Lliçó 4. GRAFS PONDERATS

1. Definició i exemples.
2. Camins més curts.
3. Grafs acíclics. Mètode del camí crític.
4. Algoritme de Dijkstra.
5. Camins més curts entre tots els parells de vèrtexs. Mètode de Floyd-Warshall.
6. Arbres generadors de mínim pes.

1. DEFINICIÓ I EXEMPLES

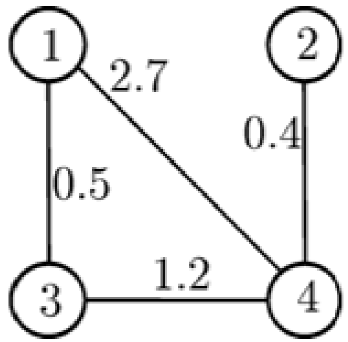
DEFINICIÓ:

Un graf simple G = (V,A) (graf simple dirigit, respectivament) direm que és un graf ponderat si té associada una funció **W: A ⟶ R**, anomenada **funció de ponderació**.

La imatge de cada aresta (arc, respectivament) determinada pels vèrtexs $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$ l'anomenarem pes de l'aresta (arc) i ho denotarem per $\mathbf{w}_{ij}$.

EXEMPLE: G=(V,A), V={1,2,3,4}, A={{1,3},{2,4},{3,4},{1,4}}. Associant la funció W

$$W : A \longrightarrow R \begin{cases} W(\{1,3\}) = 0.5 \\ W(\{2,4\}) = 0.4 \\ W(\{3,4\}) = 1.2 \\ W(\{1,4\}) = 2.7 \end{cases}$$



Índex

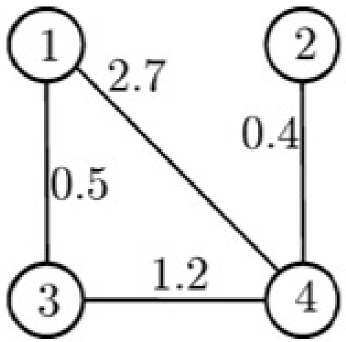
1. DEFINICIÓ I EXEMPLES

DEFINICIÓ:

Siga G = (V,A) un graf ponderat finit tal que V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Anomenarem **matriu de pes** del graf G a la següent matriu d'orde n × n:

$$\Omega = [a_{ij}] \; / \; a_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} & \text{si } \{v_i, v_j\} \in A \text{ (si } (v_i, v_j) \in A\text{, en el cas dirigit)} \\ \infty & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin A \text{ (si } (v_i, v_j) \notin A\text{, en el cas dirigit)} \end{cases}$$

EXEMPLE:

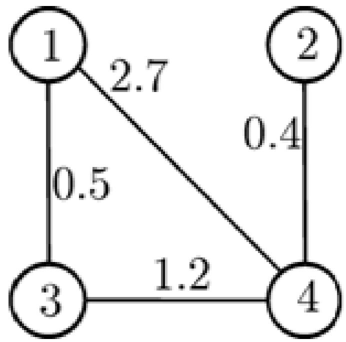


$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0.5 & 2.7 \\ \infty & \infty & \infty & 0.4 \\ 0.5 & \infty & \infty & 1.2 \\ 2.7 & 0.4 & 1.2 & \infty \end{bmatrix}$$

1. DEFINICIÓ I EXEMPLES

DEFINICIÓ:

En un graf ponderat anomenem **pes d'un camí** a la suma dels pesos de les arestes (arcs respectivament) que el formen.



EXEMPLE: Els únics camins del vèrtex 1 al 2 són:

$$C_1 \equiv 1\ 3\ 4\ 2$$

$$\omega(C_1) = \omega(\{1,3\}) + \omega(\{3,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 0.5 + 1.2 + 0.4 = 2.1$$

$$C_2 \equiv 1\ 4\ 2$$

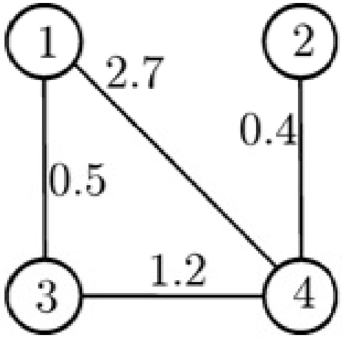
$$\omega(C_2) = \omega(\{1,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 2.7 + 0.4 = 3.1$$

1. DEFINICIÓ I EXEMPLES

DEFINICIÓ:

- En un graf ponderat anomenem **camí més curt** entre dos vèrtexs donats al camí de pes mínim entre aquestos vèrtexs.
- En un graf ponderat anomenarem **camí més llarg** o **camí crític** entre dos vèrtexs donats al camí de pes màxim entre aquestos vèrtexs.

EXEMPLE:



$C_1 \equiv 1\ 3\ 4\ 2$ **Camí més curt**

$$\omega(C_1) = \omega(\{1,3\}) + \omega(\{3,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 0.5 + 1.2 + 0.4 = 2.1$$

$C_2 \equiv 1\ 4\ 2$ **Camí més llarg – Camí crític**

$$\omega(C_2) = \omega(\{1,4\}) + \omega(\{4,2\}) = 2.7 + 0.4 = 3.1$$

2. CAMINS MÉS CURTS

Suposarem que els pesos associats als arcs són tots no negatius i que el graf és dirigit.

Suposarem a més que els vèrtexs del graf estan numerats de **1** a **n**, de manera que $\mathbf{w}_{ij}$ representa el pes de l'arc (i,j) i que el vèrtex **1** és l'origen del camí.

A més $\mathbf{u}_j$ denotarà el pes del c.m.c. (camí més curt) de **1** a **j**.

TEOREMA

Siga **1**,...,**k**,...,**j** un c.m.c. entre els vèrtexs **1** i **j** d'un graf ponderat G. Aleshores les seccions d'aquest camí **1**,...,**k** i **k**,...,**j** són els camins més curts entre els vèrtexs respectius.

2. CAMINS MÉS CURTS

COROL·LARI:

Suposem que en un graf ponderat tenim un camí més curt entre els vèrtexs **1** i **j**. Siga **k** el vèrtex immediatament anterior a **j** en aquest camí. Aleshores, la secció d'aquest camí des d'**1** a **k** és el camí més curt entre aquests dos vèrtexs. A més:

$$u_j = u_k + w_{kj}$$

EQUACIONS DE BELLMAN

$$u_1 = 0$$

$$u_j = \min_{k \neq j}\{u_k + w_{kj}\} \quad j = 2, \ldots, n$$

2. CAMINS MÉS CURTS

EXEMPLE:

Considerem el graf ponderat amb 4 vèrtexs, definit per la següent matriu de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Si apliquem les equacions de Bellman a aquest graf, per a calcular els pesos dels camins més curts del vèrtex $\mathbf{v}_1$ a la resta:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \min\{u_1+\omega_{12}, u_3+\omega_{32}, u_4+\omega_{42}\} \\ &= \min\{5,\infty,u_4+2\} = \min\{5, \underline{u_4+2}\}, \\ u_3 &= \min\{u_1+\omega_{13}, u_2+\omega_{23}, u_4+\omega_{43}\} \\ &= \min\{3, u_2+2, \infty\} = \min\{3, \underline{u_2+2}\} \\ u_4 &= \min\{u_1+\omega_{14}, u_2+\omega_{24}, u_3+\omega_{34}\} \\ &= \min\{2,\infty,u_3+4\} = \min\{2, \underline{u_3+4}\} \end{aligned}$$

Veiem que obtenim unes relacions de precedència cícliques que impedeixen el càlcul dels valors $\mathbf{u}_j$. És deguda a l'existència d'un circuit: $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4\mathbf{v}_2$

2. CAMINS MÉS CURTS

EXEMPLE:

Considerem el graf ponderat amb 4 vèrtexs, definit per la següent matriu de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Si apliquem les equacions de Bellman a aquest graf, per a calcular els pesos dels camins més curts del vèrtex $\mathbf{v}_1$ a la resta:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= \min\{u_1 + \omega_{12}, u_3 + \omega_{32}, u_4 + \omega_{42}\} \\ &= \min\{5, \infty, \infty\} = 5, \\ u_3 &= \min\{u_1 + \omega_{13}, u_2 + \omega_{23}, u_4 + \omega_{43}\} \\ &= \min\{3, u_2 + 2, \infty\} = \min\{3, 5 + 2\} = 3, \\ u_4 &= \min\{u_1 + \omega_{14}, u_2 + \omega_{24}, u_3 + \omega_{34}\} \\ &= \min\{2, \infty, u_3 + 4\} = \min\{2, 3 + 4\} = 2. \end{aligned}$$

∞

Si eliminem l'arc $(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2)$

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

TEOREMA:

Un graf dirigit no té circuits si, i només si, hi ha una numeració dels vèrtexs per a la que es compleix que si (i, j) és un arc del graf, aleshores i < j.

Amb aquesta numeració, les equacions de Bellman poden ser reemplaçades per:

$$u_1 = 0$$

$$u_j = \min_{k<j}\{u_k + w_{kj}\} \quad j = 2, \dots, n$$

$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \dots, n$$

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALGORITME DE NUMERACIÓ

Etapa 1. Inicialitzar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$.

Etapa 2. Prendre $v \in V^{(i)}$ tal que $d_e(v) = 0$ en $G[V_i]$.

Etapa 3. Numerar el vèrtex v com a vèrtex i.
Fer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$.
Fer $i \leftarrow i + 1$.

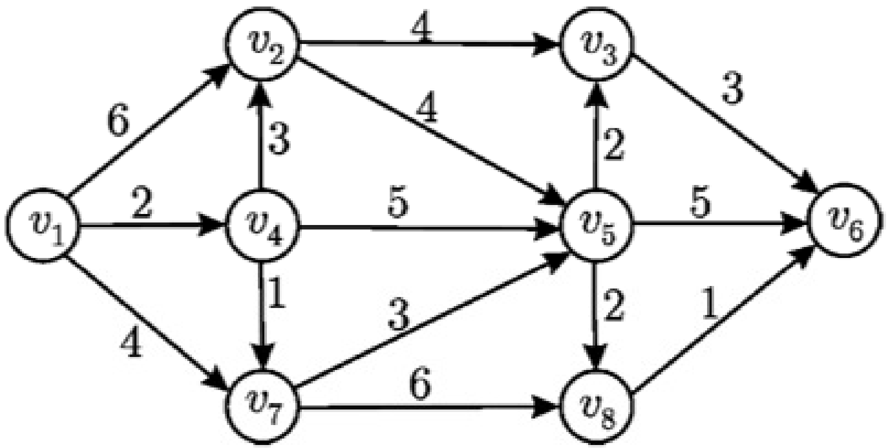
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \emptyset$, aleshores PARAR.
En qualsevol altre cas, tornar a l'etapa 2.

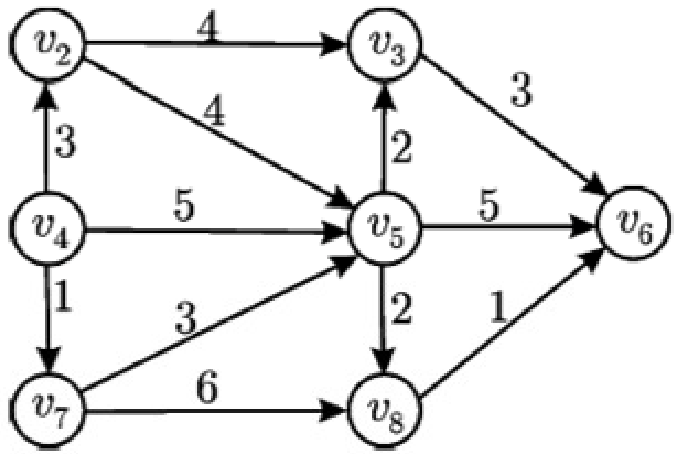
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1							

$i = 1.$
$V^{(1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Prenem $v_1 \in V^{(1)}$ / $d_e(v_1) = 0.$





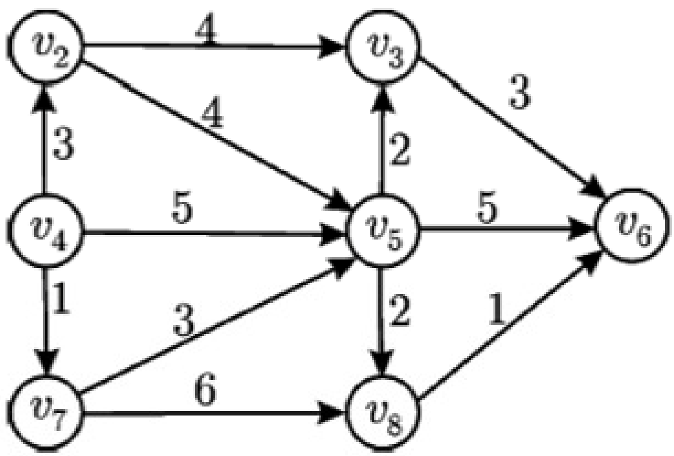
Numerem v_1 con 1.
Eliminem v_1 de $V^{(1)}$, és a dir,
$V^{(2)} = V^{(1)} \sim \{v_1\}.$

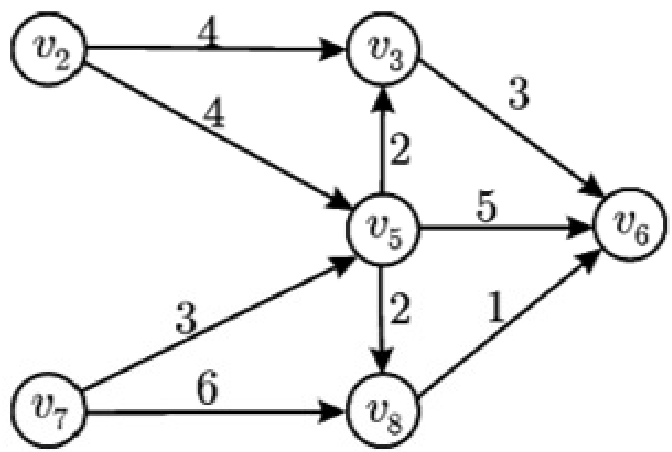
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1			2				

$i = 2.$
$V^{(2)} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Prenem $v_4 \in V^{(2)}$ / $d_e(v_4) = 0.$





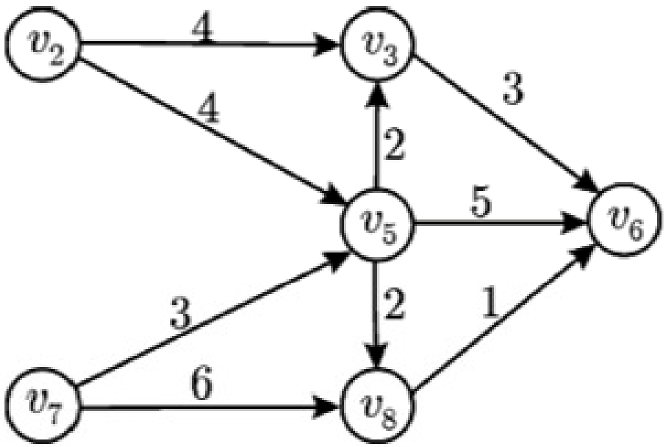
Numerem v_4 con 2.
Eliminem v_4 de $V^{(2)}$, és a dir,
$V^{(3)} = V^{(2)} \sim \{v_4\}.$

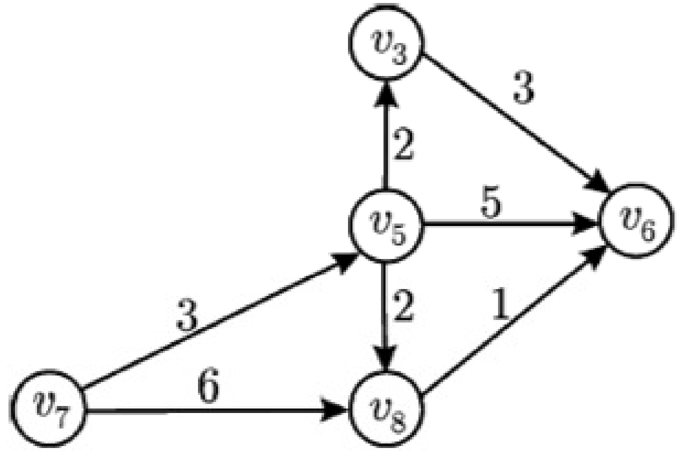
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2				

$i = 3$.
$V^{(3)} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.
Prenem $v_2 \in V^{(3)}$ / $d_e(v_2) = 0$.





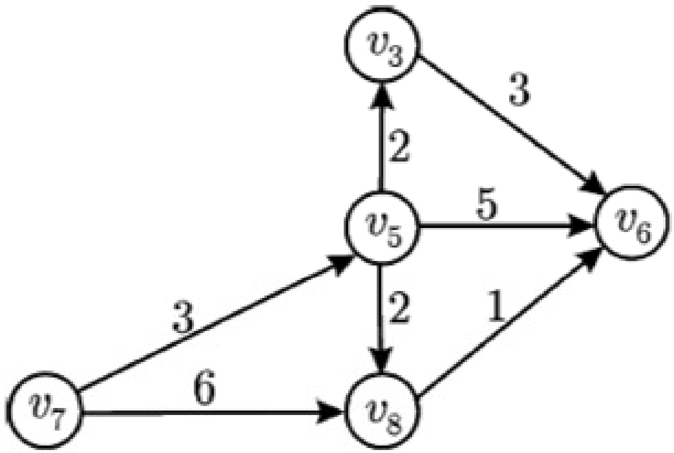
Numerem v_2 *con* 3.
Eliminem v_2 *de* $V^{(3)}$, *és a dir,*
$V^{(4)} = V^{(3)} \sim \{v_2\}$.

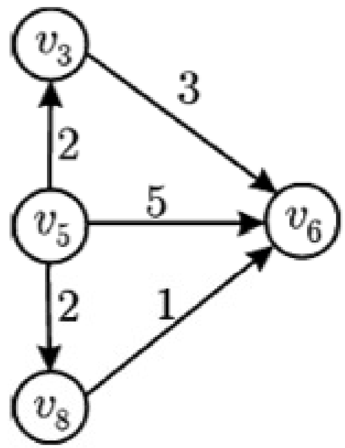
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2			4	

$i = 4$.
$V^{(4)} = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.
Prenem $v_7 \in V^{(4)}$ / $d_e(v_7) = 0$.





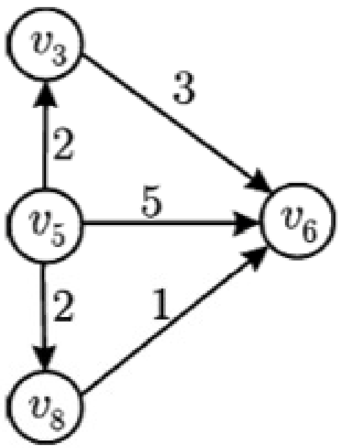
Numerem v_7 con 4.
Eliminem v_7 de $V^{(4)}$, és a dir,
$V^{(5)} = V^{(4)} \sim \{v_7\}$.

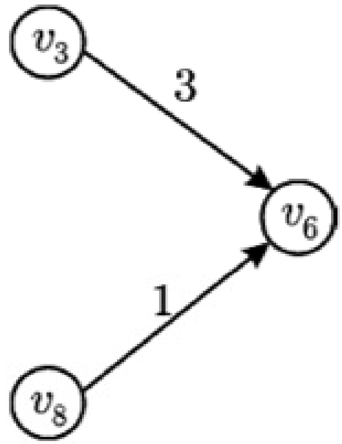
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2	5		4	

$i = 5$.
$V^{(5)} = \{v_3, v_5, v_6, v_8\}$.
Prenem $v_5 \in V^{(5)}$ / $d_e(v_5) = 0$.



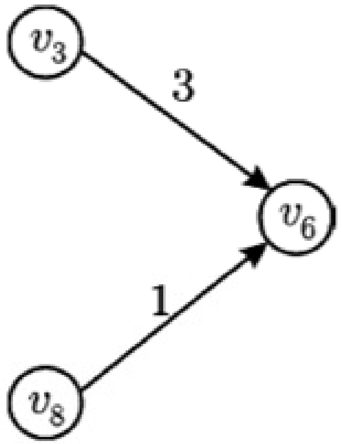


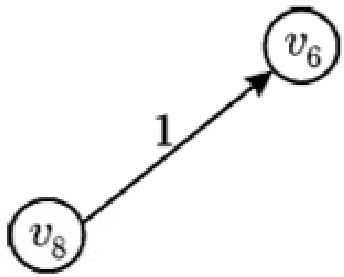
Numerem v_5 *con* 5.
Eliminem v_5 *de* $V^{(5)}$, *és a dir,*
$V^{(6)} = V^{(5)} \sim \{v_5\}$.

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	

$i = 6.$
$V^{(6)} = \{v_3, v_6, v_8\}.$
Prenem $v_3 \in V^{(6)} \;/\; d_e(v_3) = 0.$





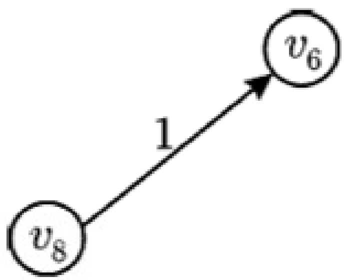
Numerem v_3 con 6.
Eliminem v_3 de $V^{(6)}$, és a dir,
$V^{(7)} = V^{(6)} \sim \{v_3\}.$

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	7

$i = 7.$
$V^{(7)} = \{v_6, v_8\}.$
Prenem $v_8 \in V^{(7)}$ / $d_e(v_8) = 0.$

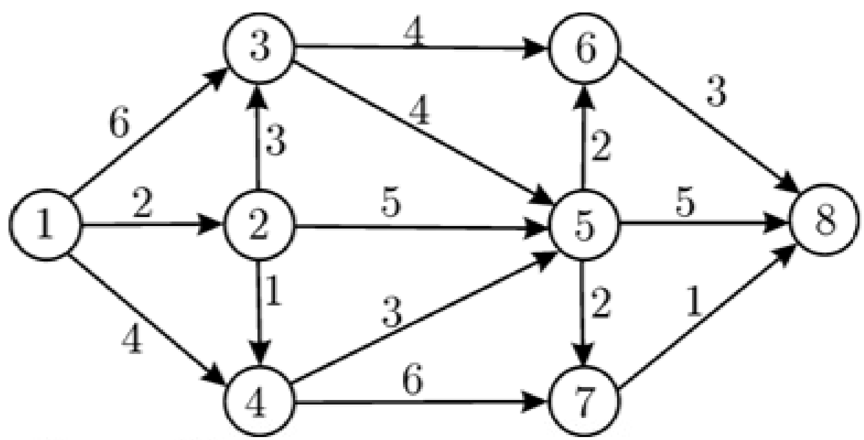


Numerem v_8 con 7.
Eliminem v_8 de $V^{(7)}$, és a dir,
$V^{(8)} = V^{(7)} \sim \{v_8\}.$

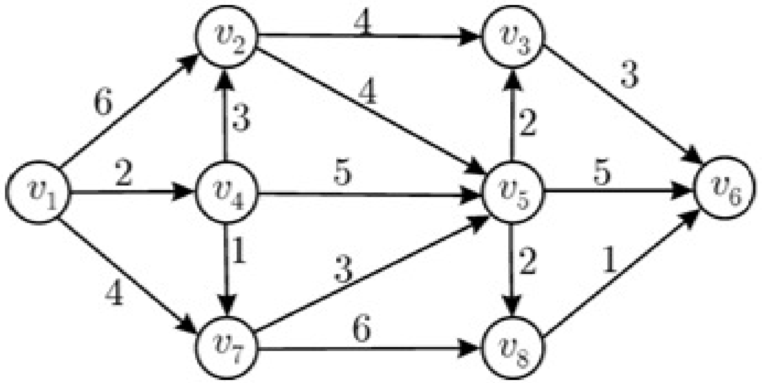
ALG. DE NUMERACIÓ: EXEMPLE

Vèrtex:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5	8	4	7

$i = 8$.
$V^{(8)} = \{v_6\}$.
Prenem $v_6 \in V^{(8)} \;/\; d_e(v_6) = 0$.



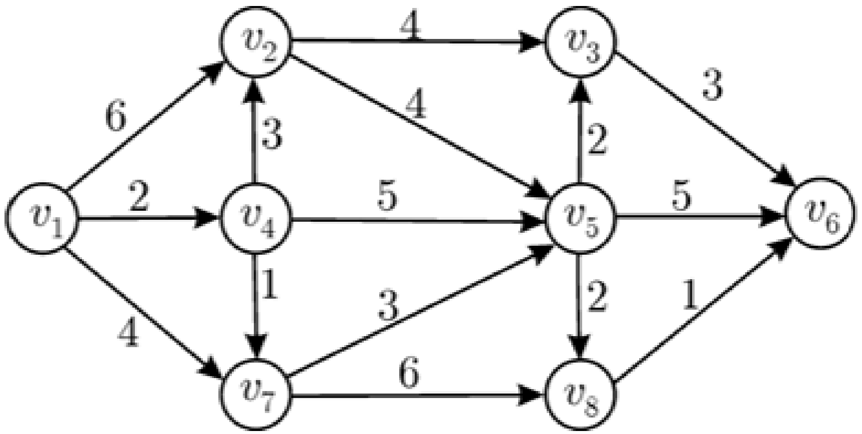
Numerem v_6 con 8.
Eliminem v_6 de $V^{(8)}$, és a dir,
$V^{(9)} = V^{(8)} \sim \{v_6\} = \emptyset$.

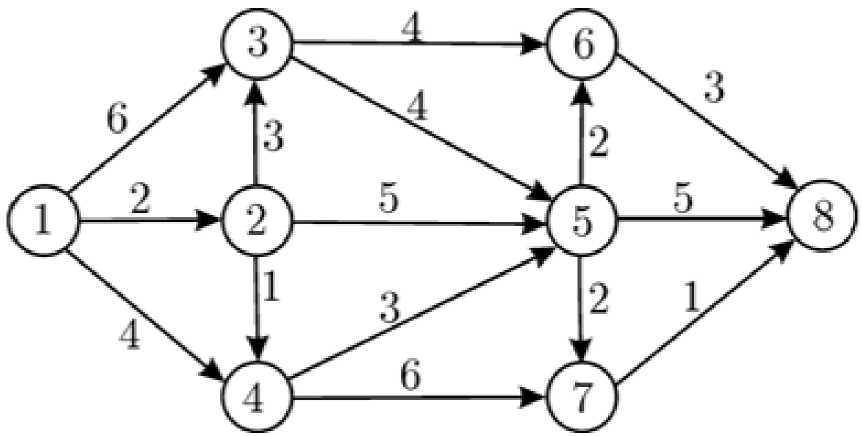


3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE:

Considerem el graf dirigit de la figura següent:

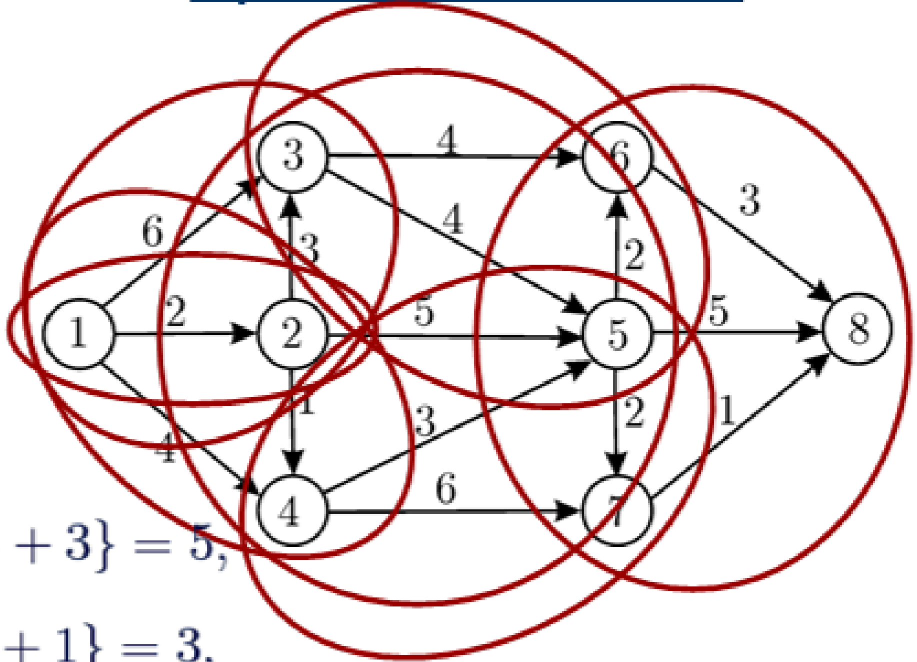




Amb la nova numeració que acabem de calcular, ja podem aplicar les equacions de Bellman

$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

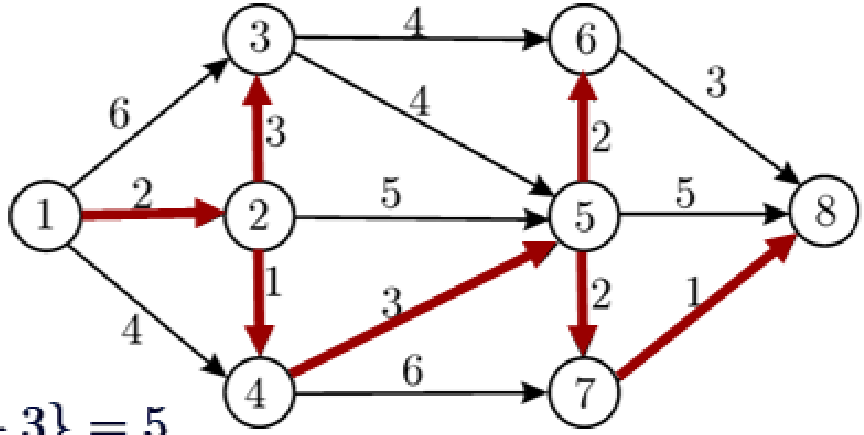
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC



EXEMPLE:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \text{mín}\{u_1+\omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \text{mín}\left\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\right\} = \text{mín}\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \text{mín}\left\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\right\} = \text{mín}\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \text{mín}\left\{u_2+\omega_{25}, u_3+\omega_{35}, \underline{u_4+\omega_{45}}\right\} = \text{mín}\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6,\\
u_6 &= \text{mín}\left\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\right\} = \text{mín}\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \text{mín}\left\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\right\} = \text{mín}\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \text{mín}\left\{u_5+\omega_{58}, u_6+\omega_{68}, \underline{u_7+\omega_{78}}\right\} = \text{mín}\left\{6+5, 8+3, 8+1\right\} = 9.
\end{aligned}
$$

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC



EXEMPLE:

IDENTIFICACIÓ DE CAMINS

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \min\{u_1+\omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \min\left\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \min\left\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \min\left\{u_2+\omega_{25}, u_3+\omega_{35}, \underline{u_4+\omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6,\\
u_6 &= \min\left\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \min\left\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \min\left\{u_5+\omega_{58}, u_6+\omega_{68}, \underline{u_7+\omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}
$$

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

APLICACIÓ: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Hi ha projectes de gran envergadura que inclouen la realització d'un gran nombre de subtasques o activitats que estan mútuament relacionades de diverses formes.

Per exemple, per a realitzar una determinada activitat és necessari que certes activitats hagen sigut ja realitzades.

La realització d'aquest tipus de projectes fa necessària una planificació racional de l'activitat a desenvolupar que es designa pel nom genèric de PERT.

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

APLICACIÓ: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Un dels mètodes utilitzats en el context PERT passa per representar el projecte per mitjà d'un graf dirigit.

Cada activitat de què es compon el projecte es representa per un vèrtex $\mathbf{v}_j$.

Si per a realitzar l'activitat $\mathbf{v}_j$ és necessari haver realitzat immediatament abans l'activitat $\mathbf{v}_i$, incloem un arc $(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$.

A aquest arc li assignarem un pes $\mathbf{w}_{ij}$, que representa el temps entre l'inici de l'act. $\mathbf{v}_i$ i l'inici de l'act. $\mathbf{v}_j$.

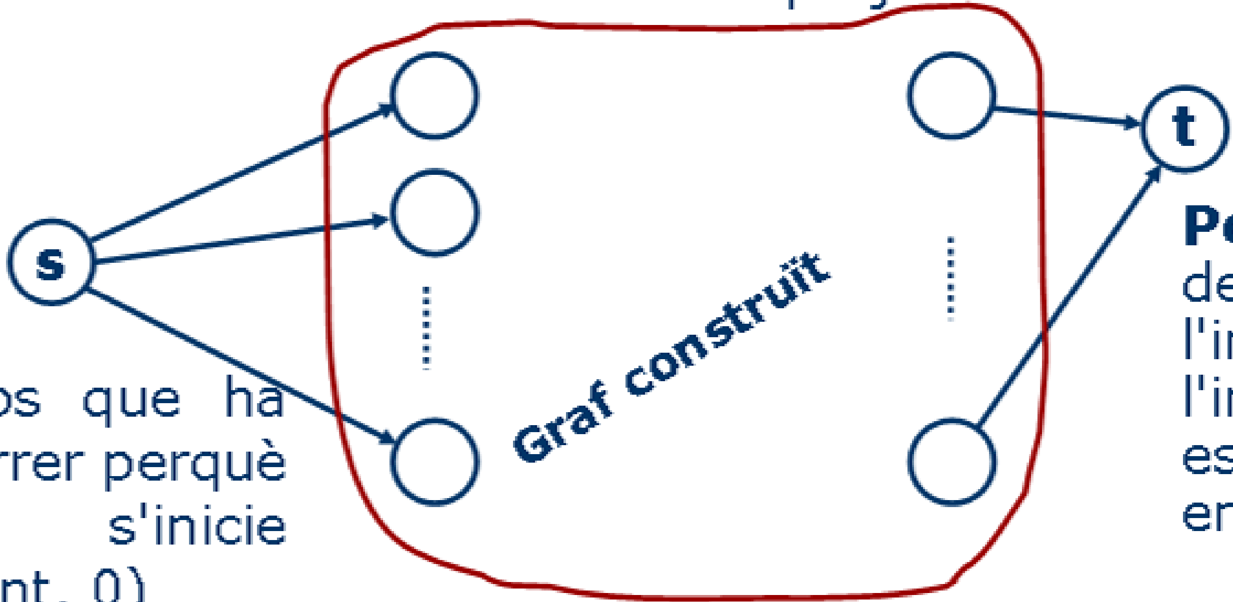
El graf així construït és acíclic ja que l'existència d'un circuit implicaria que el projecte és irrealitzable.

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

APLICACIÓ: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Afegirem un vèrtex fictici que unisca els vèrtexs amb grau d'entrada zero. Indicarà l'inici del projecte.

Afegirem un vèrtex fictici que unisca els vèrtexs amb grau d'eixida zero. Indicarà el final del projecte.



Pes: temps que ha de transcórrer perquè l'activitat s'inicie (normalment, 0)

Pes: temps que ha de transcórrer entre l'inici de l'activitat i l'instant en què està llesta per a ser entregada.

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

APLICACIÓ: PERT (Proyect Evaluation Research Task)

Mínim temps necessari per a completar el projecte en la seua totalitat:

Aquest camí es denomina **camí crític** ja que les activitats que inclou determinen el temps total de realització del projecte i qualsevol retard en l'execució d'una d'elles implica un retard en la terminació del projecte.

És per això que a aquestes activitats se les denomina **activitats crítiques**.

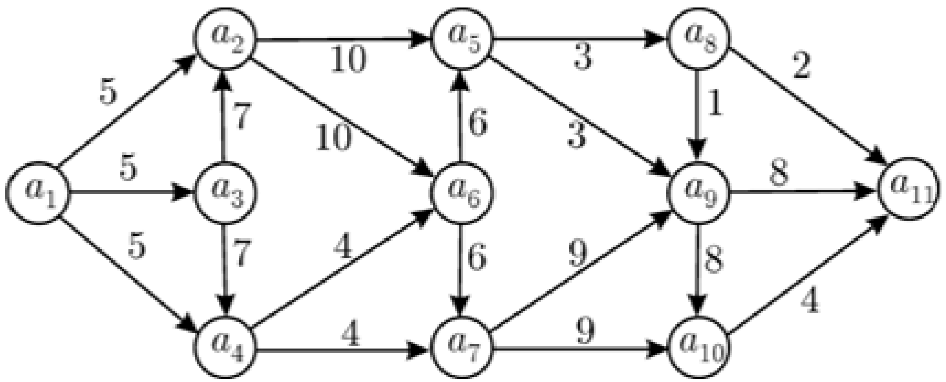
Com es calcula?

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_j &= \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

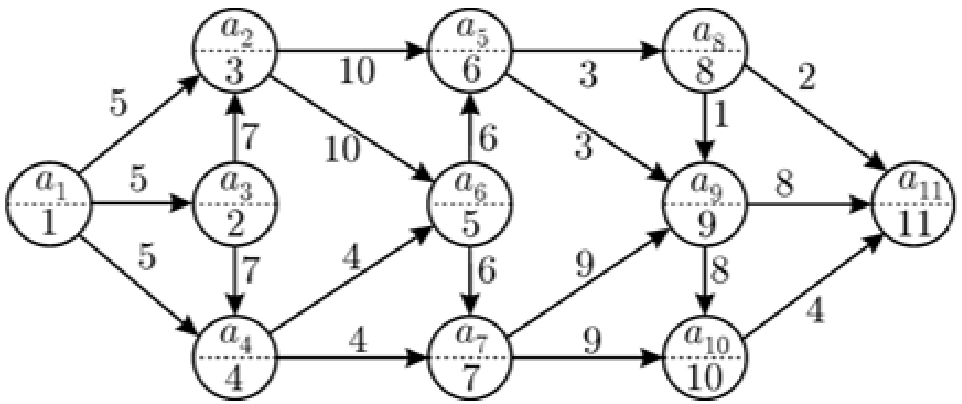
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 1: PERT

Calculem el mínim nombre de dies en què pot completar-se el següent projecte.



Primer: calcular nova numeració



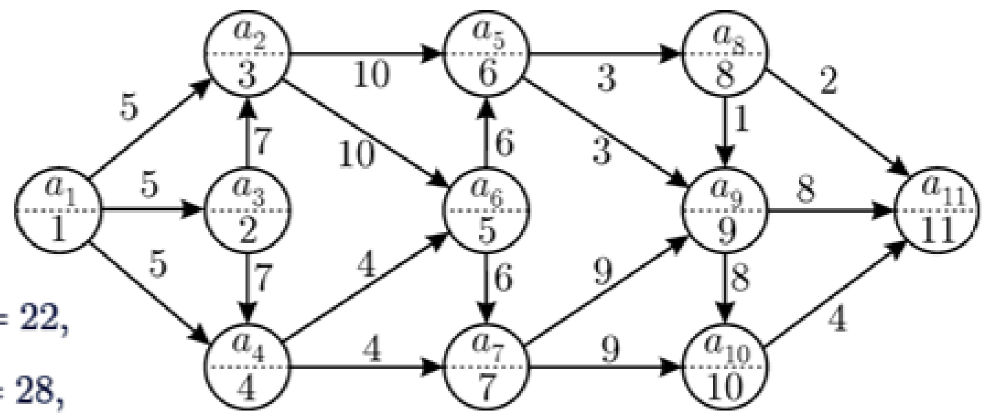
Índex

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 1: PERT

Segon: Aplicar ec. de Bellman

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \text{máx}\,\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \text{máx}\,\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \text{máx}\,\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \text{máx}\,\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \text{máx}\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \text{máx}\,\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \text{máx}\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \text{máx}\,\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \text{máx}\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \text{máx}\,\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \text{máx}\,\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \text{máx}\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \text{máx}\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \text{máx}\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \text{máx}\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \text{máx}\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$



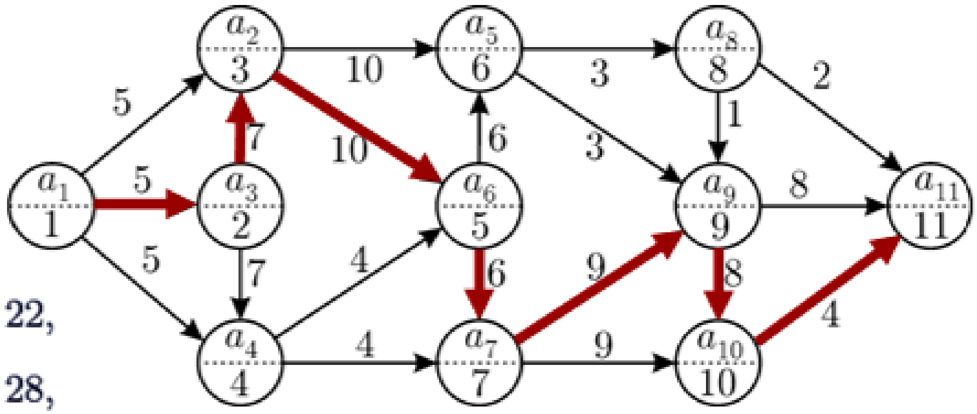
Mínim nombre de dies en què pot completar-se el projecte: 49

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 1: PERT

Tercer: Identificar el camí crític

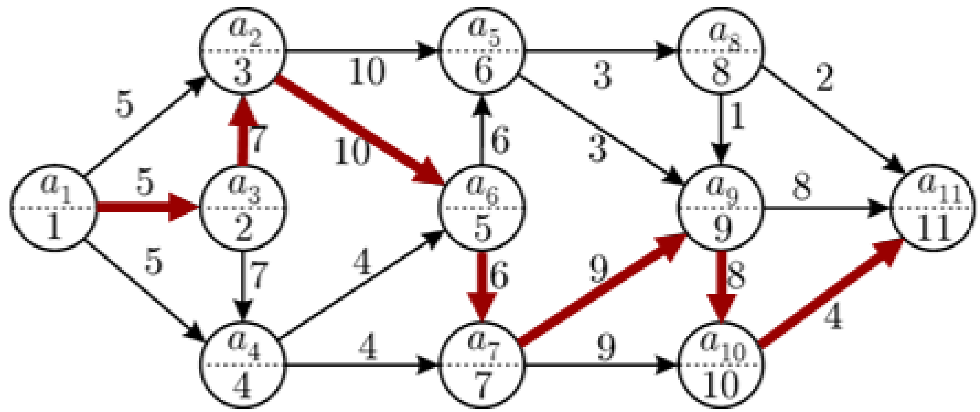
$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \text{máx}\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \text{máx}\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \text{máx}\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \text{máx}\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \text{máx}\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \text{máx}\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \text{máx}\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \text{máx}\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \text{máx}\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \text{máx}\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \text{máx}\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$



Mínim nombre de dies en què pot completar-se el projecte: 49

EXEMPLE 1: PERT

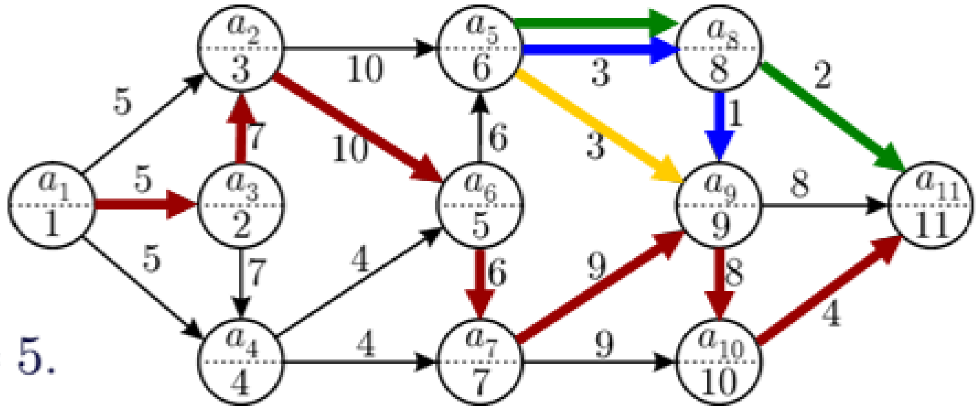
Pregunta: calcular el màxim retard permés per a l'activitat $\mathbf{a}_5$ (corresponent al vèrtex renumerat amb un 6) de manera que no afecte la duració del projecte en la seua totalitat



Solució: considerarem els distints camins que enllacen l'activitat $\mathbf{a}_5$ amb el camí crític

3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 1: PERT



- Camí $P^{(1)}_{6,9}$: 6 9, amb pes $\omega(P^{(1)}_{6,9}) = 3$.
- Camí $P^{(2)}_{6,9}$: 6 8 9, amb pes $\omega(P^{(2)}_{6,9}) = 4$.
- Camí $P_{6,11}$: 6 8 11, amb pes $\omega(P_{6,11}) = 5$.

Suposem que l'activitat **a**$_5$ es retarda x dies. Perquè els tres camins anteriors no retarden el camí crític s'ha de complir:

$$\left.\begin{array}{ll} P^{(1)}_{6,9}: & u_6 + \omega(P^{(1)}_{6,9}) + x \le u_9 \\ P^{(2)}_{6,9}: & u_6 + \omega(P^{(2)}_{6,9}) + x \le u_9 \\ P_{6,11}: & u_6 + \omega(P_{6,11}) + x \le u_{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 28+3+x \le 37 \\ 28+4+x \le 37 \\ 28+5+x \le 49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \le 6 \\ x \le 5 \\ x \le 16 \end{array}\right\} \Rightarrow x \le 5$$

Màxim retard permés de l'activitat **a**$_5$: 5 dies

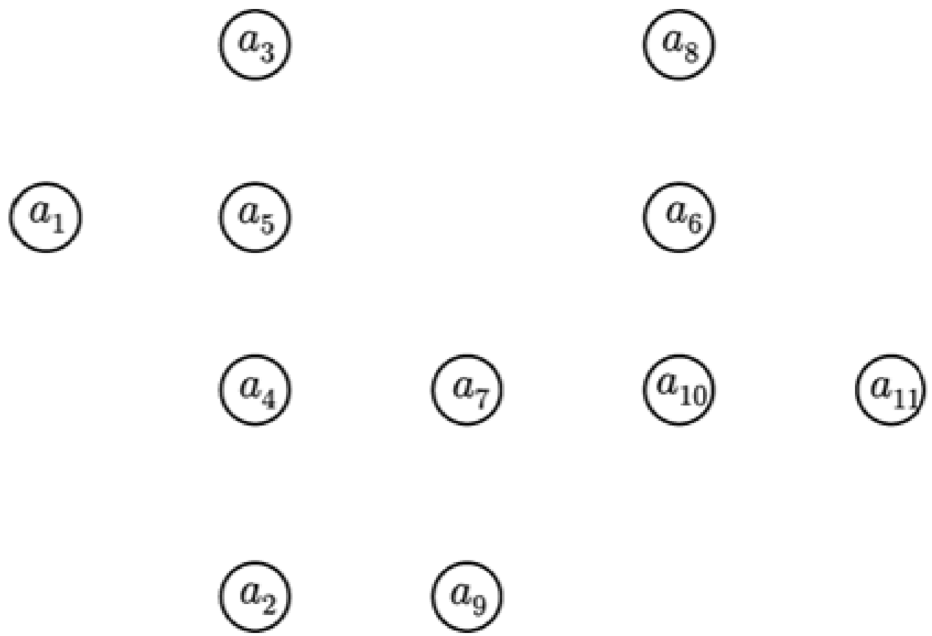
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 2: PERT

Com representar el graf a partir d'una taula de prerequisits?

Activitat	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Temps necessari	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerequisits	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Primer: Representem cada activitat per mitjà d'un vèrtex



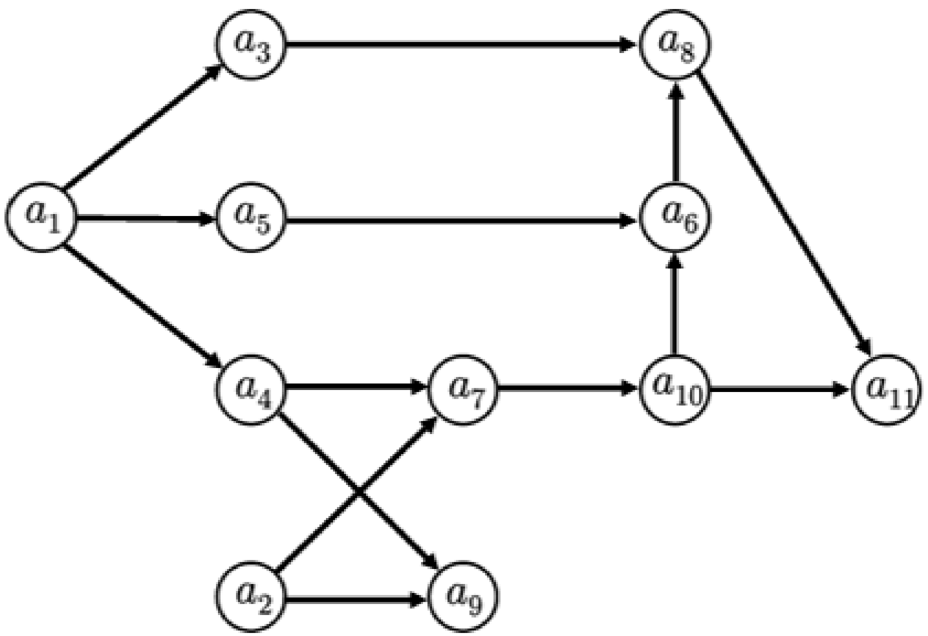
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 2: PERT

Com representar el graf a partir d'una taula de prerequisits?

Activitat	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Temps necessari	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerequisits	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Segon: Incorporem els arcs en funció dels prerequisits



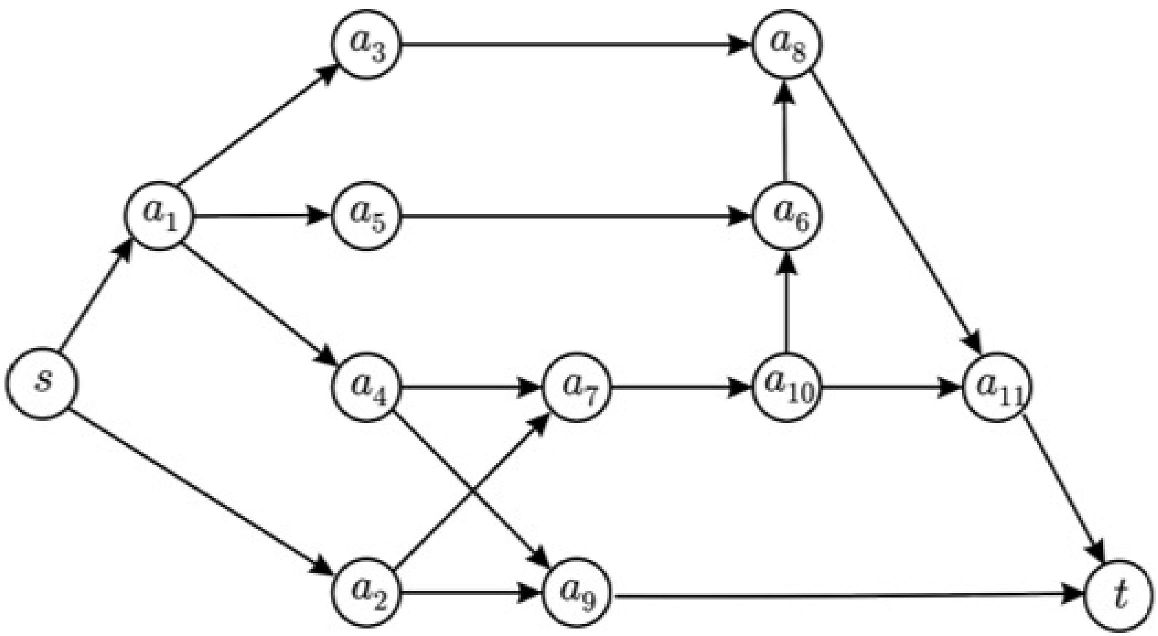
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 2: PERT

Com representar el graf a partir d'una taula de prerequisits?

Activitat	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Temps necessari	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerequisits	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Tercer: Afegim els vèrtexs ficticis



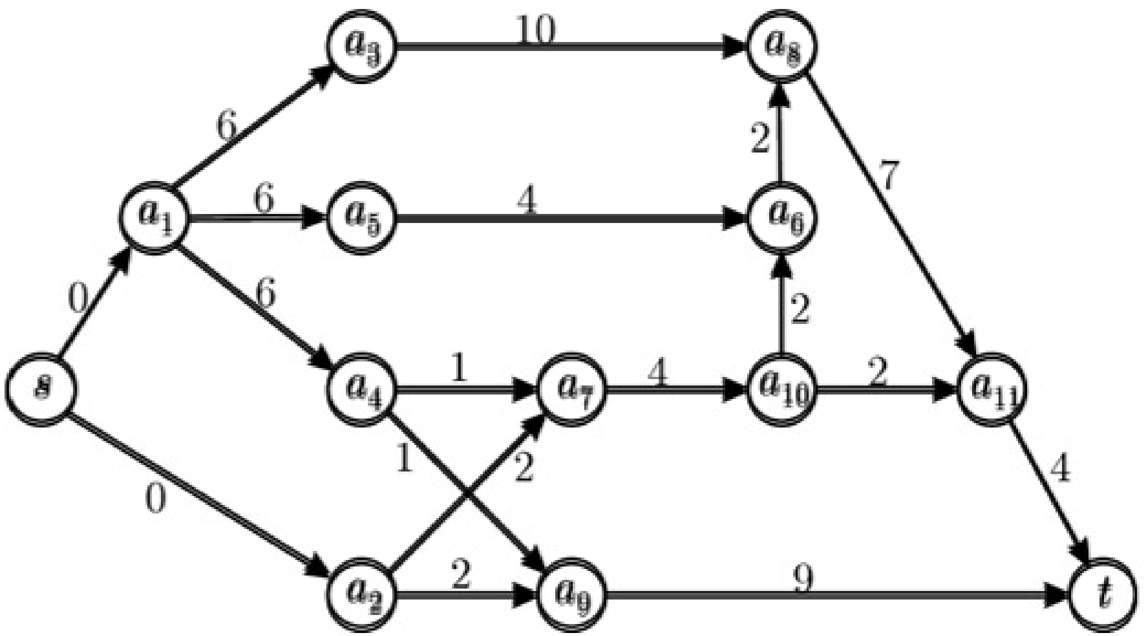
3. GRAFS ACÍCLICS. MÈTODE DEL CAMÍ CRÍTIC

EXEMPLE 2: PERT

Com representar el graf a partir d'una taula de prerequisits?

Activitat	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Temps necessari	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerequisits	–	–	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}

Quart: Afegim els pesos



Índex