Tema 2: OPERACIONES CON MATRICES

- Tipos y características.
- Matrices por bloques.
- Matrices elementales.

MATRIZ

$$A = (\,a_{ij}\,) = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$i = 1,\cdots m$

$j = 1,\cdots n$

Si $i = 1$, $j = 1,\ldots n$, $\quad A = (\,a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\,)$

vector / matriz fila

Si $i = 1,\ldots m$, $j = 1$ $\quad A = (\,a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1}\,)^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

vector / matriz columna

$A^T \rightarrow$ traspuesta de A

Si $A = (\,a_{ij}\,) \;\rightarrow\; A^T = (\,a_{ji}\,)$

Ejercicio 1 (hoja3)

Una máquina expendedora proporciona tres productos A, B y C que se fabrican en dos empresas E1 y E2.

El coste total de cada producto resulta del costo de elaboración y el de transporte que cobra cada empresa los cuales vienen expresados (en euros) en las matrices E1 y E2:

E1	Costes	
	Elaboración	Transporte
	10	5
	15	10
	23	20

E2	Costes	
	Elaboración	Transporte
	23	15
	34	20
	56	30

¿Cómo se calcularán los costos totales de elaboración y transporte de cada producto ?

…con la matriz E1 + E2

Saber: suma de matrices y propiedades….

SUMA DE MATRICES

$$\mathbf{A} = (a_{ij})\ m\times n,$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij})\ m\times n$$

$$\mathbf{A+B} = \mathbf{a_{ij}+b_{ij}}\ \mathbf{=}\ (cij)\ m\times n$$

ASOCIATIVA: $(A + B) + C = A + (B + C)$

CONMUTATIVA: $A + B = B + A$

OPUESTO: $A + (-A) = O$

ELEM. NEUTRO: $A + O = O + A = A$

SUMA DE MATRICES

Ejercicio 2 (hoja3)

Cierto o falso?

Para sumar las matrices A y B es necesario que :

a) Sean del mismo tamaño.

b) Sean cuadradas.

c) Sean ambas vectores fila o columna

No se puede sumar una matriz con su traspuesta.

La suma de una matriz con su opuesta es la matriz nula

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Ejercicio 3 (hoja3)

Los precios de tres productos A, B y C, vienen dados en el vector

$$\mathbf{v = [15 \;\; 23 \;\; 5.5]}.$$

Una de las tiendas que los vende anuncia una **rebaja del 10%** en cada producto. Se debe determinar

a) el vector que proporcione el cambio en el precio de cada producto.

b) el vector con los nuevos precios.

Solución

a) Como el precio de cada producto se reduce un 10% el vector será:

$$\mathbf{(0.10)v = [\ (0.10)15 \quad (0.10)23 \;\; (0.10)5.5] = [\ 1.5 \quad 2.3 \quad 0.55\ ].}$$

b) Los nuevos precios de los productos A, B y C son:

$$\mathbf{v - 0.10v = [\ 13.5 \;\; 20.7 \;\; 4.95\ ].}$$

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$$

A, B matrices, α, β, escalares

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- Elemento neutro: $1A = A$

Con traspuesta

$\alpha(A)^T = (\alpha A)^T$

OPERACIONES CON MATRICES TRASPUESTAS

$$A = (a_{ij})\ m \times n$$
$$A^T = (a_{ji})\ n \times m$$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- Si $A = A^T$ la matriz A es simétrica.

Ejercicio 5(hoja3) $(A + B)^T = A^T + B^T$

$$A_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{(2x3)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES TRASPUESTAS

Ejercicio 6 (hoja3)

Demuestra que si A es cuadrada entonces $A + A^T$ es simétrica.

Sea $S = A + A^T$.

S es simétrica si $S = S^T$

$S^T = (A + A^T)^T = A^T + A^{TT} = A^T + A = A + A^T = S$

Ejercicio 7 (hoja3)

Se debe modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. 4 sujetos del grupo 1 que han contraído una enfermedad contagiosa entran en contacto con 6 personas del grupo 2. Estos contactos directos se representan por la matriz **A (4 x 6)**

$a_{ij} = 1$: la i-ésima persona del gr1 entra en contacto con la j-ésima persona del gr2.

$a_{24}=1$: la 2º persona del gr1 (infectada) entra en contacto con la 4ª persona del gr2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7 (cont) (hoja3)

Un 3º grupo, grupo3, de 5 personas, tiene contactos directos con personas del grupo 2 y dicha información se representa por la matriz **B, (6x5)**:

$b_{64} = 0$: la 6ª persona del gr2 no tiene contacto con la 4ª persona del gr3.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se calcularían los contactos indirectos entre personas del grupo 1 y del grupo 3?

Ejercicio 7 (cont) (hoja3)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La matriz de contacto indirecto entre gr1 y gr3 es la matriz producto: **C = AB (4x5)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indica las personas del **gr3** que no tienen contactos indirectos con la enfermedad y por el contrario las que lo tienen

La 2ª persona del gr3 (col 2) no tiene contactos indirectos con la enfermedad.

La 5ª persona del gr3 (col 5) tiene 2 + 1+1 = 4 contactos indirectos.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$A = [a_{ij}]$ **(mxp)**

$B = [b_{ij}]$ **(pxn)** →

Columnas de A
=
Filas de B

$AB = C = (c_{ij})$ **(mxn)** / $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{ip}b_{pj}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.

- **(A . B) . C = A . (B . C)**
- **A.(B + C) = AB + AC**
- **A . I = I . A = A** (sólo si A cuadrada)

No se cumplen

Conmutativa: **AB ≠ BA** pero si **AB = BA** ➔ A y B **conmutan**

Cancelativa: **AB = AC** $\not\Rightarrow$ **A = C**

Divisores de cero: AB = O $\not\Rightarrow$ **A = O o B = O** (O matriz nula)

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Ejercicio 8 (hoja 3)

Determina orden de C

a) C = AB, A(mxn) x B (nx1)

b) C = AB, A (1xm) x B (mxn)

c) C = BA, B (mxn) x A (1xm)

d) Prueba si se cumple **AB = O** $\Rightarrow$ **A = O o B = O**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto **Ac** se escribe como una **combinación lineal** de las **columnas** de la matriz A

PRODUCTO MATRIZ – VECTOR ESCRITO COMO COLUMNAS

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

= c1 col1A + c2col2A + c3col3A

Ejercicio 9 **(hoja 3)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad ?$$

Ejercicio 10 **(hoja 3)**

PRODUCTO PUNTO

Se quiere determinar la **calificación promedio** que un estudiante tiene en un curso.

Las ponderaciones de cada prueba son:

actividades: 10%,

control: 20%,

examen: 35%,

prácticas: 35%.

Las notas son, respectivamente: 4, 5, 7, 3.

El promedio del curso será:

ponderación $u = [0.10 \;\; 0.20 \;\; 0.35 \;\; 0.35]^T$,

notas $v = [4 \; 5 \; 7 \; 3]^T$

El promedio del estudiante será:

$$\mathbf{u.v} = 0.10.(4) + 0.20(5) + 0.35(7) + 0.35(3)$$

$$= 0.4 + 1 + 2.15 + 1.09 = 4.64$$

PRODUCTO PUNTO

El **producto punto**

de los vectores **a y b**

es la **suma** de los productos de sus entradas

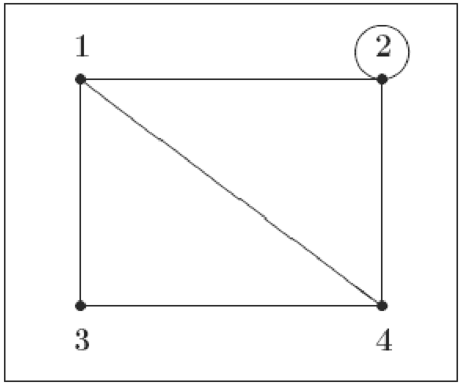
correspondientes

$a = [a_1, a_2, \ldots ,a_n]^T$ $\qquad$ $b = [b_1, b_2, \ldots ,b_n]^T$

$$\mathbf{a.b = a_1b_1 + a_2b_2,\ldots+ a_nb_n}$$

POTENCIAS EN MATRICES

Se debe calcular el número de trayectorias de longitud 4 que unen los nodos 3 y 4 en el grafo de la figura:



La matriz de adyacencia y su cuarta potencia son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 18 & 18 & 11 & 17 \\ 18 & 21 & 14 & 18 \\ 11 & 14 & 10 & \boxed{11} \\ 17 & 18 & 11 & 18 \end{bmatrix}.$$

Por tanto hay 11 trayectorias de longitud 4 que unen los vértices 3 y 4.

POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

$$A^K = \begin{cases} \overbrace{A \cdots A}^{k \text{ factores}}, & \text{si } k > 0 \\ I, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\; A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \;;\; A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\; A^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix} ;\; A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} ;\; A^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicio 11 **(hoja 3)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^2 y A^3
b) Halla la expresión general para A^n
c) Calcula A^{10}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES **PARTIDAS / POR BLOQUES**

Si en matrices con muchos ceros se agrupan las variables tendremos muchos "bloques" de ceros.

Cuando las matrices son demasiado grandes para caber en la memoria del computador se "parten en bloques" y la computadora trabaja con 2 o 3 bloques a la vez. Aumenta velocidad de resolución.

$$\underset{3\times5}{A} = \begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} = \underset{3\times5}{A} = \begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}$$

MATRICES **POR BLOQUES**

Una **submatriz** de una matriz A (mxn) es cualquier matriz B que se consigue de eliminar algunas filas o columnas de A.

A_{ij} : submatrices de A
Cada submatriz es un bloque de A

$$\underset{3\times5}{A} = \left(\begin{array}{cc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right) = \underset{3\times5}{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right)$$

A se ha particionado en **2x3 bloques**
(2 bloques filas y 3 bloques columnas).

MATRICES **POR BLOQUES**

Sean A y B matrices particionadas en bloques

→ **A + B** es posible

si A y B tienen el **mismo** <u>número y tamaño</u> de bloques.

→ **A.B** es posible

si los <u>bloques columnas de A</u> **coinciden** con los <u>bloques fila de B</u>.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR BLOQUES

AB = ?

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right],$$

(2 x 3) bloques
2 b.filas; 3 b.columnas

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

(3 x 2) bloques
3 b. filas; 2 b.columnas

SÍ se pueden multiplicar

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES **POR BLOQUES**

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A\,B = \left[\begin{array}{c|cc} 55 & 70 & 85 \\ 70 & 90 & 110 \\ 85 & 110 & 135 \\ \hline 100 & 130 & 160 \end{array}\right].$$

INVERSA DE MATRIZ PARTIDA

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

A es triangular superior por bloques, invertible
A_{11} (pxp), A_{22} (qxq),

Se calcula la inversa de A.

$$AB = I = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} &= I_p \\ A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} &= O \\ A_{22} B_{21} &= O \\ A_{22} B_{22} &= I_q \end{aligned}$$

MATRIZ ELEMENTAL

Para **escalonar** una matriz A aplicábamos OE/filas sobre A.

Guardaremos cada operación en una matriz, que llamaremos **matriz elemental**.

Aplicar una OE/fila a la matriz A **es equivalente** a multiplicar A por la izquierda por la matriz elemental asociada a dicha operación.

Será útil para calcular inversa.

MATRIZ ELEMENTAL

Una matriz elemental es una matriz **nxn** que se obtiene al realizar una **<u>única</u> OE/fila** sobre la matriz identidad $\mathbf{I_n}$

	OE/fila	MATRIZ ELEMENTAL	
MATRIZ IDENTIDAD **I** (nxn)	$\mathbf{F_i \leftrightarrow F_j}$	Tipo 1	$\mathbf{P_{ij}}$
	$\mathbf{F_i \leftarrow \alpha F_i}$ $(\alpha \neq 0)$	Tipo 2	$\mathbf{E_i(\alpha)}$
	$\mathbf{F_i \leftarrow F_i + \beta F_j}$	Tipo 3	$\mathbf{E_{ij}(\beta)}$

$P^{(n)}_{ij} = P_{ij}$ *se omitirá exponente (n) que representa el orden de la matriz* I

MATRIZ ELEMENTAL

ME de tipo 1: $\mathbf{P_{ij}}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F1 \leftrightarrow F2} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F1 \leftrightarrow F3} \quad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ELEMENTAL

ME tipo 2 : $E_i(\alpha)$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F1 \leftarrow (5)F1 \qquad E_1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F3 \leftarrow (2/5)F3: \qquad E_3(2/5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ELEMENTAL

ME tipo 3 : $E_{ij}(\beta)$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F1 \leftarrow F1 + (1/3)F2 \qquad E_{12}(1/3) = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F2 \leftarrow F2 + (-5)F3 \qquad E_{23}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ NO ELEMENTAL

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{F1 \leftrightarrow F2}$ $\boxed{F2 \leftarrow (-5)F1 + F2}$

A No es ME → **ERROR** → **dos** OE/filas a I

MATRICES ELEMENTALES PARA CALCULAR INVERSA

Si $E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1\mathbf{A} = I$,

y

$\mathbf{A}E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1 = I$

$$\mathbf{A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}}$$

$$\mathbf{A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1}$$

Necesario demostrar que

toda matriz elemental E_i es invertible

MATRIZ ELEMENTAL INVERTIBLE

OE/fila	INVERSA	MATRIZ ELEMENTAL		INVERSA
$F_i \leftrightarrow F_j$	$F_i \leftrightarrow F_j$	Tipo 1	P_{ij}	P_{ij}
$F_i \leftarrow \alpha F_i$ $(\alpha \neq 0)$	$F_i \leftarrow (1/\alpha) F_i$ $(\alpha \neq 0)$	Tipo 2	$E_i(\alpha)$	$E_i(1/\alpha)$
$F_i \leftarrow F_i + \beta F_j$	$F_i \leftarrow F_i + (-\beta) F_j$	Tipo 3	$E_{ij}(\beta)$	$E_{ij}(-\beta)$

Toda matriz elemental E es invertible.

La inversa de ME es otra matriz elemental F, del mismo tipo /

EF = FE = I

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $E_i^{-1}(\alpha) = E_i(1/\alpha)$
- $E_{ij}^{-1}(\beta) = E_{ij}(-\beta)$

MATRIZ ELEMENTAL INVERTIBLE

inversa de:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E_2(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

MATRIZ ELEMENTAL INVERTIBLE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

?

MATRIZ ELEMENTAL INVERTIBLE

Indica el tipo de cada ME.
Calcula $\mathbf{E_i^{-1}}$ y comprueba que $\mathbf{E_i^{-1}\,E_i = I}$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow E_1^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$I \rightarrow E_{12}(-3)$

$F1 \leftarrow F1 + (-3)F2$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow E_2^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$I \rightarrow P_{12}$

$F1 \leftrightarrow F2$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow E_3^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$I \rightarrow E_2(-1/4)$

$F2 \leftarrow (-1/4)F2$

INVERSA CON MATRICES ELEMENTALES

Como las ME son invertibles:

$$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 \mathbf{A} = I$$

$$\mathbf{E_k^{-1}}\, E_k \dots E_2\, E_1\, \mathbf{A} = \mathbf{E_k^{-1}}$$

$$\mathbf{E_{k-1}^{-1}}\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1\, \mathbf{A} = \mathbf{E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}}$$

$$\mathbf{E_1^{-1}}\, E_1\, \mathbf{A} = \mathbf{E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{(E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1})^{-1}}$$

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1}}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ CON MATRICES ELEMENTALES

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Escribir $\mathbf{A^{-1}}$ como producto de ME para ello

reducir A a la matriz I guardando las OE/filas en ME.

$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2-3F1}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + (-2)F2}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{E_3\, E_2\, E_1\, A = I}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = E_3\, E_2\, E_1}}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA COMO PRODUCTO DE ME

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

1º: C= [A|I]

2º: Obtener rref(C). A se transforma en A’, I en B.

3º: Si A’ = I → A^{-1} = B

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rref}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

A’ **B**

Como A’ = I → A^{-1} = B

MATRIZ INVERSA COMO PRODUCTO DE ME

Ejercicio 7 (cont) (Ej3)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

ME relacionadas con las OE/filas aplicadas a [A|I] para obtener C:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2 + (-2)F1} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3 \leftarrow F3 + (-1)F1} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA COMO PRODUCTO DE ME

Ejercicio 7 (cont) (Ej3)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3 \leftarrow F3 + (-1)F2} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2 + (3)F3} \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + F3} \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + (-2)F2} \quad E_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA COMO PRODUCTO DE ME

Ejercicio 7 (cont) (Ej3)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

$$A^{-1} = E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo se escribiría A como producto de ME ?

TEOREMA FUNDAMENTAL DE MATRICES INVERSAS

Sea A matriz nxn

1º.- A es invertible

2º.- El sistema Ax = b es Compatible determinado, para todo b.

3º.- El sistema Ax = 0 tiene solamente la solución trivial.

4º.- rango(A) = n

5º.- A se transforma en I (nxn) mediante operaciones elementales

6º.- A es producto de matrices elementales.

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
FILA	Matriz que tiene una sola fila. Orden 1×n	$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
COLUMNA	Matriz que tiene una sola columna. Orden m×1	$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	Matriz que tiene distinto número de filas que de columna. Orden m×n, m≠n	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRASPUESTA	A matriz. La traspuesta de A, $\mathbf{A}^T$, es la matriz que se obtiene cambiando, ordenadamente, las filas por las columnas.	*Si es* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *su traspuesta es* $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

OPUESTA	A matriz. La matriz opuesta de A, -A, es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto.	$A=\begin{pmatrix}1&3\\5&-7\\-6&4\end{pmatrix},\ -A=\begin{pmatrix}-1&-3\\-5&7\\6&-4\end{pmatrix}$
NULA	Matriz con todos sus elementos cero.	$0_{3x4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
CUADRADA	*Matriz con igual número de filas que de columnas, m = n. La matriz es de <u>orden n</u>.* <u>Diagonal principal</u> : $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ <u>Diagonal secundaria</u> : a_{ij} *con* i+j = n+1 <u>Traza</u> de una matriz cuadrada A (tr(A)): *suma de los elementos de la diagonal principal.*	$A_3=\begin{pmatrix}1&9&-6\\0&2&1\\-2&4&5\end{pmatrix}$ Diagonal principal : $A=\begin{pmatrix}5&1&5&-6\\1&2&0&3\\7&-3&4&11\\1&9&3&8\end{pmatrix}$ Diagonal secundaria : $A=\begin{pmatrix}5&1&5&-6\\1&2&0&3\\7&-3&4&11\\1&9&3&8\end{pmatrix}$

SIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a su traspuesta. $A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$	$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{9} & \boxed{-6} \\ \boxed{9} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	Matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta. $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ Necesariamente $a_{ii} = 0$	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
DIAGONAL	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
ESCALAR	Matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

IDENTIDAD	Matriz cuadrada con sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a *1*.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	Matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ T. superior $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ T. inferior
INVERSA	A tiene inversa, A^{-1}, si se verifica que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$