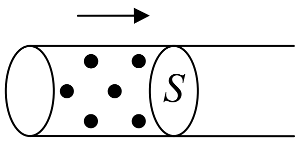
RESOLUCIONES

2.1 Corrientes eléctricas

2.1.1. La intensidad de corriente en un hilo varía con el tiempo según la relación $I=3\cdot t^2+2$, en donde I se mide en amperios y t en segundos
a) ¿Cuántos culombios pasan por una sección transversal en el intervalo de tiempo comprendido entre $t=1s$ y $t=5s$
b) ¿Cuál es la intensidad media durante el mismo intervalo de tiempo?

RESOLUCIÓN:

La intensidad de corriente se define como la cantidad de carga dq que fluye a través del área transversal S en un tiempo dt.



Por tanto: $I=\dfrac{dq}{dt}$

a) La carga que pasa por la sección transversal en el intervalo de tiempo entre $t=1s$ y $t=5s$ es:

$$dq = I\cdot dt \Rightarrow \int dq = q = \int_{t=1s}^{t=5s} I\cdot dt = \int_1^5 \left(3t^2+2\right)dt = \left[\frac{3t^3}{3}+2t\right]_1^5 = \left[\left(\frac{3\cdot 5^3}{3}+2\cdot 5\right)-\left(\frac{3}{3}+2\right)\right]=$$
$$=\left[(125+10)-(1+2)\right]=132\ (C)$$

b) La intensidad media es:

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{132}{(5-1)}=\frac{132}{4}=33\ (A)$$

2.1.2. ¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de los electrones en un alambre de cobre típico de radio *0.815mm* que transporta una corriente de *1A*, suponiendo que existe un electrón libre por átomo? Datos: $\rho_{Cu}= 8.93\ (g/cm^3)$, $N_A= 6.02\cdot 10^{23}$ *(átomos/mol)* y $M=63.5\ (g/mol)$

RESOLUCIÓN:

La velocidad de desplazamiento se calcula como:

$$I = n \cdot q \cdot v_d \cdot S \Rightarrow v_d = \frac{I}{n \cdot q \cdot S}$$

Si existe un electrón libre por cada átomo, la densidad numérica de los electrones libres es igual a la densidad numérica de átomos:

$$n_e = n_a = \frac{\rho_{Cu} \cdot N_A}{M} = \frac{8'93\left(g/cm^3\right)\cdot 6'02\cdot 10^{23}\left(át/mol\right)}{63'5\left(g/mol\right)} = 8'47\cdot 10^{22}\left(át/cm^3\right) =$$

$$= 8'47\cdot 10^{28}\left(át/m^3\right) = 8'47\cdot 10^{28}\left(e^-/m^3\right)$$

El valor absoluto de la carga es, $q = e = 1'6\cdot 10^{-19}\ (C)$, y la sección:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(0'815\cdot 10^{-3}\right)^2 = 2'1\cdot 10^{-6}\ \left(m^2\right)$$

Sustituyendo valores:

$$v_d = \frac{I}{nqS} = \frac{1\left(C/s\right)}{8'47\cdot 10^{22}\left(e/m^3\right)\cdot 1'6\cdot 10^{-19}\left(C\right)\cdot 2'1\cdot 10^{-6}\left(m^2\right)} = 3'51\cdot 10^{-5}\ \left(m/s\right)$$

2.1.3. Por un conductor de *10m* de longitud y una resistencia de 0.2Ω circula una corriente de *5A*.

a) ¿Cuál es la diferencia de potencial en los extremos del conductor?
b) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico del conductor?

RESOLUCIÓN:

a) La diferencia de potencial se calcula utilizando la ley de Ohm:

$$V = I \cdot R \Rightarrow V = 5 \cdot 0'2 = 1\ (V)$$

b) El campo eléctrico del conductor es:

$$V = E \cdot l \Rightarrow E = \frac{V}{l} = \frac{1}{10} = 0'1\ \left(V/m\right)$$

2.1.4. Un trozo de carbono tiene una longitud de *3cm* y una sección recta cuadrada de *0.5cm* de lado. Se mantiene una diferencia de potencial de *8.4 V* entre los extremos de su dimensión más larga.

a) ¿Cuál es la resistencia del bloque?

b) ¿Cuál es la corriente en esta resistencia?

Datos: $\rho_C = 3500 \cdot 10^{-8}\ (\Omega \cdot m) = 3.5 \cdot 10^{-5}\ (\Omega \cdot m)$

RESOLUCIÓN:

a) La resistencia es:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

donde

$S = a^2 = \left(0'5 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 25 \cdot 10^{-6}\ \left(m^2\right)$

$L = 3 \cdot 10^{-2}\ (m)$

$\rho = 3'5 \cdot 10^{-5}\ (\Omega \cdot m)$

sustituyendo valores:

$R = 3'5 \cdot 10^{-5} \frac{3 \cdot 10^{-2}}{25 \cdot 10^{-6}} = 0'042\ (\Omega)$

b) Para hallar la corriente utilizamos la ley de Ohm:

$V = I \cdot R \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{8'4}{0'042} = 200\ (A)$

2.1.5. Una barra de carbono de radio *0.1mm* se utiliza para construir una resistencia. La resistividad de este material es $3.5 \cdot 10^{-5}\,\Omega \cdot m$. ¿Qué longitud de la barra de carbono se necesita para obtener una resistencia de 10Ω?

RESOLUCIÓN:

La longitud se obtiene de acuerdo con los datos proporcionados en el enunciado, a partir de la siguiente expresión:

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow l = \frac{R \cdot S}{\rho}$$

donde

$R = 10\ (\Omega)$

$\rho = 3'5 \cdot 10^{-5}\ (\Omega \cdot m)$

$S = \pi \cdot r^2 = \pi\left(1 \cdot 10^{-4}\right)^2 = \pi \cdot 10^{-8}\ \left(m^2\right)$

Sustituyendo valores:

$$l = \frac{10 \cdot \pi \cdot 10^{-8}}{3'5 \cdot 10^{-5}} = 0'9 \cdot 10^{-2}\ (m) = 900\ (mm)$$

2.1.6. Un hilo de aluminio de *0.6mm* de diámetro, es recorrido por una corriente de *5A*, existiendo una caída de potencial de *1.175mV* por metro de hilo. Se pide:
a) Calcular la densidad de corriente en el hilo
b) Hallar la resistividad del aluminio
c) Suponiendo que cada átomo contribuye a la corriente con un electrón libre, encontrar la densidad de electrones libres en el aluminio y la velocidad de desplazamiento de éstos
d) La potencia eléctrica disipada si *L=100m*
Datos: $\rho_{Al} = 2.7\ (g/cm^3)$, $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ *(átomos/mol)* y $M = 27\ (g/mol)$

RESOLUCIÓN:

a) La densidad de corriente del hilo es:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi \cdot r^2} = \frac{I}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{5}{\pi \cdot \left(\frac{0'6 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{28'3 \cdot 10^{-8}} = 1'77 \cdot 10^7 \ \left(A/m^2\right)$$

donde: $S = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{\left(6 \cdot 10^{-4}\right)^2}{4} = 28.3 \cdot 10^{-8} \quad m^2$

b) La resistividad del hilo se obtiene a partir de la expresión:

$$R = \rho \frac{L}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R \cdot S}{L}$$

Utilizando la ley de Ohm y como sabemos que la caída de potencial por metro de hilo es *1´125mV*:

$$\frac{R}{L} = \frac{V}{L \cdot I} = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{I} = 1'175 \cdot 10^{-3} \frac{1}{5} = 0'235 \cdot 10^{-3} \left(\Omega/m\right)$$

Sustituyendo valores en la resistividad:

$$\rho = \frac{R}{L} S = 0'235 \cdot 10^{-3} \cdot 28'3 \cdot 10^{-8} = 6'65 \cdot 10^{-11} \ (\Omega \cdot m)$$

Siendo *S* el valor de la superficie calculado en el apartado anterior.

c) Si cada átomo contribuye a la corriente con un electrón libre entonces la densidad numérica de los electrones libres es igual a la densidad numérica de los átomos:

$$n_e = n_a = \frac{\rho_{Al} \cdot N_A}{M} = \frac{2'7 \cdot 6'023 \cdot 10^{23}}{27} = 0'6023 \cdot 10^{23} \ \left(át/cm^3\right) = 0'6023 \cdot 10^{29} \ \left(át/m^3\right) =$$
$$= 0'6023 \cdot 10^{29} \ \left(e^-/m^3\right)$$

Y la velocidad de desplazamiento se calcula como:

$$v_d = \frac{I}{nqS} = \frac{5}{0'6023 \cdot 10^{29} \cdot 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 28'3 \cdot 10^{-8}} = 0'18 \cdot 10^{-2} \ \left(m/s\right)$$

d) La potencia es:

$$P = V \cdot I$$

donde la caída de potencial que existe en una longitud de *100m* es:

$V_{(l=100m)} = 1'175 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1'175 \cdot 10^{-1} \ (V)$

Y sustituyendo valores:

$P = 1'175 \cdot 10^{-1} \cdot 5 = 0'59 \ (W)$

2.1.7. Por un conductor de cobre de 1cm de diámetro pasa una corriente de *100A*. Sabiendo que en el cobre hay $8.5 \cdot 10^{22}$ *electrones/cm*^{3} y que su resistividad es $1.72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$. Calcular:

a) La densidad de corriente en A/m^2
b) La velocidad de los electrones libres
c) Campo eléctrico en el interior del conductor

RESOLUCIÓN:

a) La densidad de corriente es:

$j = n \cdot q \cdot v = \dfrac{I}{S}$

donde, *v* es la velocidad de arrastre de los portadores de carga, *q* la carga eléctrica de los portadores, *n* el número de portadores por unidad de volumen y *S* la sección del conductor.
Hallamos la densidad de corriente como:

$j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{100}{\pi \cdot \left(0'5 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 1273239 \left(A/m^2\right)$

b) De la segunda igualdad obtenemos la velocidad de arrastre, *v*:

$v = \dfrac{I}{n \cdot q \cdot S} = \dfrac{I}{n \cdot q \cdot \pi \cdot r^2} = \dfrac{100}{\left(8'5 \cdot 10^{22} \cdot 10^6\right) \cdot 1'9 \cdot 10^{-19} \cdot \pi \cdot \left(0'5 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 9'36 \cdot 10^{-5} \left(m/s\right)$

c) Para hallar el campo eléctrico utilizamos la ley de Ohm del siguiente modo:

$j = \sigma \cdot E = \dfrac{1}{\rho} \cdot E$

despejando *E*

$E = j \cdot \rho = 1273239 \cdot 1'72 \cdot 10^{-8} = 0'0219 \left(V/m\right)$

2.1.8. Determinar la densidad de portadores n de un alambre de cobre suponiendo que hay un portador (electrón) por cada átomo de cobre. Si la máxima corriente recomendada para un alambre de cobre de *0.81mm* de radio de los que se usan en las viviendas es *15A*, ¿cuál sería la velocidad de arrastre de los electrones?

RESOLUCIÓN:

Si hay un electrón libre por átomo, la densidad de portadores es igual a la densidad de átomos.

$$n = \frac{N_A \cdot \rho_m}{M}$$

donde N_A es el número de Avogadro, ρ_m es la densidad de masa del cobre $\left(8'95 \cdot 10^3\ Kg/m^3\right)$ y M la masa molecular del cobre $\left(63'5\, g/mol\right)$.

$$n = \frac{\left(6'023 \cdot 10^{23}\right) \cdot \left(8'95 \cdot 10^3\right)}{\left(63'5 \cdot 10^{-3}\right)} = 8'49 \cdot 10^{28} \left(\text{portadores}/m^3 \right)$$

Utilizando la ecuación:

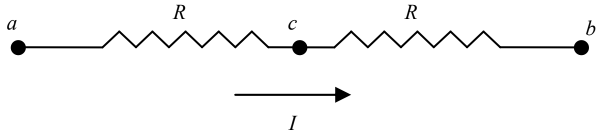
$$v = \frac{I}{n \cdot q \cdot S} = \frac{15}{8'49 \cdot 10^{28} \cdot 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot \pi \cdot \left(0'81 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 5'36 \cdot 10^{-4} \left(m/s\right)$$

2.2 Circuitos de corriente continua

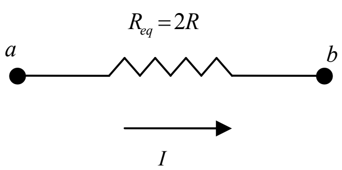
2.2.1 Dos resistencias iguales se conectan en serie a una tensión *V*. Posteriormente se montan en paralelo conectándolas a la misma tensión *V*. ¿En cuál de los montajes se disipa mayor potencia?

RESOLUCIÓN:

Conexión en serie:



Será equivalente a:



- La diferencia de potencial entre los extremos de las 2 resistencias es $V_{ab}=V$, donde $V_{ab}=V_{ac}+V_{cb}$
- Por ambas resistencias pasa la misma intensidad I
- La resistencia equivalente es: $R_{eq}=R+R=2R$

La intensidad se calcula como:

$$V = R_{eq} \cdot I \Rightarrow I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{2R}$$

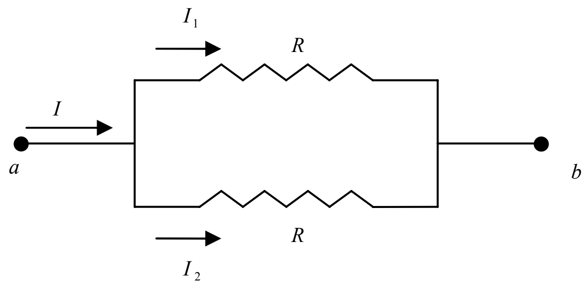
La potencia que se disipa en cada resistencia por efecto Joule es:

$$P = R \cdot I^2 = R \cdot \left(\frac{V}{2R}\right)^2 = \frac{R \cdot V^2}{4 \cdot R^2} = \frac{V^2}{4R} \ (W)$$

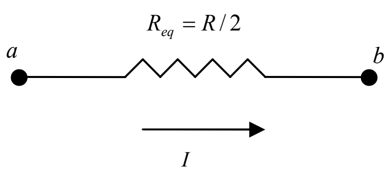
La potencia total disipada podemos hallarla como la suma de las 2 potencias disipadas:

$$P_{total} = P + P = 2P = 2\frac{V^2}{4R} = \frac{V^2}{2R} \ (W)$$

Conexión en paralelo:



Será equivalente a:



Ambas resistencias tienen la misma diferencia de potencial, $V_{ab}=V$, entre sus extremos.
Por cada una de ellas circula una intensidad cuya suma es: $I=I_1+I_2$
Y la resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \ (\Omega)$$

La potencia que se disipa en cada resistencia por efecto Joule es:

$$P_1 = R \cdot I_1^{\,2} \text{ donde } I_1 = \frac{V}{R} \Rightarrow P_1 = R\frac{V^2}{R^2} = \frac{V^2}{R} \;(W)$$

$$P_2 = R \cdot I_2^{\,2} \text{ donde } I_2 = \frac{V}{R} \Rightarrow P_2 = R\frac{V^2}{R^2} = \frac{V^2}{R} \;(W)$$

La potencia total disipada se halla como la suma de las 2 potencias disipadas:

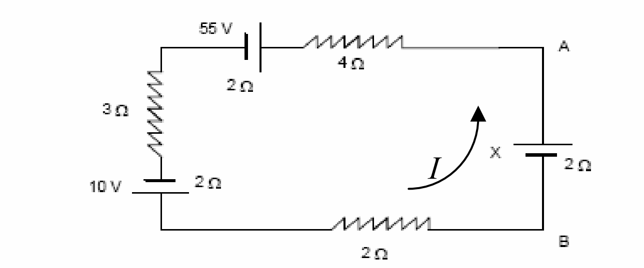
$$P_{total} = P_1 + P_2 = 2\frac{V^2}{R} \;(W)$$

O bien, con la R_{eq}:

$$P_{total} = R_{eq} \cdot I^2 = R_{eq} \cdot (I_1 + I_2)^2 = \frac{R}{2} \cdot \left(2\frac{V}{R}\right)^2 = 2\frac{V^2}{R} \;(W)$$

Comparando ambos resultados se puede concluir que en la conexión en paralelo se disipa más potencia.

2.2.2 La d.d.p entre los puntos *A* y *B* del circuito de la figura es de *10V*. Calcular la f.e.m de la batería *X*.



RESOLUCIÓN:

Como se desconoce *X*, suponemos que la intensidad *I* recorre el circuito en el sentido dibujado. Su valor lo obtenemos aplicando la expresión del cálculo de la d.d.p entre dos puntos (2ª ley de Kirchhoff).

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$$

Por la izquierda:

$$V_{AB} = 10 = I(4+2+3+2+2) - (-55+10) \Rightarrow 10 = I \cdot 13 + 45 \Rightarrow I = \frac{10-45}{13} = \frac{-35}{13} = 2'7 \;(A)$$

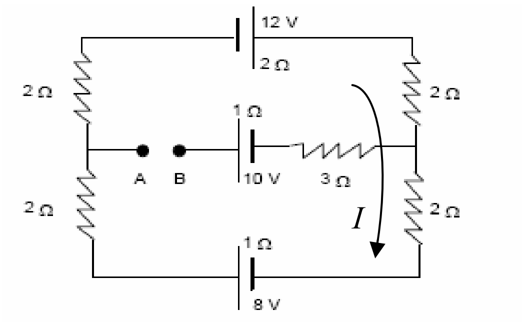
Por la derecha:

$$V_{AB} = 10 = -I \cdot 2 - (-X)$$

Si sustituimos el valor de la intensidad obtenida:

$$10 = 2'7 \cdot 2 + X \Rightarrow X = 10 - 5'4 = 4'6 \;(V)$$

2.2.3 Calcular la d.d.p entre los puntos *A* y *B* de la figura. Si se conectan *A* y *B*, ¿qué intensidad pasará por el generador de *12V*?, ¿qué intensidad pasará por el generador de *10V*?



RESOLUCIÓN:

Partiendo de la ley de Kirchhoff , calculamos la corriente que circula por la malla externa:

$$V_a - V_b = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \xrightarrow{a=b} 0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \rightarrow I\sum_i R_i = \sum_j \varepsilon_j \rightarrow$$

$$I = \frac{\sum \varepsilon_j}{\sum R} = \frac{12+8}{2+2+2+1+2+2} = \frac{20}{11} = 1'8\ (A)$$

La d.d.p entre los puntos *A* y *B* será:

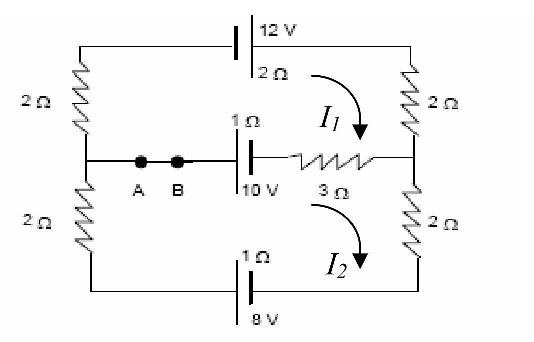
$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$$

Tomando el camino por arriba:

$$V_A - V_B = I(2+2+2) - (12+10) = 1'8 \cdot 6 - 22 = -11'2\ (V)$$

Como nos da negativa la d.d.p, significa que el punto *B* se encuentra a mayor potencial que *A*.

Si ahora conectamos los puntos *A* y *B*, tenemos un circuito de dos mallas por el que circulan dos corrientes I_1 e I_2:



Resolviendo el circuito por mallas:

MALLA 1

$$0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_i \varepsilon_i$$

$$0 = I_1(2+2+2+3+1) - I_2(3+1) - (12+10)$$

$$0 = 10I_1 - 4I_2 - 22$$

MALLA 2

$$0 = I_2(1+3+2+1+2) - I_1(3+1) - (8-10)$$

$$0 = -4I_1 + 9I_2 + 2$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = 10I_1 - 4I_2 - 22 \\ 0 = -4I_1 + 9I_2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x2} 20I_1 - 8I_2 - 44 = 0 \\ \xrightarrow{x5} -20I_1 + 45I_2 + 10 = 0 \end{cases}$$

Si las sumamos:

$$37I_2 - 34 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{34}{37} = 0'92 \ (A)$$

Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de I_1. Lo hacemos en la primera:

$$10I_1 - 4 \cdot 0'92 - 22 = 0 \Rightarrow 10I_1 = 3'68 + 22 \Rightarrow I_1 = \frac{25'68}{10} = 2'57 \ (A)$$

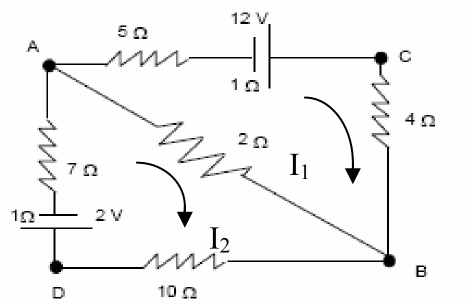
Con I_1 e I_2 podemos calcular la intensidad que pasa por el generador de *10V*:

$$i_{12} = I_1 - I_2 = 2'57 - 0'92 = 1'65 \ (A)$$

Y como nos da positivo, llevará la misma dirección que I_1.

2.2.4 En el circuito de la figura calcular:

a) Intensidad que circula por la rama *AB*.
b) Potencia suministrada al circuito por el elemento que actúa como generador.
c) Potencia disipada en cada generador.
d) Diferencia de potencial entre los puntos *A* y *D*.



RESOLUCIÓN:

Tenemos un circuito formado por 2 mallas. Calculamos las intensidades que circulan por cada malla.

MALLA 1

$$0 = I_1(5+1+4+2) - I_2 \cdot 2 - 12$$
$$0 = 12I_1 - 2I_2 - 12$$

MALLA 2

$$0 = I_2(2+10+1+7) - I_1 \cdot 2 - (-2)$$
$$0 = 20I_2 - 2I_1 + 2$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 12I_1 - 2I_2 - 12 = 0 \\ -2I_1 + 20I_2 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12I_1 - 2I_2 - 12 = 0 \\ \xrightarrow{x6} -12I_1 + 120I_2 + 12 = 0 \end{cases}$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$118I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 0$$

Sustituyendo I_2 en la segunda ecuación:

$$I_1 = \frac{-12}{-12} = 1\ (A)$$

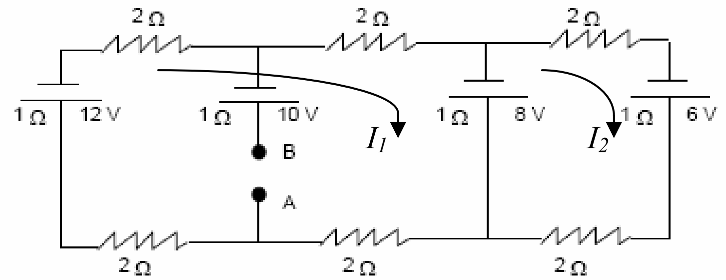
a) La intensidad que circula por la rama *AB* es:
   $$i_{AB} = I_1 - I_2 = 1\ (A)$$
   Y circula en el sentido de I_1.

b) El elemento que actúa como generador es la fuente de *12V*. La potencia suministrada al circuito es:
   $$P_{su\min istrada} = \varepsilon \cdot I_1 - I_1^2 \cdot r = 12 \cdot 1 - 1^2 \cdot 1 = 12 - 1 = 11\ (W)$$

c) La potencia disipada por efecto Joule en cada generador es:
   para la fuente de *12V* $\rightarrow P = I_1^2 \cdot r = 1^2 \cdot 1 = 1\ (W)$
   para la fuente de *2V* $\rightarrow P = I_2^2 \cdot r = 0$

d) La diferencia de potencial entre los puntos *A* y *D* es:
   $$V_A - V_D = \sum_i I_i R_i - \sum_j \varepsilon_j$$
   Sustituyendo valores, siguiendo la rama de la izquierda:
   $$V_A - V_D = I_2(7+1) - 2 = 0 - 2 = -2\ (V)$$

2.2.5 Hallar la diferencia de potencial entre *A* y *B* en el circuito de la figura.



RESOLUCIÓN:

Tenemos un circuito de 2 mallas. Calculamos las intensidades I_1 e I_2 utilizando la ecuación de mallas:

$$0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_i \varepsilon_i$$

MALLA 1

$$I_1(1+2+2+1+2+2) - I_2 \cdot 1 - (8-12) = 0$$

$$10I_1 - I_2 + 4 = 0$$

MALLA 2

$$I_2(1+2+1+2) - I_1 \cdot 1 - (6-8) = 0$$

$$-I_1 + 6I_2 + 2 = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10I_1 - I_2 + 4 = 0 \\ -I_1 + 6I_2 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10I_1 - I_2 + 4 = 0 \\ \xrightarrow{x10} -10I_1 + 60I_2 + 20 = 0 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$59I_2 = -24 \Rightarrow I_2 = \frac{-24}{59}\ (A)$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación:

$$I_1 = 2 + 6I_2 = 2 + 6 \cdot \left(\frac{-24}{59}\right) = \frac{-26}{59}\ (A)$$

Como son negativas, las corrientes llevan el sentido contrario al considerado en la figura. Teniendo en cuenta su sentido real, les cambiamos el signo y hallamos la corriente que circula por la rama central:

$$i_{12} = I_1 - I_2 = \frac{26}{59} - \left(\frac{24}{59}\right) = \frac{2}{59}\ (A)$$

Calculamos la d.d.p entre *A* y *B*, tomando el sentido correcto de las corrientes.

Camino de *A* a *B* por la rama de la izquierda:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j = -I_1(2+1+2) - (-12+10) =$$

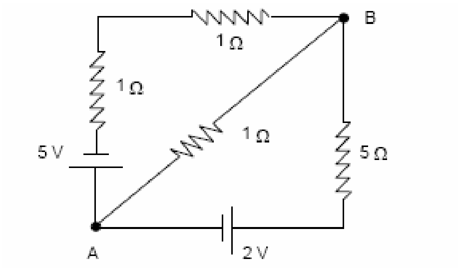
$$= -5I_1 + 2 = -5\left(\frac{26}{59}\right) + 2 = \frac{-130}{59} + 2 = \frac{-12}{59} = -0'203\ (V)$$

Camino de *A* a *B* por la rama central:

$$V_A - V_B = I_1(2+2) + i_{12} \cdot 1 - (-8+10) = 4\left(\frac{26}{59}\right) + \frac{2}{59} - 2 = \frac{104}{59} + \frac{2}{59} - 2 = \frac{106}{59} - 2 = -0'203\ (V)$$

Del mismo modo se puede hallar la d.d.p entre *A* y *B* por la rama de la derecha.

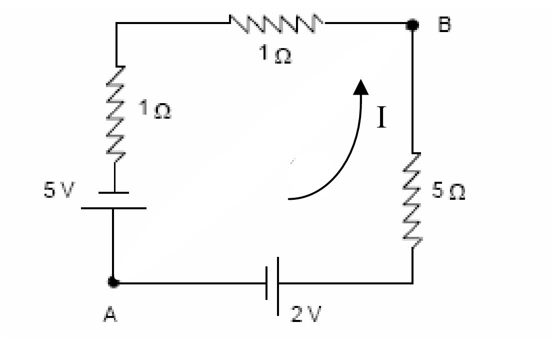
2.2.6 Hallar el circuito equivalente de Thévenin entre los puntos *A* y *B* del circuito de la figura.



RESOLUCIÓN:

Podemos calcular el generador equivalente de Thevenin entre los puntos *A* y *B* de 3 formas distintas, dependiendo de la porción del circuito que simplifiquemos:

a)



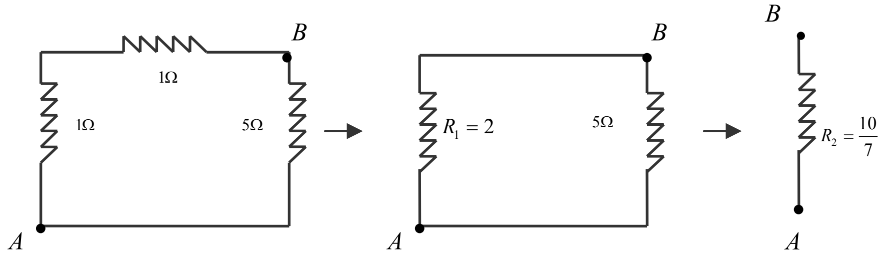
Calculamos la *I* que circula por este circuito:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{5+2}{5+1+1} = \frac{7}{7} = 1\ (A)$$

La d.d.p entre *A* y B que corresponde al voltaje de la fuente equivalente de Thevenin es:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow V_A - V_B = I \cdot 5 - 2 = 1 \cdot 5 - 2 = 3\ (V)$$

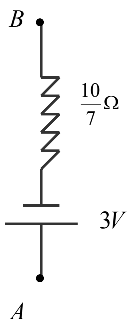
La resistencia equivalente de Thevenin es la resistencia equivalente de la siguiente asociación:



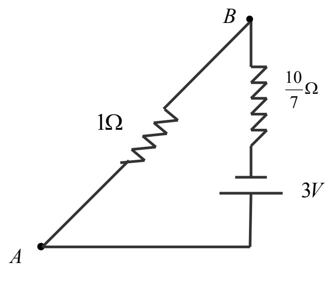
$$R_1 = 1 + 1 = 2\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot 5}{R_1 + 5} = \frac{10}{7}\ \Omega$$

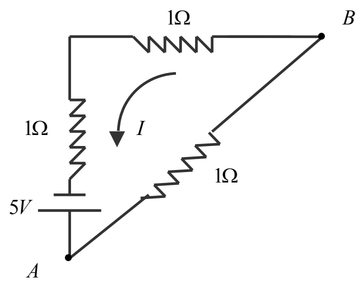
El circuito equivalente de Thévenin es:



El circuito completo queda:



b)



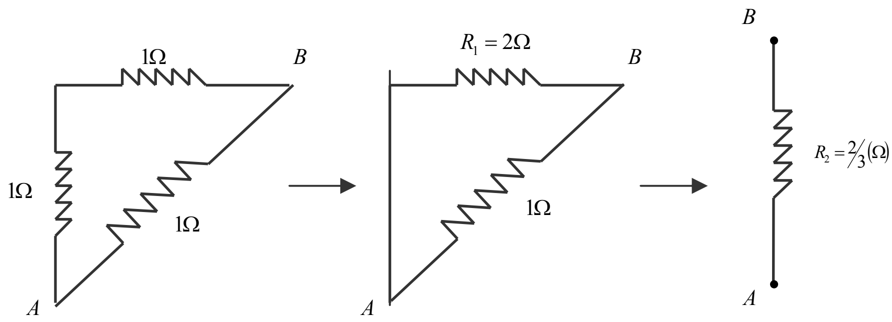
La I que circula por la malla es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{5}{1+1+1} = \frac{5}{3}(A)$$

La diferencia de potencial entre A y B es:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow V_A - V_B = I \cdot 1 - 0 = \frac{5}{3}\ (V)$$

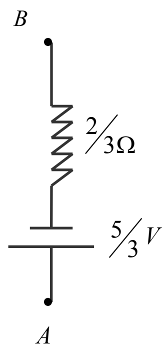
La resistencia equivalente de Thévenin es:



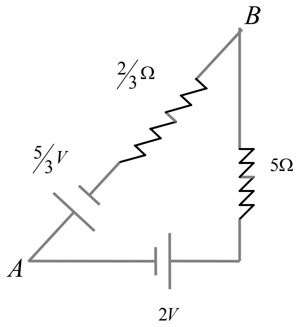
$$R_1 = 1 + 1 = 2\Omega$$

$$R_2 = \frac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}\Omega$$

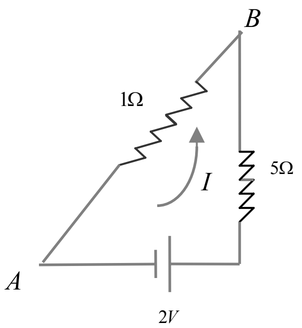
El equivalente Thévenin queda como:



El circuito completo es:



c)



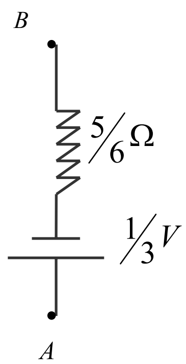
La intensidad de corriente que circula por el circuito en este caso es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{2}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ (A)$$

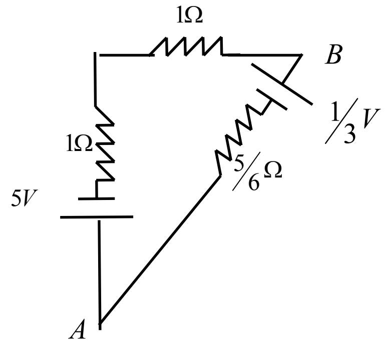
La d.d.p entre *A* y *B*, siguiendo el sentido de la corriente es:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow V_A - V_B = 5I - 2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}\ (V)$$

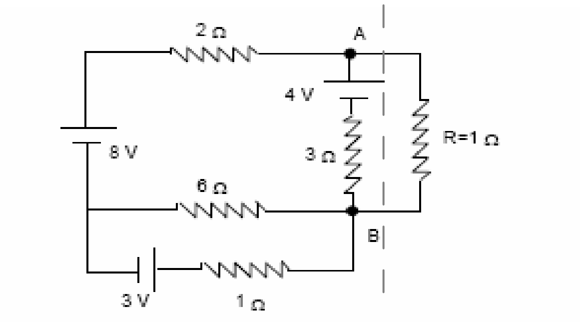
La resistencia equivalente, serán las dos en paralelo, $R_{eq} = \frac{5 \cdot 1}{5+1} = \frac{5}{6}\Omega$ y el equivalente Thévenin será:



de modo que el circuito será:

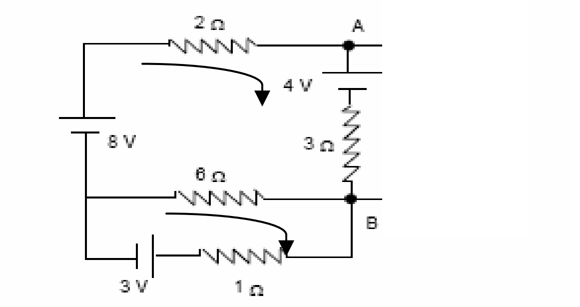


2.2.7 Hallar la intensidad que pasa por *R*, calculando previamente el equivalente Thévenin entre *A* y *B*.



RESOLUCIÓN:

Vamos a calcular el circuito equivalente de Thévenin de la parte que queda a la izquierda de la línea discontinua. El resultado de esta simplificación lo uniremos posteriormente a la resistencia de *1*Ω.



Tenemos un circuito con dos mallas. Calculamos la intensidad que circula por cada una de ellas.

MALLA 1:

$$0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow \sum_i I_i \cdot R_i = \sum_j \varepsilon_j$$

$$I_1(6+2+3) - I_2 \cdot 6 = 8 - 4 \Rightarrow 11I_1 - 6I_2 = 4$$

MALLA 2:

$$I_2(1+6) - I_1 \cdot 6 = -3 \Rightarrow -6I_1 + 7I_2 = -3$$

Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 11I_1 - 6I_2 = 4 \\ -6I_1 + 7I_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11I_1 - 6I_2 = 4 \\ \xrightarrow{x(11/6)} -11I_1 + \frac{77}{6}I_2 = -\frac{33}{6} \end{cases}$$

Sumamos éstas dos últimas:

$$\left(\frac{77}{6} - 6\right)I_2 = 4 - \frac{33}{6} \Rightarrow \left(\frac{77-36}{6}\right)I_2 = \frac{24-33}{6} \Rightarrow 41I_2 = -9 \Rightarrow I_2 = -\frac{9}{41}$$

Si sustituimos este valor en la ecuación de la malla 2:

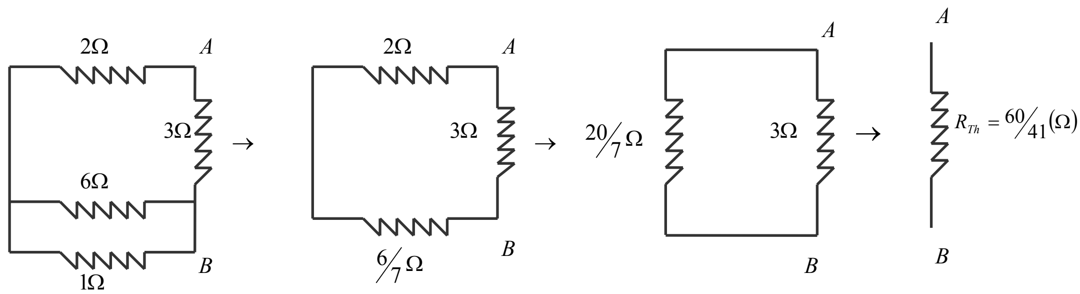
$$I_1 = \frac{7\left(-\frac{9}{41}\right)+3}{6} = \frac{\frac{-63}{41}+3}{6} = \frac{\frac{-63+123}{41}}{6} = \frac{60}{246} = \frac{10}{41} = 0'24\ (A)$$

Conocidas las intensidades del circuito simplificado, podemos hallar la d.d.p entre los puntos *A* y *B*, que corresponderá al voltaje del generador del equivalente de Thévenin. Consideramos el camino de *A* hasta *B*, según el sentido de I_1:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$$

$$V_A - V_B = I_1 \cdot 3 - (-4) = \frac{10}{41} \cdot 3 + 4 = \frac{30+164}{41} = \frac{194}{41} = 4'73\ (V)$$

Y la resistencia de Thévenin es:



En el primer paso las resistencias de *6*Ω y *1*Ω están en paralelo:

$$R_{eq} = \frac{1 \cdot 6}{1+6} = \frac{6}{7}\Omega$$

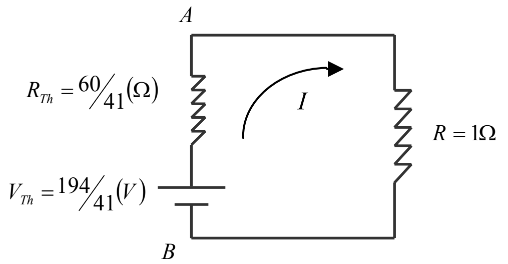
En el segundo paso están en serie las de *2*Ω y *6/7*Ω:

$$R_{eq} = 2 + \frac{6}{7} = \frac{20}{7}\Omega$$

En un tercer y último paso, tenemos las resistencias de *3*Ω y *20/7*Ω en paralelo:

$$R_{eq} = \frac{3 \cdot {}^{20}\!/_{7}}{3 + {}^{20}\!/_{7}} = \frac{{}^{60}\!/_{7}}{{}^{41}\!/_{7}} = \frac{60}{41}\Omega$$

Sustituimos el equivalente de Thévenin en el circuito original:



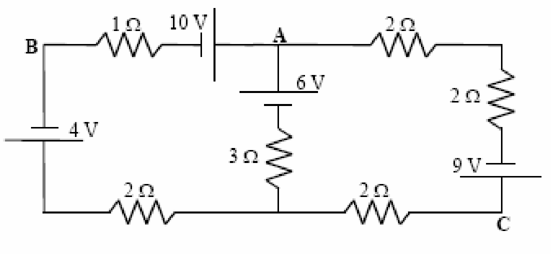
Por último calculamos la *I* que circula por esta malla que será la que circula por la *R=1*Ω.

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{\frac{194}{41}}{\frac{60}{41}+1} = \frac{\frac{194}{41}}{\frac{101}{41}} = \frac{194}{101} = 1'92\ (A)$$

2.2.8 En el circuito de la figura determinar:

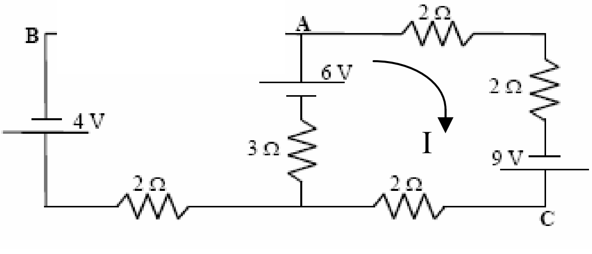
a) La corriente que circula por la resistencia de *1*Ω, calculando previamente el circuito equivalente de Thévenin entre los puntos *A* y *B* (indíquese el sentido de esta corriente en la figura).

b) La diferencia de potencial entre los puntos *B* y *C*.



RESOLUCIÓN:

a) Calculamos el equivalente Thévenin de la siguiente porción del circuito comprendida entre los puntos *A* y *B*. Su resultado lo uniremos finalmente al trozo que nos ha quedado entre *A* y *B*.



Tenemos un circuito de una sola malla. Calculamos la intensidad que circula por ella:

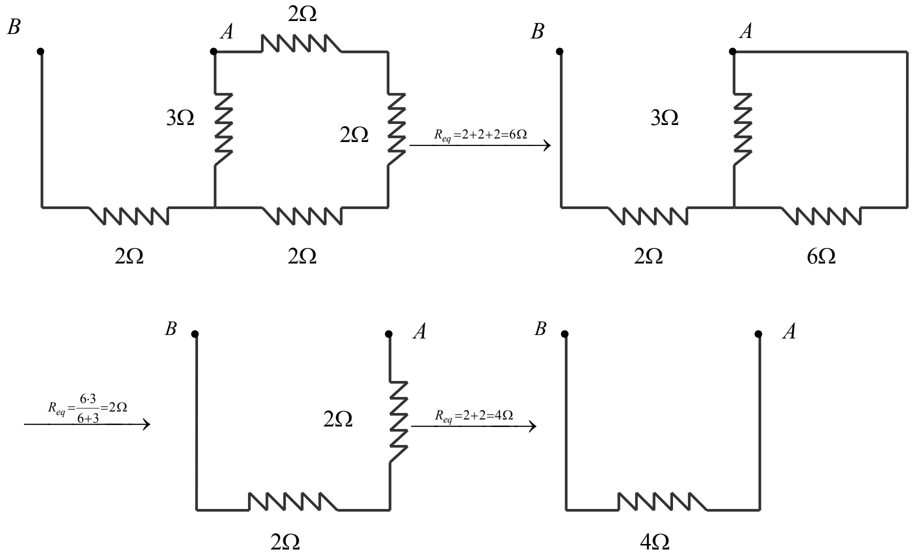
$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{6+9}{2+2+2+3} = \frac{15}{9} = 1'7\ (A)$$

Hallamos la d.d.p entre los puntos *A* y *B*, que será el potencial de Thévenin:

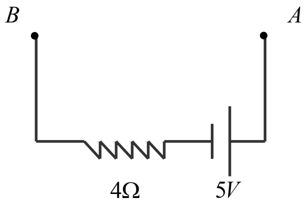
$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$$

$$V_A - V_B = -I(3) - (-6-4) = -\left(\frac{5}{3}\right)\cdot 3 + 10 = 5\ (V)$$

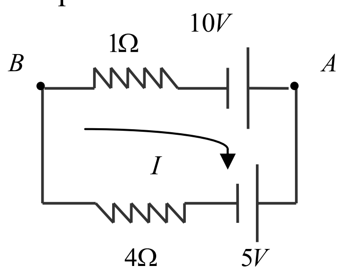
Ahora hallaremos la resistencia equivalente de Thévenin:



El circuito equivalente de Thévenin queda de la forma:



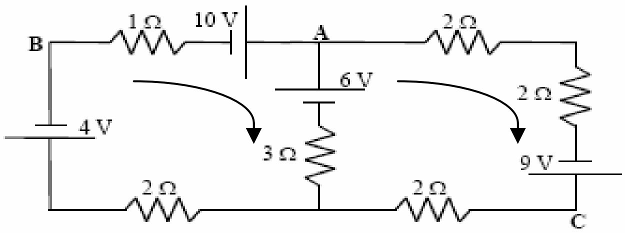
Añadiendo la rama que teníamos en el circuito original, entre los puntos *A* y *B*:



La intensidad que atraviesa la resistencia de *1*Ω es la misma que circula por el circuito:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{10-5}{1+4} = \frac{5}{5} = 1\ (A)$$

b) Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos *B* y *C* tenemos que considerar el circuito inicial compuesto por las dos mallas:



Resolvemos el circuito por mallas:

$$0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow \sum_i I_i \cdot R_i = \sum_j \varepsilon_j$$

MALLA 1

$$I_1(1+3+2) - I_2 \cdot 3 = 10 - 6 - 4 \Rightarrow 6I_1 - 3I_2 = 0$$

MALLA 2

$$I_2(2+2+2+3) - I_1(3) = 9 + 6 \Rightarrow -3I_1 + 9I_2 = 15$$

Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 6I_1 - 3I_2 = 0 \\ -3I_1 + 9I_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x3} 18I_1 - 9I_2 = 0 \\ -3I_1 + 9I_2 = 15 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones, obtenemos I_1:

$$15I_1 = 15 \Rightarrow I_1 = 1 \ (A)$$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos I_2:

$$18 \cdot 1 - 9I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{18}{9} = 2 \ (A)$$

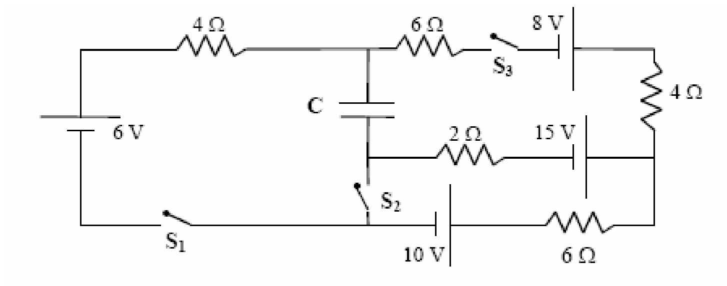
Comprobamos que I_1 da el mismo resultado que en el apartado anterior, ya que en ambos casos corresponde a la intensidad que circula por la resistencia de *1*Ω.

Para calcular la d.d.p entre *B* y *C*, tenemos varios caminos posibles. Lo haremos a favor de las corrientes, es decir, pasando por los generadores de *10V* y *9V*:

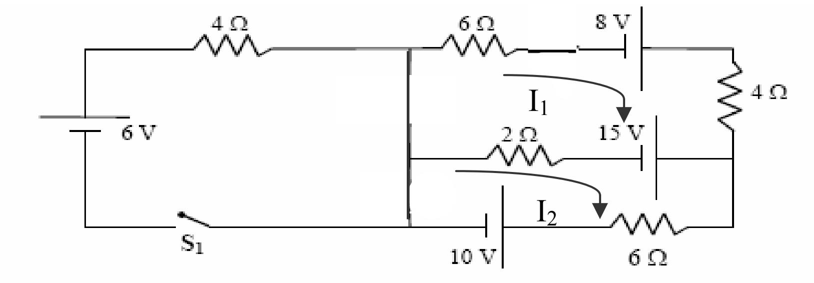
$$V_B - V_C = I_1(1) + I_2(2+2) - (10+9) = I_1 + 4I_2 - 19 = 1 + 4 \cdot 2 - 19 = -10 \ (V)$$

El signo negativo nos indica que el punto *C* se encuentra a mayor potencial que el *B*.

2.2.9 En el circuito de la figura el condensador *C*, de *0.4nF* de capacidad, se encuentra descargado y los interruptores S_1, S_2 y S_3 abiertos. Si cerramos simultáneamente S_2 y S_3, determinar:
a) La corriente que circula por la rama del condensador en el instante inicial.
b) La carga que se almacena en el condensador una vez alcanzado el equilibrio.
c) Cuando el condensador se encuentra cargado se abre el interruptor S_2 y se cierra S_1, manteniendo cerrado S_3, ¿cuál es la nueva carga del condensador cuando en el circuito se alcanza el equilibrio?



a) Si cerramos simultáneamente los interruptores S_2 y S_3 tenemos un circuito de dos mallas. En el instante inicial el condensador no está cargado y por él circula la intensidad correspondiente a la malla superior.



Calculamos las intensidades de las dos mallas:

$$0=\sum_i I_i\cdot R_i-\sum_j \varepsilon_j \Rightarrow \sum_i I_i\cdot R_i=\sum_j \varepsilon_j$$

MALLA 1

$$I_1(6+4+2)-I_2(2)=8-15 \Rightarrow 12I_1-2I_2=-7$$

MALLA 2

$$I_2(2+6)-I_1(2)=15-10 \Rightarrow -2I_1+8I_2=5$$

El sistema a resolver es el siguiente:

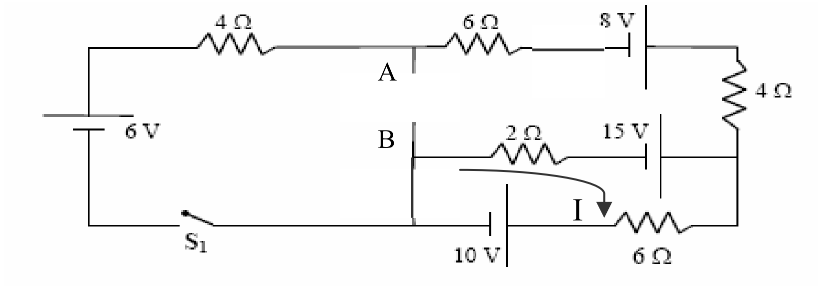
$$\begin{cases}12I_1-2I_2=-7\\-2I_1+8I_2=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xrightarrow{x4} 48I_1-8I_2=-28\\-2I_1+8I_2=5\end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones de la derecha:

$$46I_1 = -23 \Rightarrow I_1 = \frac{-23}{46} = -\frac{1}{2}\ (A)$$

Esta es la corriente que pasa inicialmente por el condensador, pero su signo nos indica que lo hará en el sentido contrario al considerado en la figura del circuito.

b) Cuando se alcanza el equilibrio, por la rama del condensador no pasa corriente. De modo que nos queda el siguiente circuito:



Calculamos *I*:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{15-10}{2+6} = \frac{5}{8}\ (A)$$

La carga que se almacena en el condensador es:

$$C = \frac{Q}{(V_A - V_B)} \Rightarrow Q = C \cdot (V_A - V_B)$$

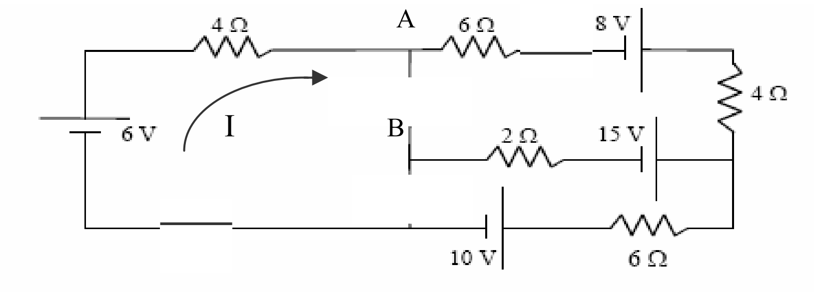
Necesitamos la d.d.p entre *A* y *B*. Para ello recorremos el camino desde *A* hasta *B* por la derecha, pasando por los generadores de *8V* y de *10V*:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow V_A - V_B = I(6) - (8-10) = 6 \cdot \frac{5}{8} + 2 = \frac{30}{8} + 2 = \frac{30+16}{8} = \frac{46}{8} = \frac{23}{4}\ (V)$$

Sustituyendo:

$$Q = 0'4 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{23}{4} = 23 \cdot 10^{-10} (C)$$

c)



La intensidad de corriente circula por el circuito exterior. Y su valor es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{6+8-10}{4+6+4+6} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \ (A)$$

La d.d.p entre *A* y *B* la hallamos siguiendo el camino a favor de la *I*, pasando por los generadores de *8V* y *15 V*:

$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$$

$$V_A - V_B = I(6+4) - (8-15) = 10I + 7 = 10 \cdot \frac{1}{5} + 7 = \frac{10+35}{5} = \frac{45}{5} = 9 \ (V)$$

La carga almacenada en el condensador, en este caso, será:

$$Q = C \cdot (V_A - V_B) = 4 \cdot 10^{-10} \cdot 9 = 36 \cdot 10^{-10} \ (C)$$

2.2.10 En el circuito de la figura 1 determinar el valor de la resistencia *R* para que circule por la misma una corriente de *200mA*. Una vez calculado el valor de *R* sustituimos la f.e.m de *4V* por un condensador de capacidad *C=50nF*, tal como muestra la figura 2. ¿Qué corriente pasa por el condensador en el instante inicial? ¿qué carga adquiere el condensador cuando se alcanza el equilibrio en el circuito?

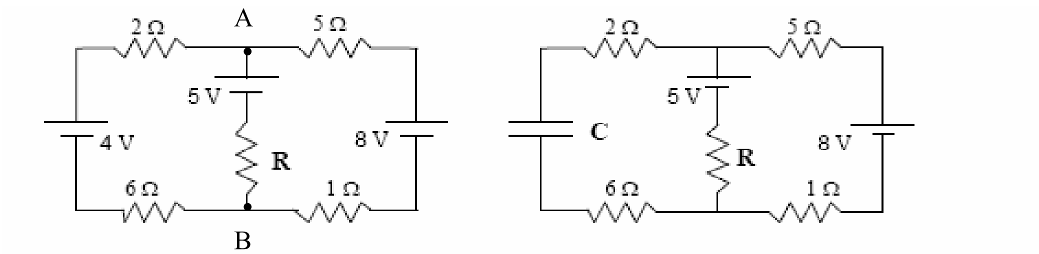
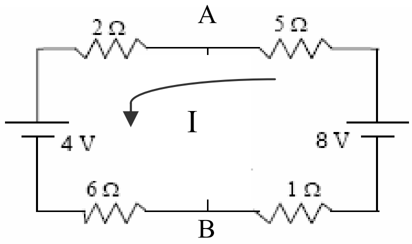


FIG.- 1 FIG.- 2

a) Vamos a calcular el equivalente de Thévenin de la parte exterior del circuito entre los puntos *A* y *B* de la figura.



Ahora tenemos un circuito de una única malla. Vamos a calcular la intensidad que circula por ella:

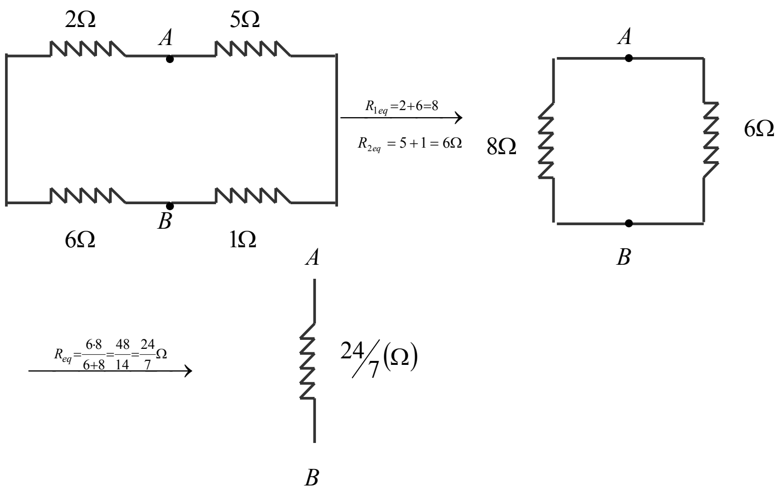
$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{8-4}{2+6+1+5} = \frac{4}{14}\ (A)$$

La d.d.p entre *A* y *B* de la figura la calculamos siguiendo el sentido de la *I*:

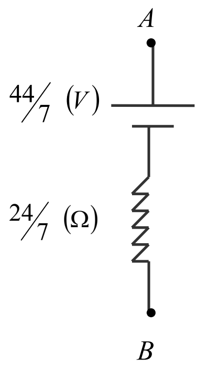
$$V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j = I(2+6) - (-4) = 8I + 4 = 8 \cdot \left(\frac{4}{14}\right) + 4 = \frac{32}{14} + 4 = \frac{32+56}{14} = \frac{88}{14}$$

$$V_A - V_B = \frac{44}{7}(V)$$

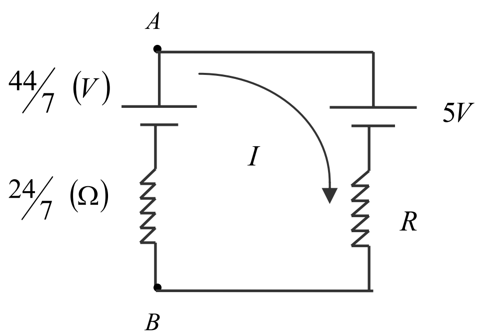
La resistencia equivalente es:



El circuito equivalente de Thévenin es:



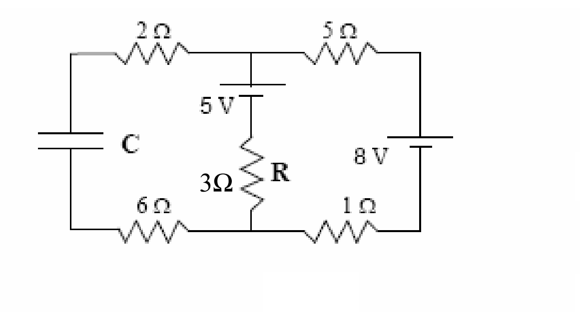
Añadiendo la rama central tendremos el circuito completo:



La intensidad que circula por el circuito es la que pasa por *R*.

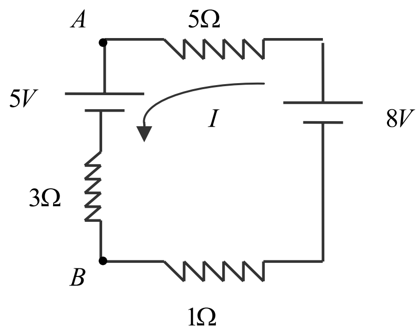
$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{\frac{44}{7} - 5}{\frac{24}{7} + R} = \frac{44 - 35}{24 + 7R} = 0'2 \Rightarrow 9 = 0'2(24 + 7R) = 4'8 + 1'4R \Rightarrow R = \frac{9 - 4'8}{1'4} = \frac{4'2}{1'4} = 3\Omega$$

b) Ahora el nuevo circuito es el siguiente:



En el instante inicial el condensador no está cargado, por lo tanto, no pasa corriente por la rama en la que se encuentra.

Calculamos el equivalente Thévenin del resto del circuito.



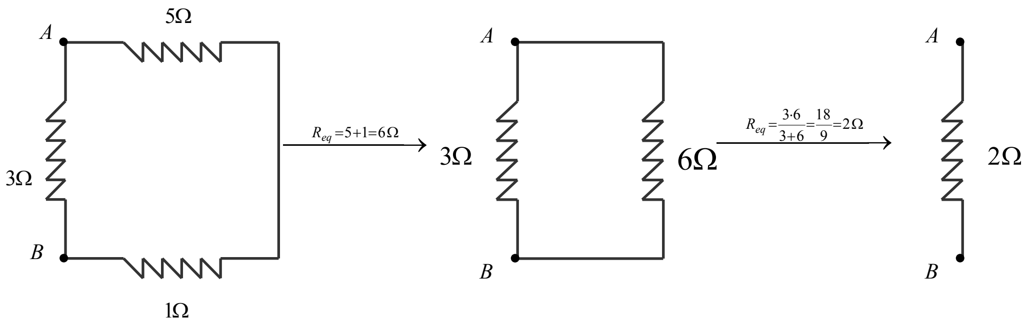
Es un circuito de una sola malla y la intensidad que circula por ella es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{8-5}{5+3+1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}\ (A)$$

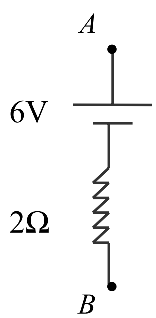
Hallamos la d.d.p entre *A* y *B*:

$$V_A - V_B = 3I - (-5) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 = 1 + 5 = 6\ (V)$$

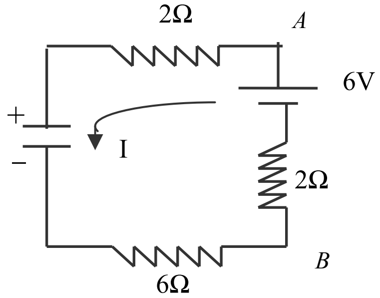
La resistencia equivalente es:



El circuito equivalente es:



El circuito total queda como:



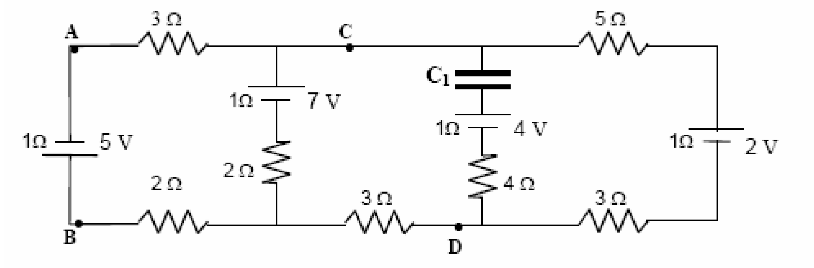
La corriente que pasa por el condensador en el instante inicial, es la que circula por el circuito:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{6}{2+2+6} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\ (A)$$

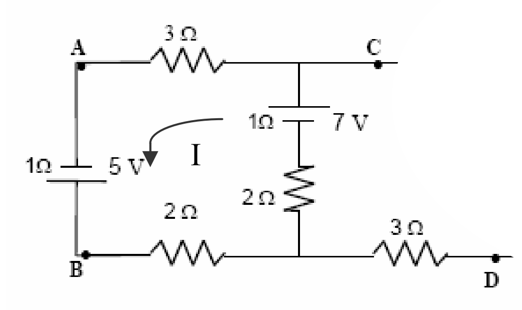
Cuando se alcanza el equilibrio ya no circula corriente por la rama donde se encuentra el condensador. Por tanto, la d.d.p entre los bornes del condensador es:
$V_C = 0 - (-6) = 6\ (V)$

Y la carga que almacena el condensador es:
$Q = C \cdot V_C = 50 \cdot 10^{-9} \cdot 6 = 3 \cdot 10^{-7} (C)$

2.2.11 Sabiendo que el circuito de la figura se encuentra en equilibrio (I_i=*cte*), determinar:
a) El equivalente de Thévenin entre los puntos *C* y *D* del circuito *ABCD*.
b) La potencia disipada en los generadores de *2V* y *4V*.
c) La energía almacenada en el condensador C_1, si su capacidad es de *20μF*.



a) Tenemos que calcular el equivalente de Thévenin del siguiente circuito:



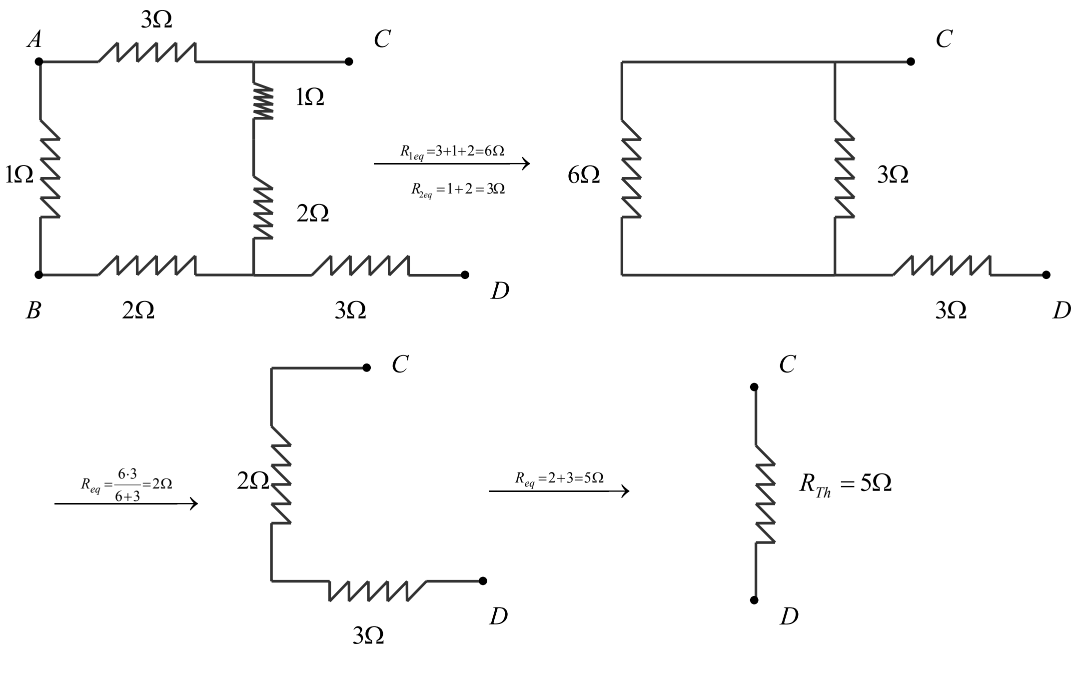
Es un circuito formado por una sola malla. El valor de la I que circula por ésta es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{5+7}{3+1+2+2+1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}\ (A)$$

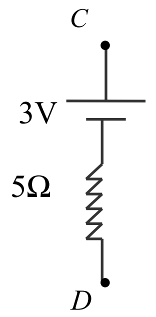
La diferencia de potencial entre los puntos C y D, lo hallamos siguiendo el sentido de al corriente:

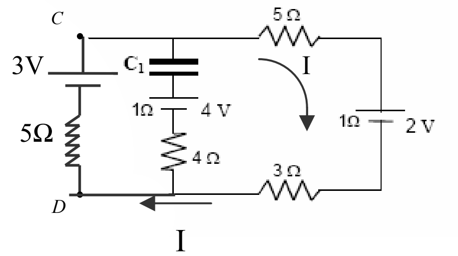
$$V_C - V_D = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j \Rightarrow V_C - V_D = I(3+1+2) - 5 = 6 \cdot \frac{4}{3} - 5 = 8 - 5 = 3\ (V)$$

Ahora calculamos la resistencia equivalente de Thévenin:



El circuito equivalente Thévenin es:





b) Para calcular la potencia disipada en cada fuente utilizamos el circuito anterior. Al estar en el estado de equilibrio no circula corriente por la rama donde está el condensador. La intensidad sólo circula por el exterior, según se indica en la figura. Su valor es:

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R} = \frac{3-2}{5+5+1+3} = \frac{1}{14}(A)$$

La potencia que se disipa en cada fuente se calcula como: $P = I^2 \cdot r$
La intensidad que pasa por la fuente de *4V* es *0*, por lo que su potencia disipada es *0*.
La intensidad que circula por la fuente de *2V* es:

$$P = I^2 \cdot r = \left(\frac{1}{14}\right)^2 \cdot 1 = 5'1 \cdot 10^{-3}(W)$$

c) Para calcular la energía almacenada en el condensador utilizamos la expresión:

$$U = \frac{1}{2} C V_C{}^2$$

Con V_C el potencial entre las placas del condensador. Y lo hallamos por la rama de la derecha a favor de la *I*.

$$V_C = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j = \frac{1}{14}(5+1+3) - (-2+4) = \frac{9}{14} - 2 = -\frac{19}{14}(V)$$

Como da negativo significa que la placa de arriba está a menor potencial que la de abajo.
Sustituyendo datos obtenemos que:

$$U = \frac{1}{2} C V_C{}^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^{-6} \left(\frac{-19}{14}\right)^2 = 1'84 \cdot 10^{-5}(J)$$