Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
DNI:	

Grupo de teoría:

☐	**Grupo 01**	**- Lunes de 09:00 a 11: 00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**
☐	**Grupo 02**	**- ARA - Miércoles de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Escolano Ruiz, Francisco Javier)**
☐	**Grupo 03**	**- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 04**	**- Martes de 15:00 a 17:00**	**(Prof. Salinas Serrano, José María)**
☐	**Grupo 05**	**- Martes de 09:00 a 11:00**	**(Prof. Vicent Francés, José Francisco)**
☐	**Grupo 40**	**- Lunes de 11:00 a 13:00**	**(Prof. Martínez Pérez, Francisco Miguel)**

Examen Final de Matemáticas II. 6 Junio 2017

Instrucciones generales:

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre y DNI) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

	Nota	
Ejercicio 1	**2**	
Ejercicio 2	**2**	
Ejercicio 3	**2**	
Ejercicio 4	**2**	
Ejercicio 5	**2**	
Total		

1. (2 puntos) En la siguiente función encontrar los puntos críticos y determinar si éstos son máximos o mínimos relativos o puntos de silla:

$$f(x, y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$$

Calculamos la primera derivada e igualamos a cero

$$f_x = 9x^2 - 225 = 0 \text{ y } f_y = -10y \quad + 70$$

Con esto obtenemos $x = \pm 5$ y $y = 7$. Evaluamos los puntos $(-5,7)$ y $(5,7)$

Calculamos la segunda derivada

$f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = -10$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$

Evaluando el punto $(5,7)$ obtenemos que es un punto de silla

Evaluando el punto $(-5,7)$ obtenemos que es un máximo

2. (2 puntos) Sean $P(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)(x-1.5) - 2(x-1)(x-1.5)x$ y $Q(x) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)x - 2(x-2)x(x-1.5)$, dos polinomios de interpolación de una misma función $f(x)$, obtenidos mediante diferencias divididas a partir de los mismos x_i en distinto orden.

a) (1.5 puntos) Obtener las tablas de diferencias divididas que dan origen a $P(x)$ y $Q(x)$, teniendo en cuenta que $P(x_i) = Q(x_i)$, siendo x_i la primera columna de la tabla.

b) (0.5 puntos) Estimar $f(1.75)$ usando $P(x)$ y $Q(x)$.

a) Como $P(x)$ y $Q(x)$ interpolan a $f(x)$, esto quiere decir que $P(x) \cong f(x)$ y $Q(x) \cong f(x)$.

Es decir que en los nodos $P(x_i) = Q(x_i),\ \forall\, i = \{0,\ 1,\ 1.5,\ 2\}$

La tabla de diferencias divididas que da origen a $P(x)$ es

1	3			
		1/2		
1.5	P(1.5)		1/3	
		(P(0)-P(1.5))/(0-1.5)		-2
0	P(0)		...	
		(P(a)-P(0))/(a-0)		
a	P(a)			

La tabla de diferencias divididas que da origen a $Q(x)$ es

2	5/3			
		-2/3		
0	Q(0)		-5/3	
		(Q(1.5)-Q(0))/(1.5-0)		-2
1.5	Q(1.5)		...	
		(Q(b)-Q(1.5))/(b-1.5)		
b	Q(b)			

Es evidente que el punto que falta para la tabla de $P(x)$ es el 2 y el punto que falta para la tabla de $Q(x)$ es el 1.

Con lo que $a = 2, P(a) = P(2) = Q(2) = \frac{5}{3}$ y $b = 1, Q(b) = Q(1) = P(1) = 3$

Con estos datos la obtención de los valores que faltan es inmediata

1	3			
		1/2		
1.5	13/4		1/3	
		1/6		-2
0	3		-5/3	
		-2/3		
2	5/3			

2	5/3			
		-2/3		
0	3		-5/3	
		1/6		-2
1.5	13/4		1/3	
		1/2		
1	3			

b) Y el valor en 1.75 es

$$P(1.75) = \frac{89}{32} = 2.78125$$

$$Q(1.75) = \frac{89}{32} = 2.78125$$

3. (2 puntos) Una determinada sustancia se desintegra según la ecuación

$$A(t) = P\, e^{-0.0248t},$$

donde P es la cantidad inicial en el tiempo $t = 0$ y $A(t)$ la cantidad resultante después de t años. Si inicialmente se depositan 500 miligramos de dicha sustancia. Se necesita determinar el tiempo que debe transcurrir para que quede solo el 1 por ciento de la sustancia inicial depositada.

a) (0.5 puntos) Determina la función $f(t)$ cuya raíz nos da el tiempo que debe transcurrir para que quede el 1 por ciento de la sustancia inicial depositada.

b) (1.5 puntos) Partiendo de $t_0 = 0$ aplica el método de Newton para calcular dicha raíz. (utiliza 5 cifras decimales y 8 iteraciones)

a) $0{,}01\ 500 = 500\, e^{-0{,}0248t}$ $\qquad f(t) = e^{-0{,}0248t} - 0{,}01$

b) $f'(t) = (-0{,}0248)\, e^{-0{,}0248t}$

	t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	h_i
0	0	0,99	-0,0248	-39,91935
1	39,91935	0,36158	-0,00922	-39,21692
2	79,13627	0,1305	-0,00348	-37,5
3	116,61328	0,04543	-0,00137	-33,16058
4	149,56256	0,01436	-0,0006	-23,93333
5	173,23469	0,00345	-0,00033	-10,45455
6	183,64645	0,00038	-0,00026	-1,46154
7	185,26183	0,00001	-0,00025	-0,04
8	185,30183	0		

4. (2 puntos*)* Dado el spline cúbico interpolador de los puntos:
$(x_0, y_0) = (0,1)$, $(x_1, y_1) = (1,2)$ y $(x_2, y_2) = (2, a)$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si\ \ 0 \le x\ < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si\ \ 1 \le x\ \le 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural, es decir $S_0''(x_0) = S_1''(x_n) = 0$
Recuerda también que $S_1'(x_1) = S_0'(x_1)$ y $S_1''(x_1) = S_0''(x_1)$

$S_0'(x) = 2 - 3x^2$

$S_0''(x) = -6x$

$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$

$S_1'(x) = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$

$S_1''(x) = 2c + 6dx - 6d$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1$ $\qquad a = -1$

5. (2 puntos) Sea la función $f(x)$ una función contínua en [0,1] y derivable en (0,1), tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utiliza el método de Integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Tenemos que averiguar $\int_0^1 f(x)dx$.

Podemos hacerlo aplicando integración por partes a $\int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1$:

$$\int_0^1 2xf'(x)\,dx = \left[\int 2xf'(x)\,dx\right]_0^1 = \left\|\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \\ u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = f'(x)\,dx & v = f(x) \end{array}\right\| =$$

$$= \left[2x\,f(x) - \int f(x)\,2\,dx\right]_0^1 = [2x\,f(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$= \left\|\begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1 \end{array}\right\| = (0) - 2\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$\text{luego } \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2}$$

O directamente a $\int_0^1 f(x)\,dx$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_0^1 = \left\|\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \\ u = f(x) & du = f'(x)\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right\| = \left[f(x)\,x - \int x\,f'(x)\,dx\right]_0^1 =$$

$$= [f(x)\,x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(x)\,dx = \left\|\begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \int_0^1 2xf'(x)\,dx = 1 \end{array}\right\| = (0) - \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$