Nota de cuestiones sobre 10 puntos. Nota de problemas sobre 10 puntos

Cuestiones:

C1. En el centro de una esfera conductora y hueca, de radio R=9 cm y carga Q=2 nC, se encuentra una carga puntual q= –2 nC. Calcula el potencial en un punto que dista del centro de la esfera: (a) 3 cm [1 punto] y (b) 12 cm [1 punto], respectivamente.

SOLUCIÓN:

En ambos casos el potencial es la suma de los potenciales creado por cada una de las cargas.

Para r=3 cm (punto interior):

La carga Q, distribuida uniformemente en la superficie de la esfera, crea un potencial constante en el interior de la esfera de valor V=K Q/R, por tanto el potencial total en 3 cm es:

$$V_i = V_{iq} + V_{iQ} = K\left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R}\right) = 9\cdot 10^9\left(\frac{-2\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10^{-2}} + \frac{2\cdot 10^{-9}}{9.10^{-2}}\right) = -600 + 200 = -400\,\mathrm{V}$$

Para r=12 cm (punto exterior):

La carga Q se comporta como una carga puntual situada en el centro de la esfera:

$$V_e = V_{eq} + V_{eQ} = K\frac{(q+Q)}{r} = 0\,\mathrm{V}$$

C2. Un dipolo eléctrico con momento dipolar $\vec{p} = 2\,\vec{j}$ Cm se encuentra inmerso en un campo eléctrico $\vec{E} = -5\,\vec{k}$ N/C. Si dejamos que el dipolo pueda moverse libremente ¿Qué tipo de movimiento realizará? ¿En qué posición quedará en equilibrio? Razona tus respuestas y calcula la variación de energía desde la posición inicial hasta que se para [2 puntos].

SOLUCIÓN:

Sobre el dipolo aparece un momento de valor $\vec{\tau} = \vec{p}\otimes\vec{E} = pE\cdot sen\,90^{\circ}(-\vec{i})$. Como el módulo del momento es distinto de cero el dipolo girará (en sentido $-\vec{i}$) hasta colocarse de forma que sus vectores $\vec{p}$ y $\vec{E}$ queden paralelos, es decir $\vec{p} = -2\,\vec{k}$. En esa situación el módulo del momento $\tau = pE\cdot sen\,0^{\circ} = 0$ es cero y el dipolo está en una posición de equilibrio (mínima energía potencial).

La variación de energía en el proceso es:

$U_i = -\vec{p}_i\cdot\vec{E} = -2\cdot(-5)\cos 90^{\circ} = 0$ $\qquad$ $U_f = -\vec{p}_f\cdot\vec{E} = -(-2)\cdot(-5)\cos 0^{\circ} = -10\,\mathrm{J}$

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = -10 - 0 = -10\ \mathrm{J}}$$

C3. Dos condensadores inicialmente aislados de capacidades C1 = 2µF y C2 = 5µF tienen cargas Q_1 = 10 µC y Q_2 = 4 µC respectivamente. Si los dos condensadores se conectan en paralelo, hallar la carga, la diferencia de potencial y la energía almacenada en cada condensador [2 puntos].

SOLUCIÓN:

Sea V la tensión común de los condensadores y Q_1' y Q_2' sus cargas tras conectarlos en paralelo.

Por un lado tenemos que $Q_1' = C_1 V$ y $Q_2' = C_2 V$

Por otro lado, la conservación de la carga implica que $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = 14\,\mu\mathrm{C}$.

De las dos relaciones anteriores se deduce que $Q_1' + Q_2' = C_1V + C_2V = (C_1 + C_2)V$ y por tanto:

$$V = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2} = \frac{14\,\mu\text{C}}{7\,\mu\text{F}} = 2\text{ V}.$$

Sus cargas son: $Q_1' = C_1V = 2\cdot 10^{-6}\cdot 2 = 4\,\mu\text{C}$ y $Q_2' = C_2V = 5\cdot 10^{-6}\cdot 2 = 10\,\mu\text{C}$.

Y las energías: $U_1 = (1/2)C_1V^2 = 4\cdot 10^{-6}\text{ J} = 4\,\mu\text{J}$ y $U_2 = (1/2)C_2V^2 = 10^{-5}\text{ J} = 10\,\mu\text{J}$.

C4. Dos conductores paralelos e indefinidos separados una distancia *d* transportan corrientes I_1 = 2A e I_2 = 4A y se atraen con una fuerza por unidad de longitud de $8\cdot 10^{-3}$ N/m. Calcula el valor del módulo del campo magnético creado por estas corrientes en un punto situado entre los conductores, en el plano que determinan ambos, a una distancia d/3 del conductor con corriente I_1 [2 puntos]. *Nota: el valor de μ_0 no es necesario para responder correctamente la cuestión. Si se utiliza en alguna operación dejar el resultado en función de esta magnitud.*

SOLUCIÓN:

Si los conductores se atraen quiere decir que transportan corrientes en el mismo sentido. En consecuencia el campo magnético creado por cada conductor, en puntos comprendidos entre los dos conductores en el plano que determinan, tiene que tener sentido contrario.

Por tanto el módulo del campo magnético total será:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_1\vec{u} + B_2(-\vec{u}) = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d/3)} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(2d/3)}\right)\cdot\vec{u}$$

Siendo d la distancia que separa a los conductores y $\vec{u}$ un vector unitario perpendicular al plano que forman los conductores (su sentido dependerá del sentido que asignemos a las corrientes). En cualquier caso como $I_2 = 2\,I_1$ a una distancia de d/3 de I_1 el campo total es nulo.

$$\vec{B}_T = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d/3)} - \frac{\mu_0 2I_1}{2\pi(2d/3)}\right)\cdot\vec{u} = 0$$

C5. Un anillo de cobre de radio R = 1 cm y sección circular de 4 mm de diámetro se sitúa en un campo magnético uniforme, perpendicular a la superficie del anillo, y cuyo módulo varía en el tiempo de la forma $B = 5\cdot 10^{-3}t$ T. Calcular: (a) La f.e.m. inducida en el anillo [1 punto]. (b) La intensidad inducida [1 punto]. Dato: resistividad del cobre 1.71 x 10^{-8} Ωm

SOLUCIÓN:

a) El flujo del campo magnético a través del anillo y la f.e.m. inducida serán, respectivamente:

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot\cos 0^{\circ} = 5\cdot 10^{-3}t\cdot\pi R^2 = 5\pi\cdot 10^{-7}t\quad \text{T}\cdot\text{m}^2$$

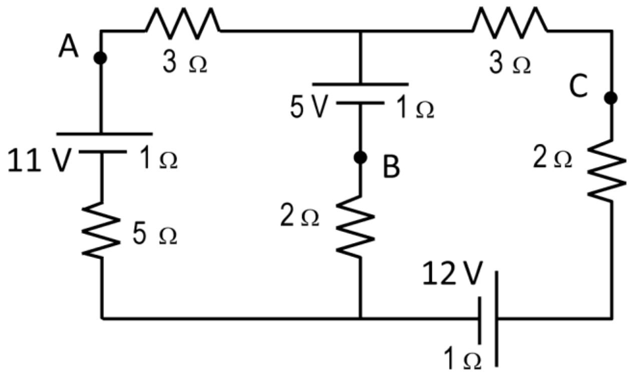
$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -5\pi\times 10^{-7}\text{ V}$$

b) La resistencia del anillo es: $R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi R}{\pi r^2} = 1.71\cdot 10^{-8}\frac{2\pi 10^{-2}}{\pi\, 4\cdot 10^{-6}} = 0.855\cdot 10^{-4}\,\Omega$

Aplicando la ley de Ohm: $I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = 18.4\text{ mA}$

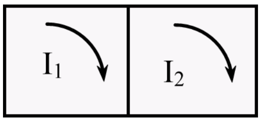
Problemas:

P1. En el circuito de la figura calcula: (a) La corriente que circula por cada una de las ramas [2 puntos]. (b) La diferencia de potencial entre los puntos A-B y A-C [1 punto]. (c) La potencia aportada o consumida, según sea el caso, por las *f.e.m.* del circuito [1 punto].



SOLUCIÓN:

a) Plantemos las ecuaciones de mallas:

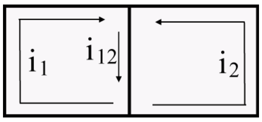


$$\begin{aligned} 12I_1 - 3I_2 &= 6 \\ -3I_1 + 9I_2 &= -7 \end{aligned} \quad \Big| \; x3 \; \Big| \quad \begin{aligned} 36I_1 - 9I_2 &= 18 \\ -3I_1 + 9I_2 &= -7 \\ \hline 33I_1 &= 11 \end{aligned}$$

Luego: $I_1 = 1/3\ A$; sustituyendo e (Ecuación M1): $4 - 3I_2 = 6$; $\rightarrow$ $I_2 = -2/3\ A$

La corriente de la rama central es: $i_{12} = I_1 - I_2 = 1/3 - (-2/3) = 1\ A$ en el sentido de I_1

Dibujamos las corrientes de rama en el circuito, con su sentido correcto, considerándolas a partir de este momento todas positivas.



$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 = 1/3\ A \\ i_2 &= -I_2 = 2/3\ A \\ i_{12} &= 1\ A \end{aligned}$$

b)

$$V_A - V_B = i_1 \cdot 3 + i_{12} \cdot 1 - (-5) = 7\ V$$
$$V_A - V_C = i_1 \cdot 3 - i_2 \cdot 3 = -1\ V$$

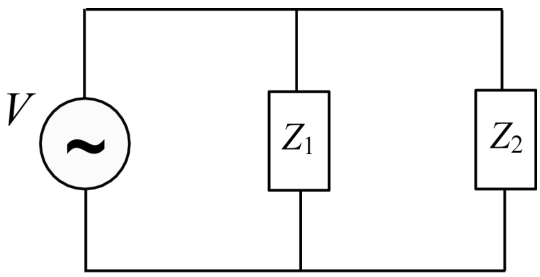
c) Teniendo en cuenta el sentido de las corrientes:

La f.e.m. de 11 V aporta: $P_{AP} = \varepsilon_{11} \cdot i_1 - i_1^2 \cdot r_i = 11 \cdot (1/3) - (1/3)^2 \cdot 1 = 3.56\ W$

La f.e.m. de 12 V aporta: $P_{AP} = \varepsilon_{12} \cdot i_2 - i_2^2 \cdot r_i = 12 \cdot (2/3) - (2/3)^2 \cdot 1 = 7.56\ W$

La f.e.m. de 5 V consume: $P_C = \varepsilon_5 \cdot i_{12} + i_{12}^2 \cdot r_i = 5 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 6\ \mathrm{W}$

P2. En el circuito de la figura calcula: (a) La intensidad suministrada por la fuente de alterna [2 puntos]. (b) La potencia disipada en cada una de las impedancias.[2 puntos].



Datos: $\overline{V} = 200\,\underline{|30^{\circ}}\rangle$ V; $\overline{Z}_1 = j40\,\Omega$

$\overline{Z}_2 = 30 - j\,40\,\Omega$

SOLUCIÓN:

a) Necesitamos conocer la impedancia total del circuito:

$$\bar{Z}_1 = j40 = 40\,\underline{|90^o\rangle}; \qquad \bar{Z}_2 = 30 - j40 = 50\,\underline{|-53.13^o\rangle}$$

Z_1 y Z_2 están en paralelo:

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{40\,\underline{|90^o\rangle} \cdot 50\,\underline{|-53.13^o\rangle}}{30\,\underline{|0^o\rangle}} = 66{,}67\,\underline{|36.87^o\rangle} = 53.33 + j\,40\,\Omega$$

Por lo tanto la corriente suministrada por la fuente será:

$$\bar{I}_T = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_e} = \frac{200\,\underline{|30^o\rangle}}{66{,}67\,\underline{|36.87^o\rangle}} = 3\,\underline{|-6.87^o\rangle} \quad A$$

b) Z_1 es una autoinducción (complejo imaginario positivo). No tiene parte real (resistencia) luego no disipa potencia.

También podemos ponerlo: $P_{dZ1} = I_{1ef} \cdot V_{ef} \cdot \cos\phi_1 = 0$, ya que $\phi_1 = 90^o$ y $\cos 90^o = 0$

$P_{dZ_2} = I_{2ef}^2 \cdot R_2$ siendo: $I_{2ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z_2} = \dfrac{200}{50} = 4\ A$ y $R_2 = 30$ la parte real de Z_2

$$\Rightarrow \qquad P_{dR} = 4^2 \cdot 30 = 480\ W$$

También puede obtenerse como: $P_{dZ2} = I_{2ef} \cdot V_{ef} \cdot \cos\phi_2 = 4 \cdot 200 \cdot \cos(-53.13^o) = 480 \quad W$

Y como sólo hay una resistencia en el circuito:

$$P_{dZ2} = P_{AC} = I_{Tef} \cdot V_{ef} \cdot \cos\phi_T = 3 \cdot 200 \cdot \cos(36.87^o) = 480 \quad W$$

P3. Una onda EM de frecuencia 10^{14} Hz viaja en el sentido positivo de una fibra óptica rectilínea, dispuesta a lo largo del eje X, cuyo índice de refracción es n=1.5. Su campo eléctrico vibra en la dirección del eje Z y tiene una amplitud de $3{\cdot}10^{-3}$ V/m. Calcula: (a) La longitud de onda [1 punto]. (b) Los campos eléctrico y magnético asociados [1 punto].

SOLUCIÓN:

a)

$$\text{n} = \frac{c}{\text{v}} \quad \rightarrow \quad v = \frac{3\cdot 10^8}{1.5} = 2\cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{Como: } \lambda f = v \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f} = 2\cdot 10^{-6} \text{ m}$$

b)

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 10^{14} \text{ rad/s}; \qquad k = 2\pi/\lambda = \pi\cdot 10^6 \text{ rad/m} \quad \text{y} \quad B_0 = E_0/v = 1.5\cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Luego:

$$\vec{E}(x,t) = 3\cdot 10^{-3}\sin(2\pi\times 10^{14} t - \pi\times 10^6 x)\vec{k} \text{ V/m}$$
$$\vec{B}(x,t) = 1.5\cdot 10^{-11}\sin(2\pi\times 10^{14} t - \pi\times 10^6 x)(-\vec{j}) \text{ T}$$

Nota: si tomamos $\vec{E} = E(-\vec{k})$ entonces $\vec{B} = B\,\vec{j}$