

Sistemas de ecuaciones Lineales

Métodos Directos:

Gauss.

Gauss-Jordan

Matriz inversa

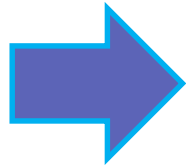
Factorización LU

Métodos Iterativos.

Jacobi

Gauss-Seidel.

Convergencia de los métodos iterativos.



Factorización LU

→ En algunas aplicaciones se plantean sistemas con **igual matriz A** pero diferentes t. independientes:

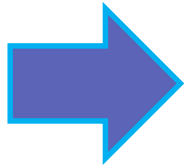
$$Ax = \mathbf{b}_1, \quad Ax = \mathbf{b}_2, \quad Ax = \mathbf{b}_3, \dots$$

Ej.: compañía eléctrica que necesita calcular las entradas (incógnitas) a partir de los cambios producidos por las entradas de la derecha (b_i).

→ Como la matriz A es la misma → se repetiría Gauss → gasto extra.

→ **Opción:** ¿ calcular los SL con la inversa ? ... no,
mejor, si es posible, hacer lo siguiente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$



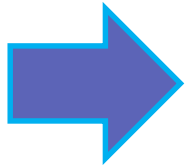
Factorización LU

- ❖ Consiste en descomponer la matriz de coeficientes

$$A = LU$$

L: cuadrada triangular inferior e invertible.

U: una escalonada de A, puede ser cuadrada o no



Resolver $Ax = b$ con Factorización $A = LU$

- ❖ Se considera

$$Ax = b$$

donde la matriz A admite la factorización LU

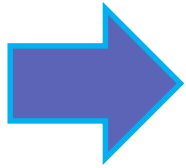
- ❖ Entonces para resolver

$$Ax = b \leftrightarrow LUx = b$$

se resuelven los SL:

$$Ly = b \quad \text{SCD - resoluble por sustitución progresiva}$$

$$Ux = y \quad \text{Sistema triangular resoluble por Gauss}$$



Factorización LU

❖ **A cuadrada (n x n)**

L (n x n) triangular inferior e invertible.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix}$$

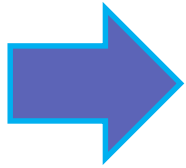
U: (n x n) triangular superior.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular:

$A=(a_{ij})$ (nxn), es triangular superior si $a_{ij} = 0, i > j$.

$A=(a_{ij})$ (nxn), es triangular inferior si $a_{ij} = 0, i < j$.



Factorización LU

❖ **A no cuadrada ($m \times n$)**

L: ($n \times n$) triangular inferior e invertible con **1** en la diagonal

U: ($m \times n$) con $u_{ij} = 0$ si $i > j$. (1)

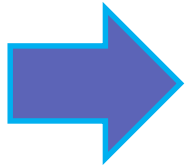
Ej matrices U que satisfacen (1)

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & \mathbf{d}_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{d}_3 & u_{31} & u_{32} \end{bmatrix}$$

(3 x 5)

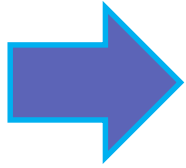
$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & \mathbf{d}_2 & u_{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{d}_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5 x 3)



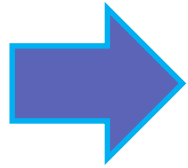
Factorización LU

- ❖ Tanto si A es $(n \times n)$ como $(m \times n)$:
- ❖ U es una **matriz escalonada de A** siempre y cuando se haya obtenido **sin hacer permutaciones** de filas (OE-T1)
- ❖ Si para obtener una escalonada de A es necesario hacer OE-T1
→ **no existe** factorización LU.



Ventajas de resolver SL con matrices triangulares

- ❖ Los SL con matrices triangulares son **más fáciles de resolver**.
- ❖ Si **U** tiene $n - 1$ principales \rightarrow la factorización es única.
- ❖ Las **matrices triangulares** se usan en análisis numérico para resolver SL, calcular inversas y determinantes de matrices.



Matrices L y U

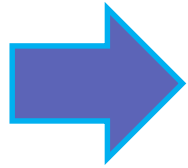
❖ $A (m \times n)$

$L (m \times m)$: triangular inferior invertible.

$U (m \times n)$: triangular superior

❖ Se fija $L = I_m \rightarrow l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, m$

❖ U es una de las matrices escalonadas de A



Obtención de L y U

A ($m \times n$), L ($m \times m$), U ($m \times n$)

a) Inicio se fija: $L = I_m$

b) Obtención de U:

Aplicar OE/fila (no T1: no permutar filas) y obtener una matriz A' escalonada de A .

c) Obtención de L:

Para cada OE-T3 : $F_i \leftrightarrow F_i + c F_j$ colocar en la posición (i, j) de la matriz L el escalar $-c$.

d) Se sigue proceso hasta conseguir A' .

$U = A'$, U no tiene pq tener 1 principales en la diagonal de A' .

L tiene 1 en la diagonal principal.



Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio3 . Resolver SL por Factorización LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 5 \\ 4 & 18 & 6 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

(4 x 3)

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Con las siguientes operaciones OE-T3 se obtiene A' escalonada de A:

$$F2 \leftrightarrow F2 + 3F1$$

$$F3 \leftrightarrow F3 + (-2)F1$$

$$F4 \leftrightarrow F4 + 1F1$$

$$F3 \leftrightarrow F3 + (-4)F2$$

$$F4 \leftrightarrow F4 + 2F2$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No es necesario aplicar OE-T2 para obtener 1 principales.



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De A' se obtiene L

Se comienza con
 $L = I$ (4x4)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para cada OE-T3 : $F_i \leftrightarrow F_i + c F_j$ se coloca en (i, j) de L el escalar $-c$.

$$F_2 \leftrightarrow F_2 + 3F_1 \rightarrow (2, 1) = -3$$

$$F_3 \leftrightarrow F_3 + (-2)F_1 \rightarrow (3, 1) = 2$$

$$F_4 \leftrightarrow F_4 + 1F_1 \rightarrow (4, 1) = -1$$

$$F_3 \leftrightarrow F_3 + (-4)F_2 \rightarrow (3, 2) = 4$$

$$F_4 \leftrightarrow F_4 + 2F_2 \rightarrow (4, 2) = -2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observa en L que $l_{ii} = 1$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

$$A = LU$$

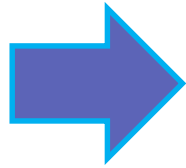
$$L = \begin{matrix} (4 \times 4) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$U = \begin{matrix} (4 \times 3) \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Resolver SL:

$$Ly = b \quad \text{sustitución progresiva}$$

$$Ux = y \quad \text{Gauss}$$



Resolución de $Ly = b$ mediante sustitución progresiva

$$l_{11}y_1 = b_1$$

$$l_{21}y_1 + l_{22}y_2 = b_2$$

$$l_{m1}y_1 + l_{m2}y_2 + \dots + l_{mm}y_m = b_m$$

**Vector
solución**

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$$

**Algoritmo
recursivo**

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21}y_1}{l_{22}}$$

$$y_m = \frac{b_m - \sum_{i=1}^{m-1} l_{mi}y_i}{l_{mm}}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

$$Ly = b$$

sustitución progresiva

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4x4)

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} y_1 & & & = & -1 \\ -3y_1 & + & y_2 & = & 5 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & = & 6 \\ -y_1 & - & 2y_2 & + & y_4 & = & -3 \end{array}$$
$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Resolución de $Ux = y$

Por Sustitución Regresiva → Gauss

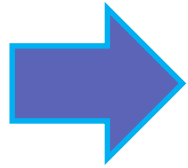
$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

Solución de $Ly = b$, $Ux = y$

→ Solución de $Ax = b$

$$x = \begin{bmatrix} (-6 + 3\alpha)/2 \\ (5 - 2\alpha)/3 \\ \alpha \end{bmatrix}$$



Obtener U con 1 principales

$$A \text{ (mxn)}, \quad L \text{ (mxm)}, \quad U \text{ (mxn)}$$

a) Inicio se fija: $L = I_m$

b) Obtención de U:

Antes de obtener cada 1 principal en A **se copia** desde el candidato a 1 principal (sup. que es el k-ésimo) hasta el final de la columna, en la k-ésima columna de la matriz L.

c) U tendrá 1 en la diagonal pero L no tiene por qué tenerlo.



Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

$$2x + 4y - 6z = -8$$

$$-x + y - 3z = -8$$

$$x + y = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{11} \rightarrow se copia en la columna 1 de L desde la posición (1,1)

Operaciones para escalar A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F1 \leftrightarrow (1/2)F1$$

$$F2 \leftrightarrow F2 + F1$$

$$F3 \leftrightarrow F3 - F1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{22} \rightarrow se copia en la columna 2 de L desde la posición (2,2)

Operaciones para escalar A

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F2 \leftrightarrow (1/3)F2$$

$$F3 \leftrightarrow F3 + F2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{33} → se copia en la columna 3 de L desde la posición (3,3)

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz A escalonada

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

sustitución progresiva

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3x3)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2y_1 = -8$$

$$-y_1 + 3y_2 = -8$$

$$y_1 - y_2 + y_3 = 3$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

$$Ux = y$$

sustitución regresiva

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3x3)

$$y = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución de $Ly = b$, $Ux = y$

→ Solución de $Ax = b$



MÉTODOS ITERATIVOS

Resuelven SL mediante sucesivas aproximaciones a la solución empezando con una estimación inicial de la solución (por lo general de cero)

Esto es lo que diferencia de los métodos directos que buscan soluciones exactas (por ejemplo con la inversa).

Son **útiles** para resolver problemas que involucran un número muy **grande de variables** (a veces millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

- Sólo es necesario almacenar los coeficientes no nulos de la matriz del sistema.
- Son menos sensibles a los errores de redondeo.



Métodos Iterativos

Los métodos iterativos lineales se basan en reescribir el problema

$$Ax = b \rightarrow x = Gx + c$$

donde **G** es una matriz (n x n) y **c** es un vector columna de dimensión n.

Algoritmo iterativo:

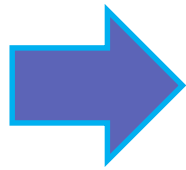
Sea $x^{(0)}$ una aproximación inicial a la solución

Para $k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c$$

Matriz **G** : matriz de iteración

Vector **c** : vector de iteración.



Métodos Iterativos

Se descompone:

$$A = L + D + U$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

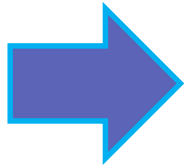
D: diagonal

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L: triangular inferior

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

U: triangular superior



Método Iterativo de Jacobi

$$Ax = b \Leftrightarrow (D + L + U)x = b$$

$$\Leftrightarrow Dx = b - (L + U)x$$

$$\mathbf{x} = D^{-1}[b - Lx - Ux]$$

Algoritmo de Jacobi

❶ Elegir una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$

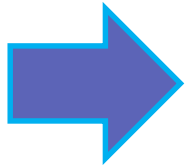
❷ Para $k = 1, 2, \dots, \text{MaxIter}$

❶ Para $i = 1, 2, \dots, n$, calcular

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

→ En la fila i
se despeja la incógnita i

❷ Si se cumple el criterio de parada, tomar $\mathbf{x}^{(k)}$ como aproximación a la solución



Método Iterativo de Jacobi

Se aplica sólo a **sistemas cuadrados** (N° incógnitas = N° ecuaciones).

Para obtener ecuación de recurrencia:

Se ordenan las ecuaciones y las incógnitas.

De la ecuación i se despeja la incógnita i ($a_{ii} \neq 0$).



Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio5 . Resolver por Jacobi

$$\begin{array}{rclcl} 7x_1 & - & x_2 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & = & -7 \end{array}$$

Se despeja la variable x_1 en ecuación 1
variable x_2 en ecuación 2

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{5 + x_2}{7} \\ x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5} \end{array}$$

Se elige aproximación inicial a la solución $(x_1 \ x_2) = (0, 0)$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio5 . Resolver por Jacobi

ITERACIONES

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0)$$

El superíndice
es la iteración
que se está
realizando

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (0,714, 1,400)$$

$$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (0,914, 1,829)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{5 + 0}{7} \approx 0,714$$

$$x_2^{(1)} = \frac{7 + 3 \cdot 0}{5} \approx 1,400$$

$$x_1^{(2)} = \frac{5 + 1,4}{7} \approx 0,914$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7 + 3 \cdot 0,714}{5} \approx 1,829$$

¿Cuándo paramos ?
Hacer 6 iteraciones

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	0'714	0'914	0'976	0'9934	0'998	0'999
$x_2^{(i)}$	0	1'400	1'829	1'949	1'985	1'996	1'999

Solución $\rightarrow x_1$ converge a $\rightarrow 1$

Solución $\rightarrow x_2$ converge a $\rightarrow 2$



Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6. Resolver por Jacobi

$$\begin{array}{rrcrcl} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & 11 \\ 3x_2 & -x_3 & & +8x_4 & = & 15 \end{array}$$

Despejamos las incógnitas

Primero despejamos x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda, ...

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\ x_2 & = & (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\ x_3 & = & (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\ x_4 & = & (15 - 3x_2 + x_3)/8 \end{array}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Definimos la sucesión

$$x_1^{(k+1)} = (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10$$

$$x_2^{(k+1)} = (6 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11$$

$$x_3^{(k+1)} = (11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)})/10$$

$$x_4^{(k+1)} = (15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/8$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Primera iteración

Punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^t = (0, 0, 0, 0)^t$.

$$x_1^{(1)} = (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 = 0.6$$

$$x_2^{(1)} = (6 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 = 0.545$$

$$x_3^{(1)} = (11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)})/10 = 1.1$$

$$x_4^{(1)} = (15 - 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)})/8 = 1.875$$

Criterio de parada

Impondremos que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que una 0.01.

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 4} (|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}|) = \max(0.6, 0.545, 1.1, 1.875) = 1.875$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Segunda iteración

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 &&= (6 + 0.545 - 2(1.1))/10 = 0.435 \\x_2^{(2)} &= (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 &&= (6 + 0.6 + 1.1 - 3(1.875))/11 = 1.886 \\x_3^{(2)} &= (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(1)})/10 &&= (11 - 2(0.6) + 0.545 + (1.875))/10 = 1.22 \\x_4^{(2)} &= (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 &&= (15 - 3(0.545) + 1.1)/8 = 1.808\end{aligned}$$

Criterio de parada

¿Se cumple? No

$$\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_{\infty} = 0.357 > 0.01$$

Se siguen las iteraciones
hasta que se **cumple**
el criterio de parada



(cont)

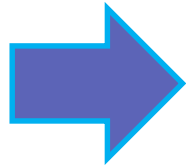
Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.545 \\ 1.1 \\ 1.875 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.189 \\ 1.222 \\ 1.808 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.374 \\ 0.203 \\ 1.213 \\ 1.957 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.156 \\ 1.241 \\ 1.950 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.153 \\ 1.240 \\ 1.979 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Cada vez que se calcula una iteración se comprueba el criterio de parada
En este caso se cumple en la iteración 6.

Se para y el vector \mathbf{x} será la
aproximación a la solución.

$$\|\mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(5)}\|_{\infty} = 0.007 < 0.01$$



Método iterativo de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Observa la diferencia con Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

...

Jacobi usa el valor de las variables obtenido en la iteración anterior.

Gauss-S para la **variable i** considera el valor de la variable (i-1) que acaba de calcular en la misma iteración en la que se está haciendo el cálculo



Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

$$\begin{array}{rrcrcl} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & 11 \\ 3x_2 & -x_3 & & +8x_4 & = & 15 \end{array}$$

Despejamos incógnitas, igual que en Jacobi, en la ecuación i la incógnita i

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\ x_2 & = & (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\ x_3 & = & (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\ x_4 & = & (15 - 3x_2 + x_3)/8 \end{array}$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b) . Resolver por Jacobi

Definimos la sucesión, pero en cuanto calculamos una aproximación la usamos

$$x_1^{(k+1)} = (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10$$

$$x_2^{(k+1)} = (6 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11$$

$$x_3^{(k+1)} = (11 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)})/10$$

$$x_4^{(k+1)} = (15 - 3x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)})/8$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b) . Resolver por Jacobi

Primera iteración $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})^t = (0, 0, 0, 0)^t.$

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 &&= 0.6(6 + 0 - 0)/10 = 0.6 \\x_2^{(1)} &= (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 &&= (6 + 0.6 + 0 - 0)/11 = 0.6 \\x_3^{(1)} &= (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(0)})/10 &&= 1.1(11 - 2(0.6) + (0.6) + 0)/10 = 1.04 \\x_4^{(1)} &= (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 &&= (15 - 3(0.6) + (1.04))/8 = 1.78\end{aligned}$$

Criterio de parada: diferencia entre dos iteraciones menor que 0.01

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 4} (|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}|) = \max(0.6, 0.6, 1.04, 1.78) = 1.78$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

segunda iteración

$$x_1^{(2)} = (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 = (6 + 0.6 - 2(1.04))/10 = 0.452$$

$$x_2^{(2)} = (6 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 = (6 + 0.452 + 1.04 - 3(1.78))/11 = 0.196$$

$$x_3^{(2)} = (11 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_4^{(1)})/10 = (11 - 2(0.452) + 0.196 + (1.78))/10 = 1.2$$

$$x_4^{(2)} = (15 - 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)})/8 = (15 - 3(0.196) + 1.207)/8 = 1.953$$

Criterio de parada < 0.01 , no se cumple

$$\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_{\infty} = 0.404 > 0.01$$



(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

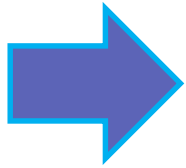
más iteraciones

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 1.04 \\ 1.78 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.452 \\ 0.196 \\ 1.207 \\ 1.953 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.157 \\ 1.235 \\ 1.971 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Criterio de parada < 0.01 , se cumple

$$\left\| \mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)} \right\|_{\infty} = 0.009 < 0.01$$

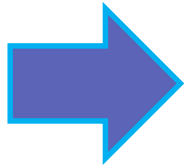


Convergencia de los métodos iterativos

Una condición suficiente para que los método de Jacobi y Gauss-Seidel converjan a la solución del SL es que la matriz de coeficientes sea estrictamente diagonal dominante.

$A = (a_{ij})$ lo será si

$$\sum_{j=1(i \neq j)}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$



Estudio de la matriz de coeficientes

Se comprueba si A es diagonal dominante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |2| > |1| + |0| \\ |5| > |2| + |-1| \\ |3| > |0| + |-1| \end{array}$$

A es diagonal dominante.

En un SL con matriz A de coeficientes está garantizada la convergencia