TEMA 4: FUNDAMENTOS DE MAGNETISMO

- Movimiento de cargas en campos magnéticos
- Fuerzas sobre corrientes. Dipolo Magnético
- Ley de Biot y Savart.
- Ley de Gauss para el campo magnético
- Ley de Ampère: Aplicaciones

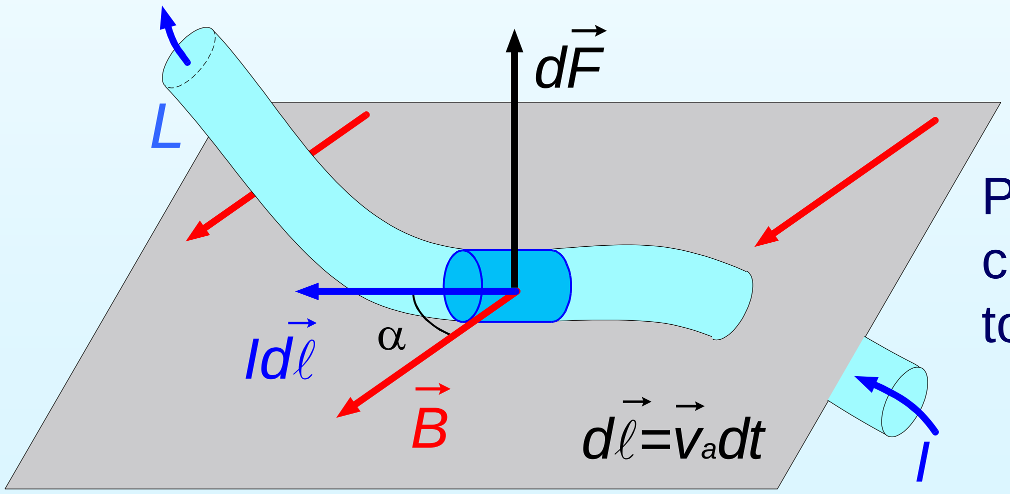
Fuerzas sobre corrientes

Conocemos la fuerza que B crea sobre una pequeña carga *dq* dentro de una corriente eléctrica *I* : $d\vec{\mathbf{F}} = dq\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

Por otro lado conocemos: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{\ell}}{dt}; dq = I\,dt$

$$d\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{I}dt\left(\frac{d\vec{\ell}}{dt} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathrm{I}\left(d\vec{\ell} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right)$$

Por tanto, la fuerza sobre un pequeño tramo de corriente es:



$$\boxed{d\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{I}\left(d\vec{\ell} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right)}$$

Para hallar la fuerza sobre toda la corriente integraremos a lo largo de toda la trayectoria L :

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{I}\int_L d\vec{\ell} \wedge \vec{\mathbf{B}}}$$

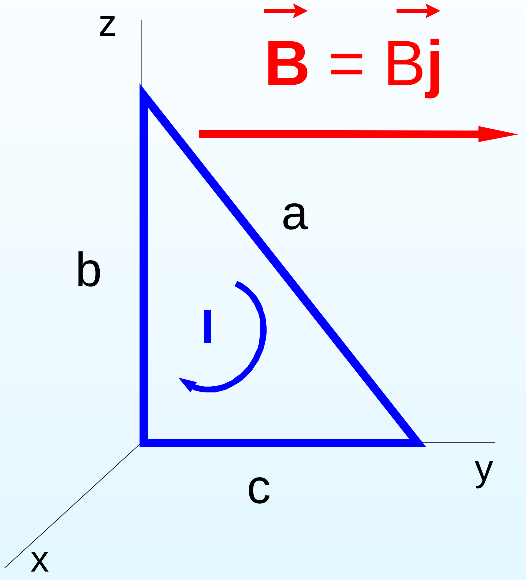
Fuerzas sobre corrientes

Para un conductor rectilíneo y $\vec{B}$ uniforme se puede simplificar en la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{I}\vec{L} \wedge \vec{\mathbf{B}}}$$

Fuerzas sobre corrientes

ejercicio/ Calcula la fuerza magnética sobre la siguiente espira de corriente.



$$\vec{\mathbf{F}}_{total} = \vec{\mathbf{F}}_a + \vec{\mathbf{F}}_b + \vec{\mathbf{F}}_c$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{I}\vec{L} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_a = \mathrm{I}\left(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathrm{I}\left(\left(-b\vec{\mathbf{k}} + c\vec{\mathbf{j}}\right) \wedge B\vec{\mathbf{j}}\right) = \mathrm{I}bB\vec{\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_b = \mathrm{I}bB\left(\vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{j}}\right) = -\mathrm{I}bB\vec{\mathbf{i}}$$

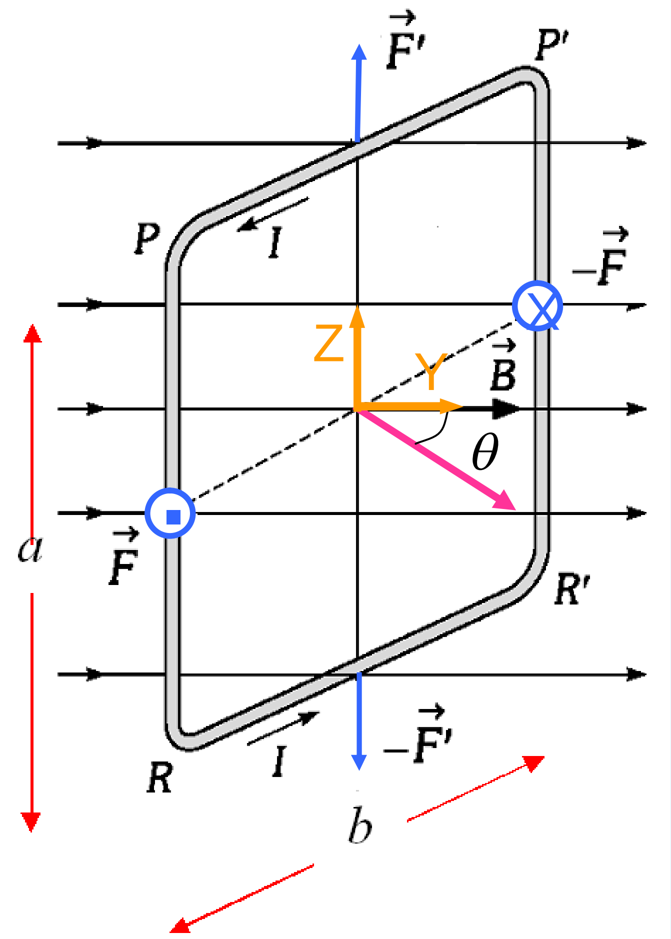
$$\vec{\mathbf{F}}_c = \mathrm{I}cB\left(\vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{j}}\right) = 0$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{total} = 0$$

Dipolo magnético. Momento de fuerzas

Dipolo magnético = espira cerrada

Queremos hallar el momento de fuerzas τ sobre una espira situada en un campo *B* uniforme:

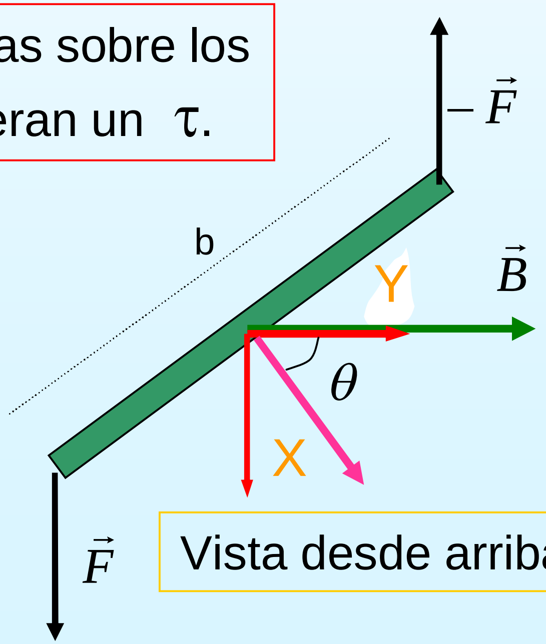


1º) Hallamos la fuerza sobre cada lado.

$$\vec{F}=I\vec{L}\wedge\vec{B}\begin{cases}\text{lados P'P y RR':} & \vec{F}_{P'P}=-\vec{F}_{RR'}\\ \text{lados PR y R'P':} & \vec{F}_{PR}=-\vec{F}_{R'P'}\end{cases}$$

Vemos que las fuerzas sobre los lados PR y P'R' generan un τ.

$$\left|\vec{F}\right|=IaB$$

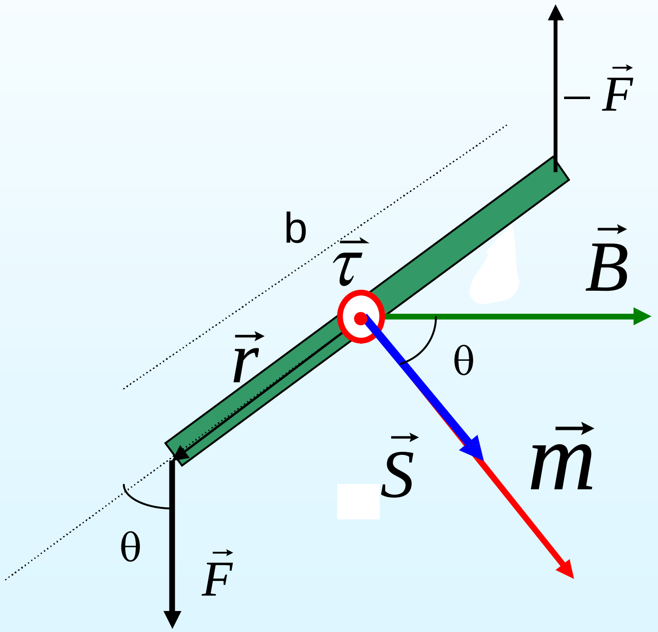


Vista desde arriba

Dipolo magnético. Momento de fuerzas

Dipolo magnético = espira cerrada

Queremos hallar el momento de fuerzas sobre una espira situada en un campo B uniforme:



2º) Hallamos el momento de fuerzas τ :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \left|\vec{\tau}_O\right| = \frac{b}{2}\left|\vec{F}\right| sen\theta = \frac{b}{2} IaBsen\theta$$

Por tanto: $\vec{\tau}_{total} = 2\vec{\tau}_O = IabBsen\theta\,\vec{k}$

$$\vec{\tau}_{total} = ISBsen\theta\,\vec{k} \qquad \boxed{\vec{\tau}_{total} = I\vec{S} \wedge \vec{B}}$$

Que se puede escribir como: $\boxed{\vec{\tau}_{total} = \vec{m} \wedge \vec{B}}$

Siendo ***m*** el momento dipolar magnético de la espira (dipolo magnético) definido como: $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$

Al igual que en el dipolo eléctrico

Dipolo magnético. Momento de fuerzas

Dipolo magnético = espira cerrada

Por tanto, cuando tengamos un circuito cerrado por el que circula una corriente, éste se puede reducir a un dipolo magnético de momento dipolar:

$$\boxed{\vec{m} = I\vec{S}} \qquad \boxed{\vec{p} = qd\,\vec{u}_p}$$

En presencia de un campo *B* el dipolo girará si el momento de fuerzas debido al campo *B* es no nulo:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}} \qquad \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

Al igual que en el caso del dipolo eléctrico, ahora también podemos asignar una energía potencial al dipolo magnético que viene dado por (no lo demostramos):

$$\boxed{U_{dipolo} = -\vec{m} \cdot \vec{B}} \longrightarrow$$

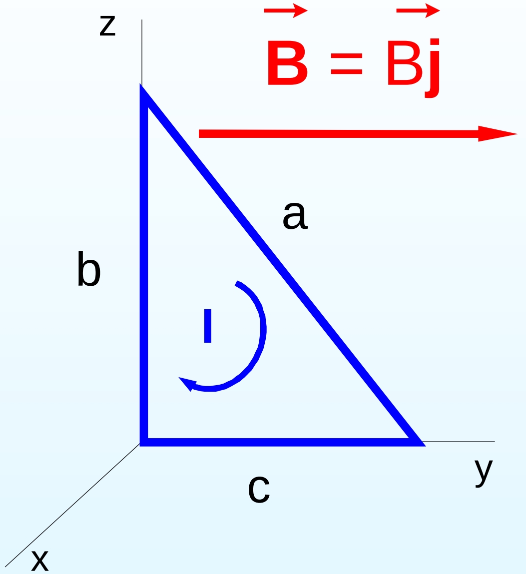
el dipolo se alinea con el campo B

$$\boxed{U_{dipolo} = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

Vemos que las expresiones para el dipolo eléctrico y para el dipolo magnético son equivalentes. Las líneas de campo que generan ambos dipolos son también equivalentes.

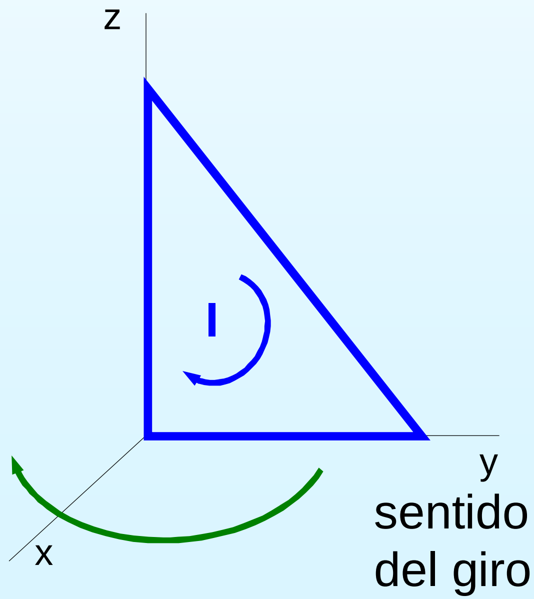
Dipolo magnético. Momento de fuerzas

ejercicio/ Calcula el momento de fuerzas sobre la siguiente espira de corriente.



$$\vec{m} = I\vec{S} = I\,\frac{1}{2}bc\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{2}Ibc\,\vec{i} \wedge B\,\vec{j} = \frac{1}{2}IbcB\left(-\vec{k}\right)$$



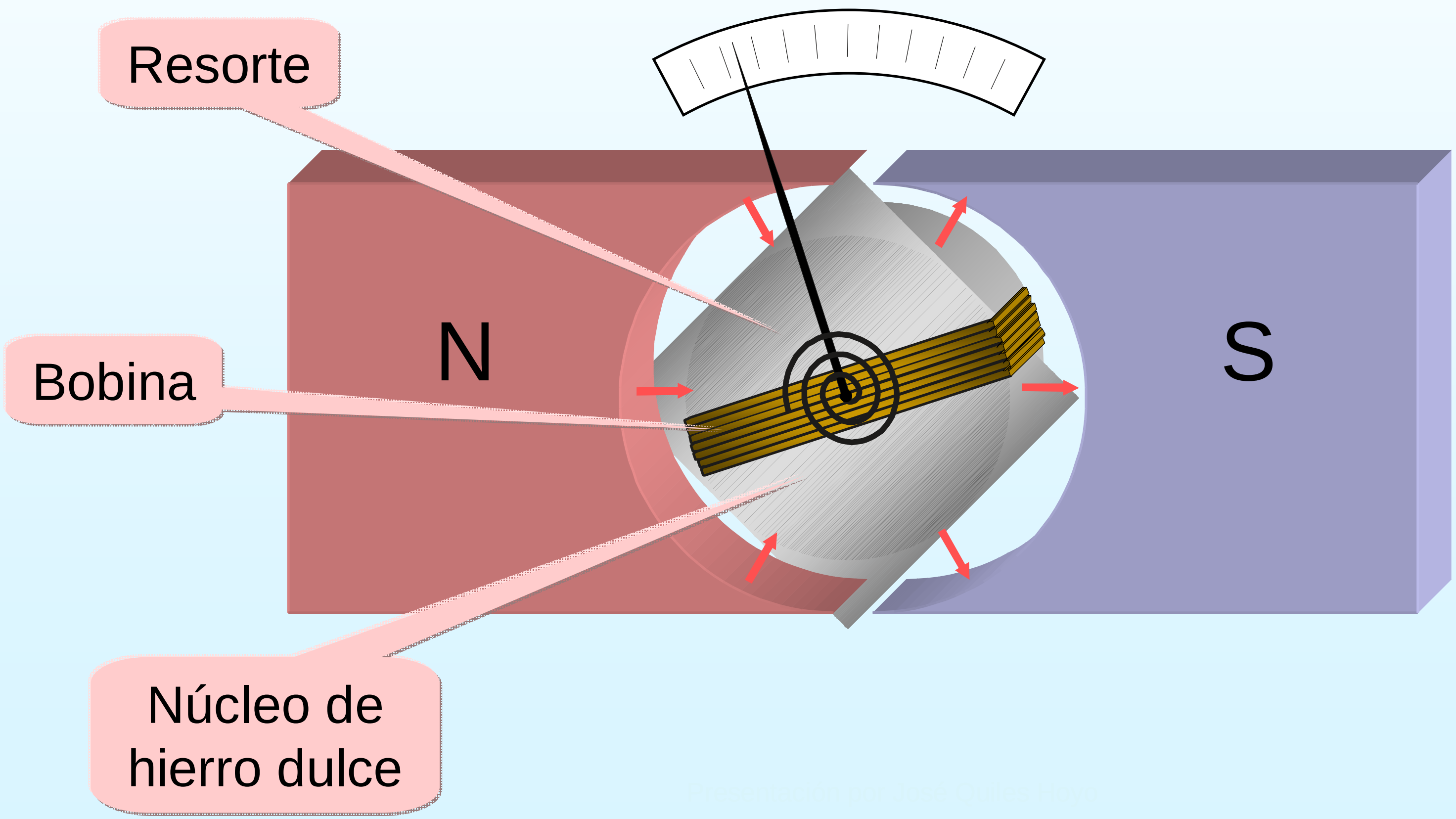
Por tanto: $$\vec{\tau} = \frac{1}{2}IbcB\left(-\vec{k}\right)$$

Dipolo magnético. Momento de fuerzas

Galvanómetro: sirve para medir la intensidad de corriente (amperímetro).

Se hace que la corriente pase por una bobina, en el seno de un campo magnético.

La bobina (dipolo magnético) intentará alinearse con el campo B y la aguja acoplada al dipolo marca la intensidad correspondiente sobre el visor del galvanómetro.

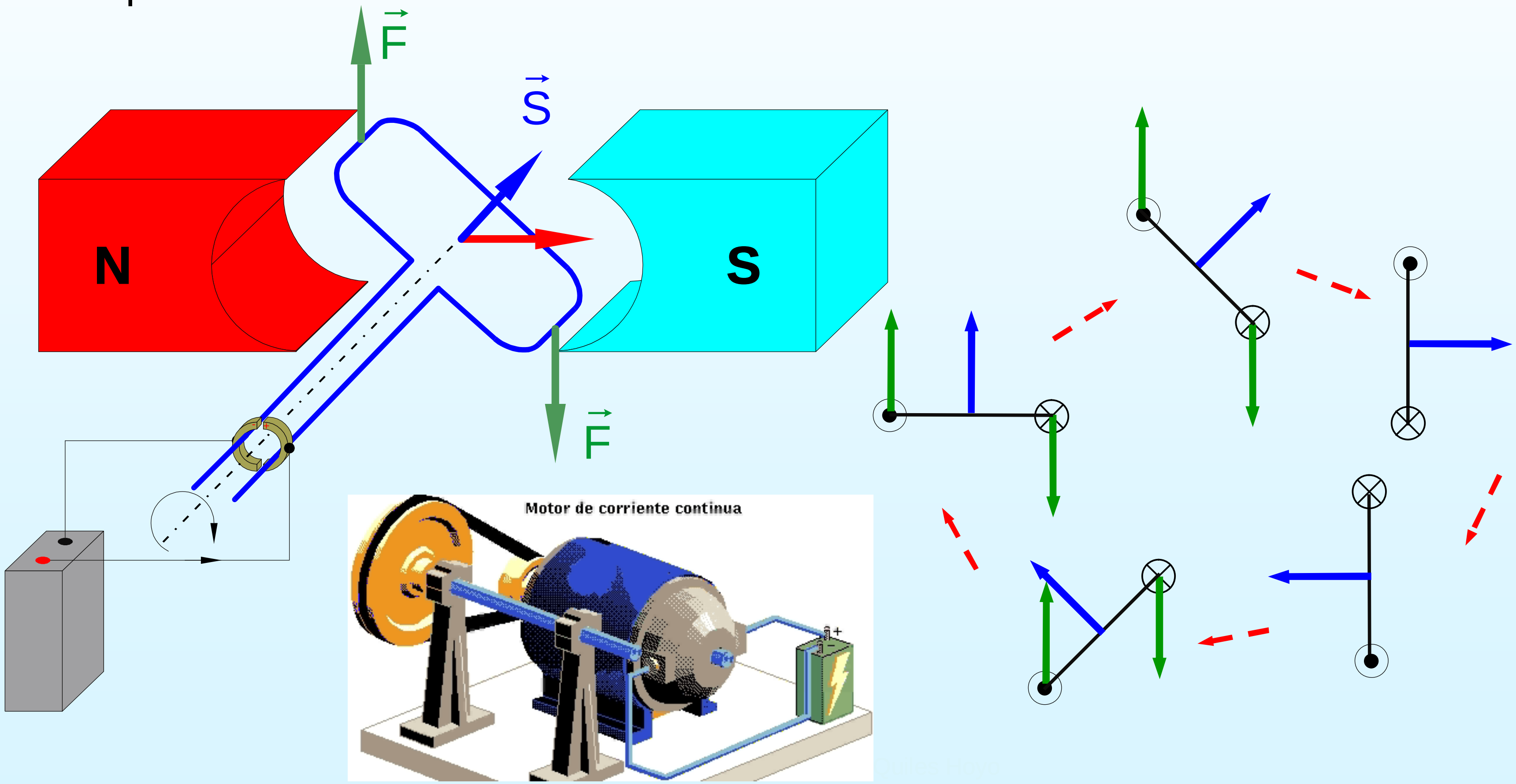


Dipolo magnético. Momento de fuerzas

Motor eléctrico de corriente continua.

El momento de fuerzas generado sobre una espira se puede aprovechar para mover un motor.

Cada medio ciclo se cambia el sentido de la corriente en la espira para que ésta gire siempre en el mismo sentido.



Campos magnéticos producidos por corrientes

La experiencia de Oersted muestra como una corriente (cargas eléctricas) es capaz de generar un campo magnético.

Encontramos situaciones en las que la carga eléctrica y el magnetismo están estrechamente relacionados:

• un campo $\vec{B}$ genera fuerza sobre cargas en movimiento.

• una carga en movimiento genera un campo $\vec{B}$ (Oersted).

Ahora veremos un par de maneras de calcular el campo $\vec{B}$ creado por una corriente eléctrica:

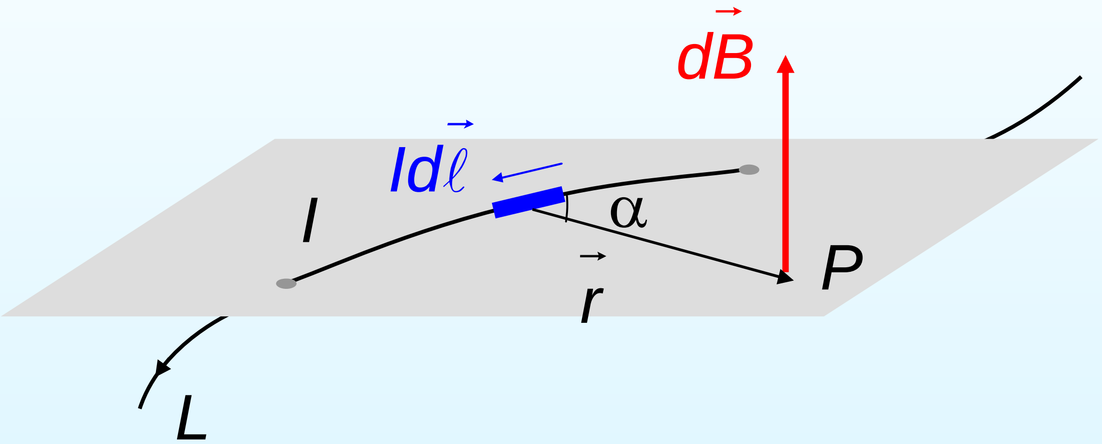
• ley de Biot-Savart (de aplicación general)

• ley de Ampère (facilita el cálculo en el caso de corrientes con elevada simetría)

Ley de Biot-Savart

La **ley de Biot-Savart** es una ley empírica que nos permite calcular el campo $\vec{B}$ creado por una corriente en un punto del espacio.

contribución de un pequeño tramo de corriente *dl*



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

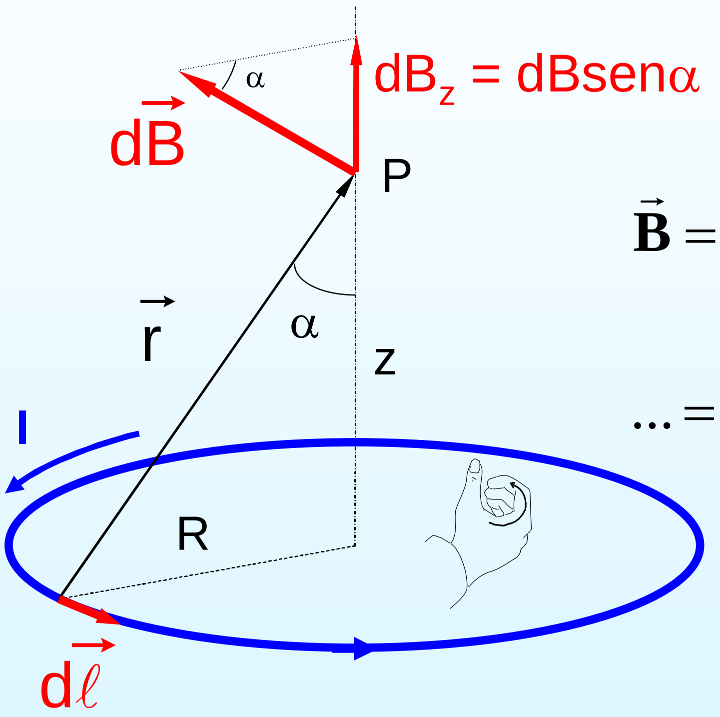
contribución total del conductor de longitud *L*

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2}}$$

Permeabilidad del vacío
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (en unidades del S.I.)

Ley de Biot-Savart

ejercicio/ Campo magnético creado por una espira circular en un punto P cualquiera de su eje.



$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \left(\int dB_z\right)\vec{\mathbf{k}} = \left(\int dBsen\alpha\right)\vec{\mathbf{k}} = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\ell}{r^2} sen\alpha\right)\vec{\mathbf{k}} = \ldots$$

$$\ldots = \left(\frac{\mu_0 I sen\alpha}{4\pi\, r^2}\int d\ell\right)\vec{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I sen\alpha\, L}{4\pi\, r^2}\vec{\mathbf{k}}$$

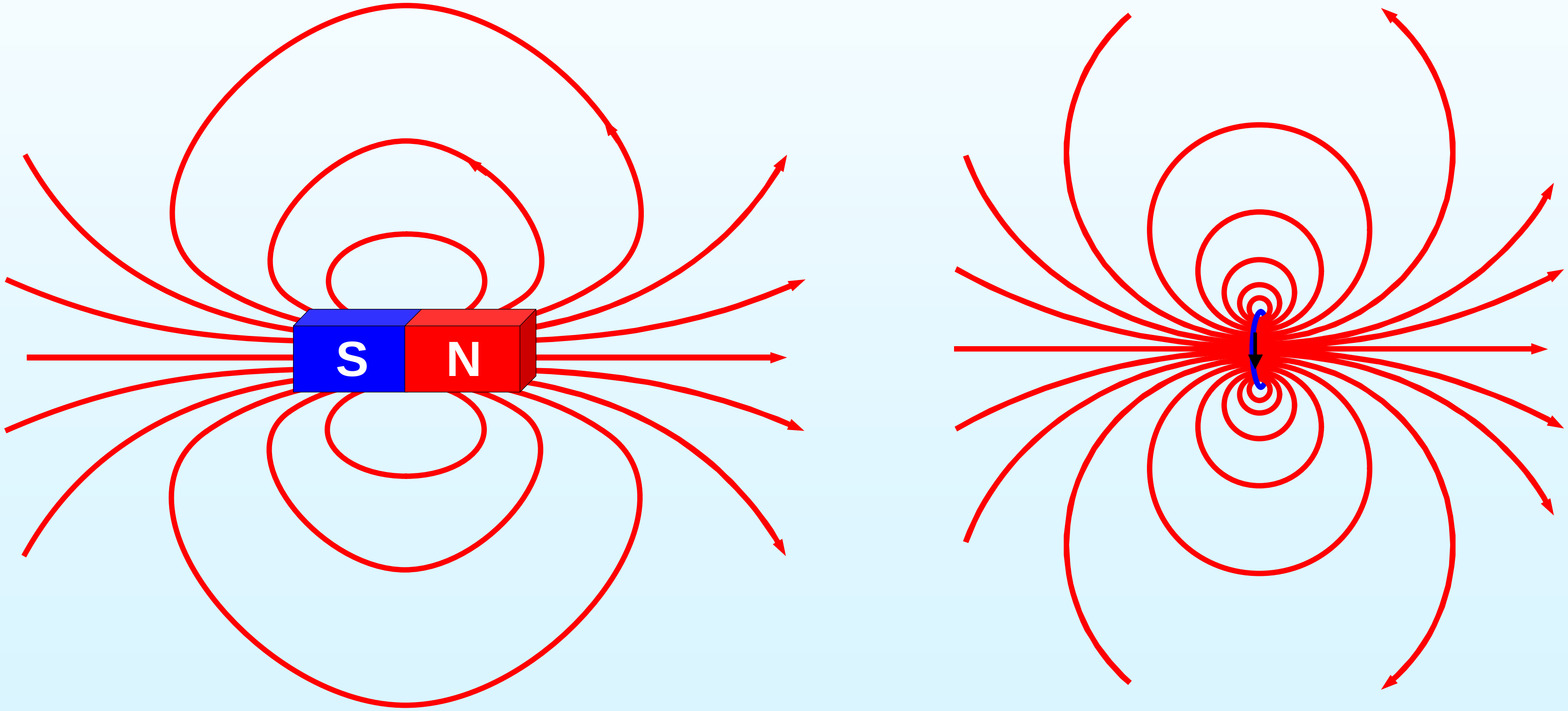
Teniendo en cuenta: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{r}$ $\quad r = \sqrt{R^2 + z^2}$ $\quad L = 2\pi R$

Podemos escribirlo: $$\boxed{\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}\vec{\mathbf{k}}}$$

Ley de Biot-Savart

Las líneas de campo $\vec{B}$ debidas a un circuito cerrado (espira) son equivalentes a las de un imán.

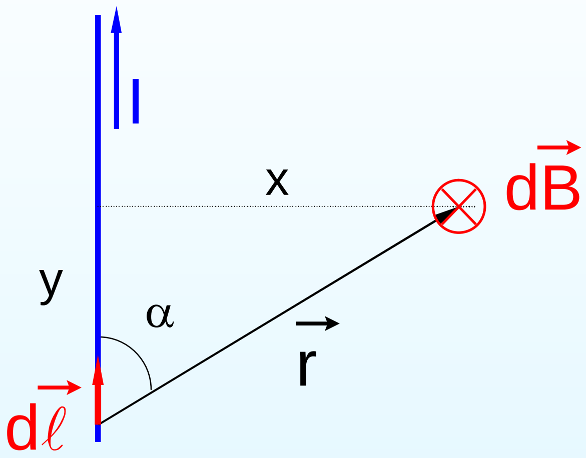
Por tanto, un imán y una espira de corriente (según como se orienten) pueden atraerse o repelerse entre sí.



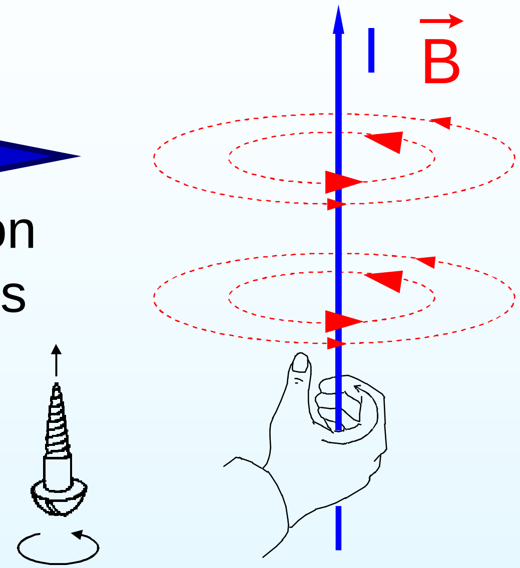
Ley de Biot-Savart

Líneas de campo de dos configuraciones típicas:

- CASO 1/ hilo rectilíneo infinito



líneas de campo son círculos concéntricos

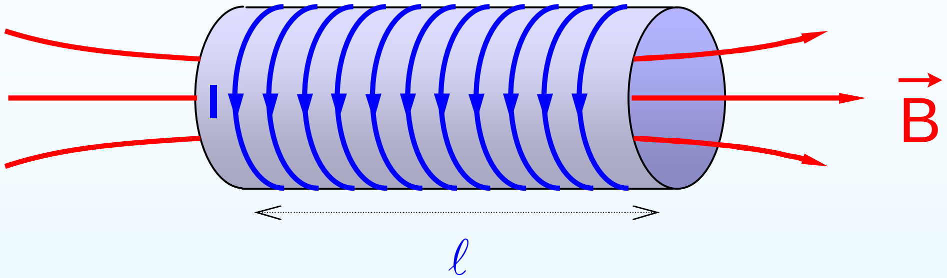


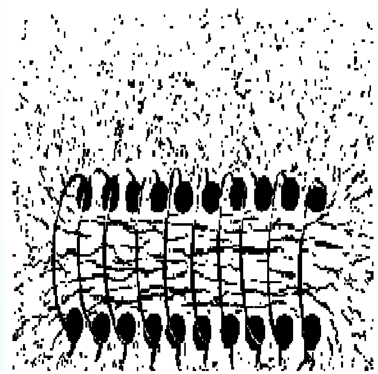
hallaremos el módulo de B usando la Ley de Ampère (más fácil)

Ley de Biot-Savart

Líneas de campo de dos configuraciones típicas:

• CASO 2/ solenoide (= bobina)



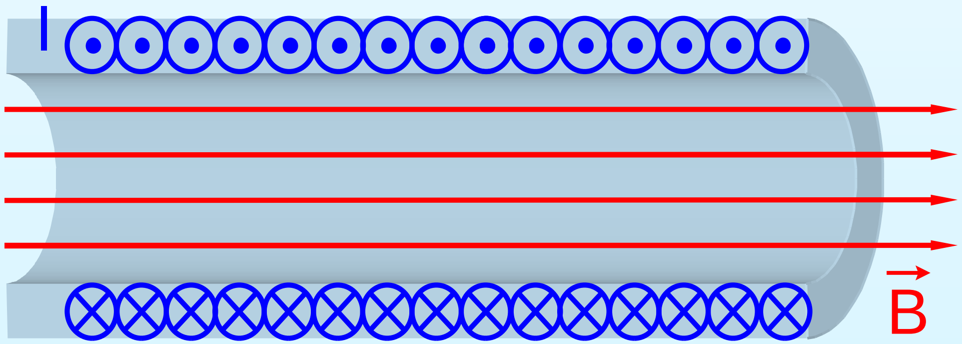


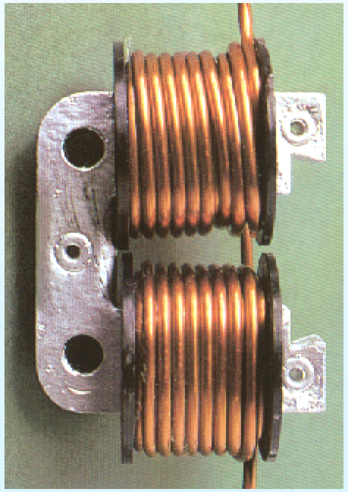
distribución de limaduras de hierro frente a un solenoide con 10 espiras

para un solenoide estrecho y **densamente enrollado**:

• B en el interior es uniforme y paralelo al eje

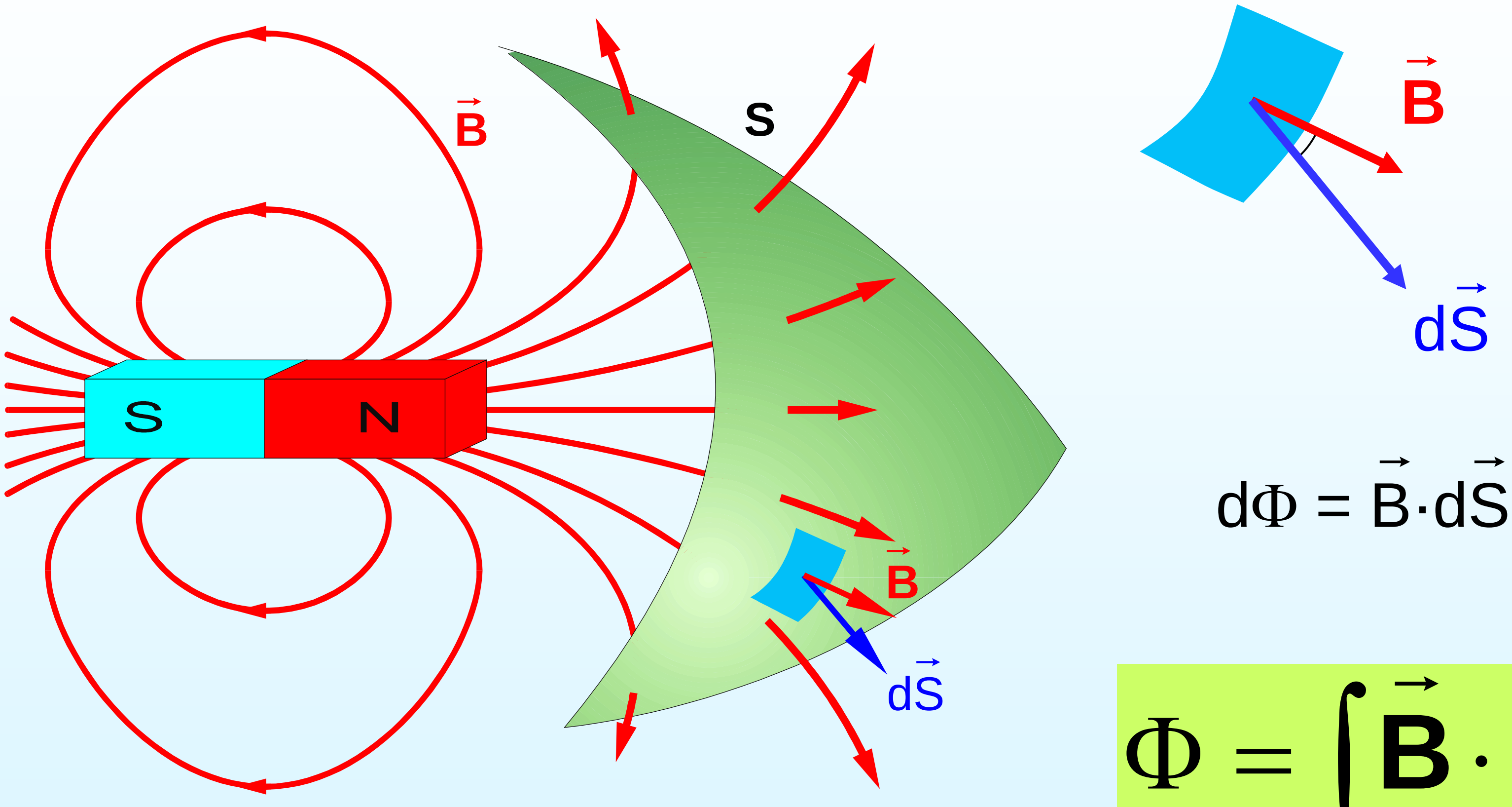
• B en el exterior es nulo





hallaremos B usando la Ley de Ampère (más fácil)

Flujo magnético. Ley de Gauss



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

En el S.I.: Weber Wb = T·m^2

Flujo magnético. Ley de Gauss

- Como no existen monopolos magnéticos (o al menos no han sido observados), las líneas de fuerza del campo magnético B son cerradas

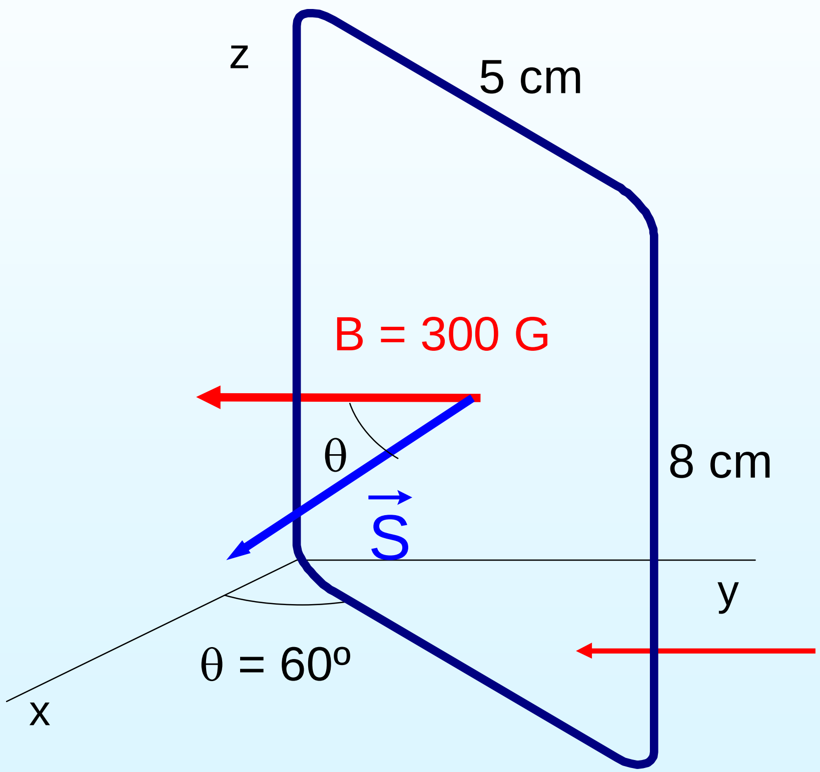
- Si consideramos una superficie cerrada en un campo magnético, el flujo magnético que entra es igual al que sale, ya que el número de líneas que entran deben salir.

LEY DE GAUSS PARA EL CAMPO MAGNÉTICO:
El flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre cero

$$\oint_{SC} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Flujo magnético. Ley de Gauss

ejercicio/ calcula el flujo de campo magnético a través de la siguiente superficie.



$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\cos 60\, dS$$

$$\Phi = \int_S B\cos 60\, dS = B\cos 60 \int_S dS$$

$$\Phi = B\cos 60\, S$$

$$S = 40\, cm^2$$

$$\boxed{\Phi = 0.03\cdot 0.5\cdot 40\cdot 10^{-4} = 6\cdot 10^{-5}\, Wb}$$

Ley de Ampère

LEY DE AMPÈRE

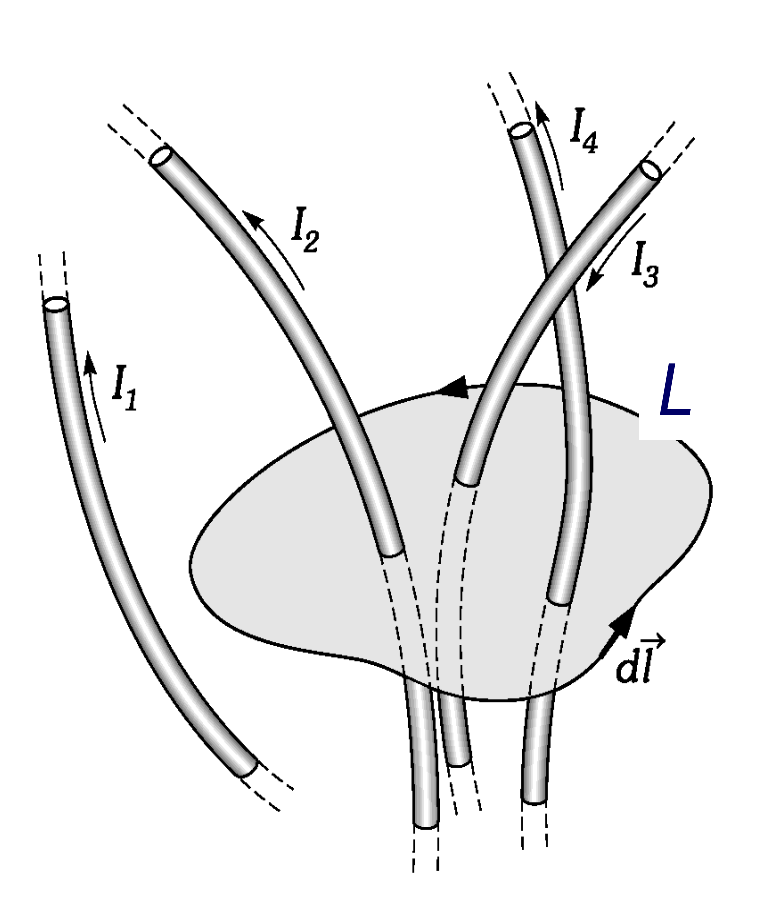
"La circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada que enlaza las corrientes I_1, I_2, I_3, ..., es:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$$

donde $I_e = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$ (con su signo) es la corriente total enlazada por la trayectoria *L*".

Ley de Ampère

convenio de signos (regla de la mano derecha):



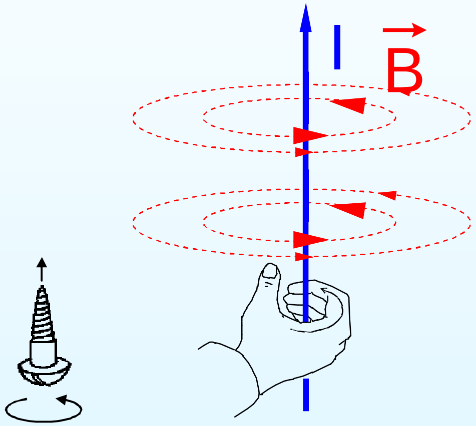
$$I_{enlazada} = I_2 - I_3 + I_4$$

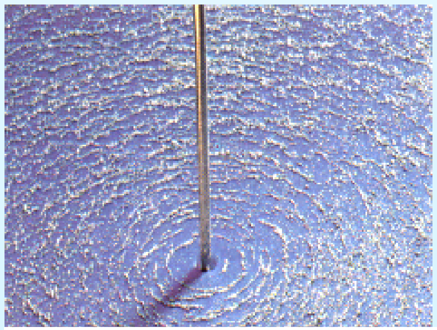
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$$

Ley de Ampère. Aplicaciones

CASO 1/ Hilo rectilíneo infinito.

con ley de Biot-Savart sabemos que las líneas de campo son círculos concéntricos

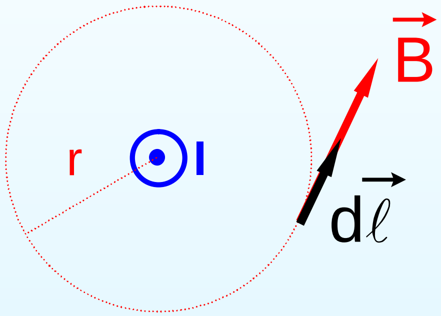




distribución de limaduras de hierro en un hilo rectilíneo

escogemos trayectoria L sencilla para aplicar ley de Ampère:

L igual a una línea de campo



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\ell} = \oint_L B\,dl = B\,L \quad ; \; I_{enlazada} = +I$$

Por tanto (módulo):

$$B\,L = \mu_0 I \xrightarrow{L = 2\pi\, r} \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

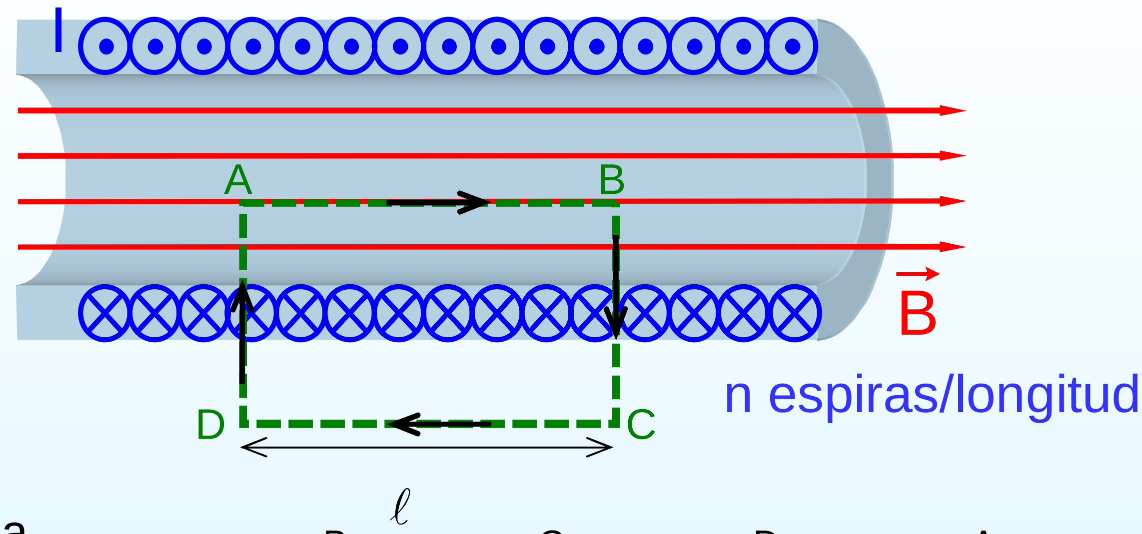
Ley de Ampère. Aplicaciones

CASO 2/ Solenoide densamente enrollado y estrecho.

con ley de Biot-Savart sabemos que las líneas de campo son:

• uniformes y paralelas al eje en el interior

• cero en el exterior



escogemos trayectoria L sencilla para aplicar ley de Ampère:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$$

L rectángulo con lados paralelos y perpendiculares al eje del solenoide

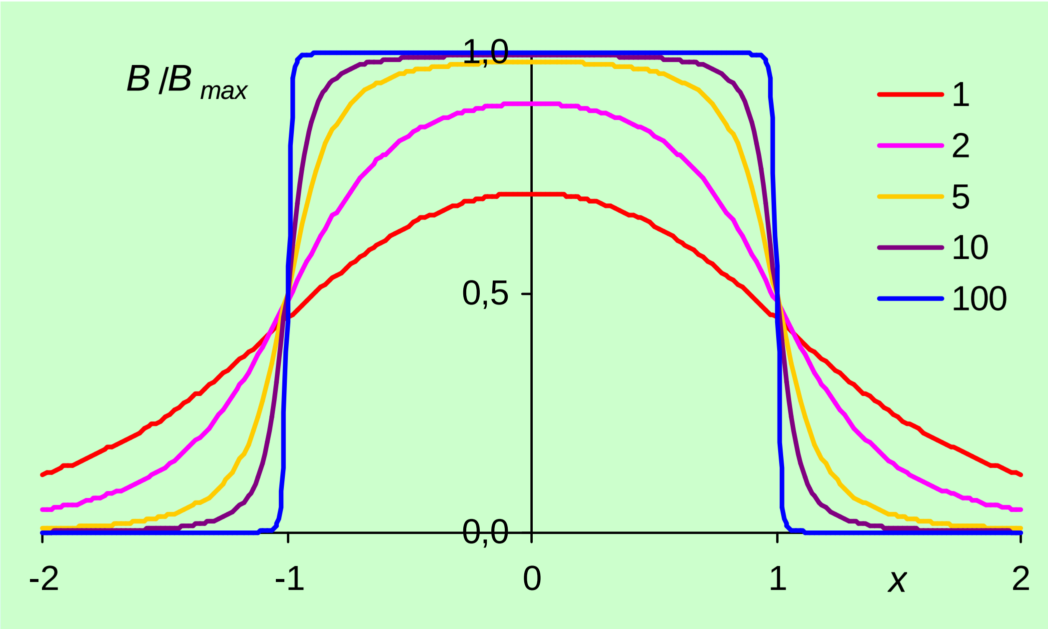
$B\ell$ + By cos90º + 0 + Bycos90º = $B\ell$

$I_{enlazada} = n\ell$

Por tanto (módulo): $\boxed{B = \mu_0 nI}$

Ley de Ampère. Aplicaciones

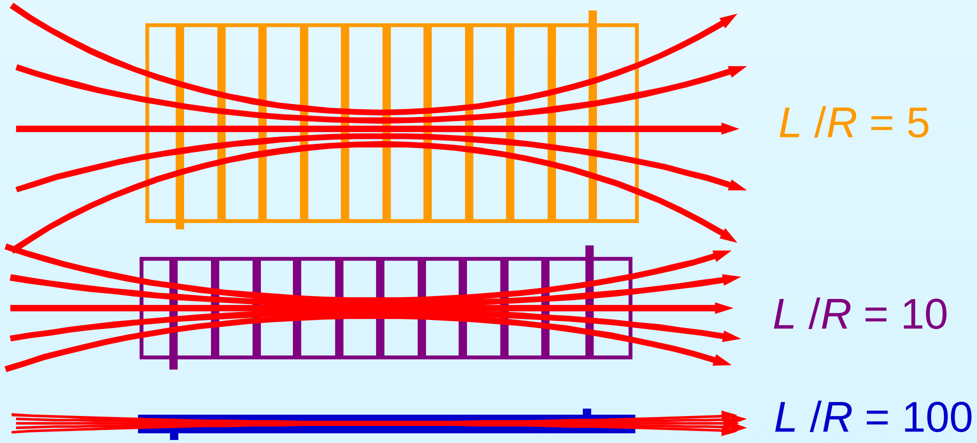
CASO 2/ Solenoide. Comparación con situación real.



Distintas relaciones longitud/radio: *L /R (longitud/radio)*

El máximo representa el valor que se obtendría con la fórmula aproximada

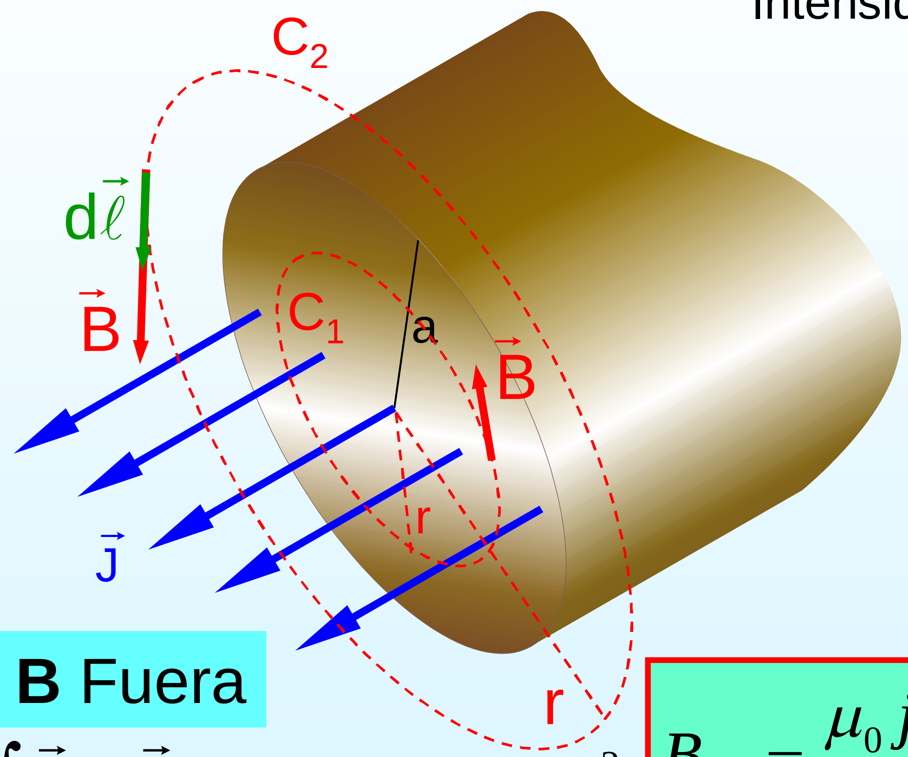
$$\boxed{B \cong \mu_0 \mathrm{nI}}$$



En los solenoides estrechos (*L /R* > 5), casi no hay variación de campo magnético dentro del solenoide

Ley de Ampère. Aplicaciones

ejercicio/ Campo dentro y fuera de un conductor con densidad de corriente *j* uniforme.



Intensidad que circula por el conductor:

$$\mathrm{I} = jS = j\pi a^2$$

B Dentro

$$\oint_{C1} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B2\pi r; \quad I_e = \int \vec{j} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = j\pi r^2$$

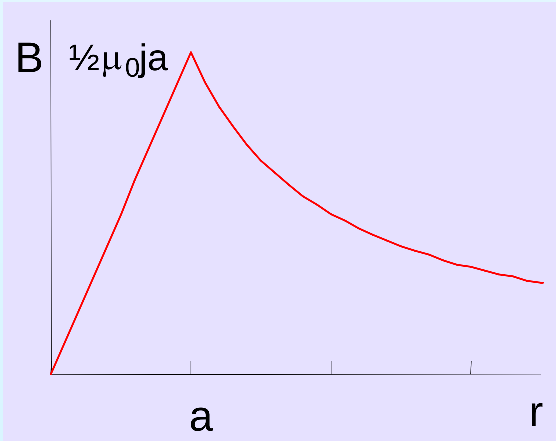
$$\boxed{B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 jr}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r}$$

B Fuera

$$\oint_{C2} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \mathrm{I}_e = \mu_0 j\pi a^2$$

$$\boxed{B_{ext} = \frac{\mu_0 j a^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

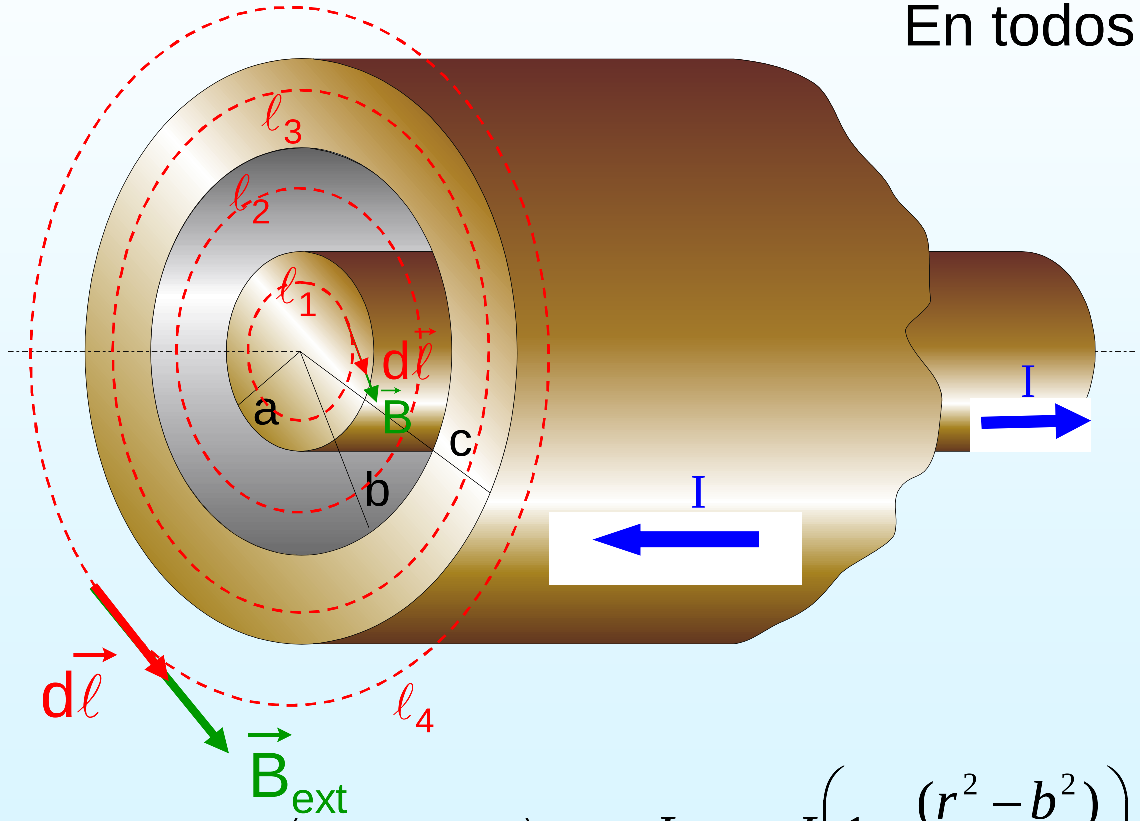
*igual que **B** de un hilo rectilíneo infinito*



Ley de Ampère. Aplicaciones

ejercicio/ Campo creado por un cable coaxial (corriente de ida y vuelta). Distinguimos cuatro regiones y elegimos como camino círculos concéntricos de radio r.

En todos los casos: $\oint_{\ell} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\, 2\pi\, r$



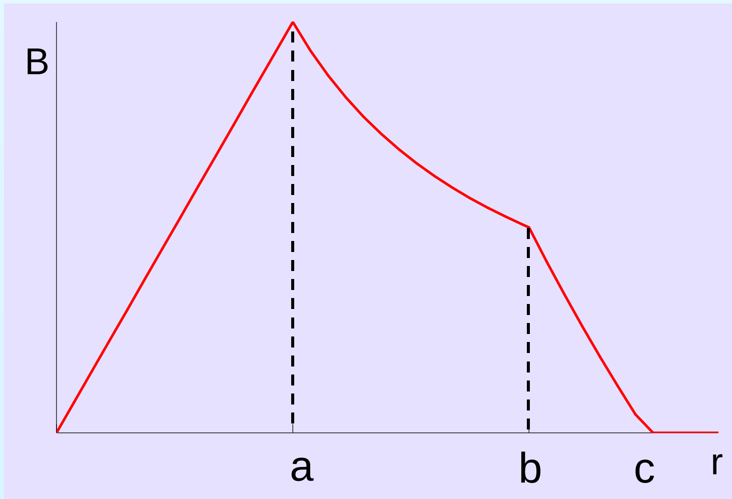
$$\ell_1 : \quad I_e = \int \vec{j} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{\mathrm{I}}{\pi\, a^2} \cdot \pi\, r^2$$

$$\ell_2 : \quad I_e = I$$

$$\ell_4 : \quad I_e = (I - I) = 0$$

$$\ell_3 : \quad I_e = \left(I - \int \vec{j} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \right);$$

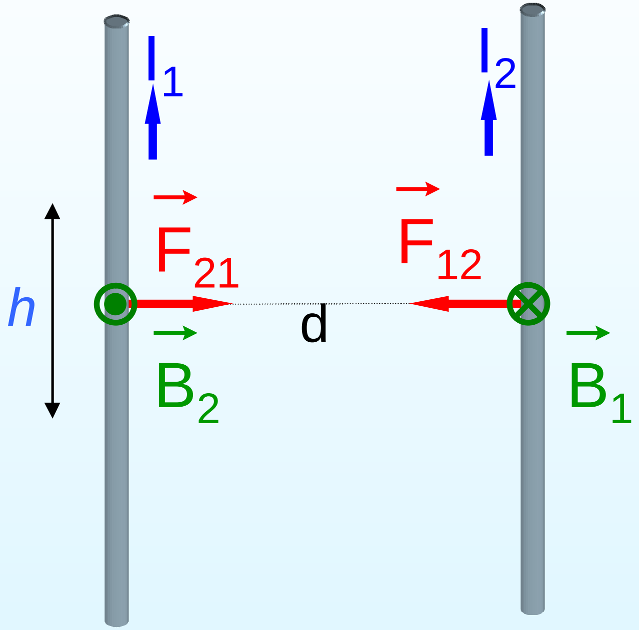
$$I_e = \mu_0 I \left(1 - \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \right)$$



Fuerzas entre corrientes

Vamos a ver que dos corrientes eléctricas interaccionan entre sí:

Fuerza que crea I_1 sobre un tramo de longitud *h* de la corriente I_2:



$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d}$$

$$\vec{F}_{12} = I_2 \vec{L}_2 \wedge \vec{B}_1$$

la fuerza apunta hacia el conductor 1

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = I_2 h \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d}$$

El mismo resultado habríamos tenido para la fuerza F_{21}, salvo que la fuerza apuntaría hacia el conductor 2

si I_1 e I_2 tienen igual sentido $\longrightarrow$ ATRACCIÓN

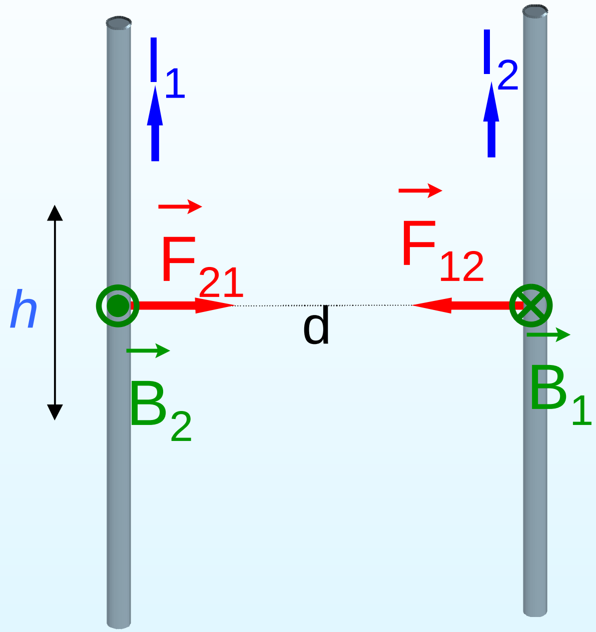
si I_1 e I_2 tienen sentido opuesto $\longrightarrow$ REPULSIÓN

La fuerza por unidad de longitud (N/m) es:

(se aplica para definir el Amperio)

$$f_{12} = f_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\, d}$$

Fuerzas entre corrientes



$$f_{12} = f_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Definición de Amperio:

El amperio es la intensidad de una corriente constante que, mantenida entre dos conductores paralelos rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a la distancia de un metro uno de otro en el vacío, producirá una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de longitud.