Apuntes de *Fundamentos Físicos de la Informática*

Eduardo Espuch

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Resumen

En este documento se tratara de representar la información y conceptos de la asignatura de una forma más sencilla de comprender adaptando una estructura distinta a la dada en las clases de teoría. Ya que el campo eléctrico y el magnético están muy relacionados se verán estas seguidas para finalizar el documento mostrando el funcionamiento de los circuitos de corriente continua y alterna partiendo de una base teórica. Información que pueda ser de gran utilidad se encontrara en el apartado **6. Anexos**. También encontraremos en éste los conceptos básicos que se generalicen para citarlos y ahorrar tanto tiempo como espacio.

Índice

1. Campo eléctrico

Partiendo de los conocimientos dados en el anexo y sabiendo la relación de similitud que mantiene el campo eléctrico con el magnético, veamos conceptos que caracterizan al campo eléctrico y sus aplicaciones.

1.1. Interacción eléctrica (Ley de Coulumb)

La ley de Coulumb establece que entre dos cargas puntuales se genera una fuerza electrostática que puede ser de atracción o repulsión:

$$\vec{F}_{1,2} = K\frac{q_1 q_2}{|r_{1,2}|^2}\vec{u}_{1,2}$$

Aplicando el principio de superposción tenemos que:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = Kq_0\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|r_i|^2}\vec{u}_i$$

donde $\vec{u}_i$ es un vector unitario con origen en la carga q_i y final en la carga q_0 (que sera la carga de prueba) y $|r_i|$ es la distancia que las separa. $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{\cdot}10^9 N{\cdot}m^2/C^2$ siendo K la constante eléctrica y $\varepsilon_0 = 8{,}85{\cdot}10^{-12 C^2/N\cdot m^2}$ la permitividad del vació (se vera mas adelante que se dan casos de permitividad de otros medios).

NOTA: para el campo eléctrico, se trabaja estrictamente con la fuerza eléctrica pero esta no tiene que ser la única fuerza que se aplica a la carga.

1.2. ¿Qué es el campo eléctrico y como se obtiene?

El campo eléctrico es una región del espacio afectado por una fuerza electrostática (o un conjunto al aplicar el principio de superposición) omitiendo la carga de prueba q_0. Por lo general, al introducir una carga en esta región sabremos con certeza que se vera afectada por fuerzas electrostáticas y, de igual forma, haciendo la posición una incógnita el valor del campo eléctrico equivalente a 0, obtener donde este se anula.

Se obtiene, como ya se ha comentado, omitiendo la carga de prueba (que generalmente suele ser positiva salvo que se diga lo contrario) de la formula de la Ley de Coulumb (veremos la formula con la ley de superposición):

$$\vec{E_T} = \frac{\vec{F_T}}{q_0} = \frac{1}{q_0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = K\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|r_i|^2}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

Cabe destacar que se puede entender el campo eléctrico como un espacio vectorial, con lo cual podemos descomponerlos en vectores tal que

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

1.3. Lineas de campo eléctrico

Son lineas tangentes al campo en cada punto que sirven para mostrar la dirección y sentido de este en cada punto del espacio. Con esto sera mas sencillo estudiar en que puntos de anulan, que interacción se ejercen entre las cargas, la dirección y sentido en un punto en concreto y más. Cumplen las siguientes reglas:

1. Salen de las cargas positivas y entran en las cargas negativas.
2. Son simétricas.
3. El numero de lineas el proporcional a la carga creadora (la carga positiva).
4. La densidad de lineas es proporcional al modulo del campo eléctrico.
5. Las lineas de campo no se cruzan, en ningún punto se cortan.

Hablaremos de un campo uniforme cuando existe igual intensidad, dirección y sentido en todos los puntos del espacio.

1.4. Energía potencial eléctrica

La variación de energía potencial (ΔU) es igual al trabajo (W) realizado por la fuerza conservativa cambiado de signo, tal que

$$\Delta U = U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = Kq_0Q\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

Con esta formula se consideran dos situaciones, la situación inicial en la que q_0 y Q se distan por r_a y la situación final, donde se distan por r_b.

Es mas, si tomamos el punto de origen en el infinito ($r_a = r_{ref} = \infty$) en el que $U_a = U_{ref} = 0$, podemos calcular la energía de una carga q_0 que dista r de una carga puntual Q.

El trabajo (W) se ha visto que se obtiene con las formula $W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l}$, pero ¿que significa? Veamoslo rápidamente.

El trabajo actúa sobre la fuerza que se ejerce sobre una entidad (una carga en este caso) y el trayecto que esta recorre que depende de los puntos inicial y final (a y b), pero el trayecto que estos formas puede ser simple o compuesto, con lo cual debe de saberse que este trayecto se puede descomponer, p.e., 3 lineas perpendiculares entre si seria un camino compuesto por tres caminos simples.

Se nos da una fuerza conservativa que, en este caso, la asociaremos directamente a la fuerza electrostática y si nos da un $d\vec{l}$. Este diferencial hace referencia a cada punto de la trayectoria del recorrido, se puede igualar tal que $d\vec{l} = dr\cdot\vec{u_r}$ siendo dr el diferencial del recorrido (cada punto del recorrido) y u_r la dirección y sentido que toman en cada punto del recorrido.

NOTA: En la formula del trabajo se realiza un producto escalar, con lo cual la posiciona relativa entre la fuerza conservativa (que sera con una dirección y sentido constantes) y la del diferencial de trayectoria ($d\vec{l}$) puede variar en cada tramo posible del recorrido al igual que puede variar la dirección y sentido de $d\vec{l}$, es decir, no confundir $dr\cdot\vec{u_r}$ del trayecto con el vector unitario de la fuerza.

1.5. Potencial eléctrico y diferencia de potencial eléctrico

El potencial eléctrico se podría entender como la variación de energía entre dos puntos de una región que puede albergar o no, según el tramo, un campo electrico. Parte de la energía potencial pero omitiendo la carga de prueba, con lo cual se obtiene se forma similar a la energía potencial. En el S.I. se mide en $V = J/C$ ya que $V = \dfrac{U(J)}{q_0(C)}$.

Como ya se ha dicho, se pueden estudiar dos casos generales, la variación entre dos puntos (situación inicial y final) o el que se genera en un punto (situación inicial en el infinito con $V_{ref} = 0$). Además, recordando que $\dfrac{\vec{F}}{q_0}$, podemos obtener la formula del gradiente o diferencia de potencial, dandose estas formulas equivalentes

$$V_p = -\int_{\infty}^{p} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$
$$V_p = -[\int_{\infty}^{p}(E_x\vec{i}\cdot\vec{i})dx + \int_{\infty}^{p}(E_y\vec{j}\cdot\vec{j})dy + \int_{\infty}^{p}(E_z\vec{k}\cdot\vec{k})dz]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

∇ operador nabla, consiste en derivadas parciales por cada componente cartesiano

Llamaremos superficies equipotenciales a los puntos en los cuales el potencial permanece constante ($V = cte$), lo que significa que $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$, es decir, el campo eléctrico es perpendicular al tramo que se recorre en estos puntos ($\vec{E} \perp d\vec{l}$), siendo el trabajo de desplazar a una carga por esta superficie nulo.

1.6. Dipolo eléctrico

Hablaremos de un dipolo eléctrico cuando:

1. Existan en el sistema dos cargas de signos opuestos pero de igual valor (q)
2. Este distanciadas y fijas entre si ($\vec{d} = d\vec{u_d}$ siendo d la distancia entre ambas cargas y u_d un vector unitario que orienta la carga negativa a la positiva)

Definiremos el momento dipolar eléctrico como $\vec{p} = q\vec{d} = qd\vec{u_d}$, indicando la tension existente entre ambas cargas.

Se puede dar casos en los que el dipolo no se encuentra alineado con el campo eléctrico (no se cumple $\vec{p} \parallel \vec{E}$), generando un momento de fuerzas o torque, su funcionamiento se puede observar en el anexo pero, entendiendo que el momento que parece sobre dicho dipolo es $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ y se puede estudiar la energía genera con la formula $U_{dipolo} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$.

NOTA: se debe entender el uso de vectores y como operar con ellos para no tener problemas con estos conceptos.

1.7. Movimiento de cargas en campos electricos

Con formulas que ya sabemos, podemos obtener las ecuaciones de posición, velocidad y aceleraron de una partícula.

Considerando la 2ª ley de Newton y la Ley de Coulumb, podemos despejar la siguiente igualdad:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = q_0\vec{E}$$
$$m\vec{a} = q_0\vec{E}$$
$$\vec{a} = \frac{q_0}{m}\vec{E}$$

donde $a = cte$ si E es uniforme.

Recordando el principio de conservación de energía, visto en el anexo, y dado dos situaciones, una inicial y otra final, podemos despejar ciertos valores considerando también la diferencia de potencial entre ambas situaciones.

1.8. Densidades de carga en un campo eléctrico

Se han visto en el anexo las densidades de carga, estas se utilizan para cuando se dan casos con una distribución continua de cargas, donde veremos que se puede estudiar para una parte del campo eléctrico ($d\vec{E}$ respecto a una parte de la carga dq) o su totalidad (al aplicar el principio se superposición, realizando una integral respecto al tramo que abarca el campo).

$\vec{E} = K \int_T \frac{dq}{r^2}\vec{u_r}$ siendo T la región de estudio, ya sea lineal, superficial o volumetrica, indicando esto también que tipo de densidad de carga escoger.

1.9. Ley de Gauss para el campo eléctrico

La ley de Gauss nos permitira obtener el flujo de campo electrico Φ_E que atraviesa una superficie dada (S sera un area por lo general).

$\Phi_E = |\vec{E}||\vec{S}|(\cos\theta)$ con θ siendo el angulo que forman y $\vec{S}$ el vector superficie que es perpendicular a esta con modulo igual a su tamaño o, hablando vectorialmente, $\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S}$. Si lo entendemos de esta forma, podemos ver cuando hay que estudiar cada punto de la superficie abierta o la totalidad de esta (usando una integral) y para superficies cerradas, veamoslo:

1. Superficie abierta:

$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S}$	$\Rightarrow$	$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$
Para un punto		Para toda la superficie

2. Superficie cerrada:
   $\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$

   Según el que signo tome el flujo, sabremos la proporción de lineas de campo que entran y salen de la superficie, siendo positivo si salen (carga neta encerrada positiva), negativa si entran (carga neta encerrada negativa) o nulo si entran por las que salen (siendo generalmente en casos con carga equitativas y una carga neta nula).

   Recordando las densidades de carga para distintos tipos de superficies y considerando otra superficie cerrada alrededor de esta, podemos obtener el modulo del campo eléctrico, incluso obtener su dirección y sentido si estudiamos bien el caso y aplicamos la geometría adecuada.

1.10. Conductor en equilibrio electrostático

Hablaremos de un conductor electroestatico cuando se cumplan las siguientes condiciones:

1. No hay corrientes
2. Campo electrico nulo en el interior, siendo el potencial electroestatico constante (volumen y superficies equipotenciales).
3. Densidad volumetrica de carga nula, estando toda la carga en la superficie
4. El campo electrico en puntos proximos a la superficie del conductor es perpendicular a esta.

Siendo las siguientes formulas ciertas:

$$\begin{array}{c} \Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES \\ q_{encerrada} = \sigma S \end{array} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_n}$$

Cuando esto sucede, podemos afirmar que los siguientes fenómenos son ciertos:

1. Desplazamiento de la carga por la superficie bajo la infuencia de una carga externa (?)
2. Una carga encerrada en un conductor en equilibrio se desplaza libremente por él sin alterar el flujo ni las lineas de campo del exterior de éste, unicamente las del interior.

1.11. Condensadores

Un condensador es un dispositivo formado por dos conductores proximos con cargas de la misma magnitud pero de signo contrario (se generaria un campo electrico uniforme en la region del espacio que las separa). La funcion de este dispositivo es almacenar carga y energia.

Su capacidad es la carga de cualquiera de los dos conductores y la diferencia de pontencial existente entre ambos, tal que $\mathsf{C} = \frac{Q}{V_{ab}} C/V$ o F (Faradio) en el **S.I.**.

La capacidad del condensador depende por lo general de las propiedades físicas de los conductores que lo formas, su tamaño, forma,... y del medio aislante que los separa, a partir de ahora dejaremos de trabajar en el vacio.

$$\mathsf{C} = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\varepsilon A}{d}$$ considerando que

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{A} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\frac{Q}{A} = \frac{1}{\varepsilon_r}E_0$$

$\sigma = \frac{Q}{A}$ densidad de carga encerrada en la superficie A, el area del conductor

$V_d = |\vec{E}|d$ diferencia de potencial en el tramo d $(b-a)$

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ Permitividad electrica, siendo ε_r la permitividad relativa del medio

IMPORTANTE: podemos aplicar la permitividad a todas las formulas que se puedan ver afectadas por ella (campo eléctrico, diferencia de potencial y la capacidad del condensador principalmente) considerando el medio y la permitividad relativa a este.

Nombraremos algunos coneptos a tener en cuenta:

1. Si se introduce un objeto en el que el campo electrico en el sea nulo en un condensador, el espacio que esta lamina ocupa se omite de la distancia entre los conductores.

2. La asosiacion en serie de condensadores, donde el potencial varia pero la carga no, se calcula con inversos tal que

$$C_i = \frac{Q}{V_m - V_i} \text{ y } C_f = \frac{Q}{V_f - V_m}, \qquad C_{eq} = \frac{Q}{V_f - V_i} = \frac{Q}{V_f - V_m + V_m - V_i}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V_f - V_m}{Q} + \frac{V_m - V_i}{Q} = \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_i}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

3. La asosiacion en paralelo de condensadores, donde varia la carga, se calcula tal que

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V} \text{ y } C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V}, \quad C_{eq} = \frac{Q}{V_f - V_i} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V}$$

$$C_{eq} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} C_i$$

4. Podemos obtener la energia facilmente a partir de la diferencia de potencial que se almacena en el condensador al agregar un dq, quedando $dU = V dq = \frac{q}{C}dq \Leftrightarrow U_Q - U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q}{V}$.

Es mas,teniendo que $\Delta V = |\vec{E}|d$ y $C = \dfrac{\varepsilon A}{d}$, podemos afimrar que

$$U = \frac{1}{2}(Ad)\varepsilon|\vec{E}|^2$$

5. Podemos incluso estudiar la energia por unidad de volumen entre las placas del condensador, delimitado por $\mathcal{U}_E = \dfrac{U}{\mathbf{V}} J/m^3 \Leftrightarrow U = \int_{\mathbf{V}} \mathcal{U}_E d\mathbf{V}$.

1.12. Corriente eléctrica

Este apartado debe de entenderse claramente y tenerse en cuenta para los siguientes temas ya que hara gran uso de estos conceptos.

La corriente eléctrica consiste en un flujo de particulas cargadas o iones.

1.12.1. Intensidad y densidad de corriente

La intensidad de corriente eléctrica (I), medida en Amperios en el **S.I.** (A=C/s), es la carga que pasa por unidad de tiempo a través de una sección (o área) que es perpendicular a la dirección del movimiento de las cargas.

$$I = \frac{dq}{dt} C/s$$

Aunque se hable de sentido de corriente, este corresponde al sentido que toman las cargas positivas en el campo electrico aplicado a la intensidad, que realmente es un escalar. Se le puede asociar un diferencial de trayecto con direccion y sentido del desplazamiento de las cargas tal que $I\vec{dl}$.

La densidad de corriente es la corriente por unidad de area perpendicular al movimiento de las cargas por el conductor, denotado por $\vec{j}$.

Modulo: $|\vec{j}| = \dfrac{dI}{dS} A/m^2$

Dirección= la del movimiento de las cargas

Sentido: el del desplazamiento de las cargas positivas

$$dI = |\vec{j}|dS \Leftrightarrow I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

recordad que, $\vec{S}$ es el vector superficie perpendicular a esta, con lo cual esta operación exige que $\vec{j} \perp \vec{S}$ sea cierto.

1.12.2. Movimiento de una partícula cargada

Dada una intensidad y una sección que atraviesa (o directamente la densidad de corriente) y una cantidad finita (n) de partículas cargadas (q) por unidad de volumen ($V = S|\vec{x}| = S|\vec{v}|\Delta t$) $|\vec{x}|$ siendo el espacio desplazado y $|\vec{v}|$ la velocidad a la que ha sido desplazado (velocidad de arrastre). Tenemos entonces las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{cc} \Delta Q = nqV = nqS|\vec{v}|\Delta t & |\vec{j}| = qn|\vec{v}| \Leftrightarrow I = qn|\vec{v}|S \\ \vec{j} = qn\vec{v} & \text{siendo } \vec{j} \parallel \vec{v} \text{ cierto} \end{array}$$

1.12.3. Ley de Ohm

Al aplicar una diferencia de potencial (o voltaje) entre los extremos de un conductor se observan dos fenómenos. El primero, se genera una corriente eléctrica (I) y, el segundo, esta corriente depende de una propiedad del material llamada resistencia eléctrica (R) que se mide en ohmios ($\Omega = V/A$) en el **S.I.**.

La ley de ohm relaciona los tres valores con la formula $V = IR$ que se puede transponer segun la necesidad, veamos que casos:

1. Resistencias en serie: el voltaje varia.
2. Resistencias en paralelo: la intensidad varia.
3. Cada material se caracteriza por la conductividad electrica, que es la cantidad de cargas por unidad de superficie que parece tolerar, se obtiene a apartir de las siguientes formulas:

   si j uniforme en todo el volumen

   $$I = |\vec{j}|S$$

   $$V = |\vec{E}|d \qquad d \text{ distancia entre los extremos} \qquad |\vec{j}|S = \frac{|\vec{E}|d}{R}$$

   $$|\vec{j}| = \frac{d}{RS}|\vec{E}| \Leftrightarrow \vec{j} = \frac{d}{RS}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

   $$\sigma = \frac{d}{RS} \qquad \text{conductividad electica,} \quad \text{medida en } (\Omega m)^{-1}$$

4. La resistividad electrica de un material es el inverso de la conductividad electrica de dicho material.

1.12.4. Ley de Joule, potencia electrica

La ley de Joule estable que es necesario aportar energia para mantener una correinte circulando, las formas de donde podemos obtener esta potencia (P) que se mide en vatios (W=AV) en el S.I. son las siguientes:

$$dU = dqV \qquad P = \frac{dq}{dt}V$$

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = IV$$

Si aplicamos la ley de ohm, podemos obtener mas igualdades.

2. Campo magnético

El campo magnetico esta muy relacionado con el campo electrico ya que uno puede dar paso a la aparicion del otro. Para ser mas concretos, el elemento que los une es la corriente electrica con lo cual debemos tenerlo muy claro para poder estudiar este concepto.

2.1. ¿Que es el campo magnético y como se obtiene?

Entenderemos que un campo magnético es una región del espacio que genera fuerzas sobre cargas en movimientos o todo lo contrario, que el campo es generado por la carga en movimiento (Experiencia de Oersted). El campo magnético se mide en el **S.I.** con teslas (T=10^4G=1kg m/s=1 kg /As^2), que corresponde a la fuerza magnética de un newton sobre una carga de un culombio que se mueve a m/s perpendicularmente al campo. La regla de la mano derecha (pulgar $\vec{i}$=I o velocidad, indice $\vec{j}=\vec{B}$ y corazón $\vec{k}=\vec{F_M}$ o $-\vec{E}$) es un método extraoficial para entender que sentido tiene cada elemento respecto a los demás, aplicable en muchos casos.

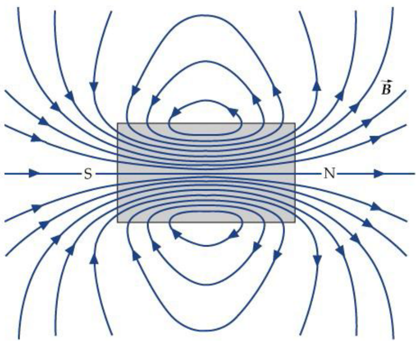
La fuerza magnética se calcula tal que $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$. Es más, si entendemos que sobre esta carga (o distribución de cargas) se aplican mas fuerzas, podemos desarrollar la fuerza de Lorentz, que considera no solo la fuerza magnética, también la electrostática, siendo el total de fuerzas aplicado sobre dicha carga. Tenemos entonces

$$\vec{F_T} = \vec{F_M} + \vec{F_E} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E} = q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$$

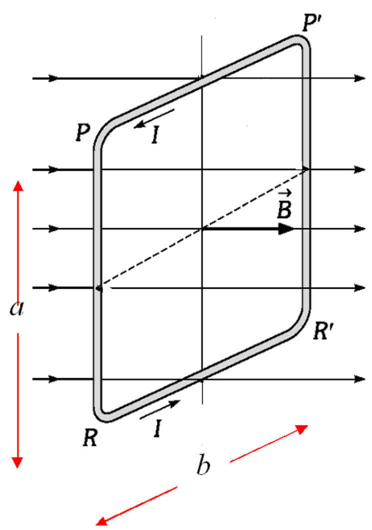
Para obtener el valor del campo magnético tenemos dos opciones, la Ley de Biot-Savart (de aplicación general) y la Ley de Ampére (formada a partir de la Ley de Gauss, facilita el calculo en el caso de corrientes con elevada simetría). Pero antes de poder explicar estos métodos, es necesario entender como interactua con el medio estudiando por encima sus lineas de campo (ya que además, estas se podrán dibujar al definir las formulas del campo magnético).

Las lineas del campo magnético son:

1. Cerradas sobre si mismas.
2. Tangentes en cada punto a $\vec{B}$ y no se cruzan entre ellas.
3. Dentro del imán, se desplazan de Sur a Norte pero fuera de él, van de Norte a Sur.
4. No existen monopolos magnéticos, siempre trataremos con dipolos.



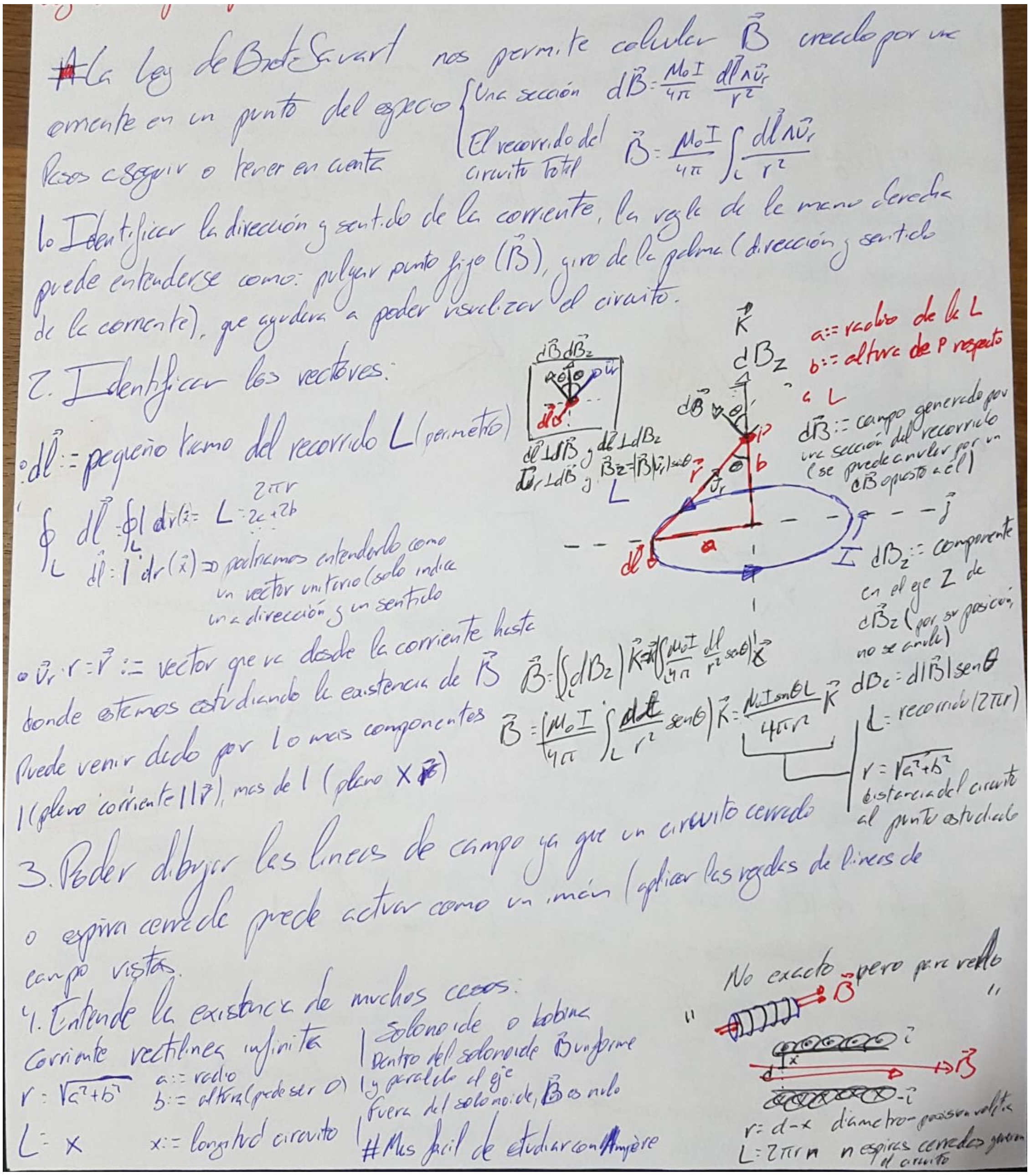
Como se ha comentado, el campo magnetico siempre dispondra de un dipolo magnetico, con lo cual tambien aprovecharemos que, sabiendo la formula de la fuerza magnética para cargas o, en este caso en particular, de distribuciones continuas de carga (dq). Para ello veamos esta imagen:



1º Hallar la fuerza sobre cada lado de la espira cerrada (circuito)
2º Encontrar sobre que puntos se generara un momento
3º Despejamos el momento de fuerzas tal que $\vec{\tau_t} = I\vec{S} \wedge \vec{B}$
4º Definimos el momento dipolar magnetico como $\vec{m} = I\vec{S}$
5º Al igual que con el momento dipolar electrico, ($\vec{p}$) podemos hallar $U_{dipolo} = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

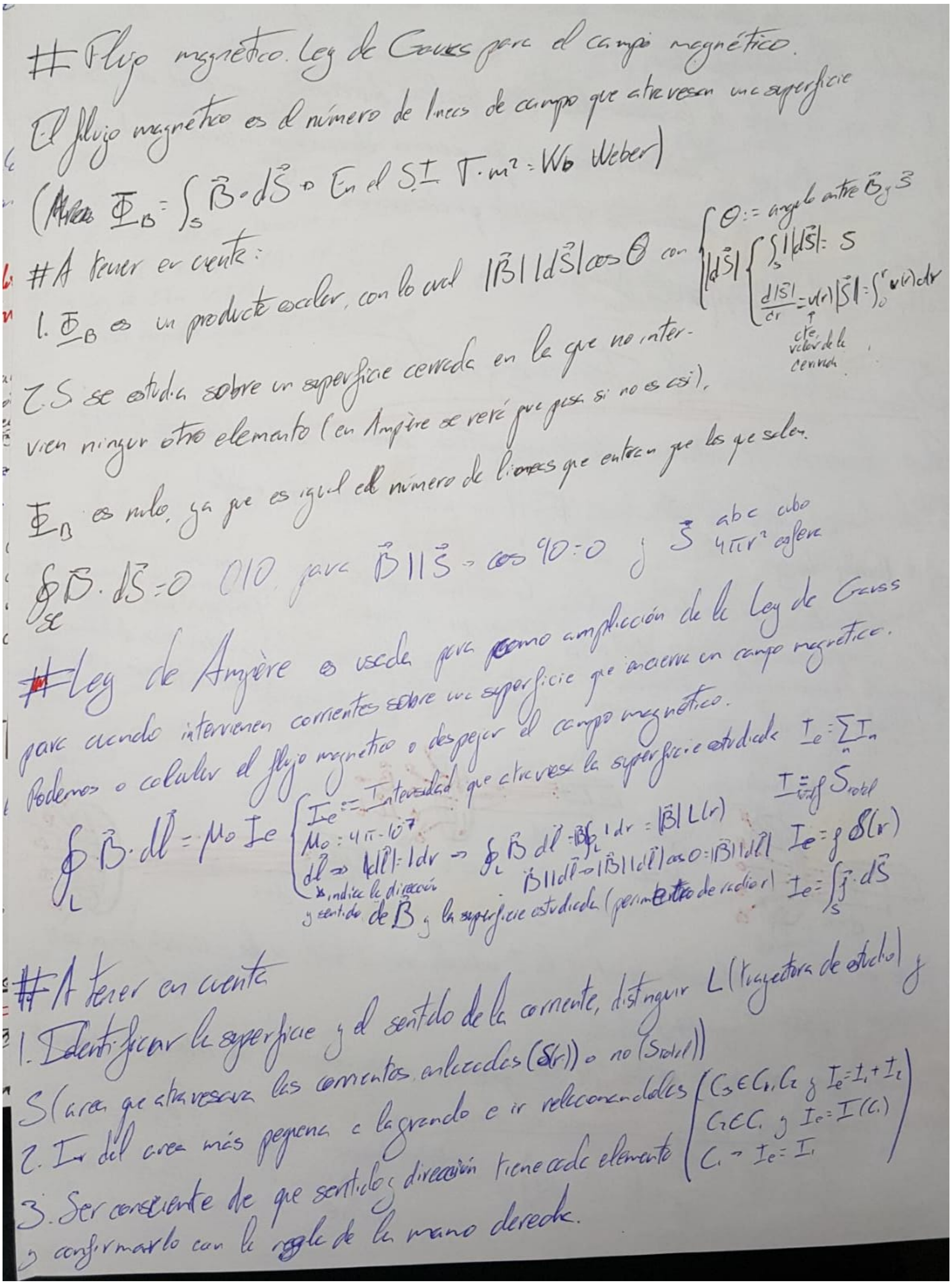
Las explicaciones de como obtener el campo magnético están en sucio, se espera pasarlo a limpio al menos las explicaciones por escrito.

1. Ley de Biot-Savart (pasar a limpio)



Obtención por pasos del campo magnético por la ley de Biot-Savart

2. Ley de Ampére(pasar a limpio)



Flujo magnético. Ley de Gauss para el campo magnético.

El flujo magnético es el número de líneas de campo que atraviesan una superficie

($\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ → En el S.I. $T \cdot m^2 = Wb$ Weber)

A tener en cuenta:

1. Φ_B es un producto escalar, con lo cual $|\vec{B}|\,|d\vec{S}|\cos\theta$ con $\begin{cases} \theta := \text{ángulo entre } \vec{B} \text{ y } \vec{S} \\ |d\vec{S}| \begin{cases} \int_S |d\vec{S}| = S \\ \frac{d|\vec{S}|}{dr} = v(r)\,|\vec{S}| = \int_0^r v(r)\,dr \end{cases} \end{cases}$ cte, valor de la corriente.

2. S se estudia sobre una superficie cerrada en la que no interviene ningún otro elemento (en Ampère se verá qué pasa si no es así).

Φ_B es nulo, ya que es igual el número de líneas que entran que las que salen.

$\oint_{SC} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ OJO, para $\vec{B} \parallel \vec{S}$ → $\cos 90 = 0$ y $\vec{S}$ abc cubo, $4\pi r^2$ esfera

Ley de Ampère es usada para como ampliación de la Ley de Gauss para cuando intervienen corrientes sobre una superficie que encierra un campo magnético.

Podemos o calcular el flujo magnético o despejar el campo magnético.

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$ $\begin{cases} I_e := \text{Intensidad que atraviesa la superficie estudiada} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \\ d\vec{l} \Rightarrow |d\vec{l}| = 1\,dr \text{ ; indica la dirección y sentido de } \vec{B} \text{ y la superficie estudiada} \end{cases}$ → $\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = |\vec{B}| \oint_L 1\,dr = |\vec{B}|\, L(r)$

$\vec{B} \parallel d\vec{l} \to |\vec{B}|\,|d\vec{l}|\cos 0 = |\vec{B}|\,|d\vec{l}|$ (perímetro de radio r)

$I_e = \sum_n I_n$

$I \stackrel{?}{=} g\, S_{total}$

$I_e = g\, S(r)$

$I_e = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

A tener en cuenta

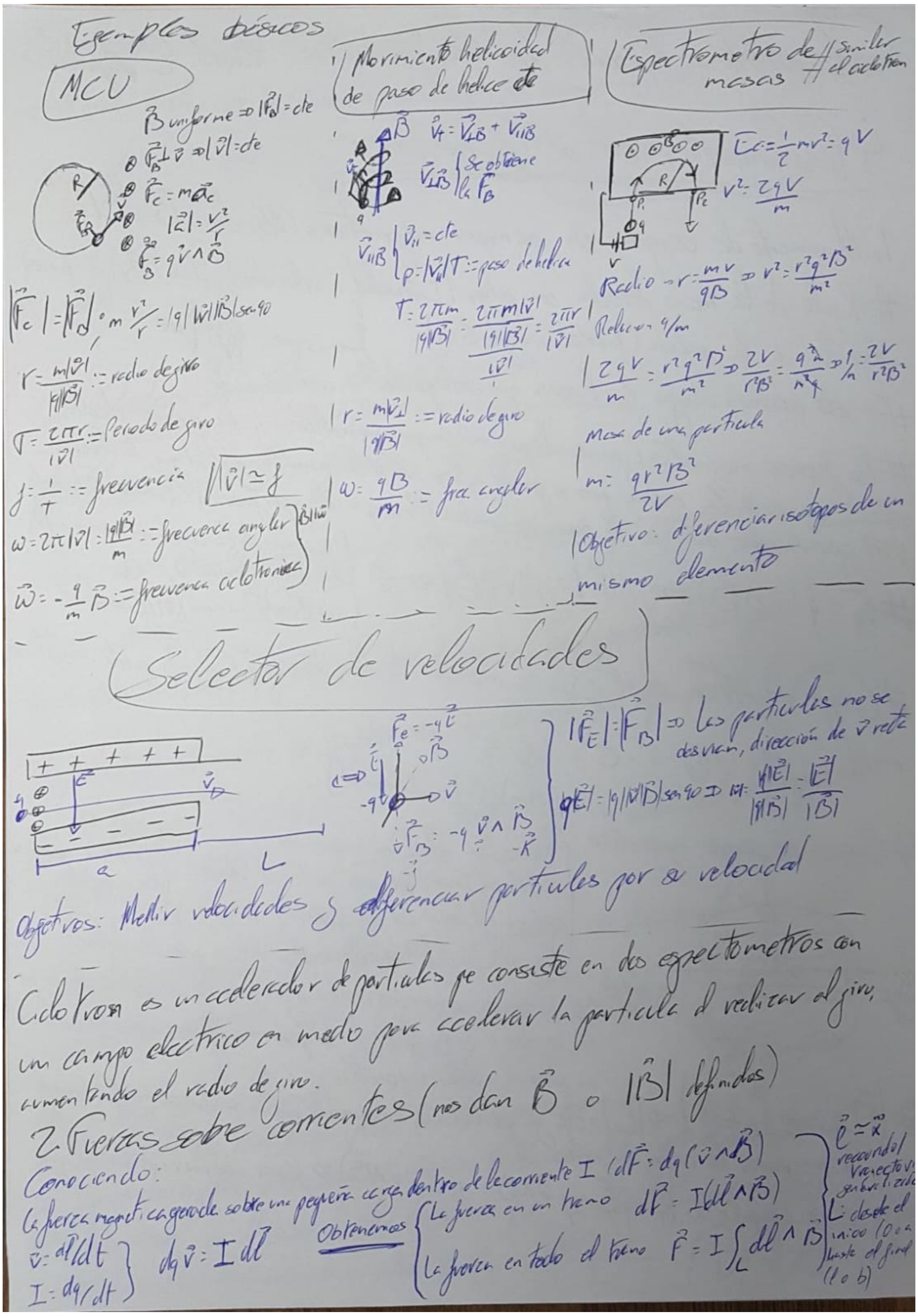
1. Identificar la superficie y el sentido de la corriente, distinguir L (trayectoria de estudio) y S (área que atraviesan las corrientes enlazadas ($S(r)$) o no (S_{total}))

2. Ir del área más pequeña a la grande e ir relacionándolas $\begin{pmatrix} C_3 \in C_1, C_2 \text{ y } I_e = I_1 + I_2 \\ C_2 \in C_1 \text{ y } I_e = I(C_1) \\ C_1 \to I_e = I_1 \end{pmatrix}$

3. Ser consciente de que sentido y dirección tiene cada elemento y confirmarlo con la regla de la mano derecha.

Obtención por pasos del campo magnético por la ley de Ampere a partir de la ley de Gauss aplicada al campo magnético.

2.2. Ejemplos de movimientos de cargas



Ejemplos básicos

MCU

$\vec{B}$ uniforme $\Rightarrow |\vec{F}_B| = cte$

$\vec{F}_B \perp \vec{v} \Rightarrow |\vec{v}| = cte$

$\vec{F}_c = m\vec{a}_c$

$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{r}$

$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$|\vec{F}_c| = |\vec{F}_B| \cdot m\frac{v^2}{r} = |q||\vec{v}||\vec{B}| \operatorname{sen} 90$

$r = \frac{m|\vec{v}|}{|q||\vec{B}|}$:= radio de giro

$T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|}$:= Periodo de giro

$f = \frac{1}{T}$:= frecuencia $|\vec{v}| \simeq f$

$\omega = 2\pi|\vec{v}| = \frac{|q||\vec{B}|}{m}$:= frecuencia angular $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$:= frecuencia ciclotrónica

Movimiento helicoidal de paso de hélice cte

$\vec{v}_t = \vec{v}_{\perp B} + \vec{v}_{\parallel B}$

$\vec{v}_{\perp B}$ { Se obtiene la F_B

$\vec{v}_{\parallel B}$ { $\vec{v}_{\parallel} = cte$; $p = |\vec{v}_{\parallel}|T$:= paso de hélice

$T = \frac{2\pi m}{|q||\vec{B}|} = \frac{2\pi m|\vec{v}|}{\frac{|q||\vec{B}|}{|\vec{v}|}} = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|}$

$r = \frac{m|\vec{v}_{\perp}|}{|q||\vec{B}|}$:= radio de giro

$\omega = \frac{qB}{m}$:= frec. angular

Espectrometro de masas // Similar al ciclotrón

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = qV$

$v^2 = \frac{2qV}{m}$

Radio $\rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v^2 = \frac{r^2q^2B^2}{m^2}$

Relación q/m

$\frac{2qV}{m} = \frac{r^2q^2B^2}{m^2} \Rightarrow \frac{2V}{r^2B^2} = \frac{q}{m} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2V}{r^2B^2}$

Masa de una partícula

$m = \frac{qr^2B^2}{2V}$

Objetivo: diferenciar isótopos de un mismo elemento

Selector de velocidades

$\vec{F}_e = -q\vec{E}$

$\vec{F}_B = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$|\vec{F}_E| = |\vec{F}_B| \Rightarrow$ Las partículas no se desvían, dirección de $\vec{v}$ recta

$q|\vec{E}| = |q||\vec{v}||\vec{B}| \operatorname{sen} 90 \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|q||\vec{E}|}{|q||\vec{B}|} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$

Objetivos: Medir velocidades y diferenciar partículas por su velocidad

Ciclotrón es un acelerador de partículas que consiste en dos espectómetros con un campo eléctrico en medio para acelerar la partícula al realizar el giro, aumentando el radio de giro.

2. Fuerzas sobre corrientes (nos dan $\vec{B}$ o $|\vec{B}|$ definidos)

Conociendo:

La fuerza magnética generada sobre una pequeña carga dentro de la corriente I $d\vec{F} = dq(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$\vec{v} = d\vec{l}/dt$, $I = dq/dt$ } $dq\vec{v} = I d\vec{l}$

Obtenemos { La fuerza en un tramo $d\vec{F} = I(d\vec{l} \wedge \vec{B})$; La fuerza en todo el tramo $\vec{F} = I\int_L d\vec{l} \wedge \vec{B}$

$\vec{l} \simeq \vec{x}$ recorrido / trayectoria generalizada

L: desde el inicio (0 o a) hasta el final (l o b)

2.3. Inducción electromagnética

Hablaremos de induccion electromagnetica cuando se genera o modifica una corriente por una f.e.m. inducida por un campo magnetico. Para explicarlo usaremos la ley de Faraday-Henry y la de Lenz.

Ley de Faraday-Henry

La f.e.m. inducida en un circuito cerrado es igual a la rapidez con la que varía el flujo magnetico a traves del area cerrada del conductor, tal que $\varepsilon_{ind} = |\frac{d\Phi_M}{dt}| = |\frac{d\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}|$ y, ademas, esta f.e.m. inducida genera un campo eléctrico no conservativo $\varepsilon_{ind} = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$.

Ley de Lenz

La ley de Lenz establece la corriente inducida es de sentido opuesto a la causa que la genera, $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}$. Es mas, la variación de flujo que se produce puede darse por una variación del campo magnético con respecto al tiempo (ya que se induce un campo magnético que modifica al ya establecido), el tamaño de la superficie (si la posición relativa entre el circuito con la corriente y el generador del campo magnético varía) o la posición relativa entre las lineas del campo magnético y las superficie cerrada varían con el tiempo.

Induccion por movimiento

Se ha comentado que el flujo puede variar por diversos motivos, pero cuando la causa es variacion de la superficie, se produce una transformación de energía mecánica a eléctrica considerando la igualdad $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}$ y sabiendo que en el desplazamiento se ejerce una fuerza para mover el conductor o que este se mueve.

Un ejemplo son los generadores de corriente alterna, que veremos mas adelante. Pero estaría bien repasarse las funciones de onda.

Autoinducción

El autoflujo es el flujo magnético que se genera debido a la corriente del propio circuito, es decir, un circuito puede ver afectado por dos campos magnéticos distintos, el que su propia corriente genera, siendo este donde se vería el autoflujo, y el que circuito externos generan.

El coeficiente de autoinduccion pretende asignar la cantidad de flujo magnético que es generado por la corriente en la superficie de estudio, es decir, si $\Phi_M(I_n)$ con I_n siendo el total de intensidad de las cuales depende, si queremos saber cuanto de ello es causado por un circuito con I_i, operaríamos tal que $L = \frac{\Phi_M(I_n)}{I_i}$ y se mide en el **S.I.** con Henrio (H).

En un circuito eléctrico, su asociación es igual que la de las resistencia y actuara como receptor o generador de corriente según la corriente que reciba, dándose que $\varepsilon = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Energía del campo magnético

Paso de seguir esto, esta en el formulario claro si entiende la d.d.p. como la fem total la resta de la fem generadora y la inducida e ir intercambiando formulas para hacer lo mismo que la energía de un campo eléctrico.

3. Ondas electromagnéticas

Recordad funciones de onda

Aplicar la regla de la mano derecha con pulgar siendo la velocidad o vector de poyting, indice campo magnético (campo eléctrico si se prefiere) y corazón campo negativo en negativo (cuando están estables y el movimiento es rectilíneo, la fuerza sobre la carga es 0 y por la fuerza de lorentz tenemos $F_E = qE = -Fm$, pero si no se acuerda de esto considerar este el campo magnético).

Antenas emiten onda eléctrica o en un eje polarizado (el campo eléctrico vibra en ese eje), antenas receptoras de campo eléctrico orientadas de forma paralela y las de campo magnético perpendicularmente.

Las funciones en el formulario son autoexplicatorias.

4. Circuito corriente continua

Hablaremos de corriente continua (CC o DC) cuando se produce un flujo continuo de carga eléctrica a través de un conductor entre dos puntos de distinto potencial y carga eléctrica el cual no variara de sentido con el tiempo.

4.1. Generadores y receptores

Los circuitos suelen necesitar incorporar un dispositivo que pero esta puede actuar como un transformador de energia, se los reconoce como pilas, veamos sus dos posibles aplicaciones:

4.1.1. Fuerza electromotriz f.e.m.

El generador, caracterizado por una f.e.m. (ε) transforma energía en energía eléctrica (el flujo eléctrico atraviesa la pila desde el borne negativo o cátodo al borne positivo o ánodo). Prácticamente, es un dispositivo que genera un campo eléctrico en una determinada región para aportar energía cinética a la carga que entra para que esta suministre corriente eléctrica al resto del circuito, con lo cual podemos entender que se genera una diferencia de potencial entre los bornes del dispositivo y, por lo tanto, afirmar que

$$\varepsilon = \frac{dU}{dq}$$

y es más, los generadores reales incorporan una resistencia interna por lo tanto la diferencia de potencial total que se genera entre los bornes consiste en restar $\varepsilon - Ir_{int} = V_{ab}$. Si no existe resistencia interna ($r_{int} = 0$) hablaremos de un generador ideal.

Si recordamos el efecto Joule, que es la potencia o energía necesaria para mantener el flujo de un circuito (P=VI), podemos obtener la potencia que el generador debe de suministrar sabiendo lo que V_{ab} e I valen.

4.1.2. Fuerza contraelectromotriz f.c.e.m.

Un receptor, caracterizado por una f.c.e.m. (ε'), transforma la energía eléctrica en energía (opuesto al generador). Actúa de igual manera que un generador, pudiendo también existir el receptor ideal y el real pero en este caso, al haber resistencia interna (r'_{int}), la d.d.p. se obtiene tal que $V_{ab} = \varepsilon' + Ir'_{int}$. La potencia consumida de un receptor se calcula de igual forma que la potencia suministrada, por Joule.

En los circuitos se verán a las f.e.m. actuando como receptores al estar dispuesta contra el flujo eléctrico.

4.2. Leyes de Kirchoff

Para tratar las leyes de Kirchoff, tenemos que distinguir las partes estructurales de un circuito, siendo estas:

1. Nudo: Punto del circuito donde concurren más de dos conductores, suele darse cuando se conectan dispositivos en serie.
2. Rama: Porción del circuito comprendida entre dos nudos consecutivos y recorrido por la misma corriente.
3. Malla: Recorrido con inicio y final en el mismo nodo y que no pasa por la misma rama dos veces. Consiste en un camino cerrado.

Durante las explicaciones hemos visto condensadores (que pueden producir cortocircuito si están descargados ya que la d.d.p. entre sus bornes es nula) y resistencias y como actúan estos en serie (seguidos en la misma rama) o en paralelo (en ramas distintas con el mismo sentido de flujo unidas a los mismos nudos) y se ha comentado por encima las leyes de nudos y de mallas, veamos que son cada una de ellas:

Ley de nodos

Cuando se produce un nudo, el flujo de corriente se reparte en función de los dispositivos de cada rama, es decir, la suma de intensidades que entran a un nudo debe de ser igual a la suma de las intensidades que salen de éste. También se puede decir que la suma total de intensidad que interactuan con un nodo debe de dar 0, es decir, $\sum_i I_i = 0$.

Ley de mallas

En una malla, la suma de las d.d.p. deben de dar 0, y esto se obtiene al aplicar las leyes de conservación de la energía y la ley de Ohm tal que

$$\sum_i V_i = 0 \longleftrightarrow \sum_i I_i R_i - \sum_j \varepsilon_j = 0$$

4.3. Resolución de circuitos de corriente continua

Se nos pedirán en circuitos CC estudiar o caminos cerrados (aplicamos ley de mallas) o entre dos puntos cuyo d.d.p. seria $V_i - V_f = \sum_g I_g R_g - \sum_j \varepsilon_j$, con lo cual debemos tener en claro los siguientes criterios antes de ver los métodos de resolución:

1. Definir un camino que una los puntos (recordad que si se da un rama el camino sera sencillo de identificar, ya que esta se define mediante la dirección y sentido de la corriente).
2. Asignar $I - I$ para cada rama(i) que compone el camino, si $I_i > 0$ el sentido de la corriente es el mismo que el escogido para el tramo, si fuese negativo la corriente va en el sentido opuesto.
3. Asignamos $\varepsilon_j > 0$ a cada f.e.m. que, en el camino anteriormente definido, la atraviese pasando por el borne negativo primero. Si el valor fuese negativo, la f.e.m. actuaria como un receptor y el flujo debería teóricamente entrar por el borne positivo.

4.3.1. Por corrientes cíclicas, método de Maxwell

El método de Maxwell consiste en asignar un flujo ficticio con el mismo sentido y dirección a todas las mallas independientes del circuito y aplicar la ley de mallas, planteando tantas ecuaciones como mallas independientes haya en el circuito. La intención al realizar este proceso es, considerando los criterios anteriores, conocer el flujo de la corriente en cada malla a partir del signo que se obtiene al despejar cada una de las ecuaciones.

Se puede realizar mediante una operacion matricial tomando la matriz de coeficientes los valores de las resistencias totales y asociadas a otras ramas, la matriz de incognitas a los valores de las intensidades de cada malla y la matriz de terminos independientes a los valores de la suma de todas las f.e.m. presentes en cada malla.

$$\begin{pmatrix} +R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1n} \\ -R_{21} & +R_{22} & \dots & -R_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -R_{n1} & -R_{n2} & \dots & +R_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \text{ con: } \begin{cases} R_{ii} \text{ resistencia total de la malla i} \\ R_{ij} \text{ valor de la resistencia en la rama ij} \\ \varepsilon_i \text{ suma de las f.e.m. presentes en la malla} \\ I_i \text{ Intensidad de la malla i} \end{cases}$$

Ahora que sabemos los valores de las corrientes, podemos saber la direccion de la corriente en las ramas compartidas por dos mallas a partir de $i_{ij} = I_i - I_j$, siendo el valor de i_{ij} quien decida segun su valor que sentido tiene.

4.3.2. Por teorema de Thévenin

El teorema de Thévenin consiste en la capacidad de intercambiar una porcion de circuito comprendida entre dos puntos por una fuente de tension en serie con una resistencia. Esto permite simplificar los circuitos, veamos como se debe de hacer:

1. Dado un tramo de A a B (la direccion es importante), tendremos que identificar de diferencia de potencial entre estos puntos, para ello tendremos que saber la intensidad que actua sobre esta a partir de la ley de Ohm (d.d.p. de una f.e.m. y resistencias asociadas a esta, incluida resistencia interna o nos dan los valores), sabiendo el valor de los que llamaremos V_{Th}, que sera la fuente de tension. Recordad los criterios de signo para luego ponerla.
2. Comprobamos la resistencia equivalente que actua por ese tramo, y la llamaremos R_{Th}, que ira en serie al borne positivo de la fuente de tension.

Mención especial a los condensadores

Si un condensador se encuentra cargado o descargado completamente, la rama en la que se encuentra actúa como un circuito abierto y no pasara corriente por ninguno de sus componentes (con lo cual, no los consideramos a la hora de querer obtener el d.d.p. entre sus bornes si tenemos intención de calcular su capacidad). Es un lío a mi parecer, solo tener en cuenta su estado a la hora de estudiar los circuitos.

5. Circuito corriente alterna

Utilizando un campo magnético y, a partir de las funciones de onda ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \theta) = N\omega|\vec{B}|S \sin(\omega t)$, repasar con o.e.m. o anexo) podemos definir los generadores de corriente alterna. Ademas, para poder ver este tema sera necesario repasar autoinduccion y los números complejos ya que sera el método que usaremos para trabajar con las distintas fases.

5.1. F.e.m. alterna

En los circuitos de CA observaremos una diferencia de fases entre tension en intensidad, siendo las expresiones de estas

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 sen(\omega t + \theta) \text{ y } I(t) = I_0 sen(\omega t + \alpha)$$

siendo estas las expresionres para valores instantaneos.

En este tema estudiaremos el comportamiento de los dispositivos vistos ante este fenomeno.

5.2. Valores medios y eficaces

El valor medio de la f.e.m. y de la intensidad deben de medirse a medio periodo (ya que por definicion, una funcion senusoidal daria 0 a periodo completo ya que este es el tiempo que tarda en dar un ciclo). Se obtienen tal que

$$\langle I/\varepsilon \rangle = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} (I_0/\varepsilon_0) sen\omega t dt$$

El valor eficaz de la f.e.m. o intensidad de la corriente alterna es la raiz al cuadrado del valor medio de su cuadrado, tal que

$$I_e/\varepsilon_e = \sqrt{\langle (I/\varepsilon)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} (I_0/\varepsilon_0)^2 sen^2 \omega t dt}$$

Habiendo repasado la representación compleja y dado $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 sen(\omega t{+}\theta)$ y $I(t) = I_0 sen(\omega t{+}\alpha)$, si entendemos los valores eficaces como modulos y la fase inicial como argumento, podemos representarlo por numeros complejos, teniendo que:

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon_e|\underline{\theta} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}|\underline{\theta} \text{ y } \overline{I} = I_e|\underline{\alpha} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}|\underline{\alpha}$$

5.3. Circuitos resistivo, inductivo y capacitivo puros

Veamos la relación existente entre tension e intensidad cuando conectamos algunos dispositivos estudiados al circuito en cuestión.

Circuito con resistencia

La f.e.m. y la intensidad siempre estarán en fase, siendo $\theta = \alpha$, con lo cual al aplicar la ley de Ohm con números complejos tendremos

$$\overline{R} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e|\underline{\theta}}{I_e|\underline{\alpha}} = R|\underline{\theta - \alpha}$$

con lo cual, $\overline{R}$ esta sobre el eje real.

Circuito con autoinduccion

La intensidad se encuentra retrasada $\pi/2$ con respecto a la tension, por lo tanto $\theta - \dfrac{\pi}{2} = \alpha$. Operaremos con una reactancia inductiva compleja, denotada por $X_L = L\omega$ y que la podemos tratar como una 'resistencia' y por lo tanto, aplicar la ley de ohm de tal forma que

$$\overline{X_L} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e|\underline{\theta}}{I_e|\underline{\alpha}} = \frac{V_e|\underline{\theta}}{I_e|\underline{\theta - \frac{\pi}{2}}} = R|\underline{\theta - (\theta - \frac{\pi}{2})} = R|\underline{\frac{\pi}{2}}$$

con lo cual, $\overline{X_L}$ esta sobre el eje positivo imaginario y se mide en ohmios.

Circuito con condensador

La intensidad se encuentra adelantada $\pi/2$ con respecto a la tension, por lo tanto $\theta + \frac{\pi}{2} = \alpha$. Operaremos con una reactancia conductiva compleja, denotada por $X_C = \frac{1}{C\omega}$ y que la podemos tratar como una 'resistencia' y por lo tanto, aplicar la ley de ohm de tal forma que

$$\overline{X_C} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_e\underline{|\theta}}{I_e\underline{|\alpha}} = \frac{V_e\underline{|\theta}}{I_e\underline{|\theta + \frac{\pi}{2}}} = R\underline{|\theta - (\theta + \frac{\pi}{2})} = R\underline{|-\frac{\pi}{2}}$$

con lo cual, $\overline{X_C}$ esta sobre el eje negativo imaginario y se mide en ohmios.

5.4. Impedancia

Por lo que hemos visto anteriormente, si pusiéramos los tres circuitos en serie, estos actuarían como resistencias en serie y, por lo tanto, podríamos intercambiarlas por una equitativa. La resistencia equitativa la definimos como impedancia, denotada por $\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \overline{R} + \overline{X_L} + \overline{X_C}$

Como ya deberíamos saber, podemos entender los números complejos como vectores y la impedancia dispone de valores en el eje real (R) y valores en eje imaginario ($X_L > 0$ y $X_C < 0$, $X = X_L - X_C$), por lo tanto podemos despejar tanto el modulo como el argumento de la impedancia sabiendo estos. No hace falta repetir que, al actuar como una resistencia, se aplican todas las reglas y leyes estudiadas con ésta (ley de ohm, asociación en serie y paralelo,..)

5.5. Potencias en circuitos de CA

La energía consumida por el efecto joule depende únicamente de las resistencias, ningún otro componente de la impedancia se ve afectado por este, por lo tanto la potencia en los circuitos de CA solo se deberán de modificar con respecto a la intensidad, teniendo entonces que calcular la potencia instantánea disipada por una resistencia

$$P = [I_0 sen(\omega t + \alpha)]^2 R$$

La potencia media:

$$\langle P \rangle = \langle [I_0 sen(\omega t + \alpha)]^2 R \rangle \Leftrightarrow \langle P \rangle = I_0^2 R \langle [sen(\omega t + \alpha)]^2 \rangle = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 R = I_e^2 R$$

Si seguimos despejando aplicando la ley de joule y la ley de ohm, obtendríamos

$$\langle P \rangle = I_e V_e \frac{R}{Z} = I_e V_e cos\phi$$

con $cos\phi$ siendo el factor de la potencia, podemos definir una potencia compleja y sus componentes, siendo $V_e I_e = S$ el modulo o potencia aparente (se mide en V-A, Voltio-Amperio), y el argumento de este ϕ, con el cual podremos obtener la potencia activa (o potencia media consumida) en la parte real (es la potencia media en si$\langle P \rangle$ o P directamente) y la potencia reactiva $Q = I_e V_e sen\phi$, medido en VAR (Voltio-Amperio reactivo).

6. Anexos

6.1. Conocimientos necesarios

Apartado dedicado a los conceptos que pertenecen a la teoría en si pero se deben de conocer mejor por separado para no asociarlo a ningún tema en particular.

6.1.1. Carga eléctrica

'Toda porción de materia esta caracterizada por dos propiedades fundamentales: masa y carga.'

La carga, en particular, puede ser positiva o negativa y si dos cargas se encuentran en el espacio dos interacciones son posibles, o la atracción (cargas con signos opuestos) o la repulsión (cargas del mismo signo).

Además, podemos cuantizar una carga, es decir, considerar una carga cualquiera como un múltiplo de una carga fundamental, la carga del electrón que es $e = 1{,}602177 \cdot 10^{-19}C$, siendo C el Culombio, la unidad de la carga eléctrica el **S.I.**

6.1.2. Principio de superposición

La fuerza resultante sobre una entidad central (caracterizada o por una carga o una masa, la llamaremos e_0) es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada entidad (e_i) respecto a la entidad central.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

siendo $\vec{F_i}$ la fuerza que ejerce e_i respecto a e_0 con $i = 1, \ldots, n$ siendo n el total de entidades.

6.1.3. Principio de conservación de la carga eléctrica

Este principio afirma que la carga neta o total en un sistema aislado permanece constante. Con esto sabremos que todo lo que se produce dentro de un sistema en el que no sale ni entra energía, se mantendrá con la que se encuentra encerrada en él.

De igual forma, encontramos el principio de conservación de la energía, donde la energía mecánica (E_m) será constante e igual a la suma de la energía cinética (E_c) y la energía potencial (E_p), todas ellas medidas en Julios (J) en el **S.I.** y obtenidas, comúnmente, con las siguientes formulas:

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \Uparrow E_c + \Downarrow E_p \qquad E_m = \Downarrow E_c + \Uparrow E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_p = qV = -W$$

Cabe destacar que las formulas pueden variar o depender de otros valores pero si de conoce que la Energía cinética es la energía correspondiente al movimiento y la Energía potencial a la energía relacionada con el trabajo o fuerza que realiza, se pueden intuir las fórmulas.

6.1.4. Momento de fuerzas

$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ es la formula general de un momento de fuerzas, consiste en un producto vectorial y, por lo tanto, sera perpendicular a sus componentes. El sentido físico del momento de fuerzas es la fuerza de giro que se ejerce en un punto.

Es posible que un momento este compuesto de varios si sobre dicho punto se ejercen distintas fuerzas. Es un concepto que requiere de ver claramente en el espacio cada elemento.

6.1.5. Ley de Gauss

Ley que establece que el flujo de ciertos campos (lo veremos para el eléctrico y el magnético) a través de una superficie cerrada es proporcional a la magnitud de las fuentes que generan dichos campos que hay dentro de la misma superficie. En nuestro caso, dicha magnitud es la carga eléctrica y con esta ley podemos observar dos cosas:

1. El numero de lineas de campo que atraviesan la superficie. No nos dará un valor exacto pero si sabremos si hay igual numero de lineas que entran por las que salen (caso general en el campo magnético que si hay ninguna corriente cerca), si salen mas que entran o viceversa dependiendo del valor que el flujo del campo nos de.
2. Densidades de carga por unidad de medida. Veamos esto mas desarrollado.

6.1.6. Densidades de carga: lineal, superficial y volumétrica

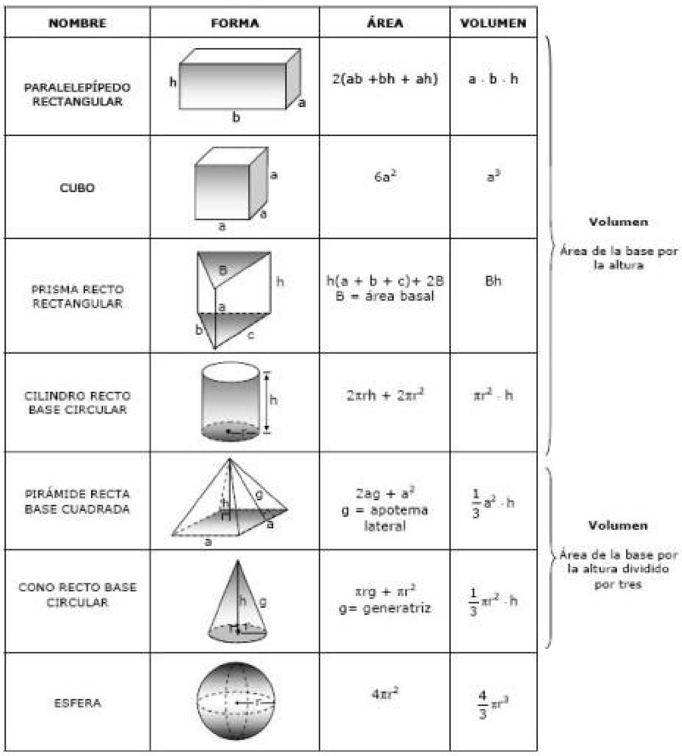
Al aplicar la ley de Gauss, tendremos que saber las densidades de carga encerradas en la superficie sobre la que trabajemos, veamos los tres posibles casos:

1. Densidad lineal (C/m): Carga encerrada en una superficie lineal, $\lambda = \dfrac{dq}{dL}$ donde λ es la densidad lineal, dq el diferencial de carga y dL el diferencial de longitud.
2. Densidad superficial (del área) (C/m^2): Carga encerrada en un área, ya sea abierta o cerrada, $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$ donde σ es la densidad superficial de carga, dq el diferencial de carga y dS el diferencial de área.
3. Densidad volumétrica (C/m^3): Carga encerrada en un volumen, ya sea abierta o cerrada, $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ donde ρ es la densidad volumétrica de carga, dq el diferencial de carga y dV el diferencial de volumen.

Para poder desarrollar estos conceptos es necesarios comprender el uso de las integrales.

6.2. Conceptos básicos de geometría y trigonométrica

Repaso figuras geometricas

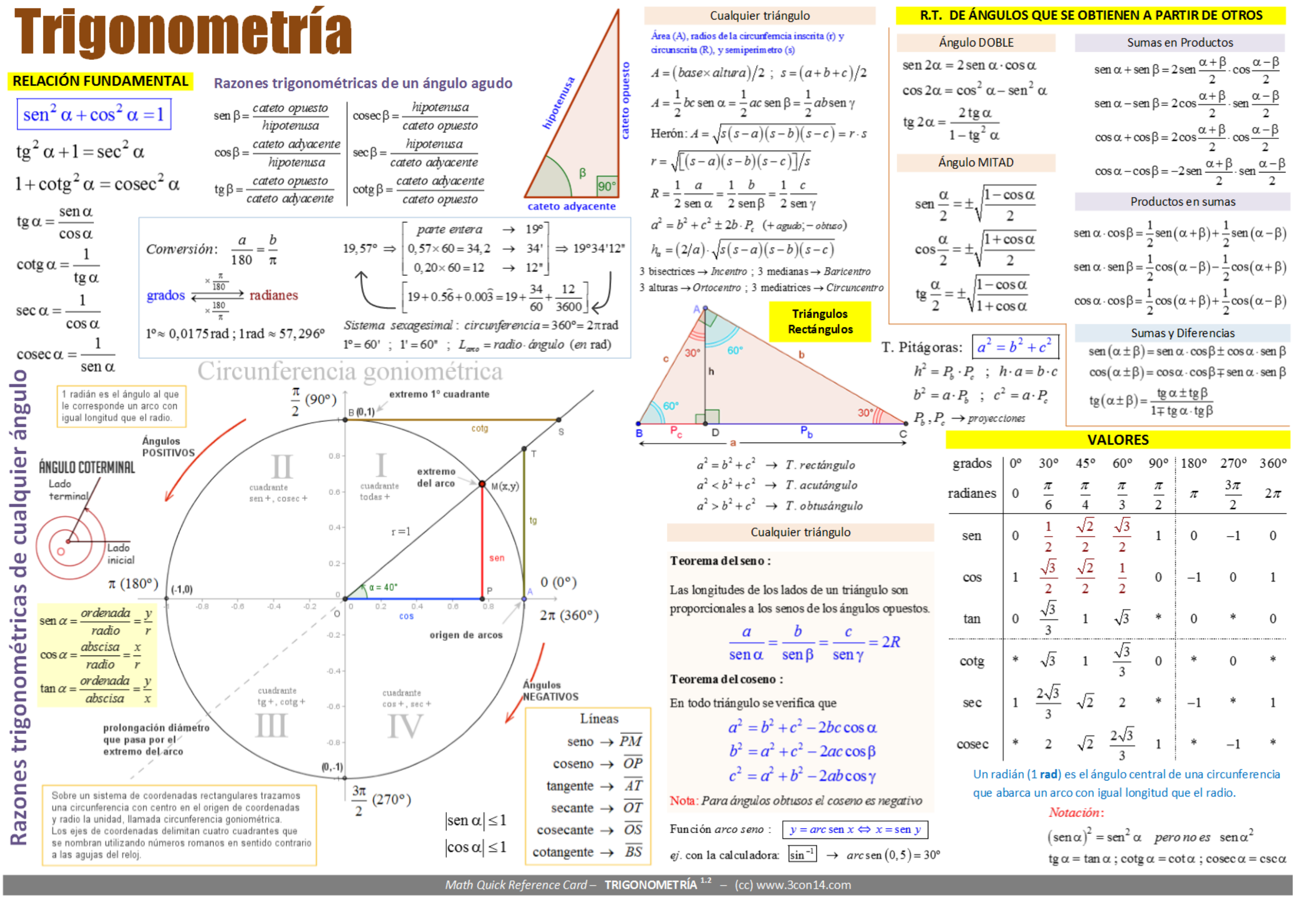


NOMBRE	FORMA	ÁREA	VOLUMEN
PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR		2(ab +bh + ah)	a · b · h
CUBO		6a^2	a^3
PRISMA RECTO RECTANGULAR		h(a + b + c)+ 2B B = área basal	Bh
CILINDRO RECTO BASE CIRCULAR		2πrh + 2πr^2	πr^2 · h
PIRÁMIDE RECTA BASE CUADRADA		2ag + a^2 g = apotema lateral	$\frac{1}{3}$a^2 · h
CONO RECTO BASE CIRCULAR		πrg + πr^2 g= generatriz	$\frac{1}{3}$πr^2 · h
ESFERA		4πr^2	$\frac{4}{3}$πr^3

Volumen
Área de la base por la altura

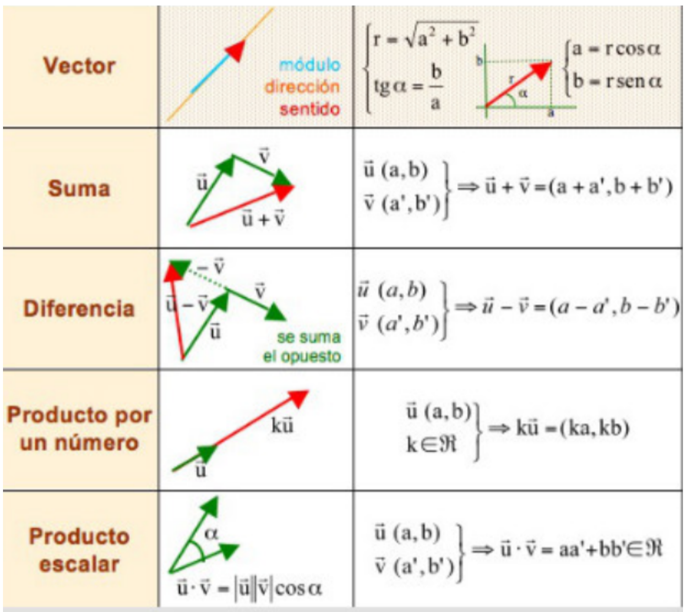
Volumen
Área de la base por la altura dividido por tres

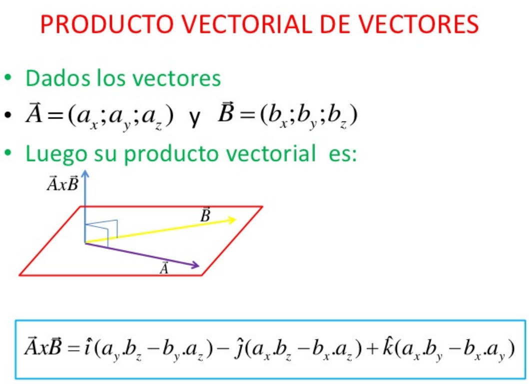
Trigonométrica, representación gráfica



Espacio vectorial conocimientos básicos y su representación

Apartado no muy elaborado, dedicado a recordar





Números complejos, representación gráfica

El cuerpo de números capaces de dar la solución de todo problema estudiado es el de los números complejos, que se compone por una parte real (numero independiente perteneciente a los reales) y una parte imaginaria en la que se introduce un valor llamado unidad imaginaria (se le denota por i o por j, pero en estos apuntes le haremos referencia con $\boldsymbol{j}$ para distinguirlo de la densidad de corriente) acompañado de un coeficiente real.

Gráficamente, el numero complejo se puede entender como un vector en el que la parte real se representa como el componente cartesiano en el eje de abscisas (eje x) y la parte imaginaria en el de coordenadas (eje y), existiendo un argumento o fase que es el angulo que forma el vector, pudiendo entonces expresar el numero complejo de varias formas:

Forma binomica	Forma polar	Forma modulo-fase	Forma exponencial
$\overline{C} = a + b\boldsymbol{j}$	$Rcos\phi + \boldsymbol{j}Rsen\phi$	$R\vert\underline{\phi}$	$R\exp^{\boldsymbol{j}\phi}$
$R = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\phi = arctg(b/a)$	$Rcos\phi$ proyección dentro del angulo	$Rsen\phi$ proyección fuera del angulo
$\vec{R} = a\vec{i} + b\vec{j}$	$\exp^{(\boldsymbol{j}\phi)} = cos\phi + \boldsymbol{j}sen\phi$	identidad de euler	

Aunque no se nos complicara mucho, bastara con saber la binomica y la modo-fase, ya que la primera sera la forma mas cómoda para operaciones asociativas (como si fuesen vectores), y la segunda para operaciones multiplicativas, tal que:

$$\overline{C_1} \cdot \overline{C_2} = R_1|\underline{\phi_1} \cdot R_2|\underline{\phi_2} = R_1 \cdot R_2|\underline{\phi_1 + \phi_2}$$

$$\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{R_1|\underline{\phi_1}}{R_2|\underline{\phi_2}} = \frac{R_1}{R_2}|\underline{\phi_1 - \phi_2}$$

6.3. Cálculo de derivadas y aplicaciones

6.4. Cálculo de integrales y aplicaciones

6.5. Teoría de errores

Es posible que se nos pida obtener el error de algunas medidas indirectas, es decir, medidas que requieren o dependen del uso de otras medidas de las cuales si conocemos el valor de su error. Para ello usaremos la siguiente formula:

$$\varepsilon_{f(x,y,\ldots,z)} = |\frac{\partial f(x,y,\ldots,z)}{\partial x}|\varepsilon_x + |\frac{\partial f(x,y,\ldots,z)}{\partial y}|\varepsilon_y + \cdots + |\frac{\partial f(x,y,\ldots,z)}{\partial z}|\varepsilon_z$$

6.6. Formulario

TEMA 1: EFECTOS ELÉCTRICOS DE CARGAS PUNTUALES

Fuerza eléctrica sobre carga q_0 por cargas puntuales q_i: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = K \cdot q_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$

Campo eléctrico creado por varias cargas puntuales: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = K \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$

Potencial eléctrico creado por varias cargas puntuales: $V = K \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$

Relación entre vector campo eléctrico y potencial: $\vec{E} = -\nabla V$; $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Trabajo para llevar q_0 desde punto 1 hasta 2 y relación con potencial y energía potencial:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = q_0 (V_1 - V_2) = -\Delta U$$

Momento dipolar de un dipolo eléctrico: $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$

Momento (par de fuerzas) sobre un dipolo $\vec{p}$ inmerso en un campo eléctrico: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

Energía potencial de un dipolo $\vec{p}$ inmerso en un campo eléctrico: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Aceleración de una partícula cargada en un campo eléctrico: $\vec{a} = q \cdot \vec{E} / m$

Energía de una partícula cargada moviéndose en campo eléctrico $E = E_C + U = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + q \cdot V$

TEMA 2: DISTRIBUCIONES DE CARGA. CAPACIDAD Y ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Densidad lineal, superficial y volumétrica de carga: $\lambda = \frac{dq}{dl}$; $\sigma = \frac{dq}{dS}$; $\rho = \frac{dq}{dV}$

Flujo eléctrico a través de una superficie abierta: $\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Ley de Gauss (flujo eléctrico a través de una superficie cerrada): $\int_{SC} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$

Campo eléctrico creado por una línea cargada con λ: $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Campo eléctrico en proximidades de plano indefinido $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$;

Campo eléctrico en proximidades de superficie conductor $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Capacidad de un condensador : $C = \frac{Q}{V}$ Condensador plano-paralelo: $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$

Condensador cilíndrico(R_b>R_a): $C = \frac{2\pi\,\varepsilon_0 \cdot L}{\ln(R_b / R_a)}$ Diferencia potencial: $V = E \cdot d$

Asociación de condensadores: en serie: $\frac{1}{C_T} = \sum_i \frac{1}{C_i}$; y paralelo: $C_T = \sum_i C_i$;

Condensador con dieléctrico: $C = k \cdot C_0$; $V = \frac{V_0}{k}$; $E = \frac{E_0}{k}$; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = k$

Energía almacenada en un condensador: $U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$

Densidad de energía y energía total del campo eléctrico: $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2$; $U = \int_V u_E \cdot dV$

TEMA 3: CORRIENTES ELÉCTRICAS

Intensidad de corriente: $I = \frac{dQ}{dt}$ $\quad I = n\, q\, S\, v_a$

Densidad de corriente: $\vec{j} = \frac{dI}{dS_N} \vec{u}$ $\Rightarrow$ $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ $\quad$ *j* uniforme: $j = \frac{I}{S_N} = n\, q\, v_a$

Ley de Ohm: $V = R \cdot I$;

Resistencia: $R = \rho \cdot \frac{L}{S}$;

Conductividad: $\sigma = \frac{1}{\rho}$

Asociación de resistencias en serie: $R_e = \sum_i R_i$; $\quad$ y en paralelo: $\frac{1}{R_e} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

Ley de Ohm vectorial: $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$;

Potencia aportada a un tramo de circuito recorrido por *I*: $P = I \cdot V$

Potencia disipada en resistencia: $P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$;

Corriente en un diodo en relación con la tensión V aplicada: $I = I_0 \left[\exp\left(V/V_T \right) - 1 \right]$

Siendo $V_T \cong 25.85$ mV a 300 K, e $I_0 \cong 10^{-12}$ A

TEMA 4: FUNDAMENTOS DE MAGNETISMO

Fuerza magnética carga q con velocidad $\vec{v}$ en $\vec{B}$: $\vec{F}_m = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$

Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$

Partícula cargada en interior de campo magnético uniforme, siendo $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$:

Movimiento circular uniforme de radio: $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$ $\quad w = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} \cdot B$ $\quad w = 2\pi f$ $\quad f = \frac{1}{T}$

Fuerza sobre un tramo recto de corriente: $\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$

Fuerza sobre un tramo cualquiera de corriente: $\vec{F} = I \cdot \int_L d\vec{l} \times \vec{B}$

Fuerza por unidad de longitud entre corrientes rectilíneas: $f = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi d}$

Momento dipolar magnético: $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$;

Espira de momento dipolar $\vec{m}$ inmersa en un campo magnético :

Momento: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ $\quad$ y $\quad$ energía potencial: $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$;

Ley de Biot-Savart: $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}$

Campo magnético en el centro de una espira circular de radio R: $B=\frac{\mu_0\cdot I}{2R}$

Flujo de campo magnético : $\phi_B=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$; Ley de Gauss para campo magnético: $\phi_B=\oint_{SC}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

Ley de Ampère: $\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\cdot I_e$

Campo magnético corriente rectilínea: $B=\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi r}$ y en el interior de solenoide: $B=\mu_0\cdot n\cdot I$

TEMA 5: INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

F.e.m. inducida: $\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}$ $\varepsilon=\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}$ $\Rightarrow$ $\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\left(\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$

Flujo magnético de N espiras que giran con *w constante* en *B* uniforme:

$$\phi=NBS\cos wt \qquad \text{Siendo: } w=\frac{2\pi}{T};\quad T=\frac{1}{f};\quad w=2\pi f$$

Autoinducción $L=\frac{\phi_B}{I}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$

Autoinducción en un solenoide: $L=\frac{\phi_B}{I}=\mu_0\frac{N^2S}{l}=\mu_0 n^2 S\,l$

Asociación de autoinducciones: en serie: $L_e=\sum_i L_i$ y en paralelo: $\frac{1}{L_e}=\sum_i\frac{1}{L_i}$

Energía almacenada en autoinducción : $U=\frac{1}{2}L\cdot I^2$

Densidad de energía y energía magnética: $u_B=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu_0}$ $U_B=\int_V u_B\,dV$

Campo en un material: $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu H=\mu_r B_{ext}$

TEMA 6: ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint\vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oint\vec{B}\bullet d\vec{S}=0$$

$$\oint\vec{E}\bullet d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\bullet d\vec{S}$$

$$\oint\vec{B}\bullet d\vec{l}=\mu_0 I+\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\bullet d\vec{S}$$

Y

Ejemplo: expresiones del campo eléctrico y magnético si la propagación se realiza en sentido positivo del eje

$$E_Z(y,t)=E_0\sin(\omega t-ky)$$
$$B_X(y,t)=B_0\sin(\omega t-ky)$$

Velocidad de la onda: $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$; $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=2.995\cdot10^8 m/s$

Vector de Poynting: $\vec{S} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ [W/ m^2]

Intensidad media: $I_m = S_m = \dfrac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c = \dfrac{cB_0^2}{2\mu_0}$ [W/m^2]

Densidad de energía electromagnética: $u = u_E + u_B = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = B^2 / \mu_0$

Índice de refracción: $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \dfrac{c}{v}$

TEMA 7: CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

Generador real: $V_+ - V_- = \varepsilon - I \cdot r$; Motor real: $V_+ - V_- = \varepsilon' + I \cdot r'$

Intensidad para una sola malla: $I = \dfrac{\sum_i \varepsilon_i}{R_T}$; Más de una malla: métodos de resolución de circuitos

Diferencia de potencial: $V_A - V_B = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_j \varepsilon_j$

Generador real, potencia aportada: $P_{AP} = \varepsilon I - I^2 \cdot r$

Receptor real, potencia consumida: $P_C = \varepsilon I + I^2 \cdot r$

TEMA 8: CORRIENTE ALTERNA

Corriente y voltaje alternos: $I = I_0 \cdot sen\left(wt + \alpha\right)$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot sen\left(wt + \theta\right)$; $\varepsilon_0 = NBSw$

Representación fasorial: $\overline{\varepsilon} = \varepsilon_e \underline{|\theta}$ $\overline{I} = I_e \underline{|\alpha}$

Valores eficaces: $I_e = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ $\varepsilon_e = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$

Resistencia: $\overline{R} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dfrac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi}} = R \underline{|0^\circ} = R$

Reactancia inductiva: $\overline{X}_L = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dfrac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi - 90^\circ}} = X_L \underline{|90^\circ} = j\,X_L$ siendo: $X_L = Lw$

Reactancia capacitiva: $\overline{X}_C = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dfrac{V_e \underline{|\varphi}}{I_e \underline{|\varphi + 90^\circ}} = X_L \underline{|-90^\circ} = -j\,X_C$ siendo: $X_C = 1/Cw$

Impedancia: $\overline{Z} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{I}} = \dfrac{V \underline{|\theta}}{I \underline{|\alpha}} = Z \underline{|\varphi}$

Siendo: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (Lw - 1/Cw)^2}$ y $\varphi = arctg\dfrac{X_L - X_C}{R}$

Asociación de impedancias: Serie: $\overline{Z}_T = \sum_i \overline{Z}_i$; Paralelo: $\dfrac{1}{\overline{Z}_T} = \sum_i \dfrac{1}{\overline{Z}_i}$

Potencia compleja: $\overline{S} = S \underline{|\varphi} = \overline{V} \cdot \overline{I}^* = V_e I_e \underline{|\varphi} = P + jQ$

Siendo: $P_{aparente} = I_e V_e$; $P_{activa} = I_e V_e \cdot \cos\varphi$ y $P_{reactiva} = I_e V_e \cdot sen\,\varphi$