

Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Alumno:	
Grupo teoría:	(de a)
DNI:	
Email:	
Aula del examen:	

Convocatoria de Junio. Teoría. Matemáticas II, 30-05-2013**Instrucciones generales:**

Debes rellenar el cuadro de datos personales (nombre y apellidos, grupo, DNI, etc.) indicando tu grupo de teoría.

Debes usar únicamente las hojas grapadas que se os facilitan y no podrá haber por encima de la mesa, ni circulando cerca, ningún otro papel durante el examen. Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par), y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar). Dispones además de una hoja adicional para más operaciones, hacer referencias, aclaraciones, etc.

Pregunta	Máx	Nota
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	1	
6	1	
Total:		

1. **(2 puntos)** Se quiere construir un centro deportivo que se compone de una sección rectangular con dos semicírculos a cada extremo. Si el perímetro debe ser el de una pista de atletismo de 500 metros. Encontrar las dimensiones que harán el área lo mayor posible.

$$\text{Perímetro} = \pi r + x + x + \pi r = 500 \rightarrow \pi r + x = 250 \rightarrow x = 250 - \pi r$$

$$\text{Área}(r, x) = \pi r^2 + x \cdot 2r \rightarrow \text{Área}(r) = \pi r^2 + 2r(250 - \pi r) = \pi r^2 + 500r - 2\pi r^2 = 500r - \pi r^2$$

$$\text{Área}'(r) = 500 - 2\pi r = 0 \rightarrow 500 = 2\pi r \rightarrow r = 500/2\pi = \mathbf{250/\pi}$$

$$\mathbf{x = 250 - \pi \cdot 250/\pi = 0}$$

$$\text{Área}''(r) = -2\pi < 0 \rightarrow \text{luego es un máximo.}$$

2. **(2 puntos)** Dados los puntos de control $p_0=(-1,0)$, $p_1=(1,1)$, $p_2=(2,3)$. Calcula la curva de Bezier mediante:
- La fórmula recursiva de De Casteljaeu
 - Polinomios de Bernstein.

a.

$(-1,0)$		
	$(1-t)(-1,0)+t(1,1)$	
$(1,1)$		$(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))$
	$(1-t)(1,1)+t(2,3)$	
$(2,3)$		

$$(X(t), Y(t)) = (1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3)) = \\ = (1-2t+t^2)(-1,0) + (t-t^2)(1,1) + (t-t^2)(1,1) + t^2(2,3)$$

$$X(t) = -(1-2t+t^2) + 2(t-t^2) + 2t^2 = -1 + 2t - t^2 + 2t - 2t^2 + 2t^2 = -t^2 + 4t - 1$$

$$Y(t) = 2(t-t^2) + 3t^2 = 2t - 2t^2 + 3t^2 = t^2 + 2t$$

b.

$$(X(t), Y(t)) = (1-t)^2(-1,0) + 2(1-t)t(1,1) + t^2(2,3) = (1-2t+t^2)(-1,0) + (2t-2t^2)(1,1) + t^2(2,3)$$

$$X(t) = -(1-2t+t^2) + (2t-2t^2) + 2t^2 = -1 + 2t - t^2 + 2t - 2t^2 + 2t^2 = -t^2 + 4t - 1$$

$$Y(t) = (2t-2t^2) + 3t^2 = 2t - 2t^2 + 3t^2 = t^2 + 2t$$

3. (2 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 e^x$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=1$.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = e^x x^2 - 2 \int x e^x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = e^x x^2 - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] = e^x x^2 - 2x e^x + 2e^x \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [e^x x^2 - 2x e^x + 2e^x]_0^1 = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2 = 0,718281$$

Se ha utilizado dos veces la integración por partes.

4. (2 puntos) Aplicar el método de Newton para obtener una estimación del punto de corte de las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ con dos dígitos decimales exactos. Tomar 1 como valor inicial y redondea las operaciones a 8 decimales.

	x	$f(x)$	$f'(x)$	h
1	1	-0,04030231	1,84147098	-0,02188593
2	1,02188593	0,00012792	1,85309354	0,00006903
3	1,0218169			
4				
5				
6				
7				

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x) \quad f'(x) = 1 + \sin(x)$$

El resultado es una magnitud de orden unidades. Si exigimos exactitud a las décimas y centésimas (dos dígitos decimales exactos) tenemos tres dígitos exactos, por lo que:

$$m = 0 \quad n = 3$$

Según el teorema de la acotación: $\Delta \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = 0,5^{-2} = 0,005$

Sólo se necesitan dos iteraciones porque $h \leq 0,005$ garantiza 3 dígitos exactos.

El resultado es 1,0218169 con los dígitos exactos 1,02

5. (1 puntos) De una función $f(x)$ se conocen los datos que figuran a continuación

x_i	$f(x_i)$
1,0	0,841
1,1	0,891
1,2	0,993
1,3	1,000

Calcula el polinomio interpolador mediante diferencias divididas (redondea a 3 decimales).

1,0	0,841			
		0,05/0,1=0,5		
1,1	0,891		0,52/0,2=2,6	
		0,102/0,1=1,02		-7,35/0,3=-24,5
1,2	0,993		-0,95/0,2=-4,75	
		0,007/0,1=0,07		
1,3	1,000			

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 0,841 + 0,5(x - 1) + 2,6(x - 1)(x - 1,1) - 24,5(x - 1)(x - 1,1)(x - 1,2) \\
 &= -24,5x^3 + 83,45x^2 - 93,65x + 35,541
 \end{aligned}$$

6. (1 punto) Encontrar un valor c que satisfaga las condiciones del “Teorema del Valor Medio para la Derivabilidad” de la función $f(x) = \sqrt{x}$ para valores $a=4$ y $b=9$.

Según el teorema del valor medio, si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe un c perteneciente a (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En nuestro caso $a=4$ y $b=9$ con lo que $f(9)=3$ y $f(4)=2$, $f'(c) = \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$
y como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ luego $\frac{1}{5} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ y $c = \frac{25}{4}$

