Tema 4:
Valores y vectores propios de una matriz
AUTOVALORES / AUTOVECTORES

AUTOVALORES / AUTOVECTORES

Sea A una matriz cuadrada (nxn) de R,

Si existe **x** vector columna (**x** ≠ **0**) de R^n y **λ** un escalar (real o complejo) /

$$\mathbf{A\,x = \lambda\,x} \quad (1)$$

λ recibe el nombre de **autovalor** o valor propio

x es un **autovector** o vector propio asociado a **λ** .

El conjunto de todos

los **autovectores asociados** a un **mismo autovalor** λ

se llama **autoespacio o subespacio propio,**

$\mathbf{E_A(\lambda)}$

AUTOVALORES / AUTOVECTORES

- Cada autovalor tiene asignados infinitos autovectores
- Cada autovector está asociado a un único autovalor.

- En $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$, el autovector **x no es único**, pues cualquier otro vector múltiplo de **x** también es un autovector asociado al mismo autovalor.
- Ej. Sea x autovector asociado a $\boldsymbol{\lambda}$ e $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ (α real no nulo) →

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{Ax}) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}(\alpha\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{y}$$

AUTOVALORES / AUTOVECTORES

EJEMPLO

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para la matriz **A** los vectores $v_1 = (1,-1)^T$ y $v_2 = (2,-2)^T$ son autovectores de A asociados a λ **= 1,** autovalor de A

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda v_1$$

$\boldsymbol{\lambda = 1}$

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda v_2$$

$$\mathbf{E_A(1) =} \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a \in R \right\}$$

CÁLCULO de AUTOVALORES

Al operar matricialmente con la ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se obtiene un sistema homogéneo

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} = 0$$

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0 \qquad (2)$$

- La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (SH)
- Los SH tienen solución trivial $x = 0$.
- Los autovectores deben ser no nulos, luego (2) debe **ser compatible indeterminado**, esto es,
  - la matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$, debe ser no invertible,
  - el determinante de la matriz de coeficientes de (3) debe ser nulo

CÁLCULO de AUTOVALORES

Para que el SH $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = 0$ sea SCI →

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0 \quad (3)}$$

→ Su solución está dada por **n** valores de **λ** (reales o complejos).

La ecuación (3) es una ecuación polinómica llamada

ecuación característica /

polinomio característico en potencias de λ

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

→ **Cada raíz del polinomio es un autovalor**

CÁLCULO de AUTOVALORES

Ej-1
(hoja 6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 21 = \lambda^2 + 4\lambda - 21$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -7 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}}$$

CÁLCULO de AUTOVALORES

Ej-2
(hoja 6)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$q_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$ (doble)

CÁLCULO de AUTOVALORES

Ej-1
(hoja 6)

Los **n** autovalores pueden **no ser distintos**,

Autovalores de la matriz A:
$\lambda_1 = -7$
$\lambda_2 = 3$

$q_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 21$

Autovalores de la matriz B:
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$ (doble)

$q_B(\lambda)$ $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$

El nº de autovalores está directamente relacionado con el grado del polinomio

Si $q_A(\lambda)$ es de **grado n** ➔ hay **n** autovalores

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA de un AUTOVALOR

Autovalores "repetidos" para una matriz

Si al factorizar $q_A(\lambda)$ aparece $(\lambda - \lambda_i)^k$ → λ_i tiene multiplicidad algebraica k

La **multiplicidad algebraica** de un autovalor λ_i **$ma(\lambda_i)$** es la multiplicidad que tiene λ_i como raíz de $q_A(\lambda)$

Ej-2 (hoja 6)

$\lambda_1 = -7$
$\lambda_2 = 3$

$ma(-7) = 1$
$ma(3) = 1$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$

$ma(0) = 1$
$ma(2) = 2$

❖ Para una matriz A (nxn) la suma de las multiplicidades algebraicas de sus autovalores asociados es n.

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

- La suma de los **n** autovalores de la matriz A es igual a su **traza**:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n = \text{traza}(A)$$

- El producto de los **n** autovalores de A es igual a su **determinante**:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \lambda_n = \det(A)$$

Ej-3
(hoja 6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -7 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}}$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -7 \cdot 3 = -21$

$\det(A) = -21$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -7 + 3 = -4$

$\text{traza}(A) = 2 - 6 = -4$

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

- Los autovalores de una **matriz triangular** (superior o inferior) son los **elementos de su diagonal**.
- La multiplicidad de un autovalor es el nº de veces que aparece en la diagonal.

Ej-4
(hoja 6)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = (3 - \lambda)\,(-\lambda)\,(2 - \lambda) \rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_1=3} \quad \boldsymbol{\lambda_2=0} \quad \boldsymbol{\lambda_3=2}$$

Diagonal de C : **3, 0, 2,**

ma(3)=ma(0)=ma(2)=1

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(D - \lambda I) = (4 - \lambda)^2(1 - \lambda) \rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=4} \quad \boldsymbol{\lambda_2=1}$$

ma(4)=2
ma(1)=1

Diagonal de D : **4, 1, 4**;

Teorema Cayley-Hamilton

Si A es una matriz cuadrada, entonces **q(A) = 0** (matriz nula)

En $\mathbf{q_A(\lambda)}$ sustituimos λ **por A**

Este resultado se usa para **calcular la inversa**

Ej-5
(hoja 6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$q(A) = A^2 - 2A - 3I = 0$$

$$A^2 - 2A - 3I = 0$$

$$A(A - 2I) = 3I$$

$$A(1/3(A - 2I)) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)).$$

CÁLCULO DE AUTOVECTORES asociados a los autovalores λ

Una vez obtenidos los autovalores se obtienen los autovectores asociados a ellos. Para ello:

- Cada autovalor $\boldsymbol{\lambda_i}$ se reemplaza en $\mathbf{(A - \lambda_i I)\, x = 0}$ (SCI) cuya solución da origen a una familia de vectores, **autovectores**

- La solución del SH es un **subespacio de $\mathbf{R^n}$:**

  $\mathbf{E_A(\lambda)}$ llamado **subespacio propio** de A asociado **a** λ

- $\mathbf{E_A(\lambda)}$ está formado por los autovectores asociados a λ

CÁLCULO DE AUTOVECTORES asociados a los autovalores λ

- Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces los autovectores correspondientes a autovalores diferentes asociados a A son **linealmente independientes.**

- **Una base** de $E_A(\lambda)$ estará formada por los autovectores asociados a λ.

$E_A(\lambda) = Nul(A- \lambda I)$

dimensión $E_A(\lambda)$ = **multiplicidad geométrica** de **λ**

$mg(\lambda)$.

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Dada matriz A,

- 1º Calcular sus autovalores y multiplicidad algebraica.

  Para ello resolver $\mathbf{q_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0}$

- 2º Calcular los autovectores asociados

  Para ello resolver SH $\mathbf{(A - \lambda I)\ x = 0}$ para cada autovalor λ

OjO: No calcular los valores propios de una matriz en su reducida ya que **no** siempre los autovalores coinciden.

Ej. Los autovalores de A = [1, 1; -2, 4] son $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$

Los de rref(A) = [1,0; 0,1] son $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$

PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES

Ej-8
(hoja 6)

Verificar que la matriz A = [1,2,0; 2,4,0; 0,0,1] posee tres autovalores distintos: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 5$, asociados, respectivamente, a los autovectores :

$$v_1 = (0, 0, 1); \quad v_2 = (-2, 1, 0); \quad v_3 = (1, 2, 0)$$

Probar que los autovectores son linealmente independientes.

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-6
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\mathbf{q_A(\lambda) = det(A - \lambda) = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{q_A(\lambda) =} (4-\lambda)\,(-4-\lambda)-9 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \mathbf{-5},\ m_a(-5) = 1 \\ \lambda_2 = \mathbf{5},\ m_a(5) = 1 \end{array}}$$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-6
(cont)
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda_1 = -5$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del SH está dada por vectores de la forma $\mathbf{x} = (x_1, -3x_1)^T$

$$\mathbf{E_A(\lambda_1)} = \mathrm{Env}\{(x_1, -3x_1)^T, x \in R\}$$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = -5$ es, por ej, $\mathbf{v_1} = (1, -3)^T$

CÁLCULO de AUTOVALORES /AUTOVECTORES

Ej-6 (cont) (hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Autovectores

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda_2 = \mathbf{5}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del SH está dada por vectores de la forma $\mathbf{x} = (3x_1, x_1)^T$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \mathrm{Env}\{(3x_1, x_1)^T, x \in R\}$$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 5$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = (3, 1)^T$

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-7
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1$**,** $\lambda_2 = 2$**,** $\lambda_3 = 3$ encontrar el **subespacio** propio asociado a cada autovalor y un autovector para cada uno de ellos

Para $\lambda_1 = 1$ $\quad$ $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rref}(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI $\rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\, x_1 = -\alpha/2; \quad x_2 = \alpha/2; \quad x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/2,\ 1/2,\ 1)^T$$

$$E_A(\lambda_1) = \mathrm{Env}\{\alpha\,(-1/2,\ 1/2,\ 1)^T\ \alpha \in R\ \}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_1) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 1$ es, por ej, $\mathbf{v_1} = (-1, 1, 2)^T$

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-7
(cont)
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda_2}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rref}(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI → $x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\; x_1 = -\alpha/2; \quad x_2 = \alpha/4; \quad x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/2,\ 1/4,\ 1)^T$$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\,(-1/2,\ 1/4,\ 1)^T\ \alpha \in R\ \}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_2) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 2$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = (-2, 1, 4)^T$

CÁLCULO del SUBESPACIO PROPIO asociado a un AUTOVALOR

Ej-7
(cont)
(hoja 6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Para } \lambda_3 = \mathbf{3}}$ $\quad (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}_3\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{rref}(A - \lambda_3 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SCI $\rightarrow$ $x = (x_1, x_2, x_3)^T \;/\; x_1 = -\alpha\mathbf{/4}; \quad x_2 = \alpha\mathbf{/4}; \; x_3 = \alpha$

$$x = \alpha\,(-1/4, 1/4, 1)^T$$

$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\,(-1/4, 1/4, 1)^T \; \alpha \in R\,\}$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_3) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_3 = 3$ es, por ej, $\mathbf{v_3} = (-1, 1, 4)^T$

Cálculo de autovalores /autovectores

Ej-8
(hoja 6)

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula los autovalores de A (3x3) e indica su multiplicidad algebraica.

Para calcular los autovectores encuentra el subespacio propio generado por cada autovalor e indica su multiplicidad geométrica.

Autovalores

$$\mathbf{q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \mathbf{0},\ m_a(0) = 1 \\ \lambda_2 = \mathbf{2},\ m_a(2) = 2 \end{array}}$$

Cálculo de autovalores /autovectores

Ej-8 (cont) (hoja 6)

Subespacio propio para λ_1

$\boxed{\text{Para } \lambda_1 = \mathbf{0}}$ $\quad$ $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{reff}(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{SCI} \rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\, x_1 = \alpha \quad x_2 = -2\alpha; \quad x_3 = \alpha$$

$$x = \alpha\,(1, -2, 1)^T$$

$$\mathbf{E_A(\lambda_1)} = \text{Env}\{\alpha\,(1, -2, 1)^T \ \alpha \in R\ \boldsymbol{\}}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_1) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_1 = 0$ es, por ej, $\mathbf{v_1} = (1, -2, 1)^T$

Cálculo de autovalores /autovectores

Ej-8 (cont) (hoja 6)

Subespacio propio para $\boldsymbol{\lambda_2}$

$\boxed{\text{Para } \lambda_1 = \mathbf{2}}$ $\quad \mathbf{(A - \lambda_2 I)x = 0}$

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{reff}(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{SCI} \rightarrow x = (x_1, x_2, x_3)^T \,/\; x_1 = \mathbf{0} \quad x_2 = \boldsymbol{\alpha;} \quad x_3 = \boldsymbol{\alpha}$$

$$x = \alpha\,(0, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{E_A(\lambda_2)} = \text{Env}\{\alpha\,(0, 1, 1)^T \; \alpha \in R\,\mathbf{\}}$$

Multiplicidad geométrica: $\mathbf{mg(\lambda_2) = 1}$

Un autovector asociado a $\lambda_2 = 0$ es, por ej, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 2)^T$

Cálculo de autovalores /autovectores

Ej-8
(cont)
(hoja 6)

$$(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores	M. Algebráica	M. Geométrica
0	1	1
2	2	1