*Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*

| | |
|---|---|
| *Apellidos:* | |
| *Nombre:* | |
| *DNI:* | *Email:* |

*Grupo de teoría:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ | **Grupo 01** | **- Lunes de 09:00 a 11: 00** | **(Prof. Martínez, Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 02** | **- ARA - Miércoles de 11:00 a 13:00** | **(Prof. Escolano, Francisco)** |
| ☐ | **Grupo 03** | **- Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00** | **(Prof. Vicente, José F.)** |
| ☐ | **Grupo 04** | **- Martes de 15:00 a 17:00** | **(Prof. Salinas, José María)** |
| ☐ | **Grupo 05** | **- Martes de 9:00 a 11:00** | **(Prof. Vicente, José F.)** |

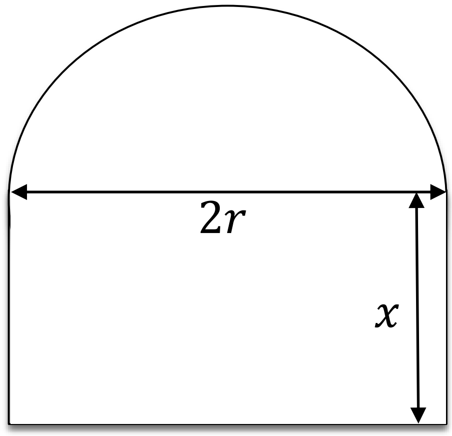
## Examen Final de Matemáticas II. 29 Mayo 2015

**Instrucciones generales:**

- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen. Dispones de un par de páginas en blanco al final por si las necesitas.
- ✓ Está terminantemente prohibido el uso de teléfonos móviles.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar).
- ✓ Todas las preguntas deben estar bien explicadas, indicando operaciones, haciendo referencias, aclaraciones, etc.

| | Nota | |
|---|---|---|
| Ejercicio 1 | 2 | |
| Ejercicio 2 | 2 | |
| Ejercicio 3 | 1,5 | |
| Ejercicio 4 | 1,5 | |
| Ejercicio 5 | 1 | |
| Ejercicio 6 | 2 | |
| Total | | |

1. **(2 puntos)** Un ranchero usa 600 metros de valla para construir un corral como el de la figura. Encontrad las dimensiones que maximizan el área del corral.




Perímetro: $2x + 2r + \pi r = 600$ $\qquad x = \frac{600-(2+\pi)r}{2}$

Área: $A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx$ $\qquad A(r) = \frac{\pi}{2}r^2 - (2+\pi)r^2 + 600r$

$$A'(r) = \pi r - (4+2\pi)r + 600 = 600 - (4+\pi)r = 0$$

$$\boldsymbol{r = \frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$\boldsymbol{x} = 300 - (2+\pi)\frac{300}{4+\pi} = 300\left(1 - \frac{2+\pi}{4+\pi}\right) = 300\left(\frac{2}{4+\pi}\right) = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi} = 84,015}$$

$$x = r \quad A = \frac{\pi r^2}{2} + 2rx = \frac{\pi r^2 + 4r^2}{2} = r^2\,\frac{4+\pi}{2} = \left(\boldsymbol{\frac{600}{4+\pi}}\right)^{\boldsymbol{2}} \frac{4+\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{600}{4+\pi}\,\frac{600}{2} = r\,300}$$

$$\boldsymbol{A = 84,015 \cdot 300 = 25204,5}$$

2. **(2 puntos)** El porcentaje de concentración de cloro en el agua disminuye según la siguiente expresión $20e^{-t}$ siendo $t$ el tiempo en horas. En este instante ($t_0 = 0$) la concentración es del $20\%$ ($20e^{-0} = 20$).

   a. **(1.25 puntos)** Utiliza el método de Newton para calcular el tiempo $t_n$ que se necesita para que la concentración se reduzca al 6% ($20e^{-t} = 6$), es decir, aplica el método a la función $f(t) = 20e^{-t} - 6$. Itera hasta asegurarte que el error es menor de una centésima. Redondea todas las operaciones a cuatro decimales y utiliza $t_0 = 0$ como valor inicial.

$f(t) = 20e^{-t} - 6$ $\boldsymbol{f'(t) = -20e^{-t}}$

| n | $t_i$ | $f(t_i)$ | $f'(t_i)$ | $h = f(t_i)/f'(t_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 14 | -20 | -0,7 |
| 1 | 0,7 | 3,9317 | -9,9317 | -0,3959 |
| 2 | 1,0959 | 0,6848 | -6,6848 | -0,1024 |
| 3 | 1,1983 | 0,0347 | -6,0347 | -0,0058 |
| 4 | **1,2041** | | | \|-0,0058\|<0,01 |
| 5 | | | | |

$|h|$ es cota del error absoluto y $t_4 = 1{,}2041$ horas $=$ **1 hora 12' 15"**

   b. **(0.75 puntos)** Calcula cuántos dígitos exactos tiene la aproximación por el método de Newton que has calculado.

$|h| = 0{,}0058 \leq 0{,}05 = \left(\frac{1}{2}\right) 10^{m-n+1}$ $-1 = m - n + 1$

$t_4 = \mathbf{1}, 2042 \rightarrow m = 0$ $-1 = 0 - n + 1$ $\boldsymbol{n = 2}$

3. **(1.5 puntos)** Dados los puntos de control $P_0=(1, 1)$; $P_1=(2, 3)$;$P_2=(4, 3)$ y $P_3=(1, 1)$, encontrar la curva de Bezier (utiliza el método que prefieras).

De Casteljau:

Abscisas

1
(1-t)+2t=1+t
2 (1+t)(1-t)+(2+2t)t=1+2t+t$^2$
2(1-t)+4t=2+2t (1+2t+t$^2$)(1-t)+(2+4t-5t$^2$)t=1+3t+3t$^2$-6t$^3$
4 2(1+t)(1-t)+(4-3t)t=2+4t-5t$^2$
4(1-t)+t=4-3t
1

Ordenadas

1
(1-t)+3t=1+2t
3 (1+2t)(1-t)+3t=1+4t-2t$^2$
3(1-t)+3t=3 (1+4t-2t$^2$)(1-t)+(3-2t$^2$)t=1+6t-6t$^2$
3 3(1-t)+(3-2t)t=3-2t$^2$
3(1-t)+t=3-2t
1

**Curva: (1+3t+3t$^2$-6t$^3$, 1+6t-6t$^2$)**

Polinomios de Bernstein:

Grado 3: $B(t) = B_0^3 P_0 + B_1^3 P_1 + B_2^3 P_2 + B_3^3 P_3$

$B_0^3 = \binom{3}{0} t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3 \qquad B_1^3 = \binom{3}{1} t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$

$B_2^3 = \binom{3}{2} t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t) \quad B_3^3 = \binom{3}{3} t^3(1-t)^{3-3} = t^3$

$B(t) = (1-t)^3(1,1) + 3t(1-t)^2(2,3) + 3t^2(1-t)(4,3) + t^3(1,1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x(t)} &= (1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 12t^2(1-t) + t^3 \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) + 6t(1-2t+t^2) + 12t^2 - 12t^3 + t^3 \\ &= \mathbf{1 + 3t + 3t^2 - 6t^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y(t)} &= (1-t)^3 + 9t(1-t)^2 + 9t^2(1-t) + t^3 \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) + 9t(1-2t+t^2) + 9t^2 - 9t^3 + t^3 = \mathbf{1 + 6t - 6t^2}\end{aligned}$$

4. **(1.5 puntos)** Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\ln(A - BC)$ y su cota de error absoluto.

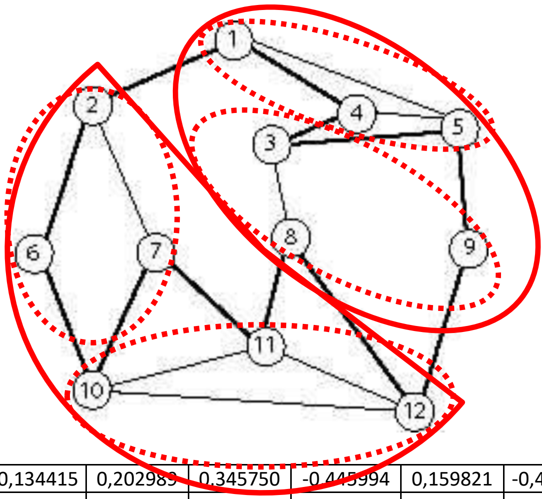
$$\ln\ (A - (3 \pm 2\%)(0{,}25 \pm 4\%)) = \ln\,(A - (0{,}75 \pm 6\%)) =$$
$$= \ln\,((8 \pm 0{,}08) - (0{,}75 \pm 0{,}045))] = \ln\,(7{,}25 \pm 0{,}125)$$

$$f(x \pm \Delta) = f(x) \pm \Delta \cdot f'(x) \qquad \left\| \begin{matrix} f(x) = ln\,x \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\|$$

$$f(7{,}25 \pm 0{,}125) = ln\,7{,}25 \pm 0{,}125 \cdot \frac{1}{7{,}25} = \mathbf{1{,}981 \pm 0{,}01724} = 1{,}981 \pm 0{,}8682\%$$

5. **(1 punto)** Dado el grafo de la figura:

   a. (0.25 puntos) Calcula la matriz Laplaciana.
   b. (0.25 puntos) Con los vectores propios dados por la tabla adjunta, selecciona el vector de Fiedler y calcula una partición del grafo en dos trozos.
   c. (0.5 puntos) Calcula una posible función hash de dos bits.




| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,288675 | 0,243793 | -0,319203 | -0,134415 | 0,202989 | 0,345750 | -0,445994 | 0,159821 | -0,421102 | 0,519198 | 0,029112 | 0,088860 |
| 0,288675 | -0,212224 | -0,427773 | 0,025454 | 0,151342 | 0,446010 | 0,114790 | -0,162757 | 0,199201 | -0,488826 | -0,116446 | -0,220378 |
| 0,288675 | 0,335820 | 0,116176 | -0,446572 | -0,315561 | -0,153090 | 0,531248 | -0,045238 | -0,427513 | 0,189013 | -0,156877 | 0,092777 |
| 0,288675 | 0,409051 | -0,130958 | -0,337831 | -0,070638 | -0,340145 | 0,187646 | -0,660804 | 0,636668 | -0,227691 | 0,059321 | -0,086891 |
| 0,288675 | 0,367868 | -0,044429 | 0,134882 | 0,062677 | -0,149617 | -0,149570 | 0,640853 | -0,165270 | -0,273879 | -0,010950 | 0,060078 |
| 0,288675 | -0,406123 | -0,426045 | 0,219115 | -0,650403 | -0,077278 | -0,029809 | 0,041900 | 0,052007 | 0,151164 | -0,042253 | 0,217771 |
| 0,288675 | -0,329242 | -0,063064 | -0,051089 | 0,554316 | -0,324913 | 0,436459 | -0,015656 | 0,051870 | 0,262098 | 0,285437 | 0,306416 |
| 0,288675 | 0,000938 | 0,394910 | -0,386750 | -0,214936 | 0,509135 | -0,220162 | 0,071667 | 0,209410 | 0,141018 | 0,318468 | -0,231273 |
| 0,288675 | 0,199245 | 0,366210 | 0,650357 | -0,088079 | 0,013328 | 0,309613 | -0,231644 | 0,047624 | 0,230931 | -0,062829 | -0,169094 |
| 0,288675 | -0,322352 | 0,048772 | 0,044773 | 0,039647 | -0,358953 | -0,074763 | 0,072956 | -0,334028 | 0,049308 | 0,257503 | -0,603191 |
| 0,288675 | -0,228044 | 0,259837 | -0,137689 | 0,200553 | -0,045941 | -0,189624 | 0,107699 | 0,052225 | -0,060447 | -0,808517 | -0,028821 |
| 0,288675 | -0,105604 | 0,370202 | 0,073558 | -0,036813 | 0,134603 | -0,266163 | -0,144391 | 0,041805 | -0,397565 | 0,220696 | 0,579401 |

a)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$L=D-A=\begin{bmatrix}3&-1&0&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&3&0&0&0&-1&-1&0&0&0&0&0\\0&0&3&-1&-1&0&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&-1&3&-1&0&0&0&0&0&0&0\\-1&0&-1&-1&4&0&0&0&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&2&0&0&0&-1&0&0\\0&-1&0&0&0&0&3&0&0&-1&-1&0\\0&0&-1&0&0&0&0&3&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&0&0&0&2&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1&-1&0&0&4&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&4\end{bmatrix}$$

b) Fiedler es al segundo vector, y sus valores **positivos son el {1,3,4,5,8,9,} y los negativos {2,6,7,110,11,12}**, que corresponde con los nodos que producen el corte óptimo (en línea continua).

c) Con el vector de Fiedler y el siguiente, asociando a los valores positivos un uno y a los negativos un cero obtenemos una codificación de dos bits:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{h}(\mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{2} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{2}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{3}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{3} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{4}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{2} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{5}) = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{2} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{6}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{7}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{8}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{3} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{9}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{3} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{10}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{11}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{h}(\mathbf{12}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}
\end{gathered}
$$

6. **(2 puntos)** Se considera la función $F(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con n entero.

Construir una tabla de diferencias divididas para los puntos n=1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 comprobando que $f[x_i, x_{i+1}]$ es un cuadrado perfecto; que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ es un número impar dividido entre dos y que $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$ es siempre una constante.

Demostrar que $F(n)$ es un polinomio de tercer grado y calcularlo.

| n | f(n) | $(n+1)^2$ | (2n+3)/2 | 1/3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| | | 4 | | | | | |
| 2 | 5 | | 5/2 | | | | |
| | | 9 | | 1/3 | | | |
| 3 | 14 | | 7/2 | | 0 | | |
| | | 16 | | 1/3 | | 0 | |
| 4 | 30 | | 9/2 | | 0 | | 0 |
| | | 25 | | 1/3 | | 0 | |
| 5 | 55 | | 11/2 | | 0 | | |
| | | 36 | | 1/3 | | | |
| 6 | 91 | | 13/2 | | | | |
| | | 49 | | | | | |
| 7 | 140 | | | | | | |

$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}] = (n+1)^2} \qquad \boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = (2n+3)/2}$$
$$\boldsymbol{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = 1/3}$$

$F(n)$ coincide con in polinomio de tercer grado aunque se interpolen más de 4 puntos:

$$F(n) = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= 1 + 4n - 4 + \frac{5}{2}(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{3}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$