Nota de cuestiones sobre 10 puntos. Nota de problemas sobre 10 puntos

Cuestiones:

C1. Dos esferas metálicas de 4 y 6 cm de radio, separadas por una gran distancia, se cargan con 3x10^{-8} C cada una. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos esferas? [0.5 puntos], (b) A continuación las dos esferas se unen por un hilo conductor de capacidad despreciable ¿qué carga queda en cada esfera cuando se alcanza el equilibrio? [1 punto], c) ¿Cuál es el potencial final de las esferas? [0.5 puntos]. Dato: $K = 9\cdot 10^9$ u.S.I.

SOLUCIÓN:

(a) Las cargas, al estar muy separadas, no se influyen entre sí. Por tanto:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{R_1} = 9\cdot 10^9 \frac{3\cdot 10^{-8}}{4\cdot 10^{-2}} = 6750 \text{ V}\ , \text{ y } \ V_2 = K\frac{Q_2}{R_2} = 9\cdot 10^9 \frac{3\cdot 10^{-8}}{6\cdot 10^{-2}} = 4500 \text{ V}$$

Entonces: $V_1 - V_2 = 2250$ V

(b) Si unimos las esferas por un hilo conductor las cargas se redistribuyen para conseguir que ambas tengan el mismo potencial. Se tiene que cumplir, que: $V_{1f} = V_{2f}$ y que la carga total $Q_T = Q_{1i} + Q_{2i} = 6\cdot 10^{-8} C$ debe conservarse.

En consecuencia: $$K\frac{Q_{1f}}{R_1} = K\frac{Q_{2f}}{R_2} \Rightarrow Q_{2f} = \frac{R_2}{R_1}Q_{1f} \quad \text{y} \quad Q_{1f} + \frac{3}{2}Q_{1f} = 6\cdot 10^{-8} C$$

Por tanto $Q_{1f} = 2.4\cdot 10^{-8} C$ y $Q_{2f} = 3.6\cdot 10^{-8} C$

(c) $$V_{1f} = V_{2f} = 9\cdot 10^9 \frac{2.4\cdot 10^{-8}}{4\cdot 10^{-2}} = 5400 \text{ V}$$

C2. Una carga puntual de valor -2q se encuentra en el centro de una corteza esférica conductora de radio 10 cm y grosor despreciable. La corteza esférica tiene una carga total 8q. Calcula: (a) el campo y el potencial en puntos que distan 5cm y 20 cm de la carga puntual [1.5 puntos]. (b) El flujo eléctrico a través de una esfera de radio 8 cm, concéntrica con la corteza esférica [0.5 puntos]. Nota: Deja los resultados en función de K, q y ε_0.

SOLUCIÓN:

(a) Puntos interiores r< R=10 cm. La carga de la corteza esférica conductora Q, situada sobre su superficie, no crea campo en el interior de la esfera pero si un potencial constante $K\frac{Q}{R}$. Por tanto:

$$E_{r=5cm} = K\frac{-2q}{(0.05)^2}u_r = -800Kq\,u_r \text{ [N/C]};\ V_{r=5cm} = K\frac{q_i}{r} + K\frac{Q}{R} = K\frac{-2q}{0.05} + K\frac{8q}{0.1} = 40Kq \text{ [V]}$$

Puntos exteriores r> R=10 cm. Ambas cargas se comportan como cargas puntuales situadas en el centro de la esfera. Luego:

$$E_{r=20cm} = K\frac{-2q+8q}{(0.2)^2}u_r = 150Kq\,u_r \text{ N/C} \quad \text{y} \quad V_{r=20cm} = K\frac{-2q+8q}{0.2} = 30Kq \text{ [V]}$$

(b) Flujo eléctrico: para esfera de radio 8 cm sólo la carga puntual está encerrada, por tanto:

$$\phi_{r=8cm} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = -\frac{2q}{\varepsilon_0} \text{ [V}\cdot\text{m]}$$

C3. Un condensador de capacidad 10 μF está cargado con una diferencia de potencial de 100 V. La batería de carga se suprime y a continuación el condensador se conecta, en paralelo con otro condensador de capacidad 20 μF, inicialmente descargado. Calcula: (a) La carga final y el potencial de cada condensador [1 punto]. (b) La variación de energía eléctrica entre la situación inicial y final [1 punto].

SOLUCIÓN:

(a) Inicialmente el primer condensador adquiere una carga. $Q_1 = C_1 V_1 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1\,\mathrm{mC}$

Esa carga, al desconectar la batería, se mantendrá constante durante todo el proceso.

Cuando se conectan en paralelo los dos condensadores la carga inicial se redistribuye entre ambos hasta que sus potenciales se igualan. De forma que:

$$V'_1 = V'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad Q'_2 = \frac{C_2}{C_1} Q'_1 = 2Q'_1 \quad \text{y} \quad Q'_1 + Q'_2 = Q_1 = 1\,\mathrm{mC}$$

Por tanto: $Q'_1 = 1/3 \;\; \mathrm{mC}$; $Q'_2 = 2/3 \;\; \mathrm{mC}$ y $V'_1 = V'_2 = \dfrac{Q'_1}{C_1} = \dfrac{(1/3)\cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} = 33.33 \quad \mathrm{V}$

(b) $U_i = U_{1i} + 0 = (1/2) C_1 V^2 = (1/2) \cdot 10^{-5} \cdot 100^2 = 0.05 \;\; \mathrm{J}$

$$U_f = U_{1f} + U_{2f} = (1/2)(C_1 + C_2) V_f^{\,2} = (1/2) \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 33.33^2 = 0.0167\,\mathrm{J}$$

Lógicamente la energía ha disminuido en el proceso.

Nota: También puede obtenerse fácilmente la energía final a partir de:

$$U_f = (1/2) Q_{1f} \cdot V'_1 + (1/2) Q_{2f} \cdot V'_2 = (1/2)(Q_{1f} + Q_{2f}) \cdot V_f = (1/2) Q_{1i} V_f = 0.0167 \;\; \mathrm{J}$$

C4. Un electrón de carga q =–e =–1.6 x 10^{-19} C y con una velocidad de 500 m/s atraviesa perpendicularmente un campo magnético uniforme B=2 T, tras lo cual su velocidad permanece constante en módulo, dirección y sentido. Calcula el vector campo eléctrico presente en la misma región. Nota: elige libremente la dirección y sentido de B y v, siempre que sean perpendiculares entre sí [2 puntos].

SOLUCIÓN:

Supongamos que el campo magnético está en la dirección del eje Y de tal manera que $\vec{B} = 2\vec{j}$ [T]. Y tomamos para la trayectoria del electrón el eje Z siendo su velocidad $\vec{v} = 500\vec{k}$ m/s

La fuerza magnética que actúa sobre el electrón es: $\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} = -ev\vec{k} \times B\vec{j} = evB\,\vec{\imath}$.

Como: $\overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_E} = 0$, la fuerza eléctrica debe tener sentido negativo del eje X. $\vec{F} = qE(-\vec{\imath})$

Y al ser la carga negativa $(q = -e)$, el campo eléctrico debe tener sentido positivo del eje X.

Por tanto: $\vec{E} = E\vec{\imath} = v\,B\,\vec{\imath} = 1000\,\vec{\imath} \;\; \mathrm{V/m}$

C5. Un solenoide ideal de 2000 espiras, sección circular de radio r=1cm y longitud l=50cm es recorrido por una corriente $I(t) = (2 - t \cdot sen\theta)$ A, donde θ es una constante (θ=30º). Calcula la fuerza electromotriz inducida en el solenoide [1.5 puntos]. ¿Qué polaridad tiene dicha f.e.m? (utiliza la Ley de Lenz para justificar tu respuesta) [0.5 puntos].

SOLUCIÓN

(a) $\varepsilon = -L\dfrac{dI(t)}{dt}$, donde la autoinducción del solenoide podemos obtenerla a partir de:

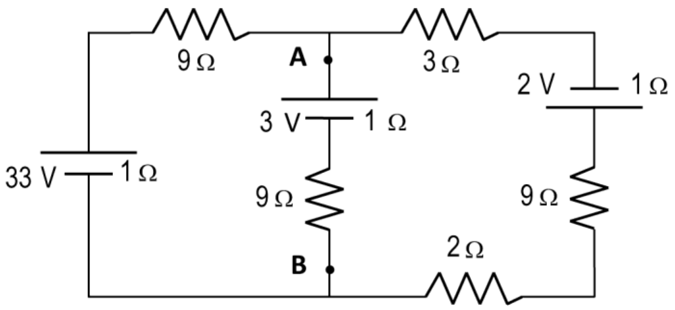
$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2000^2 \cdot \pi \cdot 0.01^2}{0.5} = 3.16 \cdot \text{mH}$$

Por tanto: $\varepsilon = -L\dfrac{dI(t)}{dt} = -L\dfrac{d(2 - t \cdot sen\theta)}{dt} = L \cdot sen\theta = 3.16 \cdot 10^{-3} sen 30^{o} = 1.58 \text{ mV}$

(b) La corriente a través del solenoide está decreciendo, por lo que de acuerdo con la ley de Lenz la f.e.m. inducida debe crear una corriente en el mismo sentido que la que circula por el solenoide. Esta conclusión es coherente con el signo positivo que hemos obtenido al aplicar la expresión: $\varepsilon = -L\dfrac{dI(t)}{dt}$

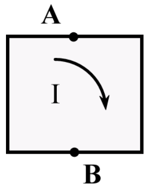
Problemas:

P1. En el circuito de la figura, calcula: (a) El circuito equivalente de Thevenin entre los puntos A y B de la malla exterior [2 puntos]. (b) La diferencia de potencial entre A y B [1 punto]. (c) La potencia que aporta o consume, según sea el caso, la f.e.m. de 3 V [1 punto].



SOLUCIÓN:

a) Hay que calcular la diferencia de potencial y la resistencia equivalente entre A y B, sólo con la parte de circuito a sustituir:



$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i}{R_T} = \frac{33+2}{9+3+1+9+2+1} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \text{ A}$$

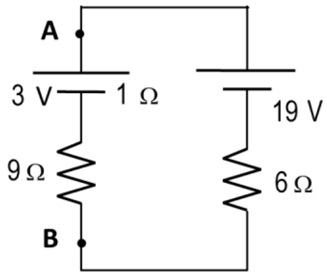
$$\Rightarrow \quad V_A - V_B = \frac{7}{5} \cdot (3+1+9+2) - (2) = 19 \text{ V}$$

(Polo positivo de V_{Th} en A porque $V_A > V_B$)

R_{Th}) Entre A y B las resistencias de (1Ω y 9Ω) están en serie entre sí (total 10Ω) y por su parte las de (3Ω, 1Ω, 9Ω y 2Ω) también (total 15Ω). Ahora las de 10Ω y 15Ω están en paralelo:

$$R_{Th} = \frac{10\cdot 15}{10+15} = 6\,\Omega$$

Ahora la rama central y el equivalente de Thévenin calculado queda:



b) Por este circuito circula una corriente, en sentido anti-horario de valor:

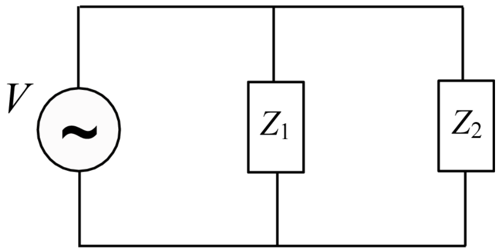
$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i}{R_T} = \frac{19-3}{6+9+1} = \frac{16}{16} = 1\ \text{A}$$

Luego la diferencia de potencial ente A y B es: $V_A - V_B = (1)\cdot(1+9) - (-3) = 13\ \text{V}$

c) Como el sentido de la corriente es anti-horario el generador de 3 V consume potencia del circuito y su valor es:

$$P_{C,3V} = 3\cdot I + I^2 \cdot 1 = 3\cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 4\,\text{W}$$

P2. En el circuito de la figura la f.e.m. alterna tiene una tensión compleja $\overline{V} = 220\underline{|0^o}$ V y entrega una corriente compleja $\overline{I} = 9.167\underline{|-6.87^o}$ A, siendo $\overline{Z}_1 = 40\underline{|60^o}\,\Omega$. Determina (a) La potencia activa entregada por la f.e.m. alterna [1 punto]. (b) Las corrientes complejas $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ que circulan por las impedancias $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$ respectivamente [2 puntos]. (c) La impedancia $\overline{Z}_2$ [1 punto].



SOLUCIÓN:

(a) La potencia compleja de la f.e.m. es $\overline{S} = \overline{V}\cdot\overline{I}^* = 220\underline{|0^o}\cdot 9.167\underline{|6.87^o} = 2016.7\underline{|6.87^o}$,

Luego la potencia activa entregada por la f.e.m. alterna es $P = 2016.7\cos(6.87) \approx 2002\ \text{W}$.

(b) Según la ley de Ohm generalizada, la corriente por $\overline{Z}_1$ es $\overline{I}_1 = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_1} = \dfrac{220\underline{|0^o}}{40\underline{|60^o}} = 5.5\underline{|-60^o}\ \text{A}$.

Además, la corriente $\overline{I}$ se reparte entre $\overline{Z}_1$ y $\overline{Z}_2$ y por tanto $\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 \Rightarrow \overline{I}_2 = \overline{I} - \overline{I}_1$.

Como $\overline{I} = 9.167\underline{|-6.87^{\text{o}}} = 9.167\cos(-6.87^{\text{o}}) + j9.167\text{sen}(-6.87^{\text{o}}) \approx 9.1 - j1.1\,\text{A}$ y además $\overline{I}_1 = 5.5\underline{|-60^{\text{o}}} = 5.5\cos(-60^{\text{o}}) + j5.5\text{sen}(-60^{\text{o}}) \approx 2.75 - j4.76\,\text{A}$,

La corriente compleja por $\overline{Z}_2$ es $\overline{I}_2 = \overline{I} - \overline{I}_1 = 6.35 + j3.66\text{ A} = 7.33\underline{|30^{\text{o}}}\text{ A}$

(c) La impedancia Z_2 se obtiene: $\overline{V} = \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}_2 \;\Rightarrow\; \overline{Z}_2 = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}_2} = \dfrac{220\underline{|0^{\text{o}}}}{7.33\underline{|30^{\text{o}}}} \approx 30\underline{|-30^{\text{o}}}\,\Omega$.

NOTA: En el apartado (a) la potencia activa también se puede obtener de forma alternativa como $P = V_e I_e \cos(\varphi) = 2002\text{W}$, donde $V_e = |\overline{V}| = 220\text{V}$, $I_e = |\overline{I}| = 9.167\text{A}$ y $\varphi = 0 - (-6.87^{\text{o}}) = 6.87^{\text{o}}$ es la fase de la impedancia total obtenida como la fase de la tensión compleja (0^{o}) menos la fase de la corriente compleja (-6.87^{o}) .

P3.Una onda electromagnética plana tiene un campo eléctrico de amplitud 9 V/m, una frecuencia de 109 Hz y una longitud de onda de 10 cm. La onda se propaga en el sentido negativo del eje Z y está polarizada según el eje X (dirección en la que oscila el campo eléctrico). Calcula: (a) La velocidad de propagación de la onda [0.5 puntos]. (b) La velocidad angular, número de onda y amplitud del campo magnético [0.5 puntos]. (c) La expresión de los vectores campo eléctrico y magnético [1 punto].

SOLUCIÓN

a) La velocidad de la onda se puede calcular como: $v = \dfrac{w}{k} = \lambda \cdot f = 0.1 \cdot 10^9 = 10^8$ m/s

b) $\omega = 2\pi f = 2\pi 10^9$ rad/s; $k = 2\pi/\lambda = 20\pi$ rad/m y $B_0 = E_0 / v = 9 \cdot 10^{-8}$ T

c) Luego:

$$\vec{E}(z,t) = 9\sin(2\pi \cdot 10^9 t + 20\pi z)\,\vec{i}\ \text{V/m}$$

$$\vec{B}(z,t) = 9 \cdot 10^{-8}\sin(2\pi \cdot 10^9 t + 20\pi z)(-\vec{j})\ \text{T}$$

Nota: si tomamos $E = E(-i)$ entonces $B = B\,j$