Lección 2.
ACCESIBILIDAD Y CONECTIVIDAD

1. ACCESIBILIDAD

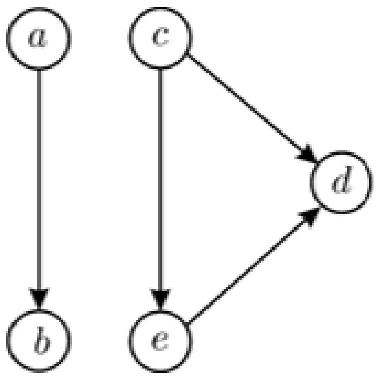
DEFINICIONES: Sea $G = (V,A)$ un grafo dirigido.

1. Sean $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j \in V$, diremos que $\mathbf{x}_j$ es **alcanzable** desde $\mathbf{x}_i$ o que $\mathbf{x}_i$ **alcanza** a $\mathbf{x}_j$ si existe un camino dirigido de $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_j$.

2. Sea $V = \{x_i\}_{i=1}^{n}$. Llamaremos **matriz de accesibilidad** asociada al grafo G a la matriz cuadrada de orden n definida por

$$R = [r_{ij}] \ / \ r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ alcanza a } x_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJEMPLO:



$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

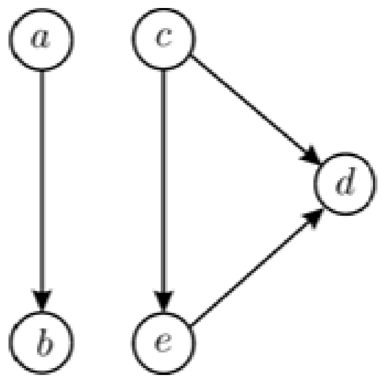
1. ACCESIBILIDAD

3. Sea $V=\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Llamaremos **matriz de acceso** asociada al grafo G a la matriz cuadrada de orden n definida por

$$Q=[q_{ij}]\ /\ q_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ es alcanzable desde } x_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

PROPOSICIÓN: $Q=R^T$.

EJEMPLO:



$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q=R^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

Sea $G = (V,A)$ un grafo dirigido.

MÉTODO 1.

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$.

Etapa 2. Tomar $v_i \in V^{(i)}$.

Etapa 3. Calcular $R(v_i) \cap Q(v_i)$.

Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim R(v_i) \cap Q(v_i)$.

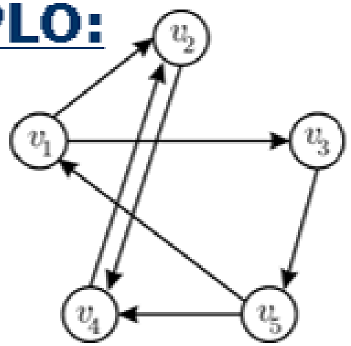
Hacer $i \leftarrow i + 1$.

Etapa 4. Si $V^{(i)} = \emptyset$, entonces STOP.

En otro caso, volver a Etapa 2.

2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

EJEMPLO:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Tomamos un vértice de $V^{(1)}$, *por ejemplo,* v_2.

Primera componente conexa: $R(v_2) \cap Q(v_2)$,

$R(v_2) \cap Q(v_2) = \{v_2, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_2, v_4\}$.

$V^{(2)} = V^{(1)} \sim R(v_2) \cap Q(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$.

$i \leftarrow 2$.

Tomamos un vértice de $V^{(2)}$, *por ejemplo,* v_1.

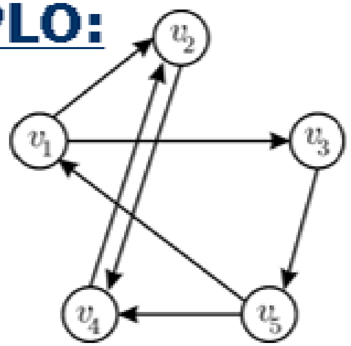
Segunda componente conexa: $R(v_1) \cap Q(v_1)$,

$R(v_1) \cap Q(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_1, v_3, v_5\} = \{v_1, v_3, v_5\}$.

$V^{(3)} = V^{(2)} \sim R(v_1) \cap Q(v_1) = \emptyset$.

2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

EJEMPLO:

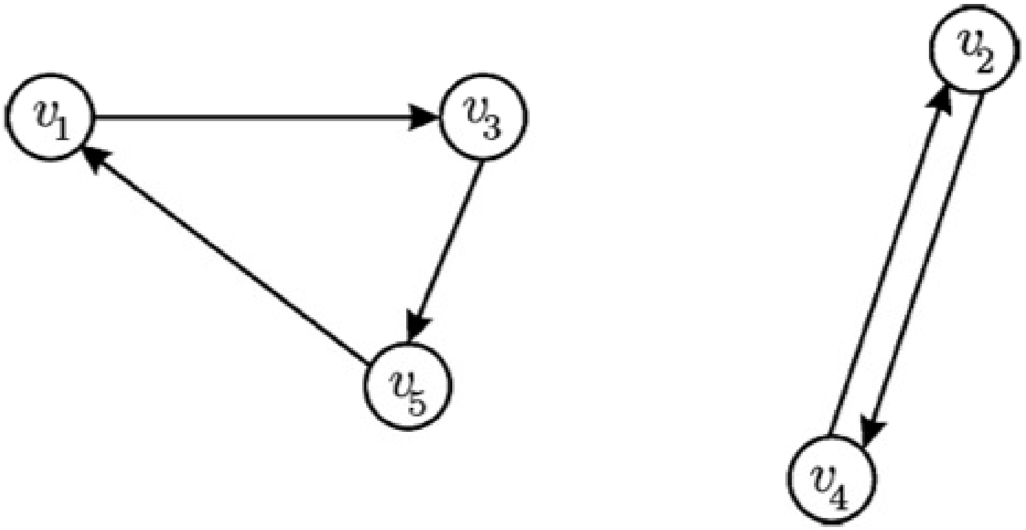


$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las componentes conexas son:

$$\{v_2, v_4\}, \ \{v_1, v_3, v_5\}.$$

GRÁFICAMENTE

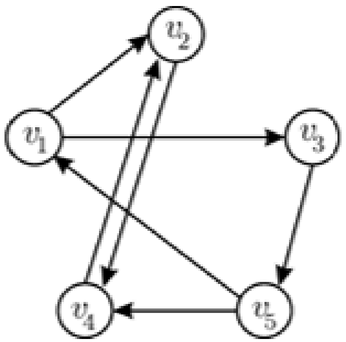


2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

MÉTODO 2.

Otra forma de calcular las componentes conexas es calcular $R \otimes Q$. La componente conexa de x_i se calcula viendo qué columnas tienen un 1 en la fila i.

EJEMPLO:

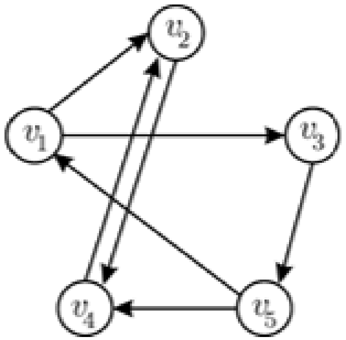


$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \otimes Q = R \otimes R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

EJEMPLO:



$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R \otimes Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La 1ª, 3ª y 5ª fila indican que una componente conexa está formada por.

$$\{v_1, v_3, v_5\}$$

La 2ª y 4ª fila indican que otra componente conexa está formada por.

$$\{v_2, v_4\}$$

2. CÁLCULO DE COMPONENTES CONEXAS

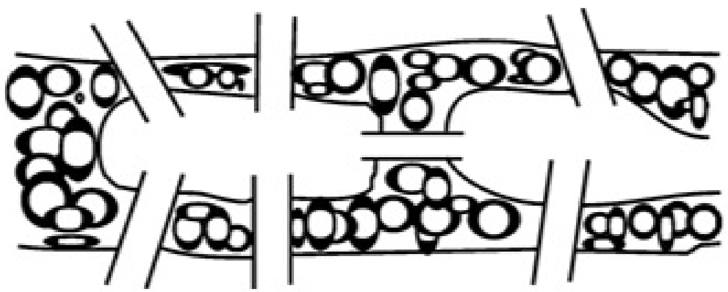
Observación: En el caso no dirigido es obvio que la componente conexa asociada a un vértice x_i puede ser calculada obteniendo el conjunto.

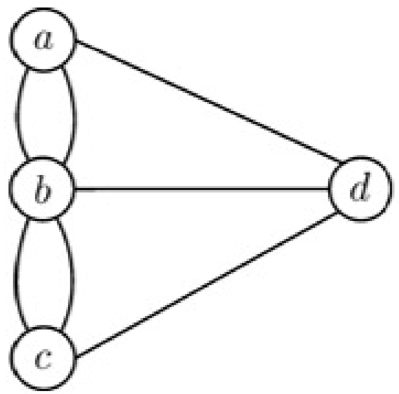
$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^p(v_i), \quad p \leq n$$

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

En siglos pasados Königsberg fue una populosa y rica ciudad de la zona oriental de Prusia. Estaba situada a orillas del río Pregel, que en el siglo XVIII estaba atravesada por siete puentes situados como muestra la figura y que permitían enlazar los distintos barrios.

Problema: ¿Es posible planificar un paseo de forma que saliendo de un punto se pudiera regresar tras haber atravesado cada uno de los puentes una sola vez? Leonardo Euler, un matemático suizo natural de Basilea (1707-1783) dio la solución a este problema.





3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

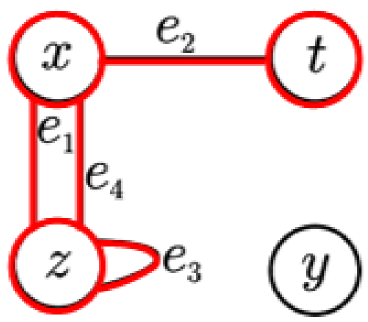
DEFINICIONES:

Sea G un grafo conexo y en general no simple.

1. Llamaremos **tour** de G a una cadena cerrada que atraviesa cada arista de G al menos una vez.

   EJEMPLO:

   La cadena $\boldsymbol{te_2xe_1ze_3ze_4xe_2t}$ es un tour.

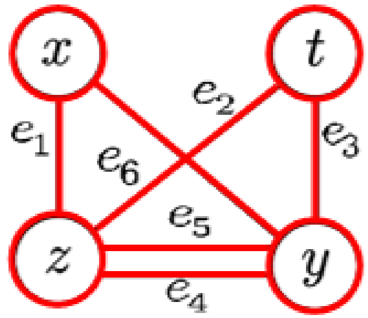


3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

2. Llamaremos **tour euleriano** de *G* a un tour de *G* que atraviesa cada arista exactamente una vez.

   EJEMPLO:

   La cadena $te_3ye_4ze_1xe_6ye_5ze_2t$ es un tour euleriano.



3. Llamaremos **grafo euleriano** a aquel en el que podemos encontrar un tour euleriano.

   EJEMPLO: El grafo anterior es un grafo euleriano.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

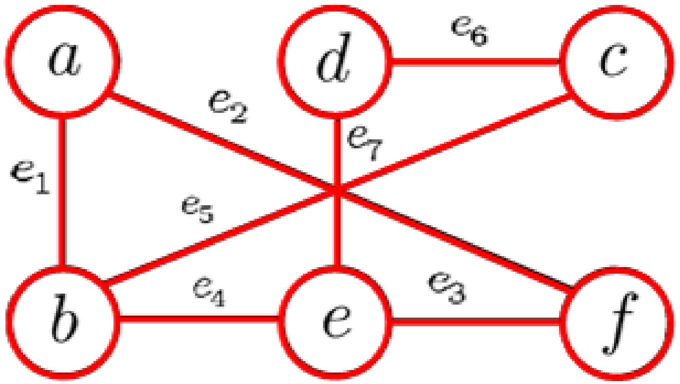
4. Llamaremos **camino euleriano** a una cadena (simple) que atraviesa cada arista exactamente una vez.

EJEMPLO:

La cadena

$\boldsymbol{b e_1 a e_2 f e_3 e e_4 b e_5 c e_6 d e_7 e}$

es un camino euleriano.



3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

TEOREMA

Sea *G* un grafo no dirigido y conexo.

1. *G* es euleriano si y sólo si no tiene vértices de grado impar.
2. *G* contiene un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

TEOREMA

Sea *G* = (*V*,*A*) un grafo dirigido y débilmente conexo.

1. *G* es euleriano si y sólo si, para todo vértice v, $d_e(v) = d_s(v)$.
2. *G* contiene un camino euleriano si y sólo si

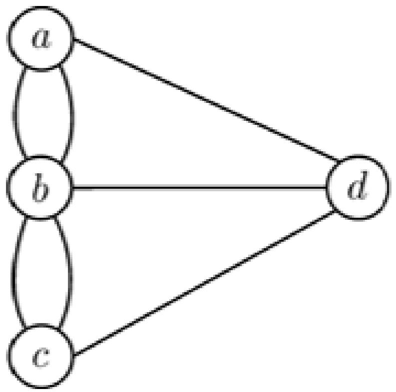
$$d_e(v) = d_s(v),\ \forall v \neq p, q$$
$$d_e(p) = d_s(p) - 1, \quad d_e(q) = d_s(q) + 1.$$

Siendo *p* y *q* los vértices inicial y final, respectivamente, del camino.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

EJEMPLO:

El grafo de los puentes de Königsberg no es euleriano ya que no todos sus vértices tienen grado par.



Tampoco contiene un camino euleriano.

Por tanto, el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

ALGORITMO DE FLEURY

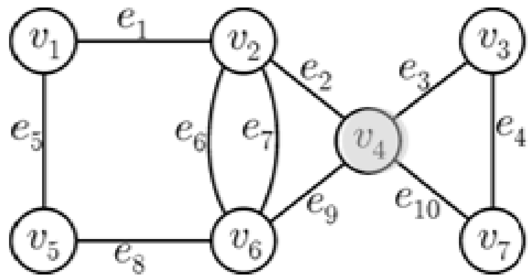
El siguiente algoritmo encuentra un tour o camino euleriano en un grafo no dirigido.

Si el grafo es euleriano, a partir de un vértice cualquiera de G, construiremos una cadena simple de forma que no se repitan aristas y no se elijan aristas de corte a no ser que no haya otra alternativa. Al finalizar este proceso, es decir, cuando hayamos agotado todas las aristas, habremos obtenido un tour euleriano.

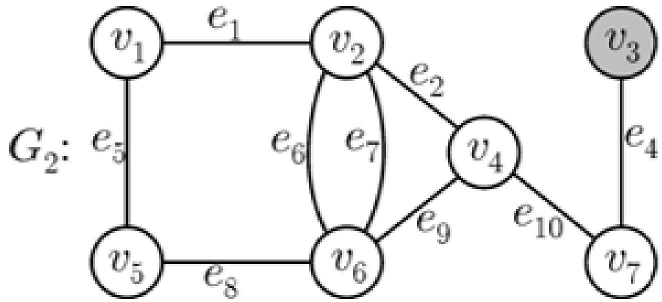
Si el grafo contiene un camino euleriano comenzaremos con un vértice de grado impar siguiendo el proceso descrito.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

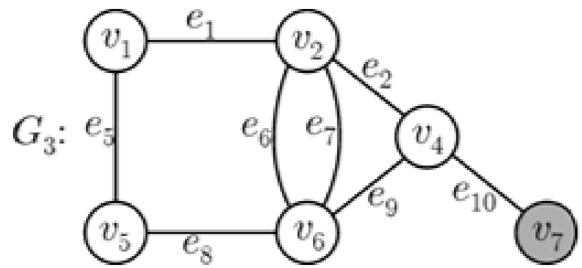
EJEMPLO: El siguiente grafo es conexo y el grado de todo vértice es par, por lo tanto, posee un tour euleriano. Aplicaremos el algoritmo de Fleury.



A partir de $\boldsymbol{v_4}$ podemos elegir 4 posibles aristas; ninguna de ellas desconecta el grafo.
Eligiendo la arista $\boldsymbol{e_3}$ podemos eliminarla del grafo y añadirla al tour: $\boldsymbol{T=e_3}$.

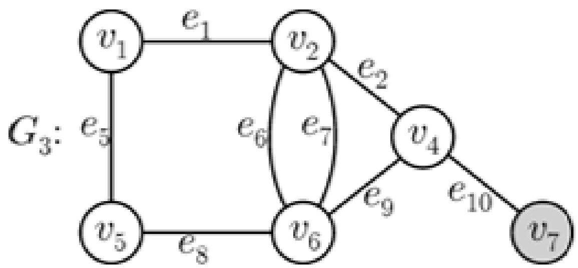


El vértice $\boldsymbol{v_3}$ sólo incide con $\boldsymbol{e_4}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_4}$ y $\boldsymbol{v_3}$.
Añadimos $\boldsymbol{e_4}$ al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4}$.

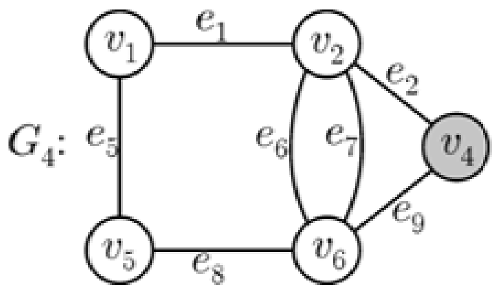


3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

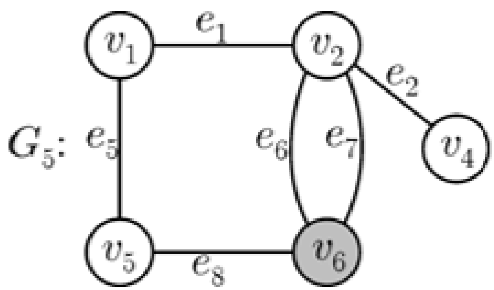
Situación actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4}$.



El vértice $\boldsymbol{v_7}$ es incidente sólo con $\boldsymbol{e_{10}}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_{10}}$ y $\boldsymbol{v_7}$.
Añadimos $\boldsymbol{e_{10}}$ al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}}$.

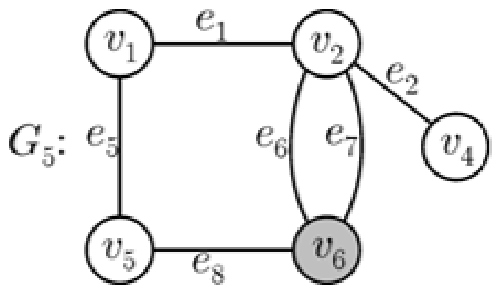


A partir de $\boldsymbol{v_4}$ podemos elegir 2 aristas y ninguna desconecta el grafo: elegimos $\boldsymbol{e_9}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_9}$ y la añadimos al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9}$.

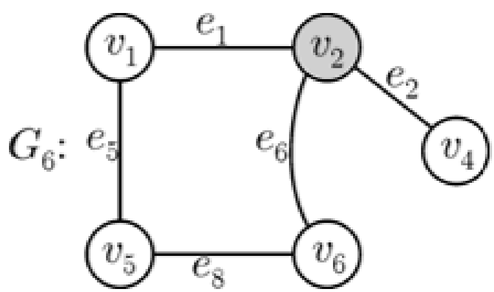


3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

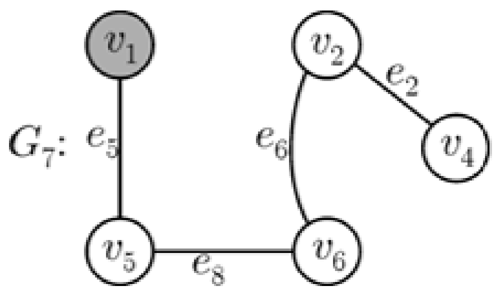
Situación actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9}$.



A partir de $\boldsymbol{v_6}$ podemos elegir 3 aristas y ninguna desconecta el grafo: elegimos $\boldsymbol{e_7}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_7}$ y la añadimos al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7}$.



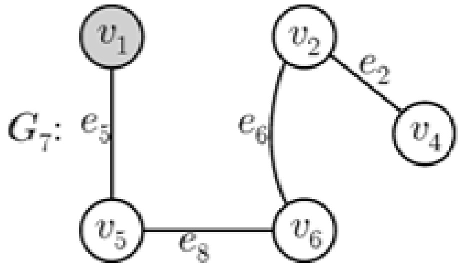
A partir de $\boldsymbol{v_2}$ podemos elegir $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ o $\boldsymbol{e_6}$. $\boldsymbol{e_2}$ es una arista de corte, así que no podemos elegirla: elegimos $\boldsymbol{e_1}$ que no es de corte.
Eliminamos $\boldsymbol{e_1}$ y la añadimos al tour: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1}$.



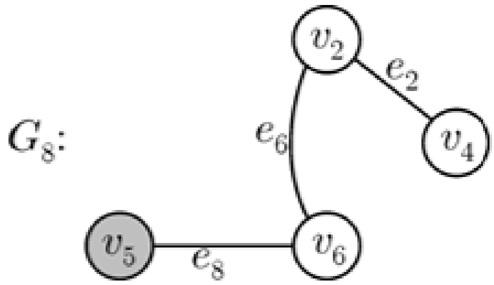
Índice

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

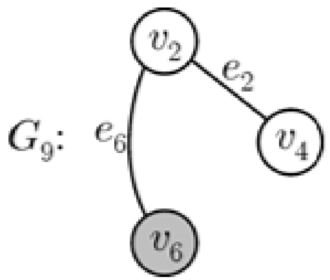
Situación actual: $\boldsymbol{T=e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1}$.



El vértice $\boldsymbol{v_1}$ es incidente sólo con $\boldsymbol{e_5}$. Eliminamos $\boldsymbol{e_5}$ y $\boldsymbol{v_1}$. Añadimos $\boldsymbol{e_5}$ al tour: T=$\boldsymbol{e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5}$.

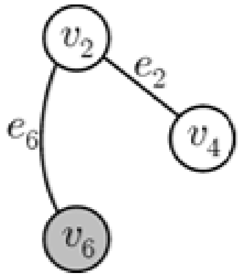


El vértice $\boldsymbol{v_5}$ es incidente sólo con $\boldsymbol{e_8}$. Eliminamos $\boldsymbol{e_8}$ y $\boldsymbol{v_5}$. Añadimos $\boldsymbol{e_8}$ al tour: T=$\boldsymbol{e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5e_8}$.



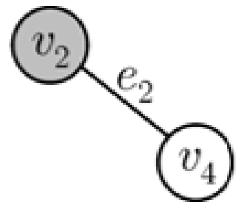
Situación actual: T=$\boldsymbol{e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8}$.

G_9:



El vértice $\boldsymbol{v_6}$ es incidente sólo con $\boldsymbol{e_6}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_6}$ y $\boldsymbol{v_6}$. Añadimos e6 al tour:
T=$\boldsymbol{e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6}$.

G_{10}:



El vértice $\boldsymbol{v_2}$ es incidente sólo con $\boldsymbol{e_2}$.
Eliminamos $\boldsymbol{e_2}$ y $\boldsymbol{v_2}$. Añadimos $\boldsymbol{e_2}$ al tour:
$\boldsymbol{T=e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6 e_2}$.

G_{11}:

Como no hay más aristas, el tour euleriano buscado es
$\boldsymbol{T=e_3 e_4 e_{10} e_9 e_7 e_1 e_5 e_8 e_6 e_2}$.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

ALGORITMO DE FEURY: MODIFICACIÓN PARA GRAFOS DIRIGIDOS

El siguiente algoritmo encuentra un tour o camino euleriano en un grafo no dirigido.

Si el grafo es euleriano, a partir de un vértice cualquiera de G construimos una cadena simple de forma que no se repitan arcos y no se elija nunca un arco si al eliminarlo aumenta el número de componentes conexas del grafo no dirigido asociado, a no ser que no tengamos otra alternativa.

Si el grafo contiene un camino euleriano, comenzamos con un vértice $\boldsymbol{p}$ tal que $d_e(\boldsymbol{p}) = d_s(\boldsymbol{p}) - 1$, siguiendo el proceso descrito.

3. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE ARISTAS

EJEMPLO:

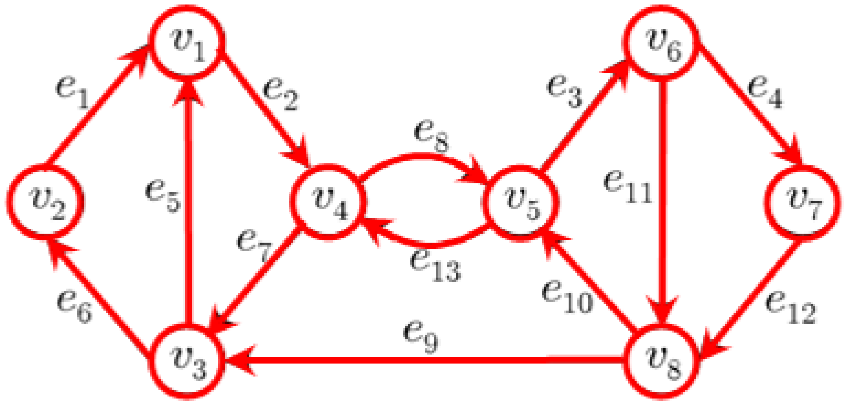
Consideremos el siguiente grafo G=(V,A) dirigido:

El grafo es débilmente conexo y verifica:

$d_e(\mathbf{v}_i)=d_s(\mathbf{v}_i)$ para todo $i \neq 1,6$

$d_e(\mathbf{v}_6)=d_s(\mathbf{v}_6)-1$,

$d_e(\mathbf{v}_1)=d_s(\mathbf{v}_1)+1$



Posee un camino euleriano que comienza en $\mathbf{v}_6$ y finaliza en $\mathbf{v}_1$.

En este punto, si elegimos el arco $\mathbf{e}_7$, aumenta el número de componentes conexas del grafo no dirigido asociado. Por tanto, elegimos $\mathbf{e}_8$.

En este punto, si elegimos el arco $\mathbf{e}_{13}$, aumenta el número de componentes conexas del grafo no dirigido asociado. Por tanto, elegimos $\mathbf{e}_3$.

El camino eulerano es $C=e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}e_7e_6e_1$

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

En 1857 el matemático irlandés William Hamilton ideó el siguiente juego:

Dado un dodecaedro regular (poliedro de doce caras, cuyas caras son pentágonos regulares e iguales), si en cada uno de sus vértices se pone el nombre de una ciudad, ¿es posible encontrar un ciclo a través de las aristas del dodecaedro que pase por cada ciudad una sola vez?

Dicho juego, que ha dado lugar a la teoría de recorrido de vértices, fue vendido a un fabricante de juguetes que pagó a Hamilton 25 guineas.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

DEFINICIONES:

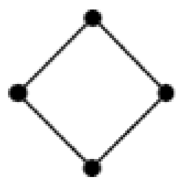
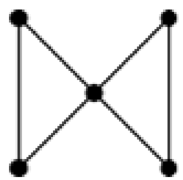
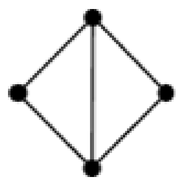
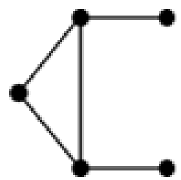
1. Un **camino Hamiltoniano** en un grafo *G* es un camino que atraviesa cada vértice del grafo exactamente una vez.
2. Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo *G* es un ciclo que atraviesa cada vértice del grafo exactamente una vez.
3. Un grafo es **Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.

Los problemas de recorrido de aristas y vértices no están relacionados

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

DEFINICIONES:

1. Un **camino Hamiltoniano** en un grafo *G* es un camino que atraviesa cada vértice del grafo exactamente una vez.
2. Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo *G* es un ciclo que atraviesa cada vértice del grafo exactamente una vez.
3. Un grafo es **Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.

	Grafo hamiltoniano	**Grafo no hamiltoniano**
Grafo euleriano		
Grafo no euleriano		

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

REGLAS BÁSICAS PARA CONSTRUIR CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

Regla 1. Si G no es conexo, no posee ciclos Hamiltonianos.

Regla 2. Si G es un grafo con n vértices, entonces un camino Hamiltoniano debe tener exactamente $n - 1$ aristas, y un ciclo Hamiltoniano n aristas.

Regla 3. Si v es un vértice del grafo, entonces un camino Hamiltoniano debe tener al menos una arista incidente con v y como mucho dos.

Regla 4. Si G es Hamiltoniano, entonces $d_G(\mathbf{v})$ debe ser mayor o igual que 2.

Regla 5. Si $v \in V$ tiene grado 2, entonces las dos aristas incidentes con v deben aparecer en cualquier ciclo Hamiltoniano de G.

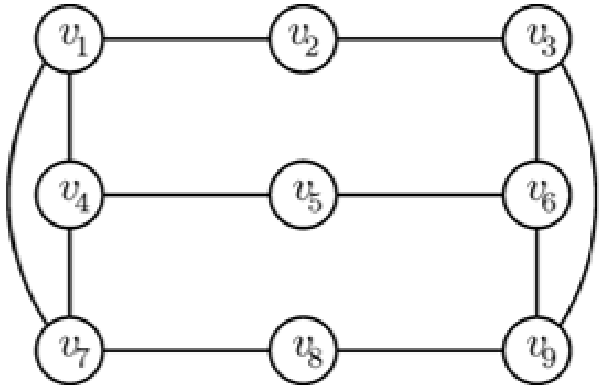
Regla 6. Si $v \in V$ tiene grado mayor que 2, entonces cuando se intenta construir un ciclo Hamiltoniano, una vez que se pase por v, las aristas no utilizadas incidentes se dejan de tener en cuenta.

Regla 7. Al construir un ciclo o camino Hamiltoniano para G, no se puede dar el caso de obtener un ciclo para un subgrafo de G a menos que contenga todos los vértices de G.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

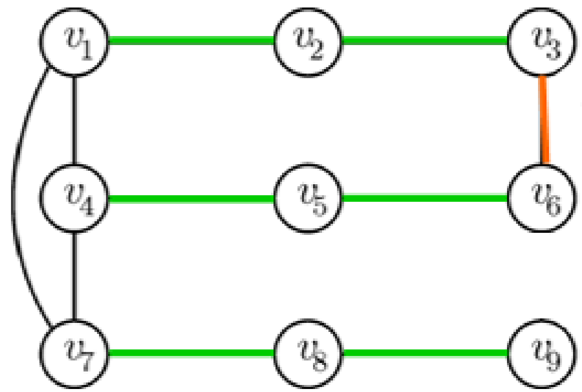
EJEMPLO: Veamos si el siguiente grafo es hamiltoniano.

Aplicando la regla 5 sobre los vértices v_2, v_5 y v_8 tenemos que las siguientes aristas deben aparecen en cualquier ciclo hamiltoniano.



4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

EJEMPLO: Veamos si el siguiente grafo es hamiltoniano.



Aplicando la regla 5 sobre los vértices $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_5}$ y $\boldsymbol{v_8}$ tenemos que las siguientes aristas deben aparecen en cualquier ciclo hamiltoniano.

Situándonos en el vértice $\boldsymbol{v_3}$ tenemos 2 opciones:

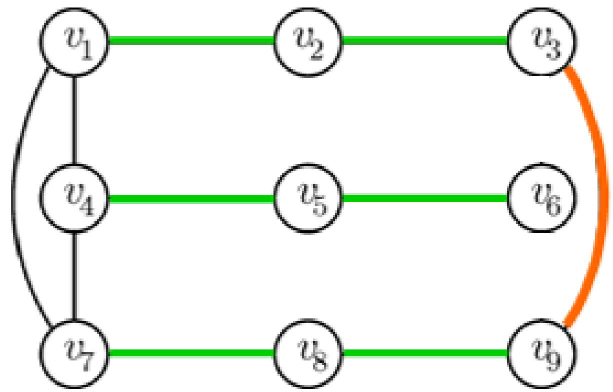
1. Utilizar la arista $\{\boldsymbol{v_3},\boldsymbol{v_6}\}$.

   Por la regla 6, eliminamos las dos aristas no utilizadas incidentes con los vértices $\boldsymbol{v_3}$ y $\boldsymbol{v_6}$.

   Como $\boldsymbol{v_9}$ sólo tiene una arista incidente con él, por la regla 4, el grafo no puede ser hamiltoniano.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

EJEMPLO: Veamos si el siguiente grafo es hamiltoniano.



Aplicando la regla 5 sobre los vértices v_2, v_5 y v_8 tenemos que las siguientes aristas deben aparecen en cualquier ciclo hamiltoniano.

Situándonos en el vértice v_3 tenemos 2 opciones:

1. Utilizar la arista $\{v_3,v_6\}$.

   Por la regla 6, eliminamos las dos aristas no utilizadas incidentes con los vértices v_3 y v_6.

   Como v_9 sólo tiene una arista incidente con él, por la regla 4, el grafo no puede ser hamiltoniano.

2. Utilizar la arista $\{v_3,v_9\}$.

   Por la regla 6, eliminamos las dos aristas no utilizadas incidentes con los vértices v_3 y v_9.

   Como v_6 sólo tiene una arista incidente con él, por la regla 4, el grafo no puede ser hamiltoniano.

Índice

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

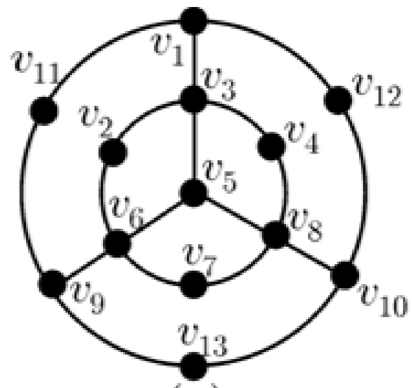
TEOREMA

Sea G un grafo bipartido con partición {X,Y}.

1. Si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces card(X)=card(Y).
2. Si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces card(X) y card(Y) difieren a lo sumo en 1.

El recíproco es cierto para grafos bipartidos completos con más de dos vértices.

EJEMPLO: La siguiente figura es un grafo conexo y queremos saber si tiene un ciclo o un camino hamiltoniano.



(a)

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

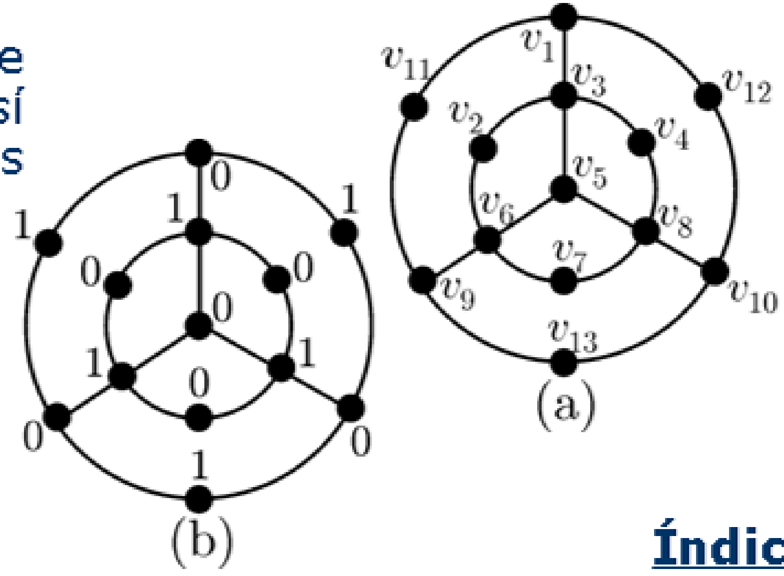
TEOREMA

Sea G un grafo bipartido con partición {X,Y}.

1. Si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces card(X)=card(Y).
2. Si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces card(X) y card(Y) difieren a lo sumo en 1.

El recíproco es cierto para grafos bipartidos completos con más de dos vértices.

EJEMPLO: Si etiquetamos con un 0 el vértice v_5 y con un 1 los vértices adyacentes, y así sucesivamente hasta etiquetar todos los vértices, obtenemos la siguiente figura.



Índice

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

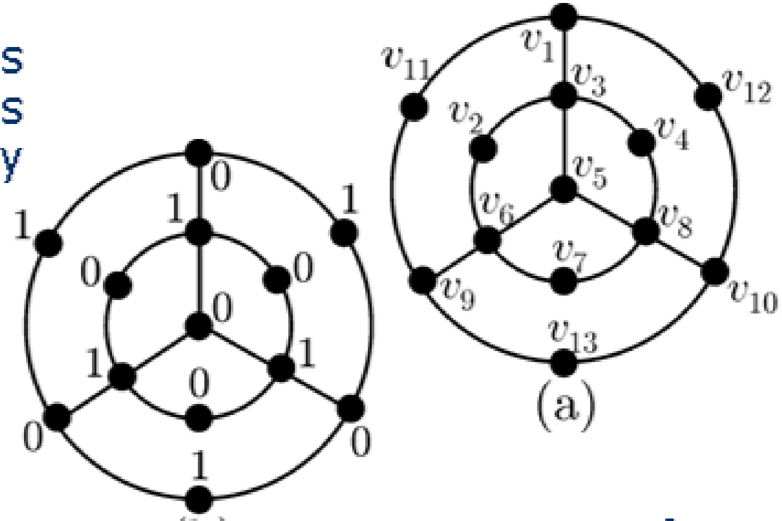
TEOREMA

Sea G un grafo bipartido con partición {X,Y}.

1. Si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces card(X)=card(Y).
2. Si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces card(X) y card(Y) difieren a lo sumo en 1.

El recíproco es cierto para grafos bipartidos completos con más de dos vértices.

EJEMPLO: Como cada par de vértices adyacentes están marcados con etiquetas distintas, nuestro grafo es bipartido y podemos aplicar el teorema anterior.



(b) (a)

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

TEOREMA

Sea G un grafo bipartido con partición {X,Y}.

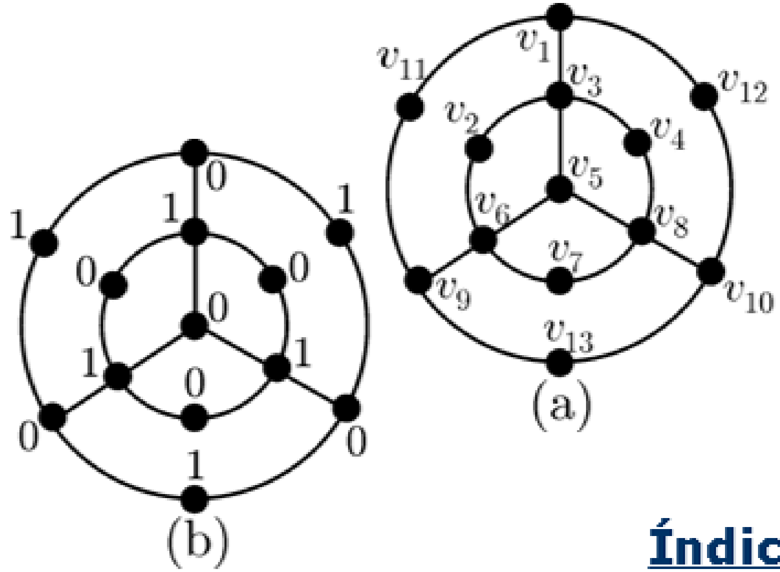
1. Si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces card(X)=card(Y).
2. Si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces card(X) y card(Y) difieren a lo sumo en 1.

El recíproco es cierto para grafos bipartidos completos con más de dos vértices.

EJEMPLO: La partición es:

$X=\{v_i \in V$ / la etiqueta de v_i es $0\}=$
$=\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{10}\}$

$Y=\{v_i \in V$ / la etiqueta de v_i es $1\}=$
$=\{v_3, v_6, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$.



Índice

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

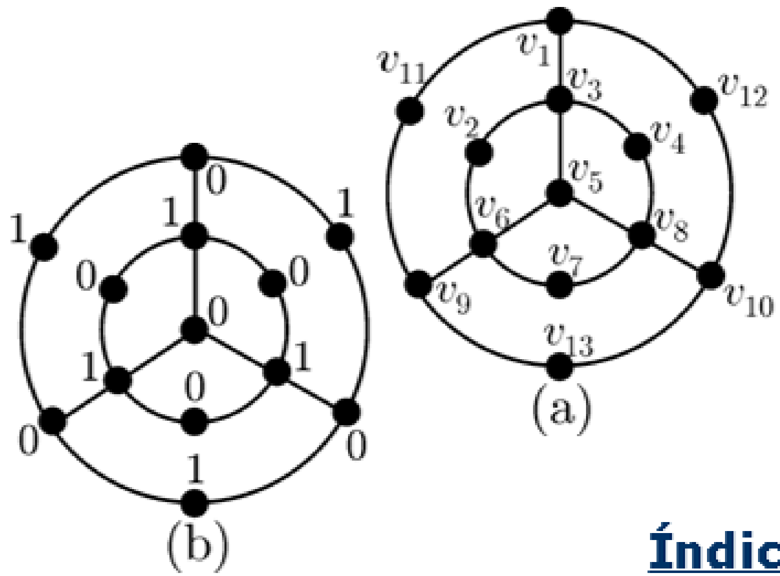
TEOREMA

Sea G un grafo bipartido con partición {X,Y}.

1. Si G tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces card(X)=card(Y).
2. Si G tiene un camino Hamiltoniano, entonces card(X) y card(Y) difieren a lo sumo en 1.

El recíproco es cierto para grafos bipartidos completos con más de dos vértices.

EJEMPLO: Tenemos card(X)=7 y card(Y)=6, por lo que, por el teorema anterior, el grafo no posee ningún ciclo hamiltoniano.
Sin embargo, el teorema no niega ni afirma la existencia de un camino hamiltoniano.



4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

TEOREMA DE DIRAC

Todo grafo simple con n vértices, $n \geq 3$, en el que todo vértice tiene grado por lo menos $n/2$, tiene un ciclo Hamiltoniano.

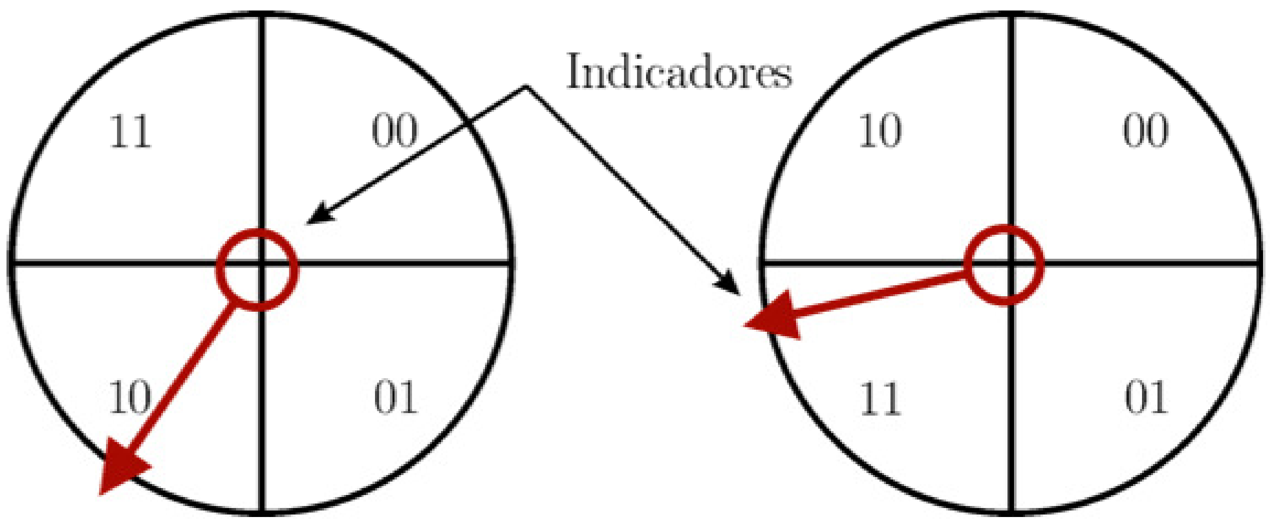
COROLARIO

Si G es un grafo completo simple con n vértices, $n \geq 3$, entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

APLICACIÓN: CODIGOS DE GRAY

Una manera de convertir la posición angular de un indicador rotativo a forma digital es dividir el círculo en 2^n sectores iguales, etiquetar los segmentos con números binarios de 0 a $2^n - 1$ y registrar el número de segmento que señala el indicador mediante algún sistema digital.



4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

Para leer la etiqueta mediante el uso de sensores podemos colocar n anillos concéntricos segmentados, de manera que el indicador haga contacto con el anillo i si, y sólo si, el i-ésimo dígito de la etiqueta es un 1.

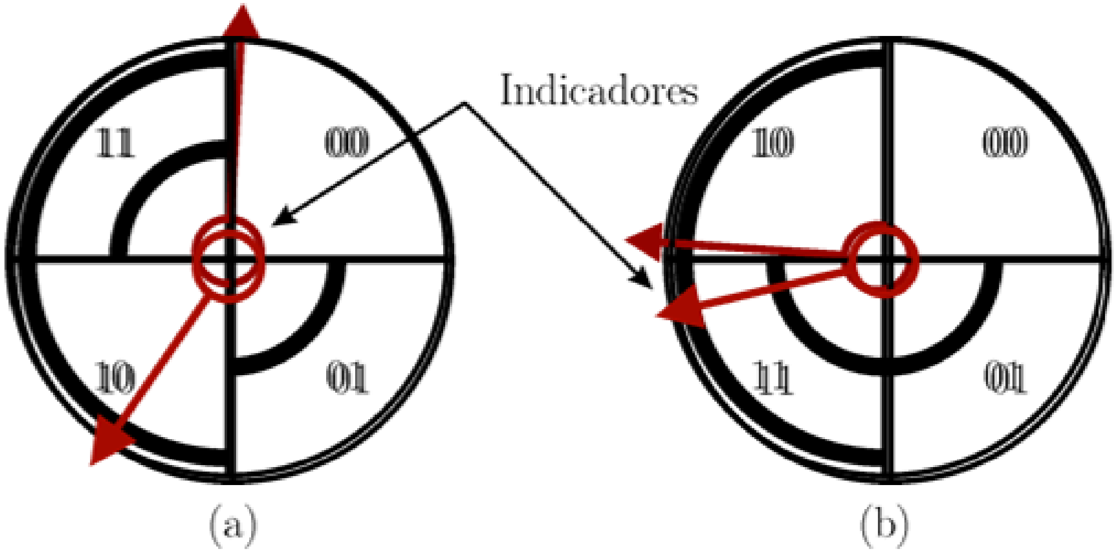


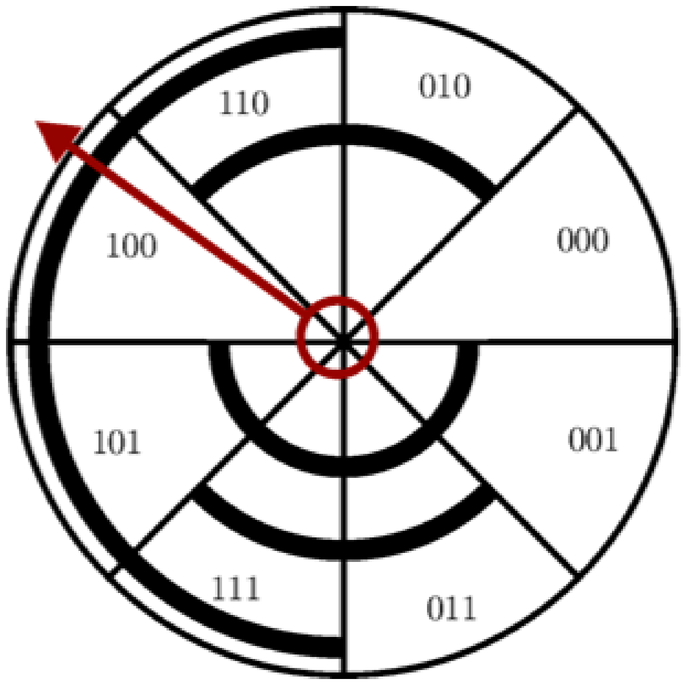
Figura (a): Si el indicador está en 00 pero cerca de la frontera entre 00 y 11, una pequeña irregularidad en el contacto puede hacer que se lea 01 (sector adyacente lejano), o 11 (sector adyacente), o 10 (sector opuesto). Errores en los dos dígitos.

Figura (b): Sólo se pueden producir errores en un sólo dígito y caso de producirse el error nos lleva siempre al sector más adyacente.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

DEFINICIÓN

Un **código de Gray de longitud n** es una asignación de etiquetas a los 2^n sectores iguales del círculo con expresiones binarias de longitud n, de manera que las etiquetas de sectores adyacentes difieran en exactamente en un dígito.



4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

Podemos ver la construcción de un código de Gray como un problema de grafos:

Consideremos como conjunto de vértices

$$V = \{0, 1\}^n$$

es decir, números binarios de longitud n, y unamos dos vértices $u,v \in V$ con una arista si u y v difieren en exactamente un dígito.

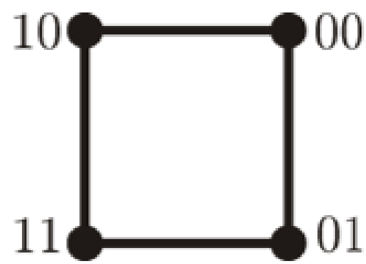
Se puede demostrar por inducción que este grafo es Hamiltoniano para $n \geq 2$; recibe el nombre de n-cubo y se representa por Q_n.

Es evidente que un código de Gray corresponde a un ciclo Hamiltoniano en Q_n.

4. PROBLEMAS DE RECORRIDO DE VÉRTICES

EJEMPLO

El siguiente grafo muestra la gráfica de Q_2.



El siguiente grafo muestra la gráfica de Q_3.

Y el código de Gray correspondiente a uno de sus 12 ciclos Hamiltonianos