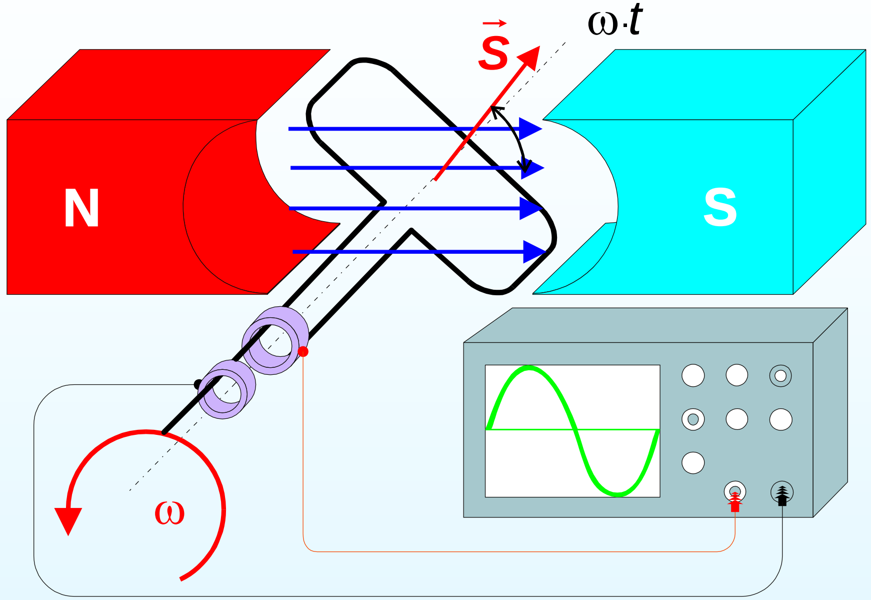
TEMA 8: CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

- Fuerza electromotriz alterna
- Representación compleja
- Respuesta de los componentes básicos

  (Resistencia, Autoinducción, Condensador)
- Ley de Ohm fasorial. Impedancia
- Potencia en circuitos de C.A.
- Resolución de circuitos de C.A.

Fuerza electromotriz alterna

Generación de corriente alterna (C.A.) (visto en el Tema 4).



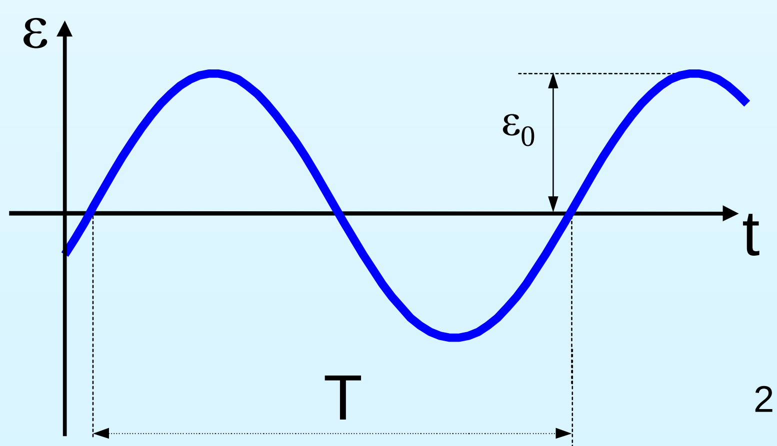
N espiras rotando con frecuencia angular w en presencia de un campo magnético B induce una f.e.m. de valor (Tema 4)

$$\varepsilon = N\omega BS\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Esta tensión varía senoidalmente con el tiempo y podemos expresarla en general como:

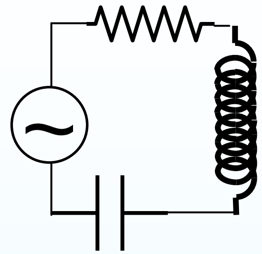
$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0\ \mathrm{sen}(\omega t + \theta)}$$

- Periodo T = $2\pi/\omega$
- Frecuencia f = 1/T
- Fase inicial θ
- Amplitud ε_0



Fuerza electromotriz alterna

• En este tema veremos cómo se comportan los dispositivos eléctricos que conocemos (**resistencias, condensadores y autoinducciones**) frente a una tensión alterna aplicada.

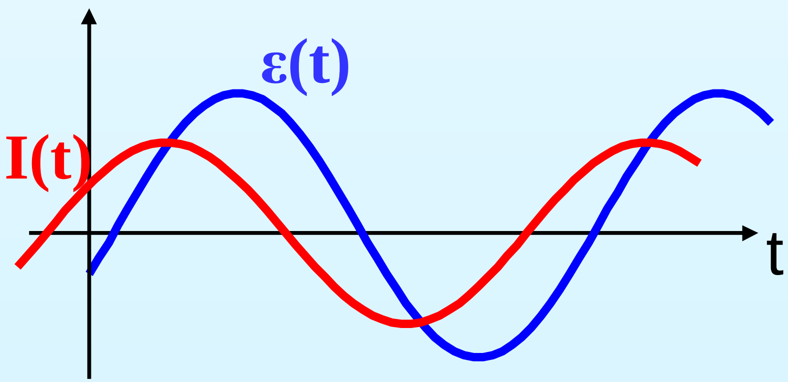


En general podremos expresar la tensión y la intensidad (valores instántáneos) como:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \ \mathrm{sen}(\omega t + \theta)} \qquad \boxed{I(t) = I_0 \ \mathrm{sen}(\omega t + \alpha)}$$

• Una de las características importantes en circuitos de C.A. es la diferencia de fases entre tensión e intensidad:

$$\boxed{\varphi = \theta - \alpha}$$



Valores medios y eficaces

El **valor medio** de la f.e.m. e intensidad deben evaluarse en un semiperíodo, ya que el valor medio de una función senusoidal en un período completo es nulo:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_0 \operatorname{sen} wt\, dt = \frac{2I_0}{\pi} = 0{,}637\, I_0$$

El **valor eficaz** de la f.e.m. o intensidad de la corriente alterna es la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado:

$$I_e = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} I_0^2 \operatorname{sen}^2 wt\; dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\; I_0$$

La **representación compleja** facilitará los cálculos en los problemas de corriente alterna. Para ello conviene dar unas nociones básicas sobre números complejos.

Representación compleja

INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Ecuación no resoluble dentro del cuerpo de los números reales $x^2 + 4 = 0$

SOLUCIÓN: Definimos un nuevo cuerpo de números, que serán los números COMPLEJOS, donde sí tiene solución. Para ello definimos la unidad imaginaria ***j***: $\boxed{j = \sqrt{-1}}$ $\longrightarrow$ $x = \pm\sqrt{-4} = \pm j\,2$

Definición de **número complejo**: $\overline{C} = a + j\,b$

- Donde ***a*** y ***b*** son números reales. Se dice que son la **Parte Real** e **Imaginaria** de **C**:

- ***a*** y ***b*** son las coordenadas de un punto en el **plano complejo**, cuyos ejes se denominan REAL (eje de abscisas) e IMAGINARIO (eje de ordenadas)

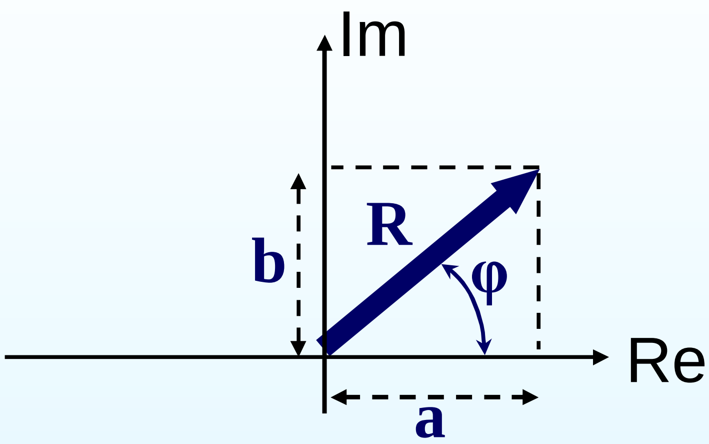
C se puede expresar en **coordenadas polares:** Su módulo **R** (distancia entre el punto y el origen de coordenadas) y fase **φ** (ángulo que forma R con el eje real) vienen dados por:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = arctg\,(b/a)$$

Representación compleja

PLANO COMPLEJO



De la figura tenemos:

$$\begin{cases} a = R\cos\varphi \\ b = R\,sen\varphi \end{cases}$$

Representación binómica:

$$\overline{C} = a + j\,b$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = arctg(b/a) \end{cases}$$

Repres. Módulo-Fase:

$$\overline{C} = R\,\underline{|\varphi}$$

Utilizando la identidad de Euler, podemos expresar C como:

Identidad de Euler:

exp(j φ) = cos φ + j sen φ

$$\overline{C} = a + j\,b = R\cos\varphi + j\,R\,sen\varphi = R\,e^{j\varphi} = R\,\underline{|\varphi}$$

Representación compleja

Propiedades aritméticas:

Si $\overline{C}_1 = a + j\,b = R_1 \underline{|\varphi_1}$ y $\overline{C}_2 = c + j\,d = R_2 \underline{|\varphi_2}$

Para sumar y restar n^{os} complejos es aconsejable utilizar la Repres. Binómica:

SUMA:

$$\overline{C}_1 + \overline{C}_2 = (a + j\,b) + (c + j\,d) = (a + c) + j(b + d)$$

RESTA:

$$\overline{C}_1 - \overline{C}_2 = (a + j\,b) - (c + j\,d) = (a - c) + j(b - d)$$

Para multiplicar o dividir n^{os} complejos es aconsejable utilizar la Repres. Mod-Fase:

PRODUCTO:

$$\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2 = R_1 \underline{|\varphi_1} \cdot R_2 \underline{|\varphi_2} = R_1 \cdot R_2 \underline{|\varphi_1 + \varphi_2}$$

DIVISION:

$$\frac{\overline{C}_1}{\overline{C}_2} = \frac{R_1 \underline{|\varphi_1}}{R_2 \underline{|\varphi_2}} = \frac{R_1}{R_2} \underline{|\varphi_1 - \varphi_2}$$

Representación compleja

Dadas una f.e.m e intensidad alternas:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Las representaremos por números complejos en forma polar, cuyo módulo será la f.e.m. (ε_e) o intensidad (I_e) eficaces y el argumento su respectiva fase inicial

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_e \underline{|\theta}; \qquad \bar{I} = I_e \underline{|\alpha}$$

Siendo: $\left(\varepsilon_e = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(I_e = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}\right)$

A continuación veremos que relación existe entre **tensión e intensidad** cuando a una fuente de alterna se le conecta una resistencia , un condensador o una autoinducción.

Circuitos resistivo, inductivo y capacitivo puros

RESISTENCIA: la f.e.m. y la intensidad siempre están en fase. Se puede definir una resistencia compleja como:

$$\overline{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi}} = R \underline{|0^{\circ}}$$

$\overline{R}$ está sobre el eje real

AUTOINDUCCION: La intensidad se encuentra retrasada $\pi/2$ con respecto a la tensión. Introducimos una reactancia inductiva compleja como:

$$\overline{X}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi - 90^{\circ}}} = X_L \underline{|90^{\circ}} = j X_L$$

Siendo $X_L = Lw$

$\overline{X}_L$ está en eje imaginario

CONDENSADOR: La intensidad se encuentra adelantada $\pi/2$ con respecto a la tensión. Introducimos una reactancia capacitiva compleja como:

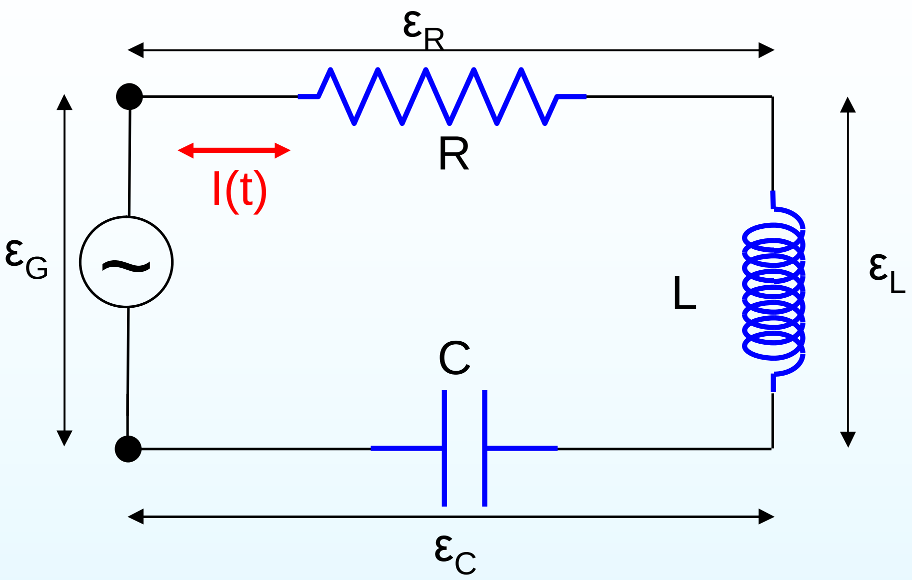
$$\overline{X}_C = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi + 90^{\circ}}} = X_C \underline{|-90^{\circ}} = -j X_C$$

Siendo $X_C = 1/Cw$

$\overline{X}_C$ está en eje imaginario (negativo)

Tanto la resistencia $\overline{R}$ como las reactancias $\overline{X}_L$ y $\overline{X}_C$ se miden en Ohmios $[\Omega]$

Impedancia



Partimos de un circuito RLC serie

Planteamos ecuación de mallas:

$$\overline{V} = \overline{I} \cdot \overline{R} + \overline{I} \cdot \overline{X}_L + \overline{I} \cdot \overline{X}_C$$

Definimos la **impedancia Z** del circuito como:

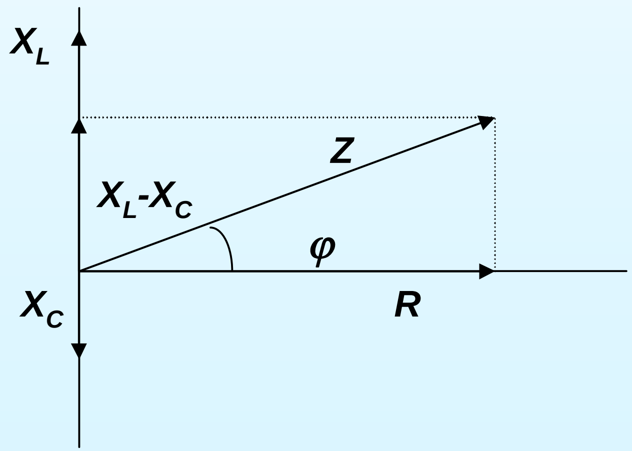
$$\boxed{\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \overline{R} + \overline{X}_L + \overline{X}_C} \quad [\Omega]$$

La impedancia será un número complejo, cuyo módulo vale:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (Lw - 1/Cw)^2}$$

y su argumento:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}$$



Impedancia: Ley de Ohm

Podemos generalizar la ley de Ohm para corriente alterna en la forma:

Ley de Ohm: $\boxed{\overline{Z} = \dfrac{\overline{\varepsilon}}{\overline{I}}}$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{I}} = \frac{\varepsilon_{|\underline{\theta}}}{I_{|\underline{\alpha}}} = \frac{\varepsilon}{I}{}_{|\underline{\theta-\alpha}} = |Z|_{|\underline{\varphi}} = R + Xj$$

Elemento	Impedancia Z	Ángulo de fase φ
R	R	0º
L	$X_L = Lw$	+90º (I retrasada)
C	$X_C = 1/Cw$	-90º (I adelantada)

Asociación de impedancias

En paralelo y en serie tenemos relaciones equivalentes a las deducidas con las resistencias en Corriente Continua.

Serie:

$$\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z}_i$$

Paralelo:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\overline{Z}_i}$$

Potencia en circuitos de C.A.

La energía consumida por efecto Joule en un circuito de corriente alterna será debida a su resistencia. Las autoinducciones o condensadores almacenan y devuelven energía al circuito, pero no la consumen.

La potencia instantánea disipada en una resistencia recorrida por una corriente alterna es:

$$P = \left[I_0 \, sen(wt + \alpha) \right]^2 \cdot R$$

Potencia media:

$$\langle P \rangle = \left\langle \left[I_0 \, sen(wt + \varphi) \right]^2 \cdot R \right\rangle \Longrightarrow \langle P \rangle = I_0^2 \cdot R \left\langle \left[sen(wt + \varphi) \right]^2 \right\rangle$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_e^2 R}$$

Potencia en circuitos de C.A.

La potencia disipada en la resistencia debe suministrarse por la fuente de alterna:

$$\langle P \rangle = I_e^2 R = I_e \frac{V_e}{Z} R = I_e V_e \frac{R}{Z} = I_e V_e \cdot \cos\varphi$$

(Siendo ***cosφ*** el **factor de potencia**)

Se puede definir una potencia compleja:

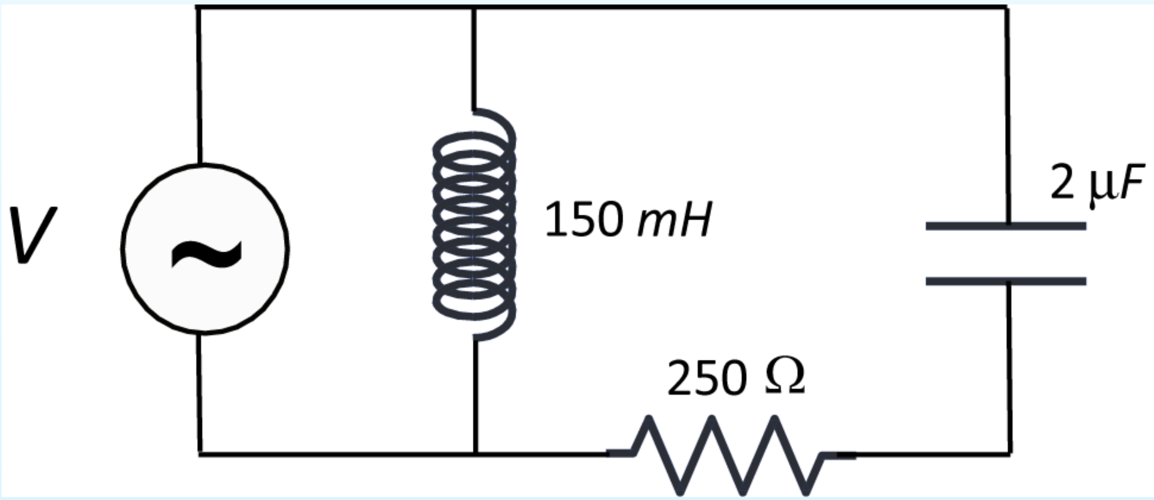
$$\bar{S} = S \underline{\left| \varphi \right.} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = V_e I_e \underline{\left| \varphi \right.} = P + jQ$$

- Potencia aparente (potencia bruta): $S = V_e I_e$ [V-A; Voltio-Amperio]
- Potencia activa (potencia media consumida) : $P = V_e I_e \cos\varphi$ [W; Watio]
- Potencia reactiva: $Q = V_e I_e \, sen\varphi$ [VAR; Voltio-Amperio reactivo]

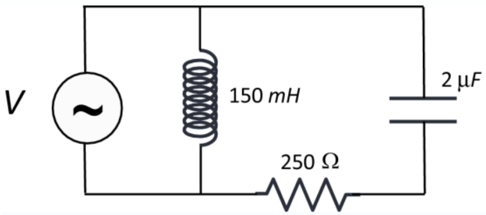
Resolución de circuitos de corriente alterna: Ejemplos

En el circuito de la figura, calcula: (a) Las corrientes que circulan por la bobina y el condensador. (b) La corriente suministrada por la fuente. (c) La potencia disipada en la resistencia.

Dato: $V = 300\sqrt{2}\ sen\left(2000\ t + 60^0\right)$



(a) Las corrientes que circulan por la bobina y el condensador



$$V = 300\sqrt{2}\ sen\left(2000\ t + 60^0\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = 300\ \underline{|60^o}$$

$$Lw = 150 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 = 300\ \Omega; \qquad \frac{1}{Cw} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2000} = 250\ \Omega$$

$$\bar{Z}_R = R = 250 = 250\ \underline{|0^o}$$

$$\bar{Z}_L = jLw = j300 = 300\ \underline{|90^o}$$

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{Cw} = -j250 = 250\ \underline{|-90^o};$$

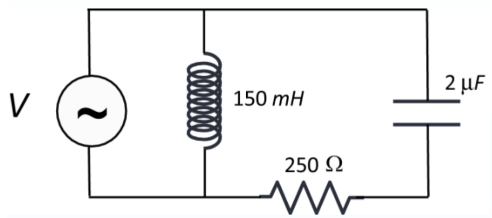
Z_R y Z_C están en serie: $\Rightarrow$ $\bar{Z}_{RC} = 250 - j250 = 250\sqrt{2}\ \underline{|-45^o}$

Las corrientes que circulan por *L* y *C* son:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_L} = \frac{300\ \underline{|60^o}}{300\ \underline{|90^o}} = 1\ \underline{|-30^o}; \quad \rightarrow \quad I_L = \sqrt{2}\ sen(2000t - 30^o) \quad A$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{RC}} = \frac{300\ \underline{|60^o}}{250\sqrt{2}\ \underline{|-45^o}} = \frac{1.2}{\sqrt{2}}\ \underline{|105^o}; \quad \rightarrow \quad I_C = 1.2\ sen(2000t + 105^o) \quad A$$

(b) La corriente suministrada por la fuente.



Podemos calcularla de dos formas: (i) como suma de I_L más I_C o (ii) como el cociente entre V y la impedancia total.

(i)

$$\bar{I}_L = 1\left|\underline{-30^o}\right\rangle = \cos 30^o - j sen 30^o = 0.866 - j\,0.5 \qquad \bar{I}_C = \frac{1.2}{\sqrt{2}}\left|\underline{105^o}\right\rangle = \frac{1.2}{\sqrt{2}}\cos 105^o + j\frac{1.2}{\sqrt{2}} sen 105^o = -0.22 + j0.82$$

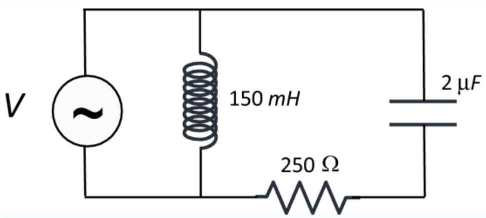
$$\boxed{\bar{I}_T = \bar{I}_L + \bar{I}_C = 0.6464 + j\,0.3196 = 0.721\left|\underline{26.31^o}\right\rangle \;\text{ A}}$$

(ii) **Z_L y Z_{RC} están en paralelo:**

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{z}_L \cdot \bar{z}_{RC}}{\bar{z}_L + \bar{z}_{RC}} = \frac{300\left|\underline{90^o}\right. \cdot 250\sqrt{2}\left|\underline{-45^o}\right.}{300\,j + 250 - j250} = \frac{106066\left|\underline{45^o}\right.}{254.95\left|\underline{11.31^o}\right.} = 416.03\left|\underline{33.69^o}\right. \;\;\Omega$$

$$\boxed{\bar{I}_T = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_e} = \frac{300\left|\underline{60^o}\right\rangle}{416.03\left|\underline{33.69^o}\right\rangle} = 0.721\left|\underline{26.31^o}\right\rangle; \quad \text{A}}$$

(c) La potencia disipada en la resistencia.



Como la corriente que pasa por el condensador es la misma que pasa por la resistencia:

$$\bar{I}_C = \bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{RC}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\left|105^{\circ}\right\rangle;$$

La potencia disipada en R es:

$$\boxed{P_{dR} = I^2_{\mathrm{Re}\,f} \cdot R = \left(\frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 250 = 180 \quad W}$$

Dado que la resistencia es la única que hay en el circuito, la potencia disipada en R debe ser igual a la potencia activa del generador:

$$P_{AC} = I_{Tef} \cdot V_{ef} \cos\varphi$$

Siendo φ la fase de la impedancia total

$$\boxed{P_{AC} = I_{Tef} \cdot V_{ef} \cos\varphi = 0.721 \cdot 300 \cos 33.69^{\circ} = 180 \quad \mathrm{W}}$$

Esta potencia también es la potencia activa de la rama donde están R y C:

$$P_{AC(R:_{RC})} = I_{Cef} \cdot V_{ef} \cos\varphi_{RC}$$

Siendo φ_{RC} la fase de Z_{RC}

$$\boxed{P_{AC(R:_{RC})} = I_{Cef} \cdot V_{ef} \cos\varphi_{RC} = \frac{1{,}2}{\sqrt{2}} \cdot 300 \cos(-45^{\circ}) = 180 \quad \mathrm{W}}$$

Anexo

Información complementaria

Obtención de I_e : $$I_e = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 sen^2 wt\, dt} = \left(\frac{I_0^2}{T}\int_0^T sen^2\, wt\, dt \right)^{1/2}$$

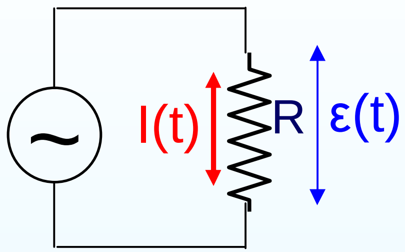
$$\int_0^T sen^2 wt\, dt = \int_0^T (1-\cos^2 wt)\, dt = \int_0^T \left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos 2wt) \right] dt =$$

$$= \int_0^T \left[1 - \frac{1}{2}(1+\cos 2wt) \right] dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2wt}{2} \right) dt = \frac{t}{2} - \frac{sen 2wt}{4w} \Big]_0^T = \frac{T}{2} - \frac{sen 2 \frac{2\pi}{T} T}{4 \frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{I_0^2}{T}\int_0^T sen^2\, wt\, dt \right)^{1/2} = \left(\frac{I_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2} \right)^{1/2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Circuito resistivo puro



Tensión aplicada por el generador: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\ \mathrm{sen}(\omega t+\theta)$

Para hallar la intensidad aplicamos la **Ley de Ohm**

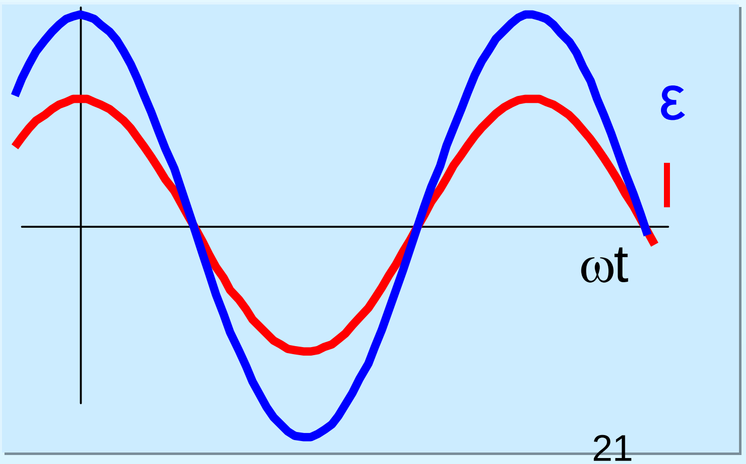
$$I(t)=\varepsilon(t)/R = (\varepsilon_0/R)\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$$

Comparamos con la expresión genérica $I(t) = I_0\ \mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$:

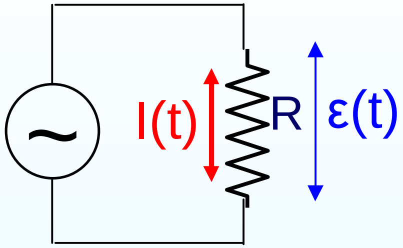
$I_0= \varepsilon_0/R$

$\alpha = \theta$ (en fase)

Valores instantáneos



Circuito resistivo puro



$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_e \underline{|\theta}$

$\overline{I} = (\varepsilon_e/R) \underline{|\theta}$

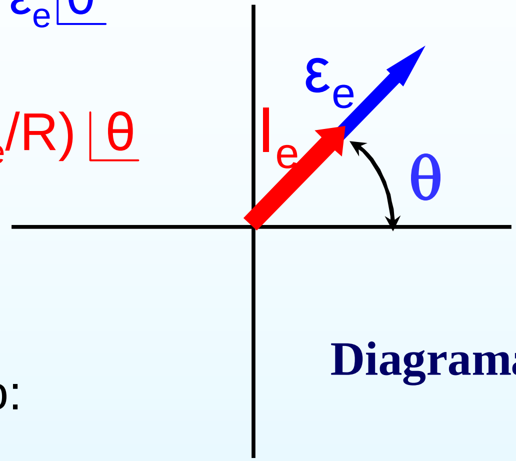
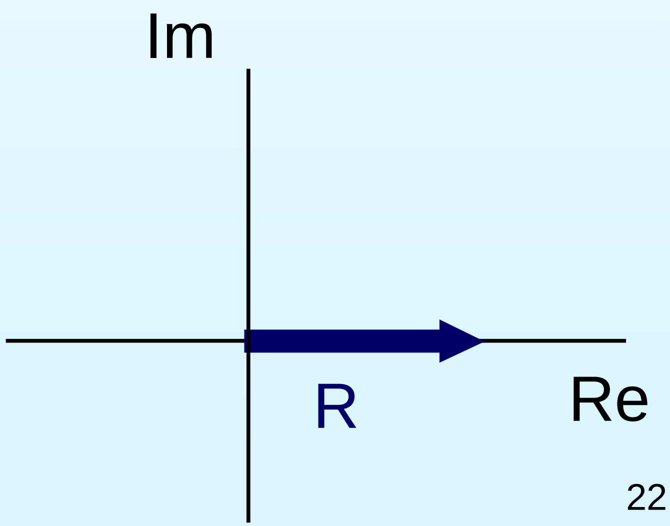


Diagrama fasorial

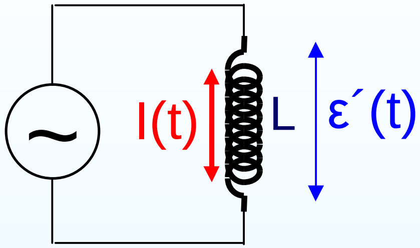
Se puede definir una resistencia compleja como:

$$\overline{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\theta}}{I_e \underline{|\theta}} = R \underline{|\,0^o}$$

Luego $\overline{R}$ es un número complejo que está sobre el eje real



Circuito inductivo puro



Tensión aplicada por el generador: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \,\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$

Aplicamos la **Ley de Faraday-Lenz:** $\varepsilon'(t) = -L(dI/dt)$

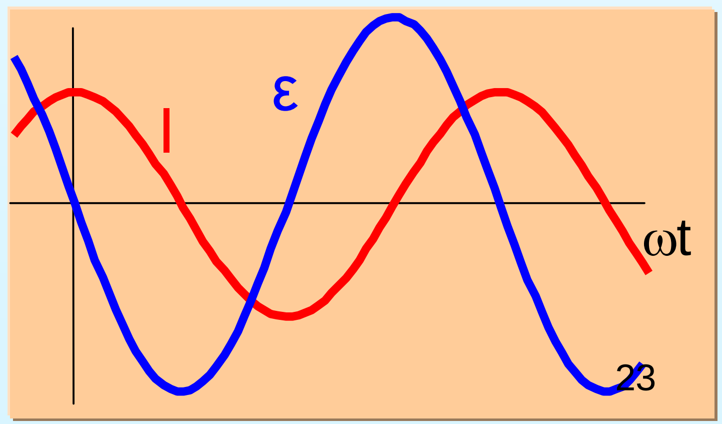
$$I(t) = \frac{1}{L}\int \varepsilon(t)\,dt = \frac{-\varepsilon_0}{Lw}\cos(wt+\theta) = \frac{\varepsilon_0}{Lw}\,sen(wt+\theta-90^{o})$$

Comparamos con la expresión genérica $I(t) = I_0 \,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$:

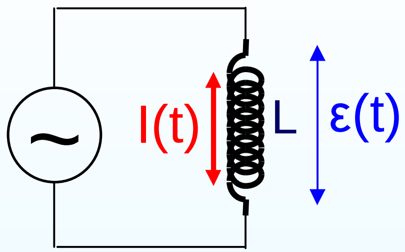
$I_0 = \varepsilon_0/Lw$

$\alpha = \theta - 90^{o}$ (tensión adelantada)

Valores instantáneos



Circuito inductivo puro



$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_e \underline{|\theta}$

$\overline{I} = (\varepsilon_e / Lw) \underline{|\theta\text{-}90^o}$

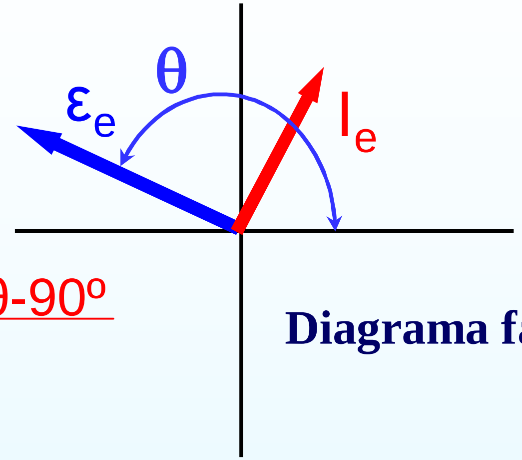
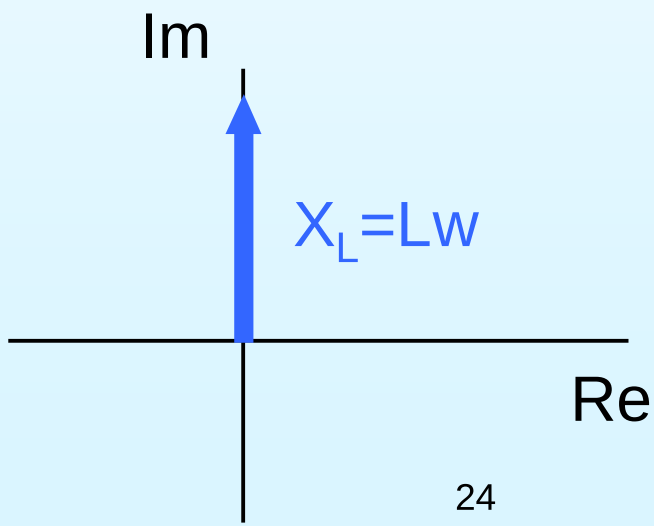


Diagrama fasorial

Introducimos una reactancia inductiva compleja $\overline{X}_L$, como:

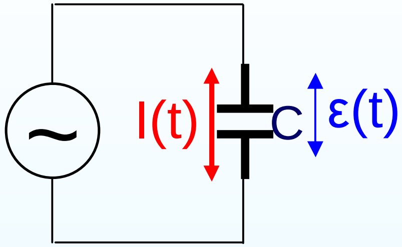
$$\overline{X}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\theta}}{I_e \underline{|\theta - 90^o}} = X_L \underline{|90^o} = j\, X_L$$

Siendo $X_L = Lw$



Luego $\overline{X}_L$ es un número complejo que está sobre la parte positiva del eje imaginario

Circuito capacitivo puro



Tensión aplicada por el generador: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \ \mathrm{sen}(\omega t+\theta)$

Sabemos que: $I = dQ/dt$ y $Q = C\varepsilon$

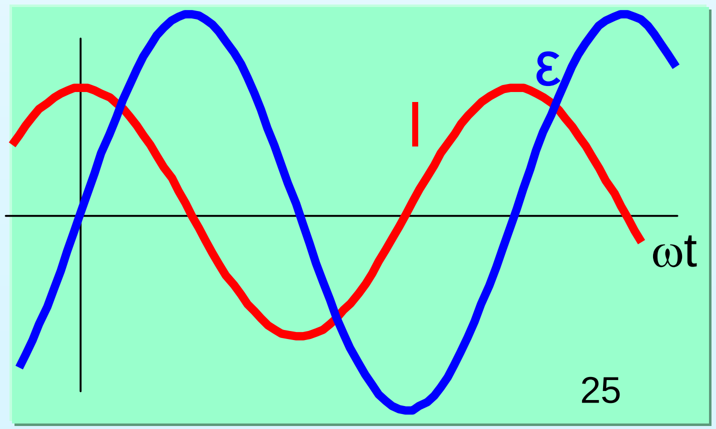
$$I(t) = C\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = Cw\varepsilon_0 \cos(wt+\theta) = Cw\varepsilon_0 \ \mathrm{sen}(wt+\theta+90^{o})$$

Comparamos con la expresión genérica $I(t) = I_0 \ \mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$:

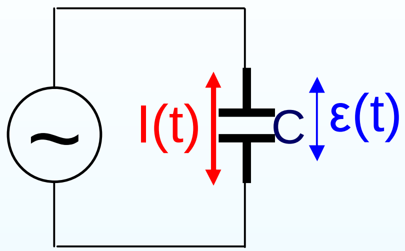
$I_0 = Cw\varepsilon_0$;

$\alpha = \theta+90^{o}$ (intensidad adelantada)

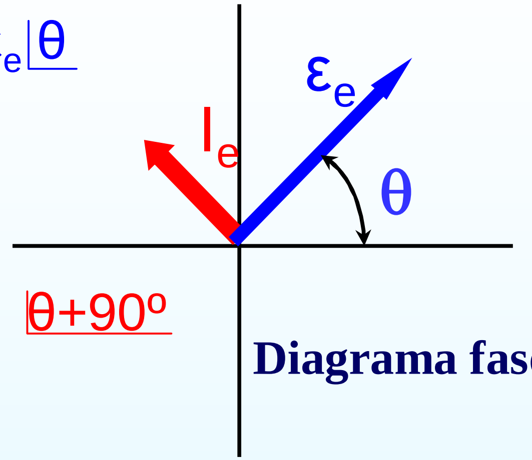
Valores instantáneos



Circuito capacitivo puro



$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_e \underline{|\theta}$$



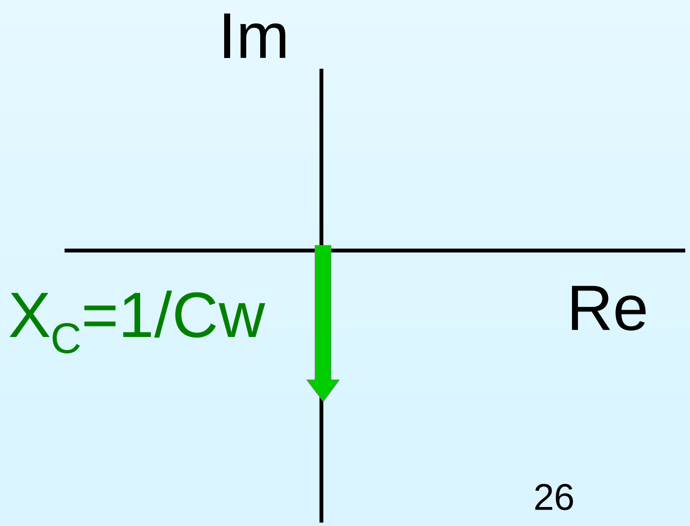
$$\overline{I} = Cw\varepsilon_e \underline{|\theta + 90^{o}}$$

Diagrama fasorial

Introducimos una reactancia capacitiva compleja $\overline{X}_C$, como:

$$\overline{X}_C = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e \underline{|\theta}}{I_e \underline{|\theta + 90^{o}}} = X_L \underline{|-90^{o}} = -j\,X_C$$

Siendo $X_C=1/Cw$



Luego $\overline{X}_C$ es un número complejo que está sobre la parte negativa del eje imaginario