



Tema 5: Distribuciones Especiales.

5.1. Distribución Binomial.

5.2. Distribución de Poisson.

5.3. Distribución Normal.

5.4. Teorema Central del Límite.



Distribución Bernoulli (I).

Sea una v.a. X discreta con solo dos valores posibles:

$$X = \begin{cases} 1 \text{ (éxito)} & \text{con probabilidad } p \\ 0 \text{ (fracaso)} & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{cases}$$

A la distribución de probabilidad de esta variable se le llama **distribución de Bernoulli**.

Parámetros:

$$E(X) = 1p + 0q = p$$

$$E(X^2) = 1^2p + 0^2q = p$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$



Distribución Bernoulli (II).

Supongamos que lanzamos una moneda, y que consideramos un éxito que salga cara. La v.a. X con valores :

$$X = \begin{cases} 1 \text{ (cara) con probabilidad } p = \frac{1}{2} \\ 0 \text{ (cruz) con probabilidad } q = 1 - p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

tiene una distribución Bernoulli.

Si lanzamos diez veces una moneda, cada uno de los lanzamientos se puede considerar una prueba de Bernoulli independiente, tendremos diez pruebas de Bernoulli independientes X_1, X_2, \dots, X_{10} todas con la misma probabilidad de éxito $p = 1/2$.



Distribución Binomial (I).

Definición: Sean n pruebas de Bernoulli independientes X_1, X_2, \dots, X_n con la misma probabilidad de éxito p .
 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = n^\circ$ de éxitos en las n pruebas de Bernoulli, tiene una distribución de probabilidad **Binomial** $B(n, p)$.
 La función de probabilidad es:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad 0 \leq x \leq n$$

Parámetros:

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = p + \dots + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = pq + \dots + pq = npq$$



Distribución Binomial (II).

Teorema: Si X_1, X_2, \dots, X_k son v.a. independientes con una distribución binomial $B(n_i, p)$, entonces $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ tiene una distribución binomial $B(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$

Tablas de la Binomial

Las tablas dan el valor de la función de distribución

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{x=0}^k P(X = x) = \sum_{x=0}^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$



Distribución Binomial (III).

Binomial $B(n, p)$: $F(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

n	k	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	0.9900	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6667	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.9999	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8889	.8775	.8400	.7975	.7500
	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.9997	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7407	.7183	.6480	.5748	.5000
	2	1	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9630	.9571	.9360	.9089	.8750
	3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Sea X una v.a. $B(13, 0.4)$, calcular $P(X \leq 7)$ y $P(X = 10)$

$$P(X \leq 7) = F(7) = 0.9023$$

$$P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = F(10) - F(9) = 0.9987 - 0.9922 = 0.0065$$





Distribución Poisson (I).

Sea X una **Binomial** $B(n, p)$, calculamos el límite de su función de probabilidad cuando n tiende a infinito y p a cero:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} f(k) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} P(X = k) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

A la distribución de probabilidad límite resultante se le llama **distribución de Poisson**.

Definición: X tiene una distribución de **Poisson** de media λ $P(\lambda)$ si su función de probabilidad es:

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Distribución Poisson (II).

Parámetros:

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$





Distribución Poisson (III).

Teorema: Si X_1, X_2, \dots, X_k son v.a. independientes con una distribución de Poisson $P(\lambda_i)$, entonces $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ tiene una distribución de Poisson $P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)$

Tablas de Poisson

Las tablas dan el valor de la función de distribución

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{x=0}^k P(X = x) = \sum_{x=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$



Distribución Poisson (IV).

Poisson $P(\lambda) : F(k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k / λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4		1	1	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5				1	1	1	.9999	.9998	.9997	.9994
6							1	1	1	.9999
7										1
k / λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571

Si X tiene una distribución $P(6)$, calcular $P(X \leq 9)$ y $P(X = 15)$
 $P(X \leq 9) = F(9) = 0.9161$
 $P(X = 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = F(15) - F(14) = 0.9995 - 0.9986 = 0.0009$





Distribución Poisson (V).

Aproximación de la Binomial por la de Poisson

- Las tablas de la Binomial solo son del orden $n=25$ ó 30
- La distribución Binomial se puede aproximar por la de Poisson cuando n es grande ($n > 25$ ó 30), llamando $\lambda=np$
- Si X es $B(n,p)$, podemos considerar que para valores de n mayores de 25, X es $P(\lambda= np)$

Si X es $B(100, 0.04)$, calcular la $P(X \leq 3)$

$$\lambda = np = 100 \times 0.04 = 4$$

Podemos considerar que X es $P(4)$ y calcular $P(X \leq 3)$

Problema 5.1

Si X es $B(8, 0.35)$, calcular:

- $P(X = 3)$
- $P(X \leq 5)$
- $P(X \geq 5)$

$$a) P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0.7064 - 0.4278 = 0.2786$$

$$b) P(X \leq 5) = 0.9747$$

$$c) P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.8939 = 0.1061$$





Problema 5.16

Si X es $P(2.9)$, calcular:

- a) $P(X \leq 5)$
- b) $P(X = 7)$
- c) $P(X \geq 4)$

a) $P(X \leq 5) = 0.9258$

b) $P(X = 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 6) = 0.9901 - 0.9713 = 0.0188$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.6696 = 0.3304$