Fonaments dels Computadors

Tema 2: Àlgebra de Boole

Maria Teresa Signes

teresa@dtic.ua.es

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Docència en valencià

Objectius

- Donar a conèixer els principis de l'electrònica i el disseny bàsic de circuits digitals
- Relacionar els conceptes de representació de la informació amb els fonaments de la tecnologia electrònica
- Introduir les tecnologies d'integració

Continguts

Introducció

- Actualment, el transistor és un component essencial en la fabricació de sistemes digitals a causa del al seu comportament discret. S'utilitza com una clau electrònica o commutador entre dos estats clarament diferenciats: connectat i desconnectat.

- Por aquests motius l'àlgebra de Boole és l'eina matemàtica apropiada per l'anàlisi i el disseny dels circuits electrònics de commutació. Hi ha una relació bijectiva entre els circuits electrònics digitals i les funcions de l'àlgebra de Boole.

Àlgebra de Boole

- **Definició**: l'àlgebra de Boole binària o bivalent és una Algebra en què únicament hi ha dos elements: B = {0, 1}

  $\forall\ a \in B.\ a = 0 \vee a = 1$

- Les operacions de l'àlgebra per aquests elements són:

Operació suma lògica	Operació producte lògic
$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$

Àlgebra de Boole

Axiomes

A1. Associativitat:

$\forall$ a, b, c $\in \mathcal{B}$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

A2. Absorció:

$\forall$ a, b $\in \mathcal{B}$

$a + a{\cdot}b = a$

$a \cdot (a + b) = a$

A3. Commutativitat:

$\forall$ a, b $\in \mathcal{B}$

$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

A4. Idempotència:

$\forall$ a $\in \mathcal{B}$

$a + a = a$

$a \cdot a = a$

A5. Complementació:

$\exists$ 0, 1 $\in \mathcal{B}$; $\forall$ a $\in$ B; $\exists$ $\overline{a} \in \mathcal{B}$

$a + \overline{a} = 1$

$a \cdot \overline{a} = 0$

A6. Distributivitat:

$\forall$ a, b, c $\in \mathcal{B}$

$a{\cdot} (b + c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$

$a + (b{\cdot}c) = (a + b){\cdot}(a + c)$

Àlgebra de Boole

- **Teoremes**: alguns dels teoremes que es poden deduir dels axiomes de l'àlgebra són els següents:

1. Principi de dualitat
2. Elements neutres
3. Elements absorbents
4. Teorema de De Morgan
5. Teorema d'involució
6. Teorema del consens
7. Teorema de cancel.lació
8. Teorema de Shannon

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

1. Principi de dualitat: Si un teorema és vàlid, també ho és el dual. L' enunciat dual és el que resulta d'intercanviar les operacions +, · i els elements 0 i 1.

   Demostració: El principi de dualitat és cert per a les àlgebres de Boole perquè cada axioma consta d'un enunciat i del seu dual.

Exemple1:

Teorema: $\forall\, a \in B.\ a + 1 = 1$

Teorema dual: $\forall\, a \in B.\ a \cdot 0 = 0$

Exemple2:

Teorema: $\forall\, a,b \in B.\ a + ab = a$

Teorema dual: $\forall\, a,b \in B.\ a \cdot (a+b) = a$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

2. Elements neutres:

$\forall a \in B.\ a + 0 = a$; $\forall a \in B.\ a \cdot 1 = a$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

3. Elements absorbents:

$\forall\ a \in B.\ a + 1 = 1$; $\forall\ a \in B.\ a \cdot 0 = 0$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

4. Teorema de De Morgan:

$$\forall\ a, b \in B.\ \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}\ ;\quad \forall\ a, b \in B.\ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}\ ;$$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

5. Teorema d'involució

$$\forall\ a \in B.\ \overline{\overline{a}} = a$$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

6. Teorema del consens

$$\forall\ a, b, c \in B.\ a\,b + \overline{a}\,c = a\,b + \overline{a}\,c + b\,c$$

$$\forall\ a, b, c \in B.\ (a + b) \cdot (\overline{a} + c) = (a + b) \cdot (\overline{a} + c) \cdot (b + c)$$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l'àlgebra de Boole

7. Teorema de cancel.lació

$$\forall\ a, b \in B.\ a + \overline{a}\,b = a + b \ ;\ \forall\ a, b \in B.\ a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$$

Àlgebra de Boole

- Teoremes de l´àlgebra de Boole

8. Teorema de Shannon

Qualsevol funció de l'àlgebra de Boole expressada com a *producte de sumes* té una una expressió equivalent expressada com a *suma de productes* i viceversa (veure més endavant).

Funcions booleanes

- Representació de les funcions booleanes
  - Taula de veritat
  - Representació algebraica
  - Representació numèrica

Funcions booleanes

Taula de veritat

- La taula de veritat d'una funció $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de B^n en B és una taula amb l'estructura gràfica següent.

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
0	0	...	1	$f(0, 0, \ldots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
1	1	...	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

Funcions booleanes

- Taula de veritat
  - Exemple 1: funció suma

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

  - Exemple 2: si el nombre representat per les entrades és primer el resultat és 1 i si no, és 0.

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funcions booleanes

Representació algebraica

- La funció booleana es representa mitjançant una expressió boolena:

1. Les variables booleanes són expressions booleanes.
2. Els valors 0 i 1 són expressions booleanes.
3. Si E_1 i E_2 són expressions booleanes, $E_1 + E_2$, $E_1 \cdot E_2$, $\overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$ són també expressions booleanes.
4. No hi ha cap més expressió booleana que la que pot obtindre's per les regles anteriors.

Funcions booleanes

Representació algebraïca

- Exemples:

$f_1(a, b) = a + b$

$f_2(a, b) = \overline{a} + b + a\overline{b}$

$f_3(a, b, c) = a + (b\overline{c} + a\overline{b}c) + c$

$f_4(a, b, c, d) = (\overline{a}+b) \cdot (\overline{b}c + abc) \cdot (a+\overline{b}+d)$

Funcions booleanes

Representació algebraica

- L'avaluació de l'expressió per a un element de B^n té com a resultat el valor de la funció.
  - Exemple: $f(a, b) = \overline{a} + b + a\overline{b}$ $\qquad f(1, 0) = 0 + 0 + 1 \cdot 1 = 1$
- La representació algebraïca d'una funció booleana no és única.

$$f_1(a, b) = \overline{a} + b + a\overline{b} = \overline{a} + b$$

$$f_2(a, b, c) = a + bc = (a + b)(a + c)$$

$$f_3(a, b, c) = abc + ac = ac$$

Funcions booleanes

Representació algebraica

- S'anomena **terme suma** una suma lògica de variables booleanes, bé en la seua forma directa o complementada.
- S'anomena **terme producte** un producte lògic de variables booleanes, bé en forma directa o complementada.
  - Exemple: $f(a, b, c) = \underbrace{a\bar{b}c}_{\text{terme producte}} + \underbrace{\underbrace{(\bar{a}+b+c)} + \underbrace{(a+\bar{c})}}_{\text{terme suma}}$
- S'anomena **terme canònic** d'una funció booleana a un terme suma o producte en el qual intervenen totes les variables de la funció.
- S'anomena **miniterme** (m_i) a un terme canònic producte.
- S'anomena **maxiterme** (M_i) a un terme canònic suma.

Funcions booleanes

- Representació algebraica
  - S'anomena **representació algebraica canònica** o **representació canònica** d'una funció booleana la seua representació algebraica composta de termes canònics del mateix tipus.
  - S'anomena representació d'una funció en **POS** o **producte de sumes** la representació canònica d'una función composta únicament de termes suma o maxitermes.
  - S'anomena repesentació d'una funció en **SOP** o **suma de productes** la representació canònica d'una funció composta únicament de termes producte o minitermes.

  - Exemples: $f_1(a, b) = ab + a\overline{b}$

    $f_2(a, b, c) = (a+b+\overline{c})\ (\overline{a}+b+c)\ (a+\overline{b}+\overline{c})$

    $f_3(a, b, c, d) = (a+b+c+d)$

Funcions booleanes

- Representació algebraica
  - Qualsevol funció booleana pot expressar-se com a POS o SOP
  - Teorema de Shannon: Tota funció de l'àlgebra de Boole expressada com un POS té una expressió equivalent expressada com una SOP i viceversa.

Funcions booleanes

- **Representació numèrica**
  - Els termes canònics producte (minitermes) o suma (maxitermes) s'han de numerar correlativament.
  - Exemple: La taula de veritat següent mostra aquesta numeració per a una funció de 3 variables f(a, b, c):

a	b	c	Maxitermes: termes suma	M_i	minitermes: termes producte	m_i
0	0	0	$a+b+c$	M_0	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$	m_0
0	0	1	$a+b+\overline{c}$	M_1	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c$	m_1
0	1	0	$a+\overline{b}+c$	M_2	$\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}$	m_2
0	1	1	$a+\overline{b}+\overline{c}$	M_3	$\overline{a}\cdot b\cdot c$	m_3
1	0	0	$\overline{a}+b+c$	M_4	$a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$	m_4
1	0	1	$\overline{a}+b+\overline{c}$	M_5	$a\cdot\overline{b}\cdot c$	m_5
1	1	0	$\overline{a}+\overline{b}+c$	M_6	$a\cdot b\cdot\overline{c}$	m_6
1	1	1	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$	M_7	$a\cdot b\cdot c$	m_7

Funcions booleanes

- Representació numèrica
  - La representació numèrica d'una funció ve donada per la relació de minitermes o maxitermes que la componen. Els termes s'ordenen de menor a major valor numèric.
  - Els símbols Σ, Π indiquen la representació algebraica equivalent como una suma de productes o producte de sumes respectivament. S'afegeix com a subíndex la quantitat de variables booleanes de la funció.
  - Si les variables ocupen sempre el mateix lloc en els termes que componen la funció canònica, la representació numèrica de la funció és única per a la suma de productes i per al producte de sumes.

Funcions booleanes

- Representació numèrica: partint de la taula de veritat

Exemple:

a	b	c	f	
0	0	0	0	$\rightarrow a + b + c$
0	0	1	1	$\rightarrow \bar{a}\bar{b}c$
0	1	0	1	$\rightarrow \bar{a}b\bar{c}$
0	1	1	0	$\rightarrow a + \bar{b} + \bar{c}$
1	0	0	0	$\rightarrow \bar{a} + b + c$
1	0	1	1	$\rightarrow a\bar{b}c$
1	1	0	1	$\rightarrow ab\bar{c}$
1	1	1	0	$\rightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

Suma de Productes (SOP)

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

$$f(a, b, c) = \sum_{3} m(1, 2, 5, 6)$$

Producte de Sumes (POS)

$$f(a, b, c) = (a+b+c)\,(a+\bar{b}+\bar{c})\,(\bar{a}+b+c)\,(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$$

$$f(a, b, c) = \prod_{3} M(0, 3, 4, 7)$$

Funcions booleanes

- Representació numèrica

Exemples:

$$f_1(a, b) = \overline{a}b + ab = \sum_2 m(1, 3)$$

$$f_2(a, b, c) = abc + \overline{a}b\overline{c} = \sum_3 m(2, 7)$$

$$f_3(a, b, c) = (a+b+\overline{c}) \cdot (a+\overline{b}+c) \cdot (a+\overline{b}+\overline{c}) \cdot (\overline{a}+b+c) \cdot (\overline{a}+\overline{b}+c) \cdot (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = \prod_3 M(1, 2, 3, 4, 6, 7)$$

Funcions booleanes

Representació numèrica

- La representació numèrica de les funcions incompletes inclou en una expressió addicional les combinacions de les variables indeterminades.

Exemple:

$$f(a, b, c) = \sum_{3} m(3, 4) + \sum_{\varnothing} m(1, 2, 6)$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	0

Simplificació de funcions booleanes

- Simplificar una funció booleana representada en notació algebraica consisteix a trobar una expressió algebraica equivalent que continga el menor nombre d'operacions booleanes.

Exemple:

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc$$

Funció simplificada:

$$f(a, b, c) = c$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Simplificació de funcions booleanes

- L'expressió algebraica mínima pot no ser única.

Exemple:

$$f(a, b, c) = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funcions simplificades:

$$f(a, b, c) = \bar{a}b + a\bar{b} + ac$$

$$f(a, b, c) = \bar{a}b + a\bar{b} + bc$$

Simplificació de funcions booleanes

- Mètodes de simplificació de funcions booleanes:
  - Simplificació algebraica.
  - Simplificació mitjançant els mapes de Veitch-Karnaugh.

Simplificació de funcions booleanes

Simplificació algebraica:

- Consisteix en l’aplicació sistemàtica dels axiomes i teoremes de l’àlgebra de Boole.

Exemple:

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc = c$$

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc =$$

$$= (\bar{a} + a)\bar{b}c + (\bar{a} + a)bc = \qquad \text{(A1, A6)}$$

$$= \bar{b}c + bc = \qquad \text{(A5)}$$

$$= (\bar{b} + b)c = c \qquad \text{(A6) (A5)}$$

Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Taula V-K per a funcions de dues variables:

f(a, b)

a \ b	0	1
0	0	1
1	2	3

  - Taula V-K per a funcions de tres variables:

f(a, b, c)

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Taula V-K per a funcions de quatre variables:

f(a, b, c, d)

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

  - Tabla V-K per a funcions de cinc variables:

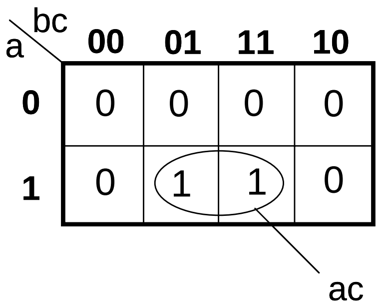
f(a, b, c, d, e)

ab \ cde	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

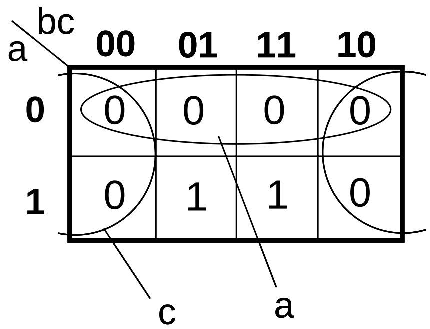
Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Exemple 1:

$f(a, b, c) = abc + a\bar{b}c$



f (a, b) = ac

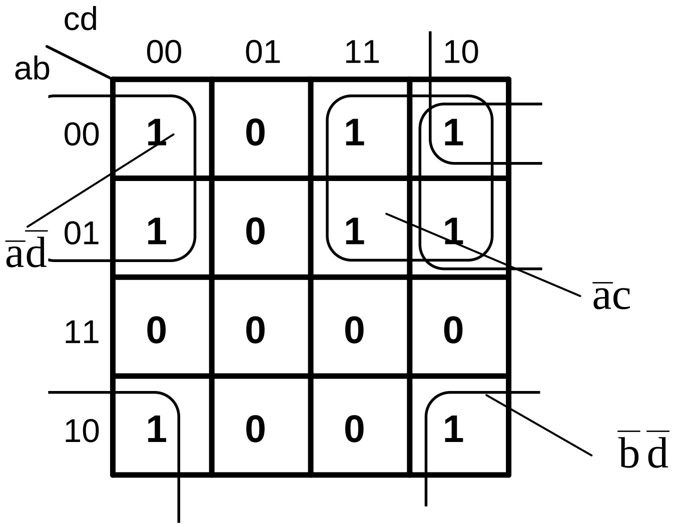


f (a, b) = ac

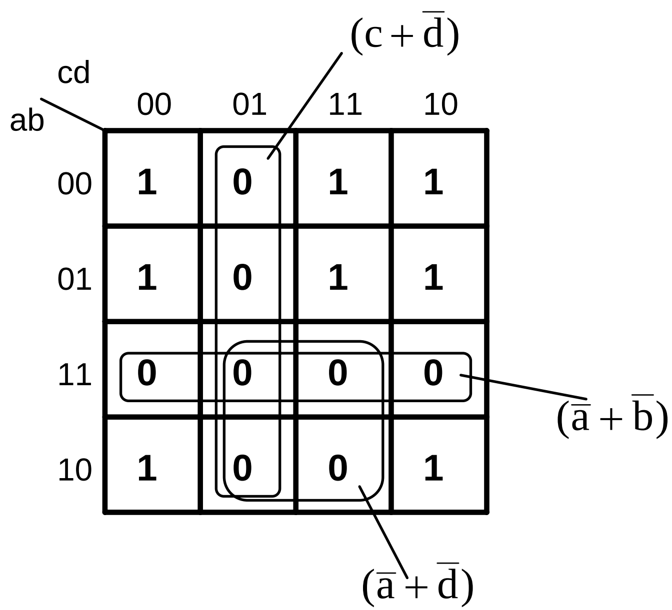
Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Exemple 2:

$$f(a, b, c, d) = \sum_4 m(0,2,3,4,6,7,8,10)$$



$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d} + \bar{a}c$



$f(a,b,c,d) = (\bar{a}+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b})(c+\bar{d})$

Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Exemple 3:

$$f(a, b, c, d, e) = \sum_{5} m(0,2,4,6,9,13,16,18,20,22,26,29,30,31)$$

ab \ cde	000	001	011	010	110	111	101	100
00	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
01	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
11	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**

$\bar{a}b\bar{d}e$

$abce$

$\bar{b}\bar{e}$

$ad\bar{e}$

$$f(a,b,c,d,e) = (\bar{a}b\bar{d}e + abce + \bar{b}\bar{e} + ad\bar{e})$$

Simplificació de funcions booleanes

- Simplificació mitjançant mapes de **Veitch-Karnaugh:**
  - Exemple 4:

$$f(a,\ b,\ c) = \sum_{3} m(3,4) + \sum_{\varnothing} m(1,2,6)$$

abc	f
000	0
001	X
010	X
011	1
100	1
101	0
110	X
111	0

a \ bc	00	01	11	10
0	**0**	**X**	**1**	**X**
1	**1**	**0**	**0**	**X**

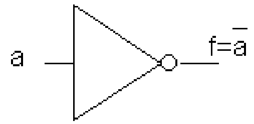
$$f(a,b,c) = \overline{a}b + a\overline{c}$$

Implementació de funcions booleanes

- La implementació de funcions booleanes es sustenta en la capacitat tecnològica per a construir dispositius electrònics que executen operadors de l'àlgebra de Boole.
- Aquests dispositius electrònics es denominen portes lògiques.
- La implementació d'una funció booleana consisteix en la construcció d' un circuit digital fet de portes lògiques en el qual a partir dels senyals lògics de les variables d'entrada s'obté el senyal lògic de la funció en l'eixida.

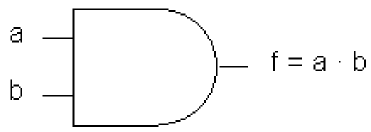
Implementació de funcions booleanes

- Portes lògiques bàsiques: implementen les operacions de l'àlgebra de Boole
  - Operació negació: porta NOT, inversor o negador



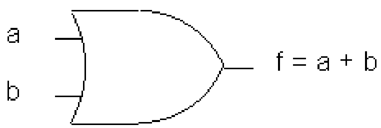
a	f
0	1
1	0

  - Operació producte: porta AND



a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

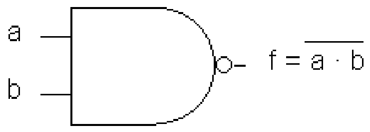
  - Operació suma: porta OR



a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

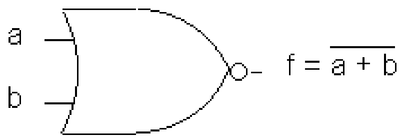
Implementació de funcions booleanes

- Portes lògiques (cont.):
  - Porta NAND



a	b	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

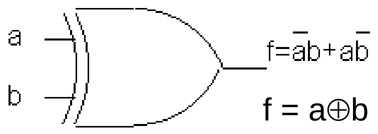
  - Porta NOR



a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

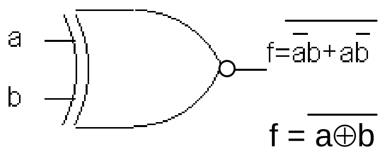
Implementació de funcions booleanes

- Portes lògiques (cont.):
  - Porta OR exclusiva o XOR



a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  - Porta NOR exclusiva o XNOR



a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

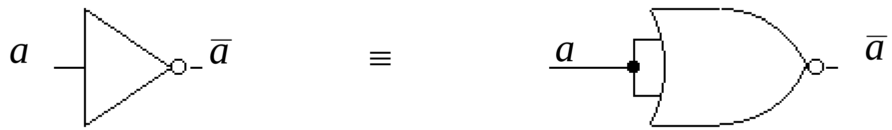
Implementació de funcions booleanes

- S'anomena conjunt de portes complet el conjunt de portes amb el qual es poden implementar les operacions bàsiques de l'Àlgebra de Boole. El conjunt de portes complet pot implementar qualsevol funció lògica.
- Conjunts de portes complets:
  - Portes NOT, OR i AND
  - Portes NOT i AND
  - Portes NOT i OR
  - Porta NAND
  - Porta NOR

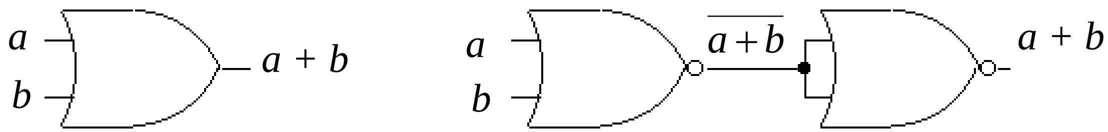
Implementació de funcions booleanes

- Construcció de les portes bàsiques amb portes NOR

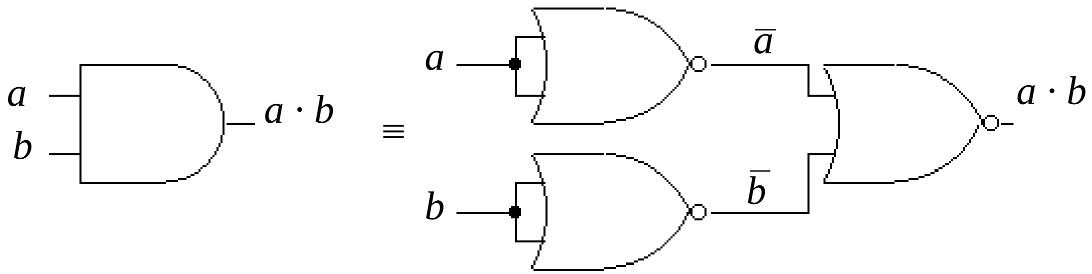
  - Porta NOT:



  - Porta OR:



  - Porta AND:

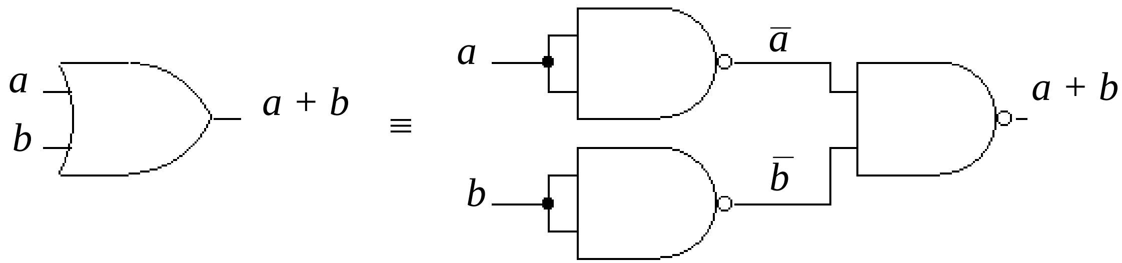


Implementació de funcions booleanes

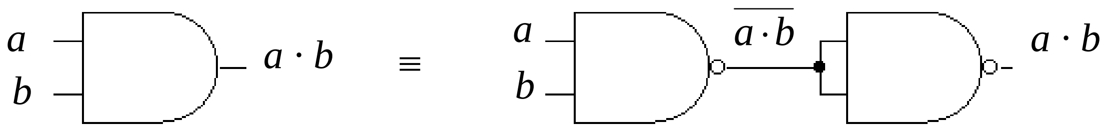
- Construcció de les portes bàsiques amb portes NAND

  - Porta NOT:

  - Porta OR:



  - Porta AND:

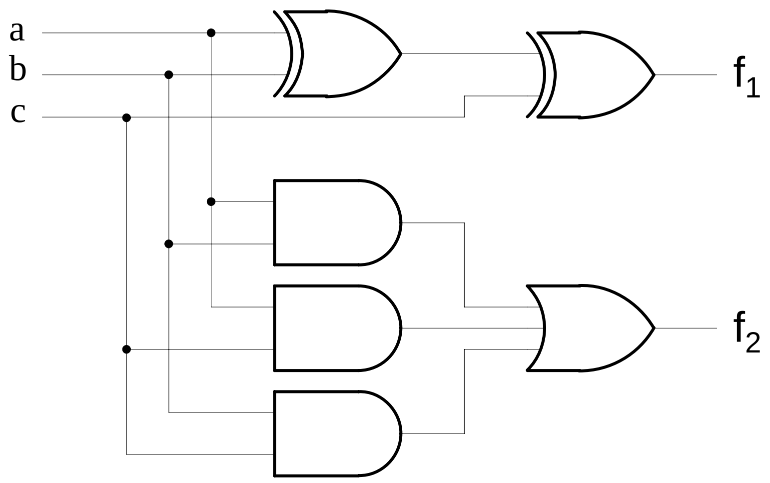


Implementació de funcions booleanes

- Exemples d'implementació:

$f_1(a, b, c) = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + abc = a \oplus b \oplus c$

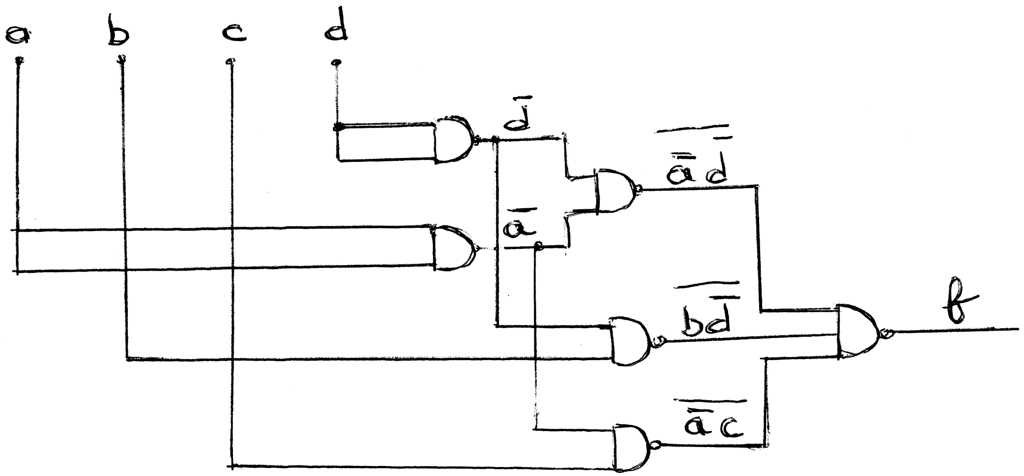
$f_2(a, b, c) = ab + ac + bc$



Implementació de funcions booleanes

- Exemples d'implementació:

$$f = \bar{a}\bar{d} + b\bar{d} + \bar{a}c = \overline{\overline{\bar{a}\bar{d} + b\bar{d} + \bar{a}c}} = \overline{\overline{\overline{\bar{a}\bar{d}}\cdot\overline{b\bar{d}} + \bar{a}c}} = \overline{\overline{\bar{a}\bar{d}}\cdot\overline{b\bar{d}}\cdot\overline{\bar{a}c}}$$



Referències

- T.L. Floyd. *Fundamentos de sistemas digitales,* Prentice-Hall, 2000.
- P. De Miguel Anasagasti. *Fundamentos de los computadores*. Paraninfo, 2004.
- A. Prieto et al. *Introducción a la informática*, McGraw-Hill, 2006.
- M. Morris Mano i C.R. Kime. *Fundamentos de diseño lógico y computadoras.* Prentice-Hall, 2005.
- J. M. Angulo. *Fundamentos y estructura de computadores*, Paraninfo, 2001.
- George Boole. *Investigación sobre las leyes del pensamiento*. George Boole. Paraninfo 1982.
- Claude E. Shannon. *Collected Papers*. Claude E. Shannon. Wiley-IEEE Press 1993.
- Claude E. Shannon. *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1938.
- Augustus De Morgan. *Formal Logic,* Adamant Media Corporation, 2002.
- IEEE Computer Society, www.computer.org, 2006.