C.1 Contesta a las siguientes preguntas justificando la respuesta: (a) ¿Qué fuerza eléctrica actúa sobre una carga puntual q situada en el centro de una corteza esférica y conductora de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), cargada con una carga total Q? [0.5 puntos]. (b) Considerando el origen de potencial en el infinito, ¿Qué valor tiene el potencial en un punto situado a una distancia r de q ($r < R_1$)? [0.5 puntos].

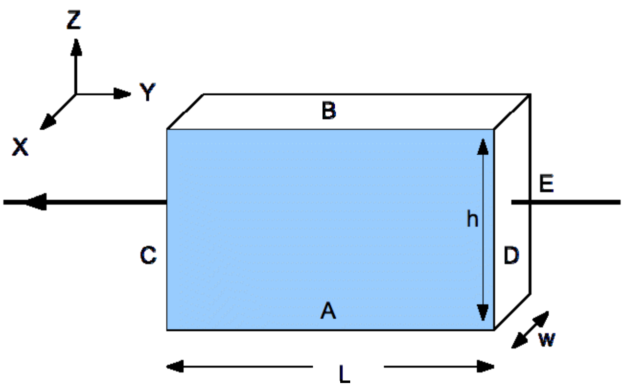
RESOLUCIÓN:

a) Aplicando la Ley de Gauss podemos comprobar que en el interior de la corteza esférica ($r < R_1$) el campo creado por la carga Q es nulo. Por lo tanto la carga q, que se encuentra en el centro, no está sometida a ninguna fuerza de tipo eléctrico.

b) El potencial en r será la suma de los potenciales creados por la carga puntual $V_1 = K \cdot \frac{q}{r}$ y el potencial creado por la carga Q distribuida en la corteza esférica. Esta última contribución es constante en el en todo interior de la corteza conductora: $V_2 = K \cdot \frac{Q}{R_2}$:

Por tanto: $V_r = V_1 + V_2 = K \cdot \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R_2} \right) \quad \mathrm{V}$

C2. La sonda Hall de un teslámetro posee una pastilla de plata (Ag) de las dimensiones indicadas en la figura. A su través circula una corriente I = 10 A (sentido $-\vec{j}$) y está sumergida en un campo magnético $\vec{B} = 10(-\vec{i})$ mT. Calcula la diferencia de potencial entre los lados: (a) A y B [0.5 puntos]. (b) C y D [0.5 puntos]. Datos: Resistividad plata ρ = 1.59 x 10^{-8} Ωm. Densidad de portadores (electrones) n = 1.5 x 10^{28} m^{-3}. Carga electrón q = 1.6 x 10^{-19} C. Dimensiones: L = 10 mm, h = 5 mm, w = 2 mm.



RESOLUCIÓN:

a) Entre los extremos A y B aparecerá la tensión Hall. En efecto, las portadores de carga (electrones) llevan una velocidad $\vec{v} = v(\vec{j})$ que podemos calcular sabiendo que

$$v = \frac{I}{nqS} = \frac{I}{nqhw} = 4.17 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Los electrones experimentarán una fuerza magnética $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB(-\vec{k})$, que los transporta hacia el lado A (que se encontrará a menor potencial), dejando el lado B con carga neta positiva. Esta separación de carga produce un campo eléctrico $\vec{E} = E(-\vec{k})$. Sobre los electrones aparece, por tanto, una fuerza adicional $\vec{F}_e = qE(\vec{k})$. En el equilibrio el módulo de ambas fuerzas se iguala, de donde $E = vB$. La *ddp* entre los lados A y B será, por tanto:

$$V_H = Eh = vBh = 2.09 \times 10^{-8} \text{ V}$$

b) Entre los lados C y D existe simplemente la caída de tensión debido a la resistencia óhmica de la pastilla de Ag que podemos calcular como

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{wh} = 1.59 \times 10^{-5} \Omega$$

Por tanto, la *ddp* entre los puntos C y D será $V = RI = 1.59 \times 10^{-4}$ V

con D a mayor potencial que C por el sentido de la corriente.

C.3 Un circuito rectangular de lados a=10 cm y b=20 cm, y resistencia R=0.5 Ω se encuentra sobre el plano ZY. El circuito se encuentra inmerso en un campo magnético de valor $\vec{B} = B_0 \cdot e^{-kt}\, \vec{i}\ T$, siendo B_0 y k constantes de valor: $B_0 = 0.1\,T$ y $k = 2\ s^{-1}$. Calcula el valor y sentido de la corriente inducida en t=1 s y t=2 s [1 punto].

RESOLUCIÓN:

El flujo magnético que atraviesa el circuito es: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S$ ya que $\vec{B}$ *y* $d\vec{S}$ son paralelos y B, aunque cambia en el tiempo, es constante con respecto a S

La fuerza electromotriz inducida en el circuito es:

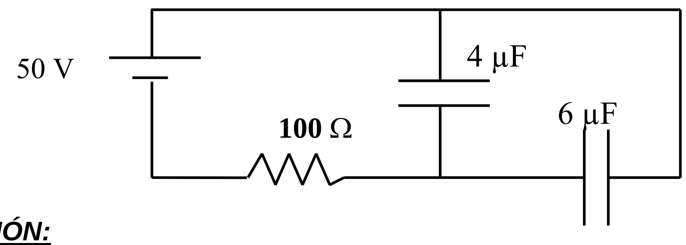
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -S \cdot \frac{dB}{dt} = S\, B_0\, k \cdot e^{-kt} = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 2 \cdot e^{-2t} = 4 \cdot e^{-2t}\ mV$$

Por lo tanto $i = \dfrac{\varepsilon}{R} = 8 \cdot e^{-2t}\ mA$

En $t=1\ s \rightarrow \quad i_1 = 1.08\ mA$ y En $t=2\ s \rightarrow \quad i_2 = 0.15\ mA$

En ambos casos el sentido de la corriente es anti-horario, ya que el flujo magnético a través de S disminuye y la corriente inducida debe crear un campo magnético con el mismo sentido que el campo externo (Ley de Lenz)

C.4 En el circuito de la figura conectamos la fuente cuando los condensadores se encuentran descargados. Calcula: (a) La potencia disipada en la resistencia en el instante inicial [0.25 puntos]. (b) La energía total almacenada en cada uno de los condensadores cuando se encuentran totalmente cargados [0.75 puntos].



RESOLUCIÓN:

(a) En t=0 por la resistencia circula corriente máxima: $I_{max} = V / R = 50/100 = 0.5\ A$

Por tantoen t=0: $P_{dR} = I^2 \cdot R = 0.5^2 \cdot 100 = 25\,W$

(b) Cuando los condensadores están totalmente cargados, la d.d.p. entre sus bornes es de 50V. La energía almacenada en cada uno de ellos es:

$$U_{4\mu F} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}4\cdot10^{-6}\cdot50^2 = 5\ mJ$$

$$U_{6\mu F} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}6\cdot10^{-6}\cdot50^2 = 7.5\ mJ$$

C.5 Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío en la dirección positiva del eje Z. El valor máximo del vector del campo eléctrico, que se encuentra vibrando en la dirección del eje Y, es de 30 N/C. Si su frecuencia es de 15 MHz, determina: (a) El valor máximo del vector del campo magnético asociado [0.25 puntos]. (b) La expresión de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]

RESOLUCIÓN:

a) El valor máximo de B se calcula a partir de: $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{30}{3\cdot10^8} = 10^{-7}\ T$

b) Calculamos previamente la velocidad angular y el número de onda:

$$w = 2\pi f = 2\pi 15\cdot10^6 = 30\pi\cdot10^6\ rad/s$$

$$k = \frac{w}{c} = \frac{30\pi\cdot10^6}{3\cdot10^8} = \pi\cdot10^{-1}\ m^{-1}$$

Con estos datos podemos plantear la ecuación que corresponde a los campos eléctrico y magnético asociados a la onda:

$$\vec{E} = 30sen\left(30\pi\cdot10^6 t - \pi\cdot10^{-1}z\right)\vec{j}\ \ V/m$$
$$\vec{B} = 10^{-7}sen\left(30\pi\cdot10^6 t - \pi\cdot10^{-1}z\right)\left(-\vec{i}\right)T$$

El campo magnético vibra en la dirección del eje X, teniendo sentido negativo cuando el campo eléctrico lo tiene positivo, ya que: $\vec{j}\times\left(-\vec{i}\right) = \vec{k}$

P.1 Un condensador está constituido por dos cortezas esféricas conductoras y concéntricas, de radios 2 cm y 8 cm, que se encuentran cargadas con 4 nC y -4 nC, respectivamente. Determina la capacidad del condensador y la energía almacenada en el mismo si entre las esferas hay: (a) Aire [1.5 puntos]. (b) Un dieléctrico de ε_r=3 [0.5 puntos].

Resolución:

a) La capacidad del condensador es $C_0 = \frac{q}{V}$

La diferencia de potencial entre las esferas interior y exterior, teniendo en cuenta que el campo entre las placas es el creado por la carga de la esfera interior, se obtiene como:

$$V_i - V_e = -\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r_e}^{r_i} E\,\vec{u}_r\cdot dr\,\vec{u}_r = -\int_{r_e}^{r_i} K\frac{q}{r^2}\cdot dr = Kq\cdot\frac{1}{r}\Bigg|_{r_e}^{r_i} = Kq\left(\frac{r_e - r_i}{r_i\cdot r_e}\right)$$

Por lo tanto C es: $C = \frac{q}{V} = \frac{r_i\cdot r_e}{K\cdot(r_e - r_i)} = 2.96\ pF$

Por su parte $U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-9}\right)^2}{2{,}96 \cdot 10^{-12}} = 2.7\ \mu J$

Nota: También puede obtenerse primero U, a partir de la densidad de energía, y después C.

$$U_0 = \int_V u_E \cdot dV = \int_v \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV = \int_{0.02}^{0.08} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = 2.7\ \mu J$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{U_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-9}\right)^2}{2{,}7 \cdot 10^{-6}} = 2.96\ pF$$

b) Si entre las placas hay un dieléctrico de ε_r=3:

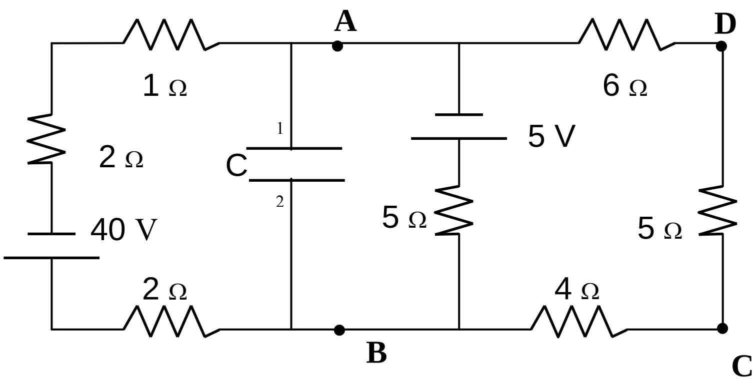
$$C = \varepsilon_r C_0 \approx 9\ pF \qquad \text{y} \qquad U = \frac{U_0}{\varepsilon_r} = 0.9\ \mu J$$

P.2 En el circuito de la figura el condensador *C* se encuentra completamente cargado, siendo $0.320\ \mu J$ la energía almacenada en el mismo. Calcula:

(a) Las corrientes que circulan por cada rama [1 punto]

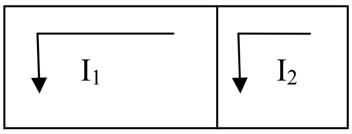
(b) La potencia aportada o consumida por cada una de las baterías [0.25 puntos]

(c) La capacidad del condensador [0.25 puntos]



RESOLUCIÓN

a) Cuando el condensador está completamente cargado no circula corriente por la rama en la que se encuentra. Por tanto, tendremos únicamente dos mallas:



Planteamos las ecuaciones de malla para calcular las corrientes:

$$0 = 10I_1 - 5I_2 - 35$$
$$0 = -5I_1 + 20I_2 - 5$$

Resolviendo el sistema: $I_1 = 29/7\ A$; $I_2 = 9/7\ A$; $i_{12} = I_1 - I_2 = 20/7\ A$ en el sentido de I_1.

b) En consecuencia, teniendo en cuenta el sentido de las corrientes y que las baterías no tienen resistencia interna y por tanto no disipan potencia por efecto Joule:

La batería de 40 V aporta: $P_{AP} = \varepsilon_1 \cdot I_1 = 165{,}7\ W$

La batería de 5 V consume: $P_C = \varepsilon_2 \cdot i_{12} = 14{,}3\ W$

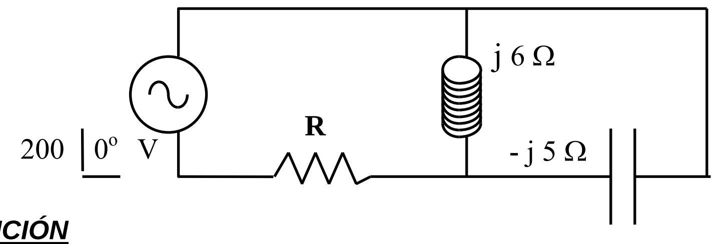
c) La diferencia de potencial entre los bornes del condensador es (vamos desde 1 hasta 2 por tramo izquierdo, sentido de I_1):

$$V_1 - V_2 = (I_1) \cdot 5 - (40) = -135/7\ V$$ (mayor potencial en 2 que en 1)

Utilizando la expresión de la energía del condensador, obtenemos el valor de la capacidad:

$$U = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \Rightarrow C = \frac{2 \cdot U}{V^2} = \frac{2 \cdot 320 \cdot 10^{-9}}{(135/7)^2} = 1.72\ nF$$

P.3 Sabiendo que la fase de la impedancia equivalente del circuito es $\varphi = -45^{o}$, calcula: (a) El valor de R [1 punto]. (b) La potencia activa del generador [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN

a) Obtenemos una expresión para la impedancia equivalente, ya que conocemos su fase:

$$\overline{Z}_1 = R = R\underline{|0^o}\rangle; \qquad \overline{Z}_2 = j\,6 = 6\underline{|90^o}\rangle; \qquad Z_3 = -j\,5 = 5\underline{|-90^o}\rangle;$$

Z_2 y Z_3 están en paralelo, luego:

$$\overline{Z}_{23} = \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = \frac{6\underline{|90^o}\rangle \cdot 5\underline{|-90^o}\rangle}{j} = \frac{30\underline{|0^o}\rangle}{1\underline{|90^o}\rangle} = 30\underline{|-90^o}\rangle = -j\,30$$

Z_{23} y Z_1 están en serie: $\overline{Z}_e = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_{23} = R - j\,30$;

como sabemos que φ = *-45º* y φ = *arc tg X/R*:

$$\Rightarrow \qquad \frac{-30}{R} = tg\,(-45) \qquad \rightarrow \qquad R = \frac{-30}{tg\,(-45)} = 30\,\Omega$$

---

b) $P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\varphi$; debemos determinar I_{ef}

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z_e}; \qquad \text{siendo } \overline{Z}_e = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_{23} = 30 - j\,30 = \sqrt{2} \cdot 30\underline{|-45^o}\ \Omega$$

$$\Rightarrow \qquad I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z_e} = \frac{200}{\sqrt{2} \cdot 30}\ A$$

$$\boxed{P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos(-45) = 200 \cdot \frac{200}{\sqrt{2} \cdot 30} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 667\ W}$$

Valor que coincide con la potencia disipada en R:

$$P_{dR} = I_{ef}^2 \cdot R = \left(\frac{200}{\sqrt{2} \cdot 30}\right)^2 \cdot 30 = 667\ \ W$$