ESTADÍSTICA

Tema 5: Distribuciones Especiales.

5.3. Distribución Normal.
5.4. Teorema Central del Límite.

ESTADÍSTICA

Distribución Normal Tipificada (I).

Una v.a. X continua con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

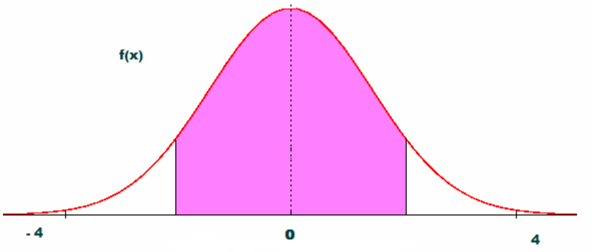
Se dice que tiene una distribución ***Normal tipificada***
X~N(0,1)

Parámetros:

$$E(X) = 0$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$$

Distribución Normal Tipificada (II).



La función de distribución:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad -\infty < x < \infty$$

Cumple la propiedad $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
Para valores $x>4$ $\quad \Phi(x)=1$
Para valores $x<-4$ $\quad \Phi(x)=0$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal Tipificada (III).

$$\text{Normal } N(0,1): \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141

Sea X una v.a. N(0, 1), calcular $P(X \le 0.22)$

$P(X \le 0.22) = \Phi(0.22) = 0.5871$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal General (I).

Una v.a. Y continua con función de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < y < \infty$$

*Se dice que tiene una distribución de **Normal** de parámetros μ y σ. $Y \sim N(\mu,\sigma)$*

Parámetros de la $N(\mu,\sigma)$:

$E(Y) = \mu$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \sigma^2$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal General (II).

Relación entre la $N(\mu,\sigma)$ y la $N(0,1)$

Sea $X \sim N(0, 1)$

Sea $Y \sim N(\mu,\sigma)$, con $Y = \sigma X + \mu$

$$F(y) = P(Y \le y) = P(\sigma X + \mu \le y) = P\left(X \le \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

Al valor $\boxed{\frac{Y-\mu}{\sigma}}$ *se le llama **valor tipificado** de la variable Y*

$$P(a < Y \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

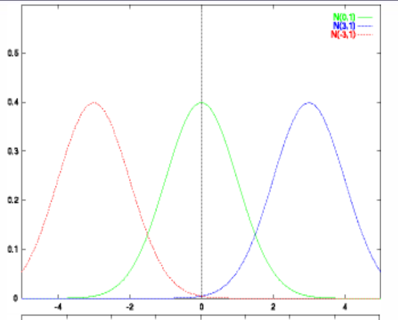
ESTADÍSTICA

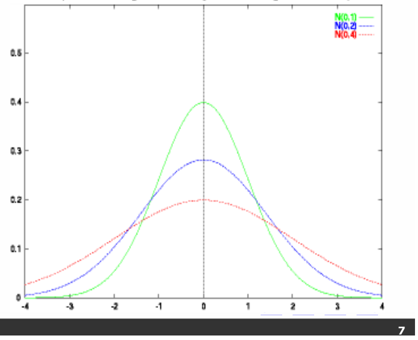
Distribución Normal General (III).

N(μ, σ): Interpretación geométrica

Podéis interpretar la media como un factor de traslación.

Y la desviación típica como un factor de escala, grado de dispersión,…





ESTADÍSTICA

Distribución Normal General (V).

***Teorema**: Si* $X_1, X_2, \ldots, X_k$ *son v.a. independientes con una distribución Normal con media* μ_i *y varianza* σ_i^2, *entonces* $X=X_1+X_2+\ldots+X_k$ *tiene una distribución Normal con media* $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$ *y varianza* $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_k^2$.

***Ejemplo**: Si* $X_1 \sim N(1,1)$ *y* $X_2 \sim N(1,2)$

$Y=X_1+X_2$
tiene una distribución Normal con media $1+1=2$
y varianza $1 + 2^2 = 5$

$$Y \sim N(2, \sqrt{5})$$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Teorema Central del Límite (I).

***Teorema**: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes de esperanzas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, entonces la suma tipificada*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \sum_i \mu_i}{\sqrt{\sum_i \sigma_i^2}}$$

Converge en distribución a una N(0.1)

ESTADÍSTICA

Teorema Central del Límite (II).

***Teorema:** Sea X una B(n,p) con E(X)= np y Var(X)= npq.*
La distribución Binomial tipificada se puede aproximar por la N(0,1) cuando n es suficientemente grande

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1)$$

***Teorema:** Si X es P(λ), E(X) = λ, Var(X) = λ*
La distribución de Poisson tipificada se puede aproximar por la N(0,1) cuando n es suficientemente grande

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$$

ESTADÍSTICA

Problema

Si X es N(0, 1), calcular:

a) $P(X > 0.37)$
b) $P(X < -1.12)$
c) $P(0.21 < X < 0.82)$
d) $P(X < 0.123)$

a) $P(X > 0.37) = 1 - P(X \leq 0.37) = 1 - 0.6443 = 0.3557$

b) $P(X < -1.12) = \Phi(-1.12) = 1 - \Phi(1.12) = 1 - 0.8686 = 0.1314$

c) $P(0.21 < X < 0.82) = \Phi(0.82) - \Phi(0.21) = 0.7939 - 0.5832 = 0.2107$

d) $P(X < 0.123) = \Phi(0.123) = \Phi(0.12) = 0.5478$

ESTADÍSTICA

Problema

Si X es N(55, 12), calcular:

a) $P(X \leq 58)$
b) $P(X > 50.8)$
c) $P(49 < X < 61)$

a) $P(X \leq 58) =$

$$P\left(\frac{X-55}{12} \leq \frac{58-55}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{12}\right) = \Phi(0.25) = 0.5987$$

b) $P(X > 50.8) = 1 - P(X \leq 50.8) =$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{50.8-55}{12}\right) = 1 - \Phi(-0.35) = 1 - (1 - \Phi(0.35)) = \Phi(0.35) = 0.6368$$

c) $P(49 < X < 61) =$

$$P\left(\frac{49-55}{12} \leq Z \leq \frac{61-55}{12}\right) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 = 2(0.6915) - 1 = 0.383$$