4. ALGORITME DE DIJKSTRA

Siga un graf ponderat tal que $\mathbf{w}_{ij} \geq 0$.

Aquest algoritme troba els camins més curts i els seus pesos des del vèrtex 1 a la resta.

S'assignen diverses etiquetes als vèrtexs del graf. En algun moment alguns vèrtexs podran tindre etiquetes variables i la resta etiquetes fixes.

Denotarem al conjunt de vèrtexs amb etiqueta fixa per P i al conjunt de vèrtexs amb etiqueta variable per T.

4. ALGORITME DE DIJKSTRA

ALGORITME DE DIJKSTRA

Pas 1. Inicialització:

$$P = \{1\} \quad T = \{2, 3, \ldots, n\}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_j = w_{1j} \quad j \in \Gamma(1)$$
$$u_j = \infty \quad j \notin \Gamma(1)$$

Pas 2. Designació d'etiqueta variable com fixa.

Determinar $k \in T \;/\; u_k = \text{mín}_{j \in T}\{u_j\}$

Fer $T := T \sim \{k\}$ y $P := P \cup \{k\}$

Si $T = \emptyset$, STOP; u_j és el pes del camí més curt de 1 a j, $\;j = 2, 3, \ldots, n$

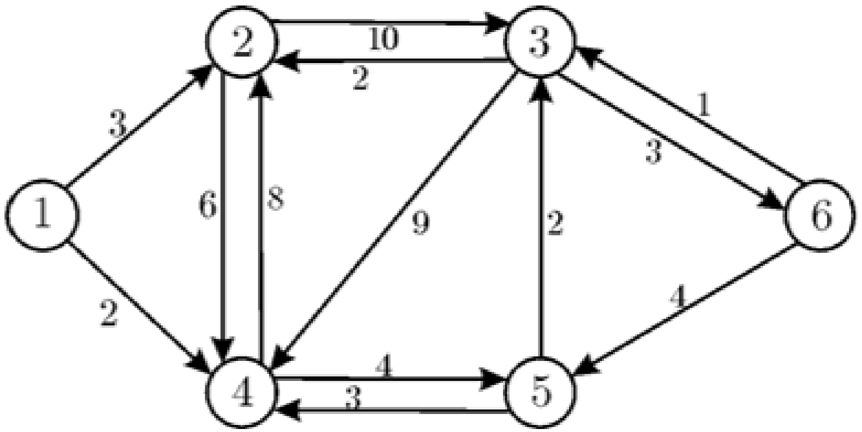
Pas 3. Actualització:

$\forall j \in \Gamma(k) \cap T, \quad u_j := \text{mín}\{u_j, u_k + w_{kj}\}$

Anar al Pas 2.

4. ALGORITME DE DIJKSTRA

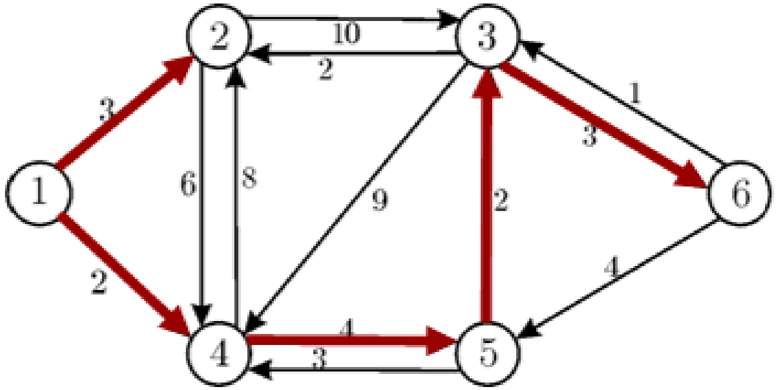
EXEMPLE: Considerem el següent graf ponderat:



Desitgem calcular els camins més curts i els seus pesos des del vèrtex 1 a la resta. Aplicarem l'algoritme de Dijkstra.

4. ALGORITME DE DIJKSTRA

EXEMPLE:



Inicialització
Iteració 1

$T = \{2,3,4,5,6\}$
$P = \{1\}$,
$u_1 = 0$
$u_2 = w_{12} = 3$
$u_3 = \infty$
$\boxed{u_4 = w_{14} = 2}$
$u_5 = \infty$
$u_6 = \infty$

Iteració 2

$T = \{2,3,5,6\}$
$P = \{1,4\}$, $\Gamma(4) \cap T = \{2,5\}$
$\boxed{u_2 = \min\{\underline{u_2}, u_4 + w_{42}\} = \min\{3, 2+8\} = 3}$
$u_3 = \infty$
$u_5 = \min\{u_5, \underline{u_4 + w_{45}}\} = \min\{\infty, 2+4\} = 6$
$u_6 = \infty$

Iteració 3

$T = \{3,5,6\}$
$P = \{1,4,2\}$, $\Gamma(2) \cap T = \{3\}$
$u_3 = \min\{u_3, \underline{u_2 + w_{23}}\} = \min\{\infty, 3+10\} = 13$
$\boxed{u_5 = 6}$
$u_6 = \infty$

Iteració 4

$T = \{3,6\}$
$P = \{1,4,2,5\}$, $\Gamma(5) \cap T = \{3\}$
$\boxed{u_3 = \min\{u_3, \underline{u_5 + w_{53}}\} = \min\{13, 6+2\} = 8}$
$u_6 = \infty$

Iteració 5

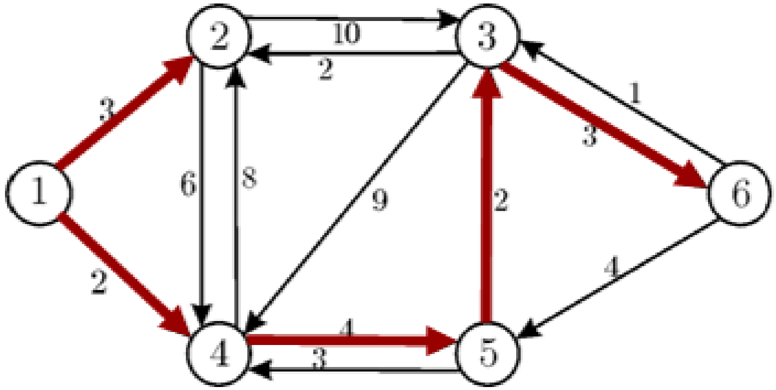
$T = \{6\}$
$P = \{1,4,2,5,3\}$, $\Gamma(3) \cap T = \{6\}$
$\boxed{u_6 = \min\{u_6, \underline{u_3 + w_{36}}\} = \min\{\infty, 8+3\} = 11}$

Iteració 6

$T = \emptyset$
$P = \{1,4,2,5,3,6\}$, STOP

4. ALGORITME DE DIJKSTRA

EXEMPLE:



	Camí	Pes
De 1 a 2	1 2	$u_2 = 3$
De 1 a 3	1 4 5 3	$u_3 = 8$
De 1 a 4	1 4	$u_4 = 2$
De 1 a 5	1 4 5	$u_5 = 6$
De 1 a 6	1 4 5 3 6	$u_6 = 11$

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

Anomenarem u_{ij} al pes del camí més curt de i a j.

Utilitzarem les variables:

$u_{ij}^{(m)}$: pes del camí més curt del vèrtex **i** al **j** amb la restricció que no continga als vèrtexs m, $m+1$, ..., n (exceptuant als extrems **i** i **j** si és el cas).

Aquestes variables poden calcular-se recursivamente utilitzant les equacions:

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\ u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j, \\ & m = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

I és possible veure que $u_{ij} = u_{ij}^{(n+1)}$, amb el que tindrem els pesos dels camins més curts entre tots els parells de vèrtexs.

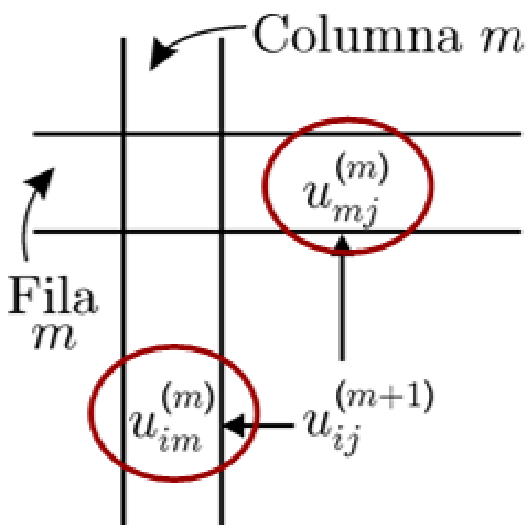
5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \min_{m=1,2,\ldots n} \left\{ u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)} \right\} \quad \forall i, j,
\end{aligned}
$$

Per a actualitzar un element que ocupe la fila **i** i columna **j** en la iteració **m**+1, hem de calcular:

El mínim entre el mateix element de la iteració anterior **m** i la suma de dos elements:

- el que ocupa la mateixa fila **i** i la columna de la iteració **m**,
- el que ocupa la mateixa columna **j** i la fila de la iteració **m**.



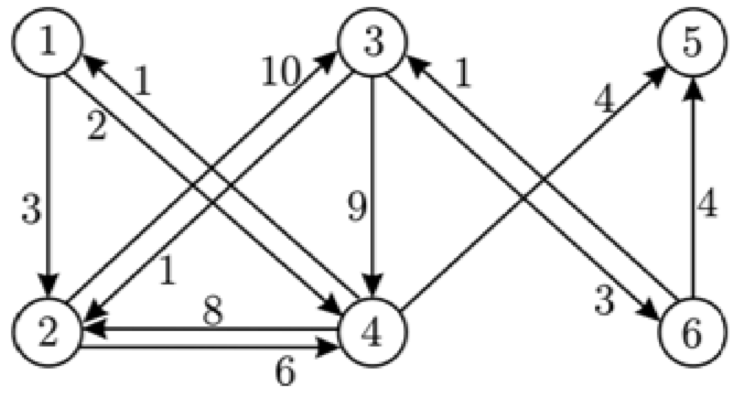
5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

$$u_{ij}^{(1)} = w_{ij} \quad \forall i,j$$
$$u_{ij}^{(m+1)} = \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j,$$
$$m = 1, 2, \ldots n$$

$W=$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞



(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

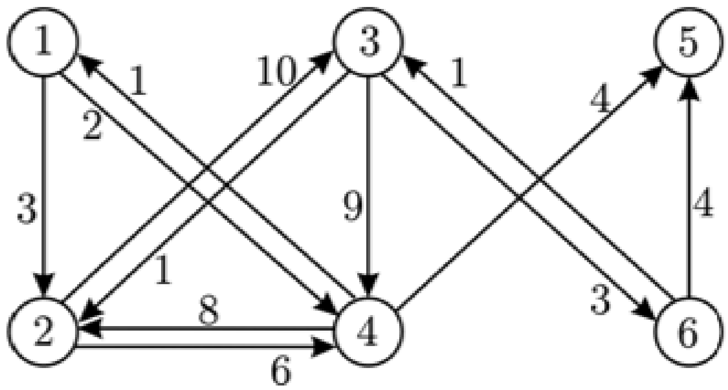
(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i, j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i, j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$



(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

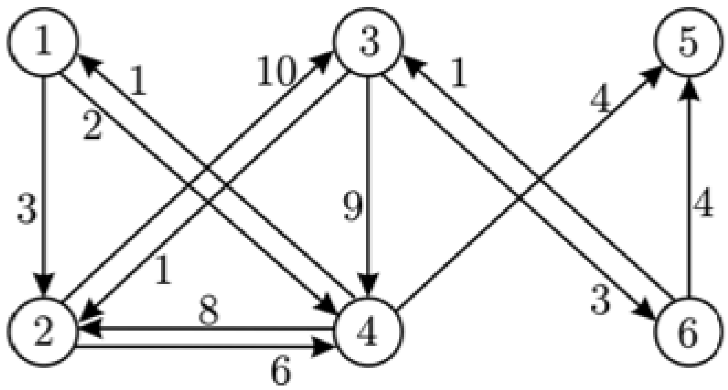
(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{(1)} &= w_{ij} \quad \forall i,j \\
u_{ij}^{(m+1)} &= \text{mín}\left\{u_{ij}^{(m)}, u_{im}^{(m)} + u_{mj}^{(m)}\right\} \quad \forall i,j, \\
& m = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$



(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

Per a facilitar la construcció dels camins més curts una vegada calculats els seus pesos, es pot utilitzar una altra matriu:

$$\Theta^{(m)} = [\theta_{ij}^{(m)}]$$

on $\theta_{ij}^{(m)}$ representa el vèrtex anterior al j en el camí més curt de **i** a **j** en la iteració **m**.

Inicialment $\theta_{ij}^{(1)} = i$ si $u_{ij}^{(1)} < +\infty$ i:

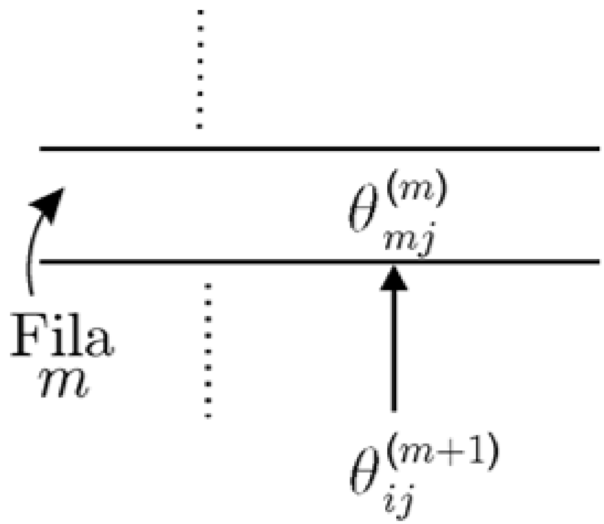
$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

$$\theta_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} \\ \theta_{mj}^{(m)} & \text{si } u_{ij}^{(m+1)} < u_{ij}^{(m)} \end{cases}$$

Si un element de la matriu de pesos no es modifica en la iteració m+1, aleshores el corresponent element de la matriu $\Theta^{(m+1)}$ tampoc es modifica.

Si un element de la matriu de pesos es modifica en la iteració m+1, aleshores el corresponent element de la matriu $\Theta^{(m+1)}$ es modifica pel que ocupa la seua mateixa columna, i fila m.



5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

(m=1)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	8	∞	∞	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	4			4	
5						
6			6		6	

(m=2)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	∞	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	∞	9	∞	3
4	1	[4]	∞	[3]	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		
2			2	2		
3		3		3		3
4	4	[1]		[1]	4	
5						
6			6		6	

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

(m=3)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	[13]	2	∞	∞
2	∞	∞	10	6	∞	∞
3	∞	1	[11]	[7]	∞	3
4	1	4	[14]	3	4	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	1	∞	4	∞

	1	2	3	4	5	6
1		1	[2]	1		
2			2	2		
3		3	[2]	[2]		3
4	4	1	[2]	1	4	
5						
6			6		6	

(m=4)

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	13	2	∞	[16]
2	∞	[11]	10	6	∞	[13]
3	∞	1	11	7	∞	3
4	1	4	14	3	4	[17]
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	[2]	1	[8]	4	[4]

	1	2	3	4	5	6
1		1	2	1		[3]
2		[3]	2	2		[3]
3		3	2	2		3
4	4	1	2	1	4	[3]
5						
6		[3]	6	[2]	6	[3]

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

(m=5)

	1	2	3	4	5	6
1	[3]	3	13	2	[6]	16
2	[7]	[10]	10	6	[10]	13
3	[8]	1	11	7	[11]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	[9]	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	[4]	1	2	1	[4]	3
2	[4]	[1]	2	2	[4]	3
3	[4]	3	2	2	[4]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	[4]	3	6	2	6	3

(m=6)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

(m=7)

	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	[6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

(m=7)

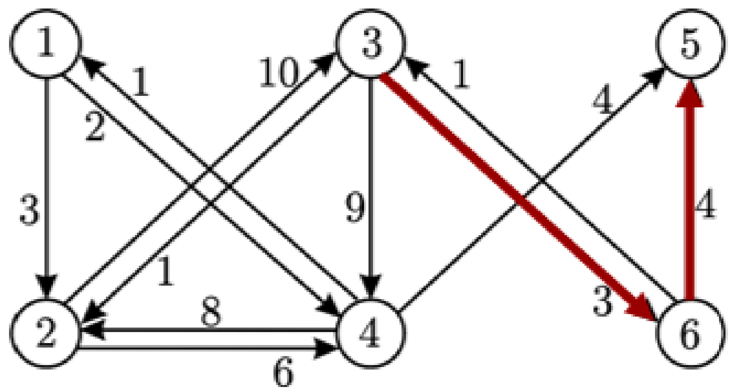
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	[4]	7	[7]	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	[6]	2	6]	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓ DE CAMINS:

Camí més curt de 3 a 5:

1. Pes: $u_{35}^{(7)} = 7$
2. Camí:
   - Vèrtex anterior al 5: $\theta_{35}^{(7)} = 6$
   - Vèrtex anterior al 6: $\theta_{36}^{(7)} = 3$



5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE:

(m=6)

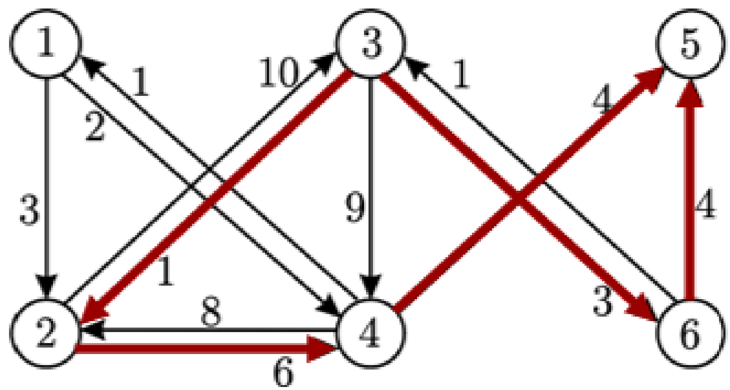
	1	2	3	4	5	6
1	3	3	13	2	6	16
2	7	10	10	6	10	13
3	8	1	11	7	11	3
4	1	4	14	3	4	17
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	9	2	1	8	4	4

	1	2	3	4	5	6
1	4	1	2	1	4	3
2	4	1	2	2	4	3
3	4	3	2	2	4	3
4	4	1	2	1	4	3
5						
6	4	3	6	2	6	3

IDENTIFICACIÓ DE CAMINS:

Camí més curt de 3 a 5 **sense passar pel vèrtex 6**:
Necessitem les dades de la iteració 6.

1. Pes: $u_{35}^{(6)} = 11$
2. Camí:
   - Vèrtex anterior al 5: $\theta_{35}^{(6)} = 4$
   - Vèrtex anterior al 4: $\theta_{34}^{(6)} = 2$
   - Vèrtex anterior al 2: $\theta_{32}^{(6)} = 3$



5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE: Considerem un graf amb V={A,B,C,D,E,F} i matriu de pesos:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 2 & 6 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 1 & \infty & 7 & \infty & \infty & 4 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Suposem que desitgem calcular el camí més curt de A a E i el seu pes, amb la condició que no continga els vèrtexs C i F com a interns.

Haurem de reordenar els vèrtexs del graf de manera que els vèrtexs per on no volem que el camí passe siguen els últims.

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE: Camí més curt de A a E i el seu pes, amb la condició que no continga els vèrtexs C i F com a interns.

Possibles reordenacions:

- A, B, D, E, C, F : Parar en la iteració 5.
- B, D, A, E, C, F : Parar en la iteració 3.

$\Omega =$

	A	B	C	D	E	F
A	∞	2	∞	5	8	∞
B	∞	∞	1	2	6	∞
C	1	∞	∞	3	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutem files

	A	B	C	D	E	F
B	∞	∞	1	2	6	∞
D	∞	∞	∞	∞	3	∞
A	∞	2	∞	5	8	∞
E	1	∞	7	∞	∞	4
C	1	∞	∞	3	∞	∞
F	3	∞	∞	∞	∞	∞

Permutem columnes

	B	D	A	E	C	F
B	∞	2	∞	6	1	∞
D	∞	∞	∞	3	∞	∞
A	2	5	∞	8	∞	∞
E	∞	∞	1	∞	7	4
C	∞	3	1	∞	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	∞	∞

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE: Amb la matriu reordenada iniciem l'algoritme de Floyd-Warshall.

$$
\Omega^{(1)} \equiv \begin{array}{c||c|ccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\
\hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
A & 2 & 5 & \infty & 8 & \infty & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\hline
\end{array}
, \quad
\Theta^{(1)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & & B & & B & B & \\
\hline
D & & & & D & & \\
A & A & A & & A & & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\
\hline
D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
\hline
A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\
E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\
C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\
\hline
\end{array}
, \quad
\Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||}
 & B & D & A & E & C & F \\
\hline
B & & B & & B & B & \\
\hline
D & & & & D & & \\
\hline
A & A & [B] & & A & [B] & \\
E & & & E & & E & E \\
C & & C & C & & & \\
F & & & F & & & \\
\hline
\end{array}
$$

EXEMPLE: Amb la matriu reordenada iniciem l'algoritme de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(2)} \equiv \begin{array}{c||c|c|cccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline B & \infty & 2 & \infty & 6 & 1 & \infty \\ \hline D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \hline A & 2 & [4] & \infty & 8 & [3] & \infty \\ E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\ C & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline \end{array} \;, \quad \Theta^{(2)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline B & & B & & B & B & \\ \hline D & & & & D & & \\ \hline A & A & [B] & & A & [B] & \\ E & & & E & & E & E \\ C & & C & C & & & \\ F & & & F & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\ D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\ E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\ C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\ F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \hline\hline \end{array} \;, \quad \Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c||cccccc||} & B & D & A & E & C & F \\ \hline\hline B & & B & & [D] & B & \\ D & & & & D & & \\ A & A & B & & [D] & B & \\ E & & & E & & E & E \\ C & & C & C & [D] & & \\ F & & & F & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

5. CAMINS MÉS CURTS ENTRE TOTS ELS PARELLS DE VÈRTEXS. MÈTODE DE FLOYD-WARSHALL

EXEMPLE: Amb la matriu reordenada iniciem l'algoritme de Floyd-Warshall.

$$\Omega^{(3)} \equiv \begin{array}{c|cccccc} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & \infty & 2 & \infty & [5] & 1 & \infty \\ D & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ A & 2 & 4 & \infty & [7] & 3 & \infty \\ E & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & 4 \\ C & \infty & 3 & 1 & [6] & \infty & \infty \\ F & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \end{array} , \quad \Theta^{(3)} \equiv \begin{array}{c|cccccc} & B & D & A & E & C & F \\ \hline B & & B & & [D] & B & \\ D & & & & D & & \\ A & A & B & & [D] & B & \\ E & & & E & & E & E \\ C & & C & C & [D] & & \\ F & & & F & & & \end{array}$$

IDENTIFICACIÓ DE CAMINS:

Camí més curt de A a E **sense passar pels vèrtexs C, F**:

1. Pes: $u_{AE}^{(3)} = 7$
2. Camí:
   - Vèrtex anterior a E: $\theta_{AE}^{(3)} = D$
   - Vèrtex anterior a D: $\theta_{AD}^{(3)} = B$
   - Vèrtex anterior a B: $\theta_{AB}^{(3)} = A$

$\Bigg\}$ ***A, B, D, E***

6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

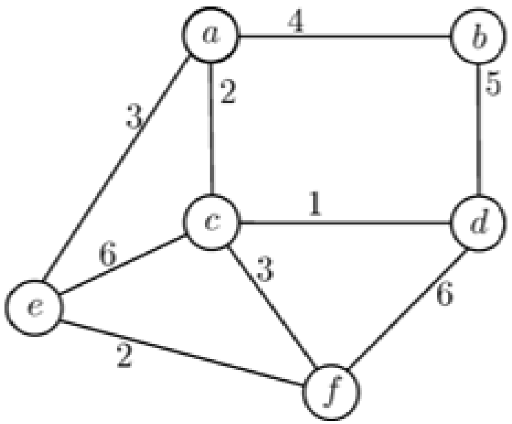
DEFINICIÓ:

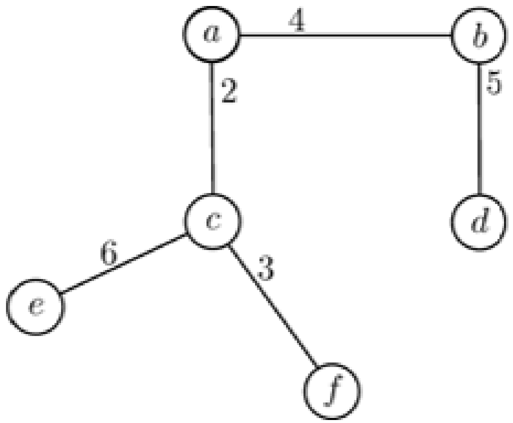
Siga G un graf ponderat i no dirigit. Direm que T és un **arbre generador de mínim pes** si T és un arbre generador tal que la suma dels pesos associats a les seues arestes és mínima.

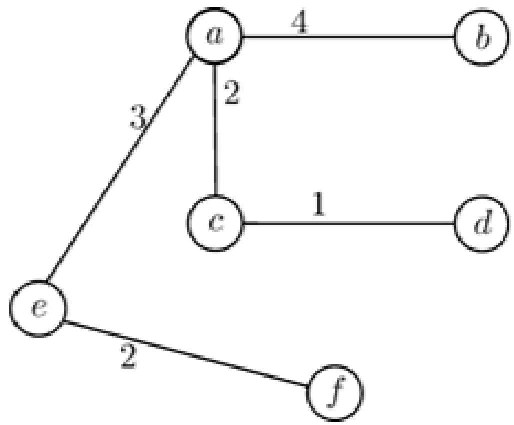
EXEMPLE: El següent graf representa una xarxa de telecomunicacions.

Aquest arbre generador no és de pes mínim: El seu pes és 20.

Hi ha arbres amb menor pes: 12.







6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

ALGORITME DE KRUSKAL

Siga G = (V,A) un graf no dirigit i amb pesos $\mathbf{w}_i$ associats a cada aresta $\mathbf{e}_i \in A$, i = 1, 2, . . . , m i amb n vèrtexs.

PAS 1. $T = \emptyset.$

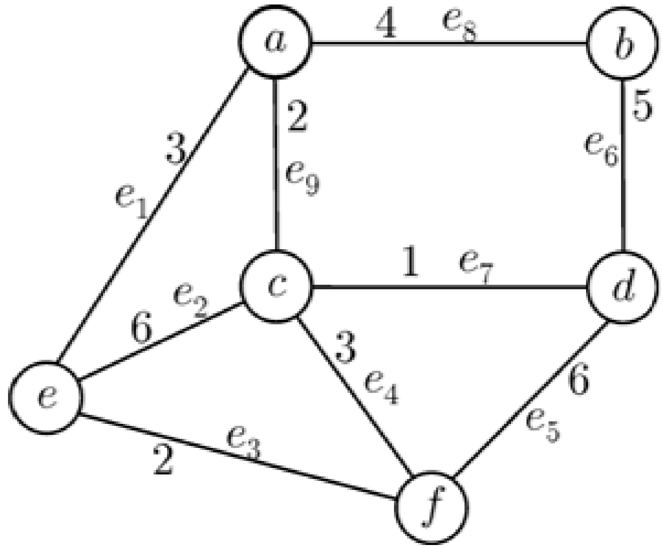
PAS 2. Ordenar en orde creixent les arestes de G, és a dir,

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \;/\; \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_m.$$

PAS 3. Afegir arestes en T de forma ordenada sempre que no es formen cicles fins a tindre en T, n-1 arestes

6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

EXEMPLE: El següent graf representa una xarxa de telecomunicacions. Aplicarem l'algoritme de Kruskal per a obtindre un arbre generador de pes mínim.



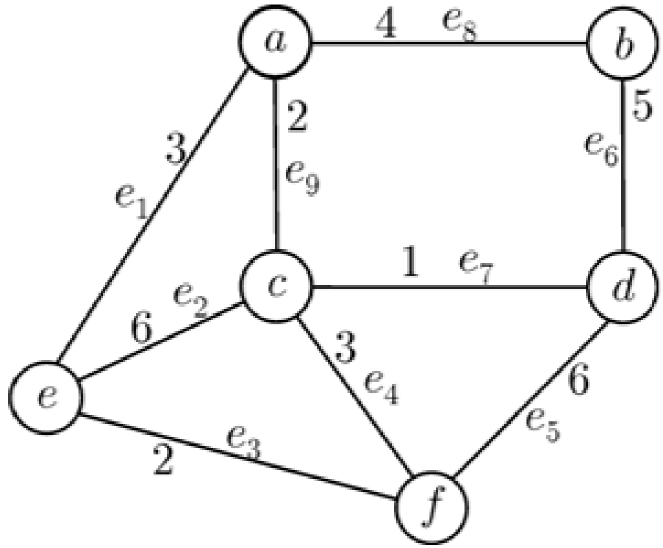
Primer ordenem les arestes de l'arbre en orde creixent de pesos:

Aresta:	e_7	e_9	e_3	e_1	e_4	e_8	e_6	e_5	e_2
Pes:	1	2	2	3	3	4	5	6	6

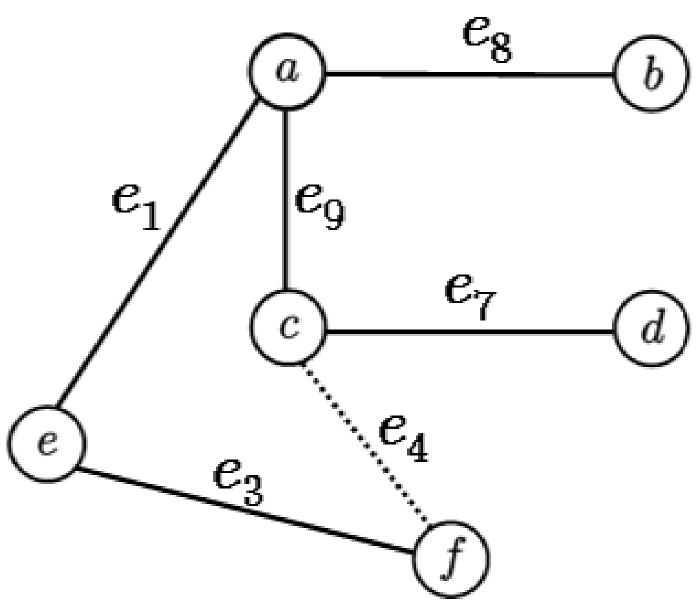
6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

Lliçó 4. GRAFS PONDERATS.

Aresta:	e_7	e_9	e_3	e_1	e_4	e_8	e_6	e_5	e_2
Pes:	1	2	2	3	3	4	5	6	6



Anem afegint arestes en T de forma ordenada sempre que no es formen cicles fins a tindre en T, 6-1 arestes.



Índex

6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

ALGORITME DE PRIM

Siga G un graf no dirigit ponderat amb n vèrtexs.

Pas 1. $T = \emptyset$, $U = \{v^\star\}$ $\quad v^\star \in V(G)$

$L(u) = w(u, v^\star)$ (∞ si $\nexists$ aresta) $\forall u \in V(G)$

Pas 2. Trobar $u^\star \in V(G)$ tal que

$L(u^\star) = \min_{u \notin U}\{L(u)\}$

Pas 3. Afegir $u^\star$ a U, és a dir, $U := U \cup \{u^\star\}$

Afegir l'aresta e incident amb $u^\star$ amb pes $L(u^\star)$ a T, és a dir, $T := T \cup \{e\}$

Pas 4. Si $card(U) = n$, STOP.

Si $card(U) < n$, fer

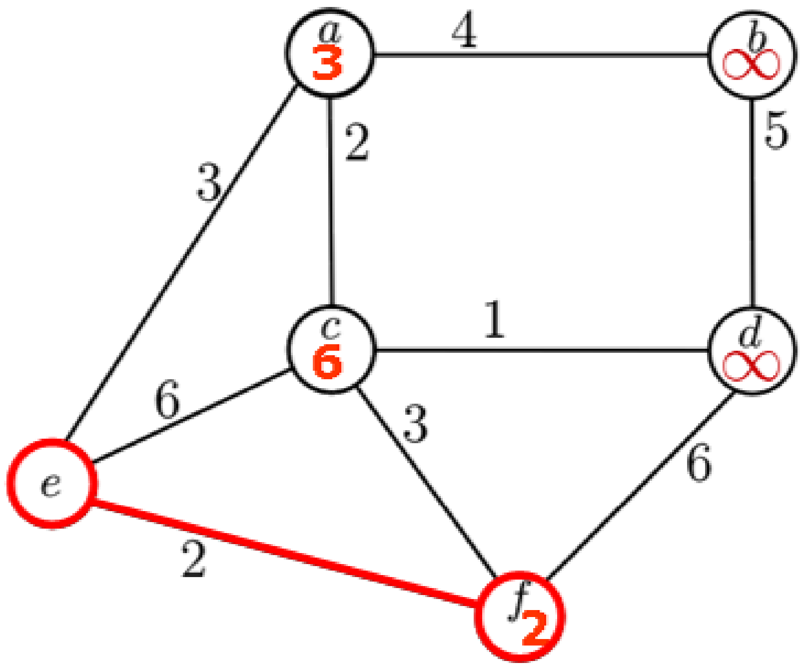
$L(u) := \min\{L(u), w(u^\star, u)\} \quad \forall u \notin U$

i anar al Pas 2.

6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$T = \emptyset,\ U = \{e\}.$
$L(a) = \omega_{ea} = 3,$
$L(b) = \infty,$
$L(c) = \omega_{ec} = 6,$
$L(d) = \infty,$
$L(f) = \omega_{ef} = 2.$
Seleccionem $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(f)$.
Afegim el vèrtex f a U i l'aresta $\{e, f\}$ a T.



EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$T = \{\{e,f\}\},\ U = \{e,f\}.$

$L(a) = \text{mín}\{L(a), \omega_{fa}\} = \text{mín}\{3, \infty\} = \omega_{ea} = 3,$

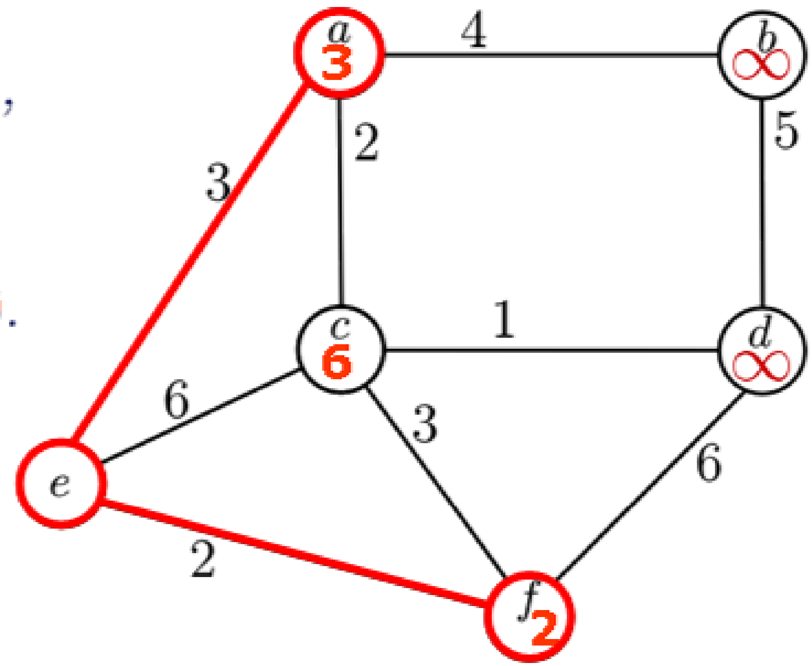
$L(b) = \text{mín}\{L(b), \omega_{fb}\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty,$

$L(c) = \text{mín}\{L(c), \omega_{fc}\} = \text{mín}\{6, 3\} = \omega_{fc} = 3,$

$L(d) = \text{mín}\{L(d), \omega_{fd}\} = \text{mín}\{\infty, 6\} = \omega_{fd} = 6.$

Seleccionem $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(a).$

Afegim el vèrtex a a U i l'aresta $\{e,a\}$ a T.



6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

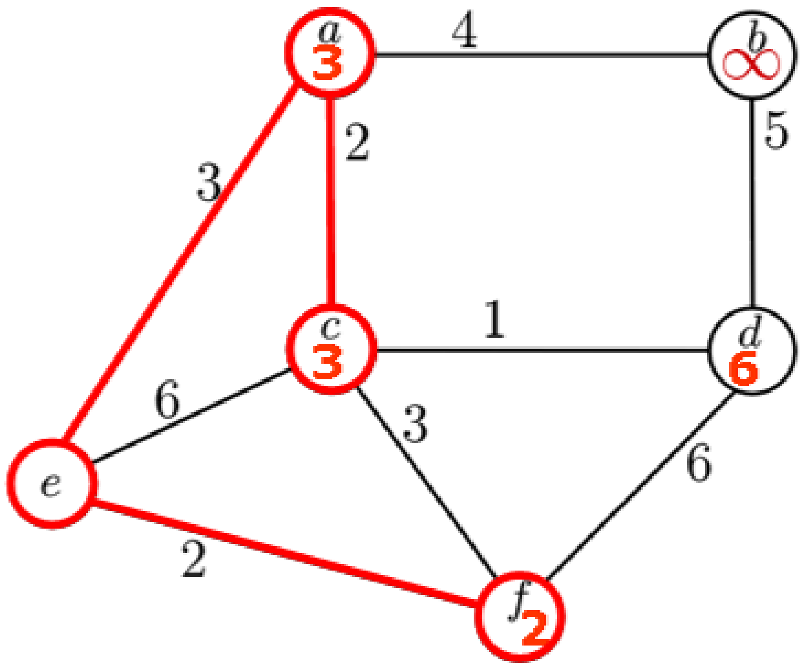
EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\}\},\ U = \{e,f,a\}.$

$L(b) = \text{mín}\{L(b), \underline{\omega_{ab}}\} = \text{mín}\{\infty, 4\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(c) = \text{mín}\{L(c), \underline{\omega_{ac}}\} = \text{mín}\{3, 2\} = \omega_{ac} = 2,$
$L(d) = \text{mín}\{\underline{L(d)}, \omega_{ad}\} = \text{mín}\{6, \infty\} = \omega_{fd} = 6.$

Seleccionem $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(c)$.

Afegim el vèrtex c a U i l'aresta $\{a,c\}$ a T.



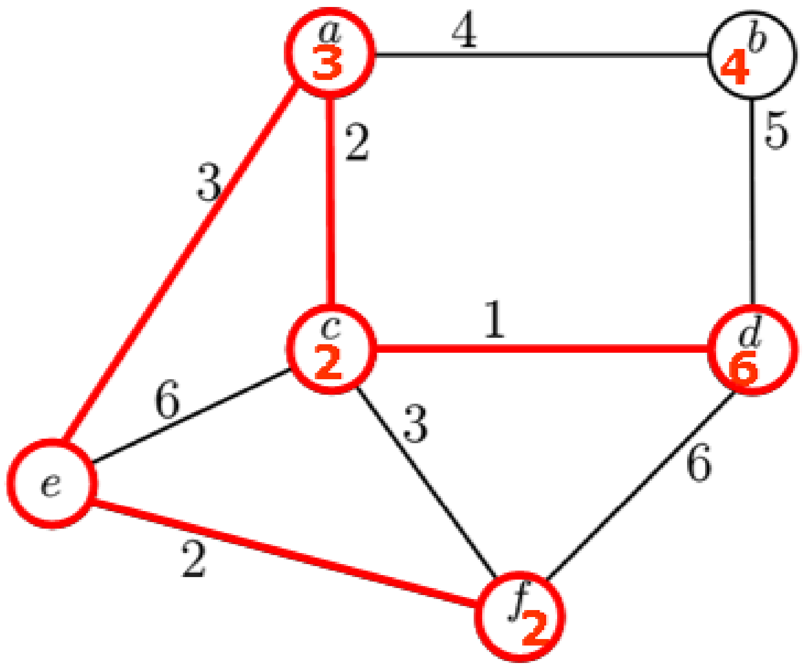
EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\}\},\ U = \{e,f,a,c\}.$

$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{cb}\} = \text{mín}\{4,\infty\} = \omega_{ab} = 4,$
$L(d) = \text{mín}\{\overline{L(d)}, \underline{\omega_{cd}}\} = \text{mín}\{6,1\} = \omega_{cd} = 1.$

Seleccionem $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(d)$.

Afegim el vèrtex d a U i l'aresta $\{c,d\}$ a T.



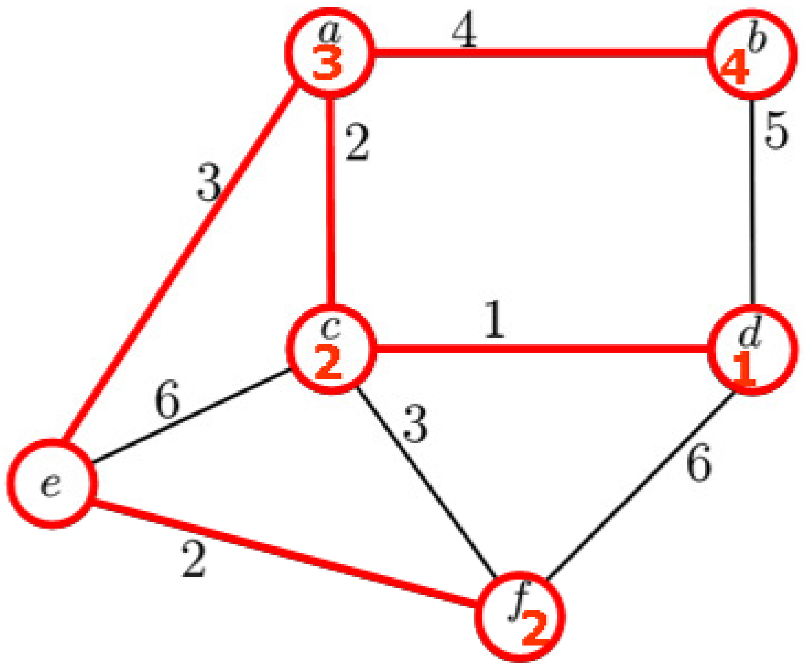
6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$T = \{\{e,f\},\{e,a\},\{a,c\},\{c,d\}\},$
$U = \{e,f,a,c,d\}.$

$L(b) = \text{mín}\{\underline{L(b)}, \omega_{db}\} = \text{mín}\{4,5\} = \omega_{ab} = 4,$

Seleccionem $\min_{u \notin U}\{L(u)\} = L(b)$.
Afegim el vèrtex b a U i l'aresta $\{a,b\}$ a T.



6. ARBRES GENERADORS DE MÍNIM PES

EXEMPLE: Apliquem l'algoritme de Prim al següent graf.

$$T = \{\{e, f\}, \{e, a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b\}\},$$
$$U = \{e, f, a, c, d, b\}, \text{ PARAR.}$$

T és un arbre generador de mínim pes, amb pes 2+3+2+1+4=12.