Tema 2: Sucesos Aleatorios.

2.5. Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

ESTADÍSTICA

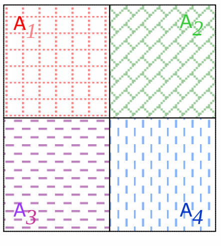
Sistema Completo de Sucesos.

***Definición**: Un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *forman un sistema completo o una partición del espacio muestral* Ω *si*

•$A_i \neq \Phi \quad \forall i$

•$A_i \cap A_j = \Phi$

•$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$



Por ejemplo el sistema completo de sucesos formado por A_1, A_2, A_3, A_4

ESTADÍSTICA

Probabilidad Total (I).

Teorema de Probabilidad Total: *Sea* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *un sistema completo de sucesos y sea B un suceso cualquiera, supongamos conocidas las* $P(A_i)$ *y las* $P(B/A_i)$ *entonces*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Demostración:

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

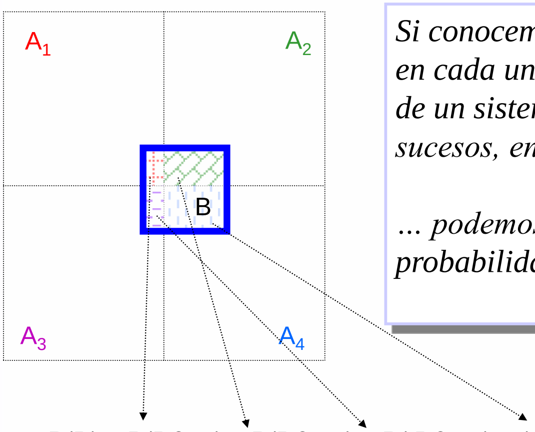
como $B \cap A_j$ *son incompatibles dos a dos*

$$\boxed{P(B/A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

ESTADÍSTICA

Probabilidad Total (II).



Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema completo de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + (B \cap A_4)$

$= P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) + \ldots$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Teorema de Bayes (I).

***Teorema de Bayes:** Sea* $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *un sistema completo de sucesos y sea B un suceso tal que P(B)>0, supongamos conocidas las* $P(A_i)$ *y las* $P(B/A_i)$

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

Demostración:

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

ESTADÍSTICA

Teorema de Bayes (III)

***Ejemplo:** En este aula el 90% de los alumnos son hombres. De ellos el 10% son rubios. De las mujeres, son rubias el 20%.*

¿Qué porcentaje de rubios hay en total?

- **P(R) = P(R∩M) + P(R∩H)**

  = P(R|M) P(M) + P(R|H) P(H)

  =0,2 x 0,1 + 0,1 x 0,9

  = 0,11 =11%

T. Prob. Total.
Hombres y mujeres forman un Sist. completo. de sucesos

¿*Se elije a un individuo al azar y resulta ser rubio. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer?*

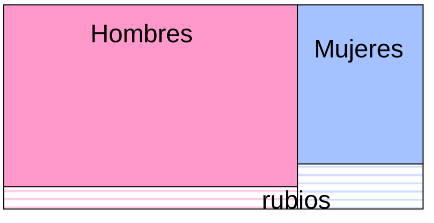
- **P(M|R) = P(R ∩ M)/P(R)**

  = P(R|M) P(M) / P(R)

  = 0,2 x 0,1 / 0,11

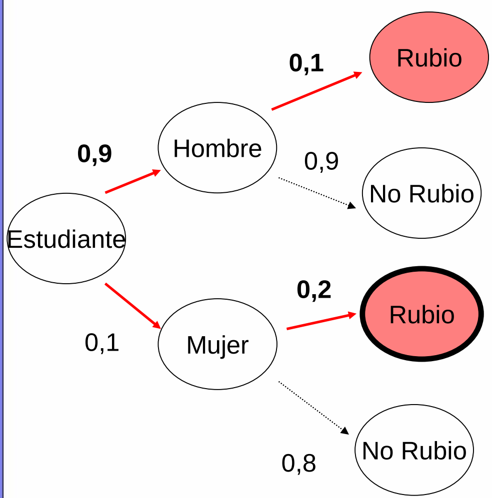
  = 0,1818 = 18%

T. Bayes



ESTADÍSTICA

Expresión del problema en forma de árbol



$P(R) = 0,9 \times 0,1 + 0,1 \times 0,2$

$P(M \mid R) = P(M \cap R)/P(R)$
$0,1\text{x}0,2/P(R) = 0,1 \times 0,2 / 0,11$
$= 0,1818 = 18\%$

- Los caminos a través de nodos representan intersecciones.
- Las bifurcaciones representan uniones disjuntas.

ESTADÍSTICA

Problema

Dos compañías producen software informático. La primera proporciona el 70% y la segunda el 30% de la producción total. Se sabe que el 83% del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63% del suministrado por la segunda se ajusta a las normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la primera compañía, si se sabe que se ajusta a las normas.

Solución:
Los sucesos definidos son:
A_1 = {software suministrado por la primera compañía}
A_2 = {software suministrado por la segunda compañía}
B = {software que se ajustan a las normas}

ESTADÍSTICA

La probabilidad que deseamos calcular es:
$P(A_1/ B)$
A_1 y A_2 forman un sistema completo de sucesos:
$A_1 \cup A_2 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
podemos aplicar el teorema de Bayes

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(B/A_i)P(A_i)}$$

ESTADÍSTICA

$P(A_1) = 0.7$
$P(A_2) = 0.3$
$P(B/A_1) = 0.83$
$P(B/A_2) = 0.63$
Sustituyendo los valores de probabilidad obtenemos:

$$P(A_1/B) = \frac{0.83 \times 0.7}{0.83 \times 0.7 + 0.63 \times 0.3} = \frac{0.58}{0.77} \cong 0.75$$

Problema

Se tienen dos urnas con bolas rojas y blancas distribuidas de la siguiente manera:

Urna 1: 3 Rojas y 2 blancas

Urna 2: 2 Rojas y 3 blancas

Se extrae una bola de la urna 2 y se introduce en la urna 1. Si al extraer una bola de la urna 1, esta es blanca, ¿Cuál es la probabilidad de que la bola trasladada sea blanca también?

Solución:

Los sucesos definidos son:

B_2={Que la bola trasladada de la urna 2 a la urna 1 sea blanca}

R_2={Que la bola trasladada de la urna 2 a la urna 1 sea roja}

B_1={Que la bola extraída de la urna 1 sea blanca}

ESTADÍSTICA

la probabilidad que nos piden es: $P(B_2/B_1) = \dfrac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$

$P(B_1)=P(B_1/B_2)\ P(B_2) + P(B_1/R_2)\ P(R_2)$

$P(B_2) = \dfrac{3}{5}$ $\qquad P(B_1/B_2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$P(R_2) = \dfrac{2}{5}$ $\qquad P(B_1/R_2) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5} = \frac{3}{10}+\frac{2}{15} = 0.40$$

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_1/B_2)P(B_2) = 0.3$$

$$P(B_2/B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Problema 2.66 El 42 % de la población activa de cierto pais está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres está en paro.

(a) Hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, esté en paro.

(b) Elegida una persona al azar y, sabiendo que está en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Solución: Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
H &= \{\text{La persona es hombre}\}\\
M &= \{\text{La persona es mujer}\}\\
P &= \{\text{La persona está en paro}\}\\
T &= \{\text{La persona no está en paro}\}
\end{aligned}
$$

ESTADÍSTICA

	58 H	M 42
P	$9'28$	$10'08$
T	$48'72$	$31'92$

La solución ahora es inmediata

(a) $\mathrm{P}(P) = 0'0928 + 0'1008 = 0'1936.$

(b) $\mathrm{P}(H \mid P) = \dfrac{0'0928}{0'1936} = 0'4793.$

ESTADÍSTICA

Problema 2.47 Supongamos que un test para diagnosticar cierta enfermedad tiene el 85 % de probabilidad de acierto. Si sabemos que el 5 % de cierta población tiene dicha enfermedad, calcular la probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad habiendo dado positivo el test.

Solución: Sean los sucesos

$$
\begin{aligned}
E &= \{\text{el paciente tiene la enfermedad}\}\\
T_+ &= \{\text{el test da positivo}\}\\
T_- &= \{\text{el test da negativo}\}\\
\overline{E} &= \{\text{el paciente no tiene la enfermedad}\}
\end{aligned}
$$

ESTADÍSTICA

Sabemos que

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(E) = 0'05 & \mathrm{P}\left(\overline{E}\right) = 0'95 & \mathrm{P}(T_+ \mid E) = 0'85 \\
\mathrm{P}(T_- \mid E) = 0'15 & \mathrm{P}\left(T_+ \mid \overline{E}\right) = 0'15 & \mathrm{P}\left(T_- \mid \overline{E}\right) = 0'85
\end{array}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(E \mid T_+) &= \frac{\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(T_+ \mid E)}{\mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(T_+ \mid E) + \mathrm{P}\left(\overline{E}\right)\cdot\mathrm{P}\left(T_+ \mid \overline{E}\right)}\\
&= \frac{0'05 \cdot 0'85}{0'05 \cdot 0'85 + 0'95 \cdot 0'15}\\
&= 0'2297
\end{aligned}
$$