estas variables pueden calcularse recursivamente utilizando las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i,j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j, \\
& m = 1,2,\ldots n
\end{aligned}
$$

Y es posible ver que $u_{ij} = u_{ij}^{(n+1)}$, con lo que tendremos los pesos de los caminos más cortos entre todos los pares de vértices.

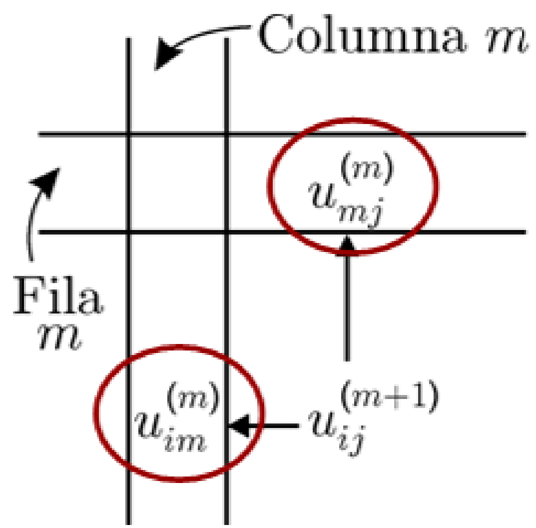
5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \underline{\text{mín}} \left\{ u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)} \right\} \quad \forall i, j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$

Para actualizar un elemento que ocupe la fila i y columna j en la iteración m+1, debemos calcular:

el mínimo entre el mismo elemento de la iteración anterior m y la suma de dos elementos:

- el que ocupa la misma fila i y la columna de la iteración m,
- el que ocupa la misma columna j y la fila de la iteración m.



5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

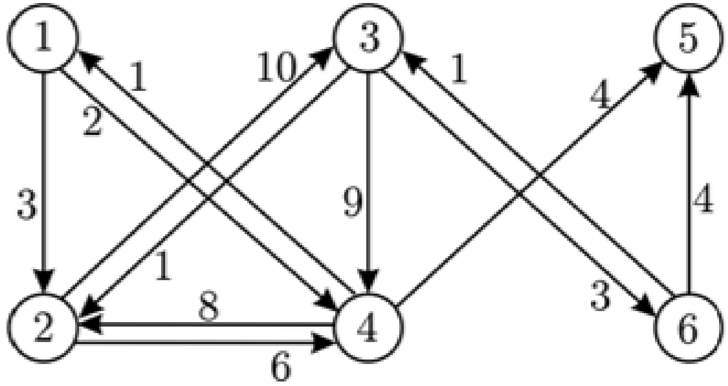
$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j,$$

$$m = 1, 2, \ldots n$$

$W=$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞



(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

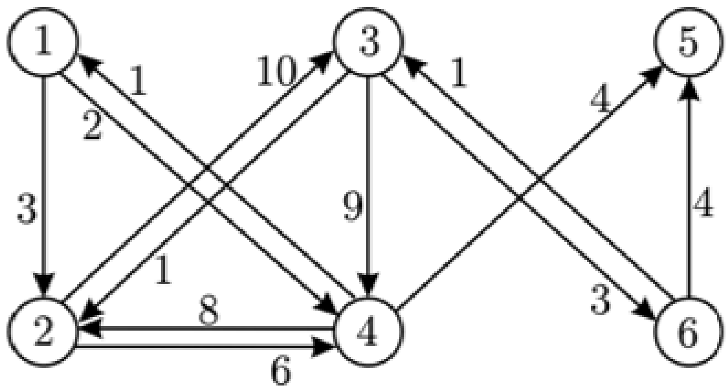
5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$

EJEMPLO:

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞



(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

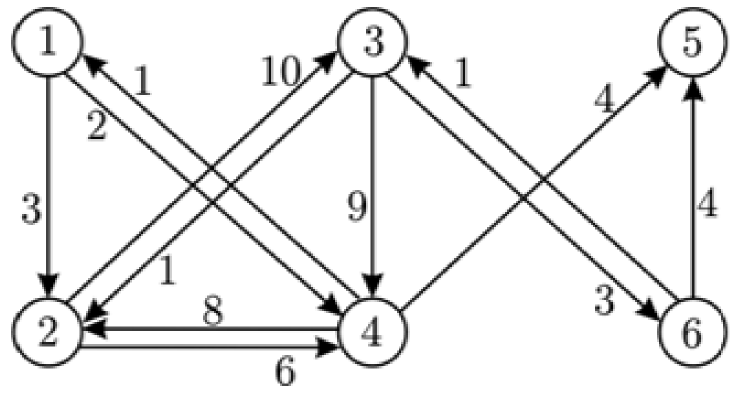
(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$
$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j, \quad m = 1,2,\ldots n$$

EJEMPLO:



(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

Para facilitar la construcción de los caminos más cortos una vez calculados sus pesos, se puede utilizar otra matriz:

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]$$

donde $\theta_{ij}^{(m)}$ representa el vértice anterior al j en el camino más corto de i a j en la iteración m.

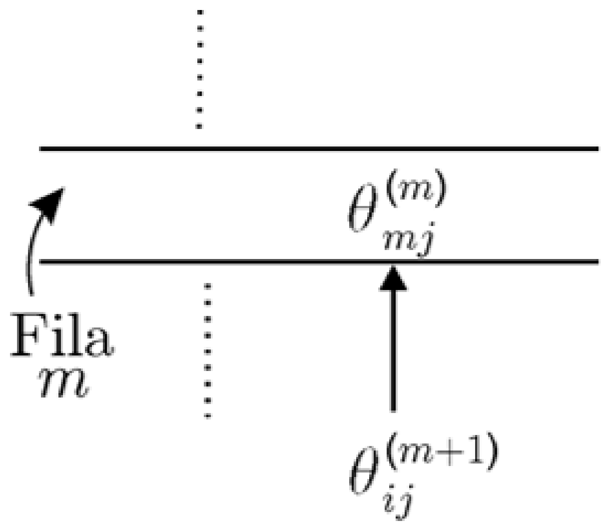
Inicialmente $\theta_{ij}^{(1)} = i$ si $u_{ij}^{(1)} < +\infty$ y:

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

Si un elemento de la matriz de pesos no se modifica en la iteración $m+1$, entonces el correspondiente elemento de la matriz $\Theta^{(m+1)}$ tampoco se modifica.



Si un elemento de la matriz de pesos se modifica en la iteración $m+1$, entonces el correspondiente elemento de la matriz $\Theta^{(m+1)}$ se modifica por el que ocupa su misma columna y fila m.

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=1)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	4			4	
5						
6			6		6	

(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	[1]		[1]	4	
5						
6			6		6	

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

Índice

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	1		[3]
2		[3]	2	2		[3]
3		3	2	2		3
4	4	1	2	1	4	[3]
5						
6		[3]	6	[2]	6	[3]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	[6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=7)

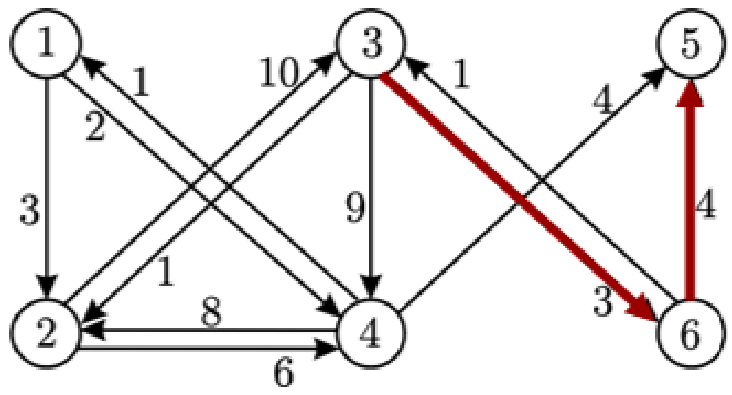
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de 3 a 5:

1. Peso: $u_{35}{}^{(7)} = 7$
2. Camino:
   - Vértice anterior al 5: $\theta_{35}^{(7)} = 6$
   - Vértice anterior al 6: $\theta_{36}^{(7)} = 3$



5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO:

(m=6)

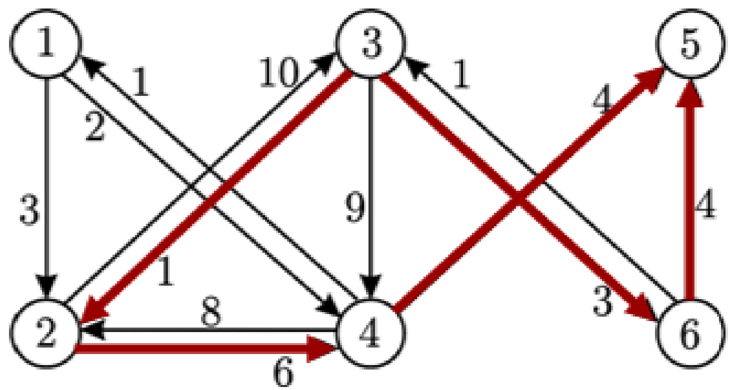
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de 3 a 5 **sin pasar por el vértice 6**:
Necesitamos los datos de la iteración 6.

1. Peso: $u_{35}^{(6)} = 11$
2. Camino:
   - Vértice anterior al 5: $\theta_{35}^{(6)} = 4$
   - Vértice anterior al 4: $\theta_{34}^{(6)} = 2$
   - Vértice anterior al 2: $\theta_{32}^{(6)} = 3$



Índice

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO: Consideremos un grafo con V={A,B,C,D,E,F} y matriz de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 6 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Supongamos que deseamos calcular el camino más corto de A a E y su peso, con la condición de que no contenga los vértices C y F como internos.

Deberemos reordenar los vértices del grafo de manera que los vértices por donde no queremos que el camino pase sean los últimos.

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO: Camino más corto de A a E y su peso, con la condición de que no contenga los vértices C y F como internos.

Posibles reordenaciones:

- A, B, D, E, C, F : Parar en la iteración 5.
- B, D, A, E, C, F : Parar en la iteración 3.

$\Omega =$

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	∞	5	8	∞
B	∞	∞	1	2	6	∞
C	1	∞	∞	3	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutamos filas

	A	B	C	D	E	F
B	∞	∞	1	2	6	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
A	∞	2	∞	5	8	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
C	1	∞	∞	3	∞	∞
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutamos columnas

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	5	∞	8	∞	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(1)} \equiv \begin{array}{c||c|ccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 5 & \infty & 8 & \infty & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(1)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\
A & A & A & & A & & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

$$\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \hline
A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline
\end{array}, \quad
\Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline
B & & B & & B & B & \\ \hline
D & & & & D & & \\ \hline
A & A & [B] & & A & [B] & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\ \hline\hline
\end{array}$$

5. CAMINOS MÁS CORTOS ENTRE TODOS LOS PARES DE VÉRTICES. MÉTODO DE FLOYD-WARSHALL

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$\Omega^{(2)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	[4]	∞	8	[3]	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

, $\Theta^{(2)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B		B		B	B	
D				D		
A	A	[B]		A	[B]	
E			E		E	E
C		C	C			
F			F			

$\Omega^{(3)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	[5]	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	4	∞	[7]	3	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	[6]	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

, $\Theta^{(3)} \equiv$

	B	D	A	E	C	F
B		B		[D]	B	
D				D		
A	A	B		[D]	B	
E			E		E	E
C		C	C	[D]		
F			F			

EJEMPLO: Con la matriz reordenada iniciamos el algoritmo de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\ D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\ E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\ C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\ F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \end{array}, \quad \Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & & B & & [D] & B & \\ D & & & & D & & \\ A & A & B & & [D] & B & \\ E & & & E & & E & E \\ C & & C & C & [D] & & \\ F & & & F & & & \end{array}$$

IDENTIFICACIÓN DE CAMINOS:

Camino más corto de A a E **sin pasar por los vértices C, F**:

1. Peso: $u_{AE}^{(3)} = 7$
2. Camino:
   - Vértice anterior a E: $\theta_{AE}^{(3)} = D$
   - Vértice anterior a D: $\theta_{AD}^{(3)} = B$
   - Vértice anterior a B: $\theta_{AB}^{(3)} = A$

$\Bigg\}$ ***A, B, D, E***

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

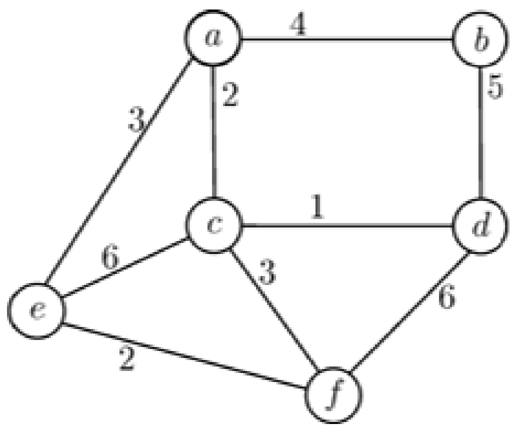
DEFINICIÓN:

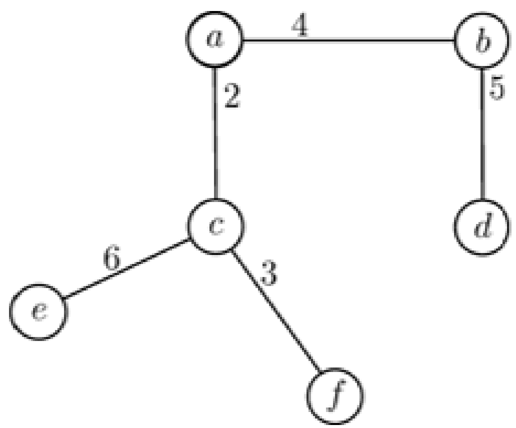
Sea G un grafo ponderado y no dirigido. Diremos que T es un **árbol generador de mínimo peso** si T es un árbol generador tal que la suma de los pesos asociados a sus aristas es mínima.

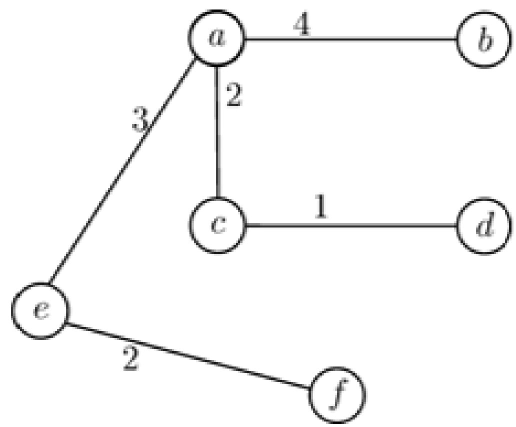
EJEMPLO: El siguiente grafo representa una red de telecomunicaciones.

Este árbol generador no es de peso mínimo: Su peso es 20.

Hay árboles con menor peso: 12.







6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

ALGORITMO DE KRUSKAL

Sea G = (V,A) un grafo no dirigido y con pesos $\mathbf{w}_i$ asociados a cada arista $\mathbf{e}_i \in$ A, i = 1, 2, . . . , m y con n vértices.

PASO 1. $T = \emptyset.$

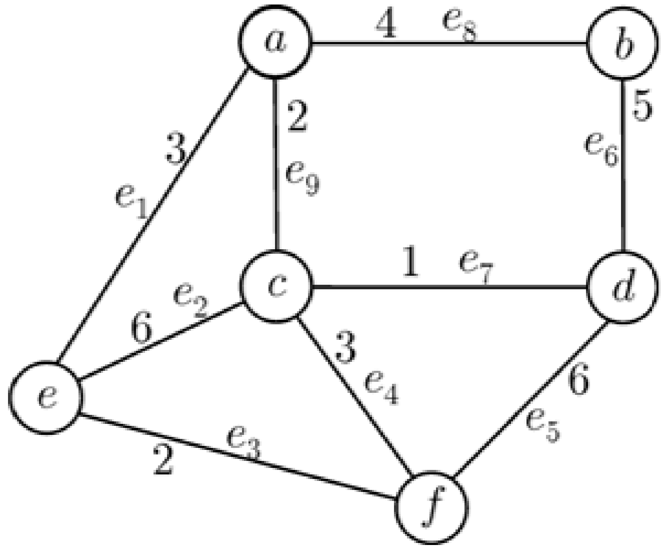
PASO 2. Ordenar en orden creciente las aristas de G, es decir,

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \;/\; \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_m.$$

PASO 3. Añadir aristas en T de forma ordenada siempre que no se formen ciclos hasta tener en T, n−1 aristas.

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: El siguiente grafo representa una red de telecomunicaciones. Aplicaremos el algoritmo de Kruskal para obtener un árbol generador de peso mínimo.

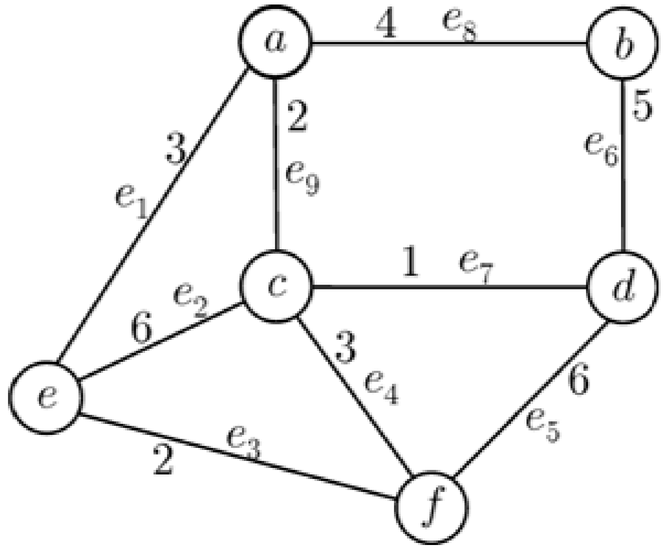


Para ello primero ordenamos las aristas del árbol en orden creciente de pesos:

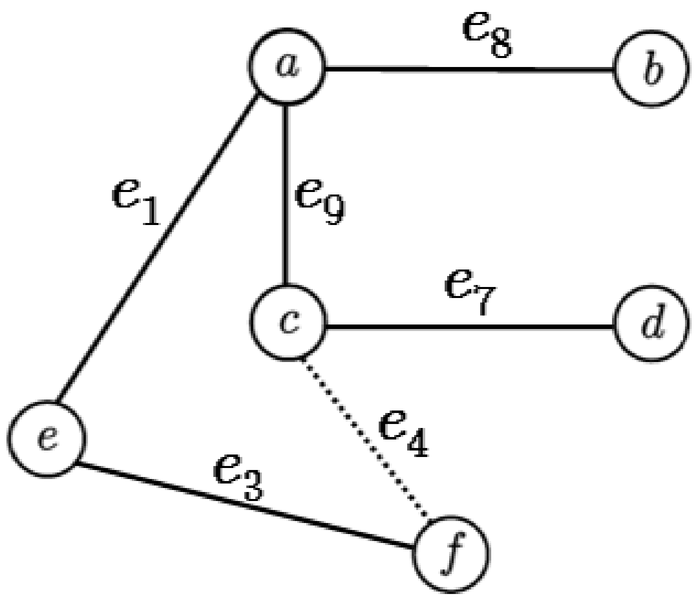
Arista:	e_7	e_9	e_3	e_1	e_4	e_8	e_6	e_5	e_2
Peso:	1	2	2	3	3	4	5	6	6

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

Arista:	$\boxed{e_7}$	$\boxed{e_9}$	$\boxed{e_3}$	$\boxed{e_1}$	e_4	$\boxed{e_8}$	e_6	e_5	e_2
Peso:	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	3	$\boxed{4}$	5	6	6



Vamos añadiendo aristas en T de forma ordenada siempre que no se formen ciclos hasta tener en T, 6−1 aristas.



ALGORITMO DE PRIM

Sea G un grafo no dirigido ponderado con n vértices.

Paso 1. $T = \emptyset$, $U = \{v^\star\}$ $\quad v^\star \in V(G)$

$L(u) = w(u, v^\star)$ (∞ si $\nexists$ arista) $\forall u \in V(G)$

Paso 2. Encontrar $u^\star \in V(G)$ tal que

$L(u^\star) = \text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\}$

Paso 3. Añadir $u^\star$ a U, es decir, $U := U \cup \{u^\star\}$

Añadir la arista e incidente con $u^\star$ con peso $L(u^\star)$ a T, es decir, $T := T \cup \{e\}$

Paso 4. Si $card(U) = n$, STOP.

Si $card(U) < n$, hacer

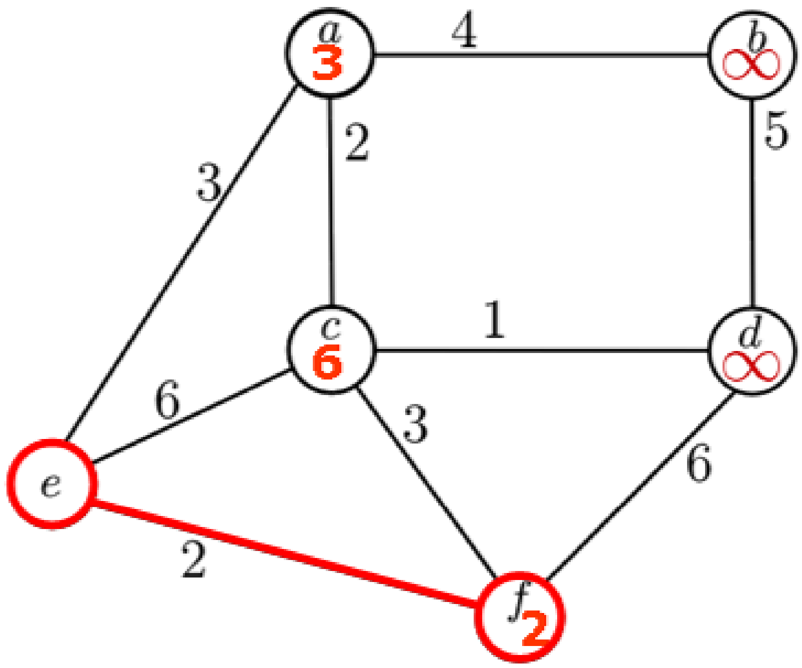
$L(u) := \text{mín}\{L(u), w(u^\star, u)\} \quad \forall u \notin U$

e ir al Paso 2.

6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \emptyset,\ U = \{e\}.$
$L(a) = \omega_{ea} = 3,$
$L(b) = \infty,$
$L(c) = \omega_{ec} = 6,$
$L(d) = \infty,$
$L(f) = \omega_{ef} = 2.$
Seleccionamos $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(f).$
Añadimos el vértice f a U y la arista $\{e, f\}$ a T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e, f\}\},\ U = \{e, f\}.$

$L(a) = \text{mín}\{L(a), \omega_{fa}\} = \text{mín}\{3, \infty\} = \omega_{ea} = 3,$

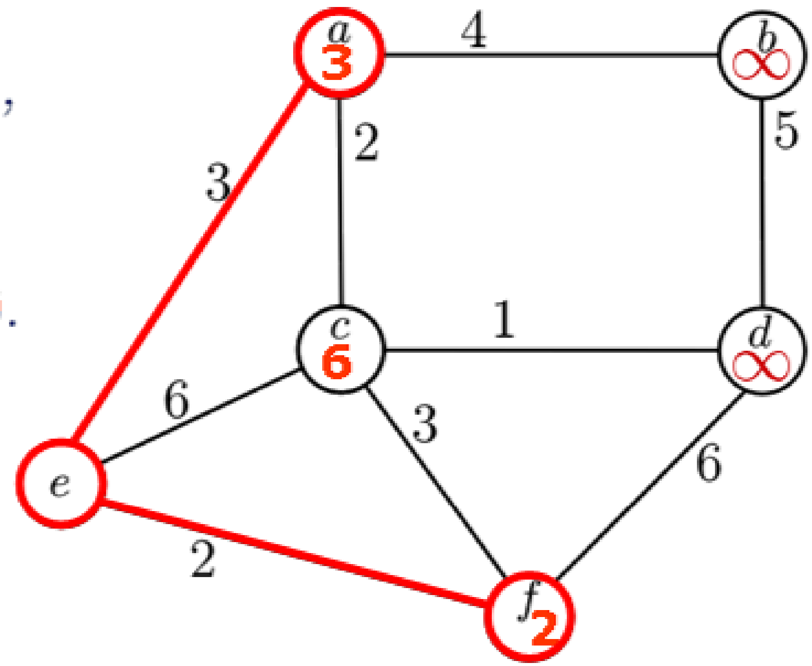
$L(b) = \text{mín}\{L(b), \omega_{fb}\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty,$

$L(c) = \text{mín}\{L(c), \omega_{fc}\} = \text{mín}\{6, 3\} = \omega_{fc} = 3,$

$L(d) = \text{mín}\{L(d), \omega_{fd}\} = \text{mín}\{\infty, 6\} = \omega_{fd} = 6.$

$\text{Seleccionamos mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(a).$

Añadimos el vértice a a U y la arista $\{e, a\}$ a T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

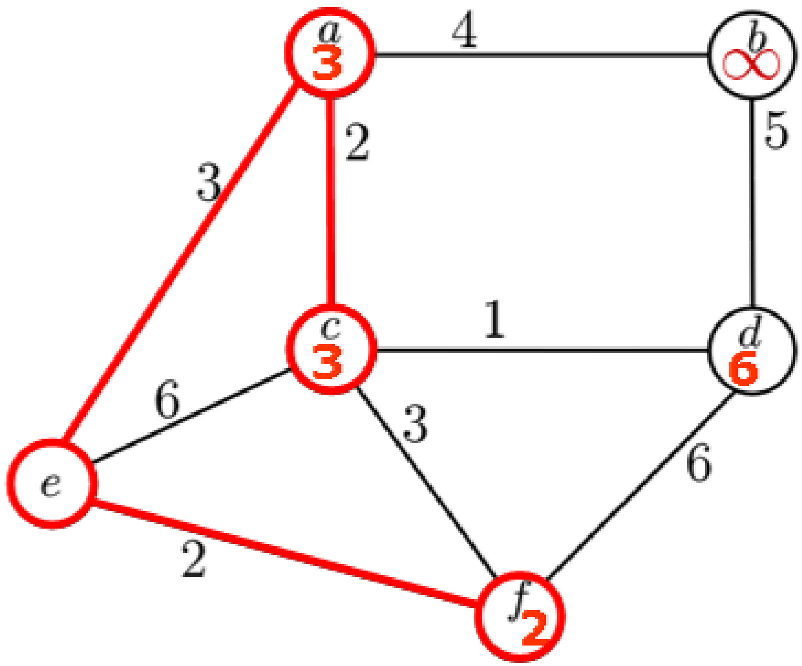
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\}\},\ U = \{e,f,a\}.$

$L(b) = \min\{L(b), \underline{\omega_{ab}}\} = \min\{\infty, 4\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(c) = \min\{L(c), \underline{\omega_{ac}}\} = \min\{3, 2\} = \omega_{ac} = 2,$
$L(d) = \min\{\underline{L(d)}, \omega_{ad}\} = \min\{6, \infty\} = \omega_{fd} = 6.$

Seleccionamos $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(c)$.

Añadimos el vértice c a U y la arista $\{a,c\}$ a T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

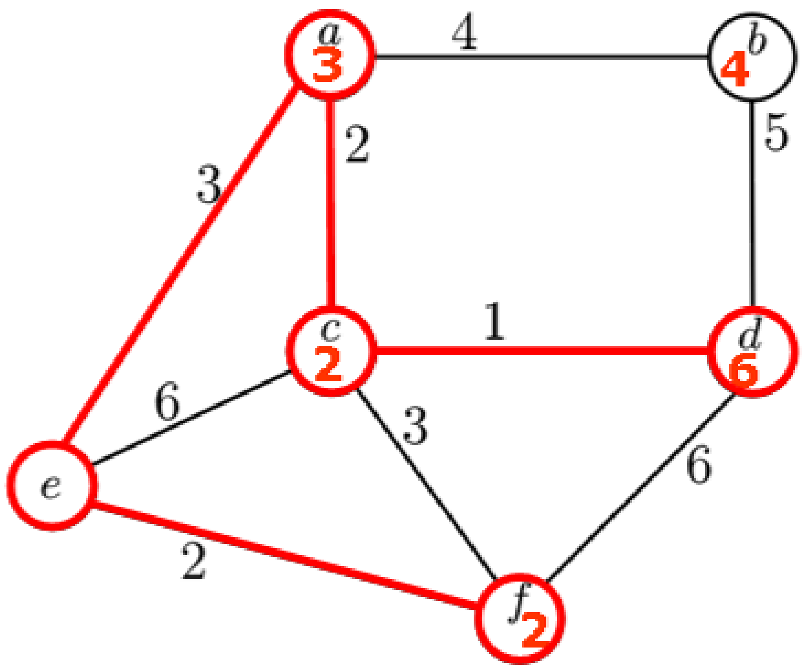
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\}\},\ U = \{e,f,a,c\}.$

$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{cb}\} = \text{mín}\{4,\infty\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(d) = \text{mín}\{L(d), \underline{\omega_{cd}}\} = \text{mín}\{6,1\} = \omega_{cd} = 1.$

Seleccionamos $\text{mín}_{u\notin U}\{L(u)\} = L(d).$

Añadimos el vértice d *a* U *y la arista* $\{c,d\}$ *a* T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

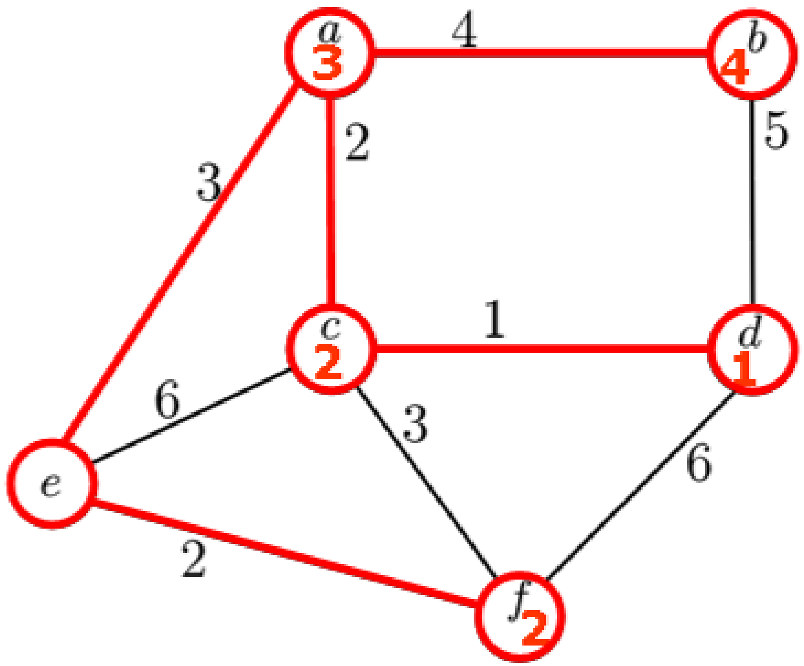
EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\},\{c,d\}\},$
$U = \{e,f,a,c,d\}.$

$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{db}\} = \text{mín}\{4,5\} = \omega_{ab} = 4,$

$\text{Seleccionamos } \text{mín}_{u \notin U}\{L(u)\} = L(b).$

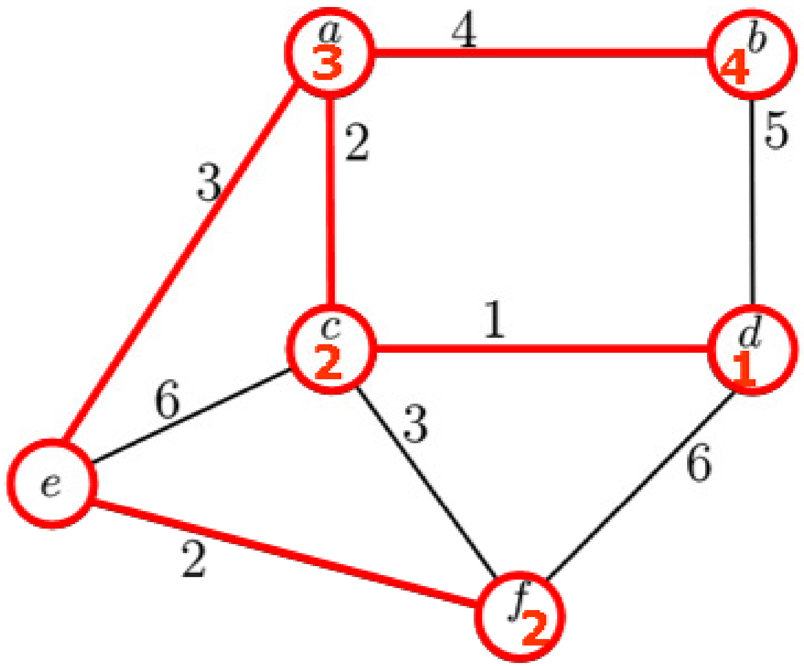
Añadimos el vértice b a U y la arista $\{a,b\}$ a T.



6. ÁRBOLES GENERADORES DE MÍNIMO PESO

EJEMPLO: Apliquemos el algoritmo de Prim al siguiente grafo.

$$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\},\{c,d\},\{a,b\}\},$$
$$U = \{e,f,a,c,d,b\}, \text{ PARAR.}$$



T es un árbol generador de mínimo peso, con peso 2+3+2+1+4=12.