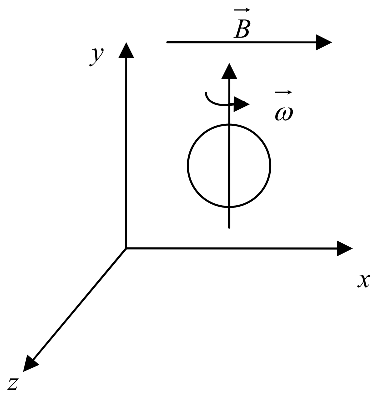
Tema 4. Campo Electromagnético. Inducción

RESOLUCIONES

4.1. Una bobina circular de *20cm* de diámetro tiene *N* espiras. La bobina está en el interior de un campo magnético uniforme de *0.01T* y gira alrededor de uno de sus diámetros, perpendicular a *B*, a razón de *20rps*. Sabiendo que la intensidad máxima inducida que circula por la bobina es de *9.87A* y que su resistencia es de *0.1Ω*, calcular el número de espiras de la bobina.

RESOLUCIÓN:



La bobina que se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ gira alrededor de uno de sus diámetros, perpendicular a $\vec{B}$, con una velocidad angular:
$\omega = 20rps$
Como una vuelta son 2π rad:
$\omega = 20 \cdot 2\pi = 40\pi \left({rad}/{s} \right)$
El flujo de campo magnético que atraviesa la bobina es:
$$\phi_{bobina} = \int_S N \cdot \vec{B} \bullet \vec{dS} = N \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos \omega t$$
siendo $\theta = \omega t$ el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{S}$ en cada instante.
Este flujo es variable con el tiempo, por lo que en la bobina se induce un voltaje cuyo valor es:
$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\left(N \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos \omega t\right)}{dt} = -N \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos \omega (-sen\,\omega t) = N \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \omega \cdot sen\,\omega t$$

El voltaje inducido máximo se produce cuando la función $sen\,\omega t$ alcanza el valor máximo que es 1. De este modo:
$$\varepsilon_{ind_{máx}} = N \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \omega$$

Por otra parte, este valor se puede calcular con los datos dados en el enunciado del problema:

$$\varepsilon_{ind_{máx}} = R \cdot I_{ind_{máx}} = 9'87 \cdot 0'1 = 0'987(V)$$

Despejando el número de espiras N de la penúltima expresión:

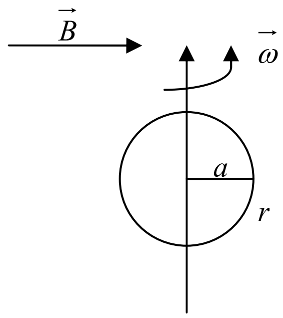
$$N = \frac{\varepsilon_{indmáx}}{|\vec{B}| \cdot |\vec{S}| \cdot \omega} = \frac{0'987}{0'01 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \cdot 40\pi} = 25 espiras$$

Siendo: $|\vec{S}| = \pi r^2 = \pi (0'1)^2 = \pi \cdot 10^{-2} (m^2)$

4.2. Una espira circular de radio a gira con velocidad angular constante ω alrededor de uno de sus diámetros. La espira se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme B y perpendicular al eje de giro. Si la resistencia de la espira es r, calcular:

a) La fuerza electromotriz inducida en la espira
b) La intensidad que circula por la espira
c) El momento que actúa sobre la espira

RESOLUCIÓN:



El vector superficie $\vec{S}$ es perpendicular al plano de la espira. El ángulo que forma éste con el campo magnético $\vec{B}$ en cada instante si la espira gira con velocidad angular ω es: $\theta = \omega t$, suponiendo que el ángulo inicial es $\theta_0 = 0$.

a) La fuerza electromotriz inducida en la espira se calcula como:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi}{dt}$$

donde $\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = B \cdot S \cdot \cos \omega t$

Por tanto:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d}{dt}(B \cdot S \cos \omega t) = -B \cdot S \cdot \omega(-sen \omega t) = B \cdot \pi a^2 \cdot \omega \cdot sen \omega t \ (V)$$

b) La intensidad inducida es:

$$I_{inducida} = \frac{\varepsilon_{inducida}}{r} = \frac{B \cdot \pi a^2 \cdot \omega \cdot sen\omega t}{r} \ (A)$$

c) El momento de giro $\vec{\tau}$ que experimenta la espira por estar inmersa en un campo magnético uniforme tiende a alinear el momento $\vec{m}$ con el vector campo magnético $\vec{B}$:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

donde $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ para una sola espira.

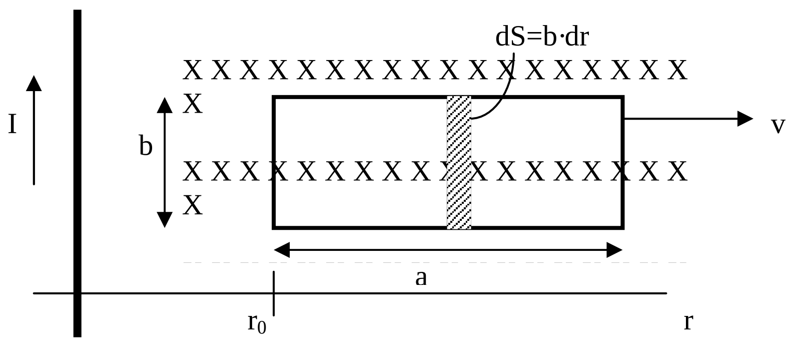
Sustituyendo el momento:

$$\vec{\tau} = I\left(\vec{S} \times \vec{B}\right) \rightarrow \tau = I \cdot S \cdot B \cdot sen\omega t$$

Tomando la expresión obtenida para la intensidad inducida en el apartado anterior:

$$\tau = \frac{B^2 \cdot \left(\pi a^2\right)^2 \cdot \omega \cdot sen^2\omega t}{r} \left(N \cdot m\right)$$

4.3. Una espira conductora rectangular de lados *a* y *b* se separa del conductor rectilíneo por el que circula una intensidad *I* con una velocidad *v*. Determinar la f.e.m. inducida en función del tiempo si cuando $t = 0s$, $r = r_0$.



RESOLUCIÓN:

El campo magnético que crea la corriente rectilínea en la parte donde se encuentra la espira conductora es perpendicular hacia dentro (como se indica en la figura) y variable con módulo:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Al moverse la espira hacia la derecha, el campo magnético varía, lo que implica una variación en el flujo que atraviesa la espira y esto a su vez, induce una fuerza electromotriz en la misma:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Calculando el flujo:

$$\phi = \int_S \vec{B} \bullet \vec{dS} = \int_r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b \cdot dr \cdot \cos 0° = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\ln r\right]_r^{r+a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{(r+a)}{r}$$

Los límites de la integral superior se calculan teniendo en cuenta que en cualquier instante t, la distancia de la corriente rectilínea al lado más próximo de la espira rectangular es $r = r_0 + vt$. Por otra parte, la distancia al lado más alejado es $r + a = r_0 + vt + a$.

La fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\left[\left(\frac{d\phi}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)\right] = -\left[\left(\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{r}{r+a}\frac{d}{dr}\left(\frac{r+a}{r}\right)\right)\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)\right] =$$

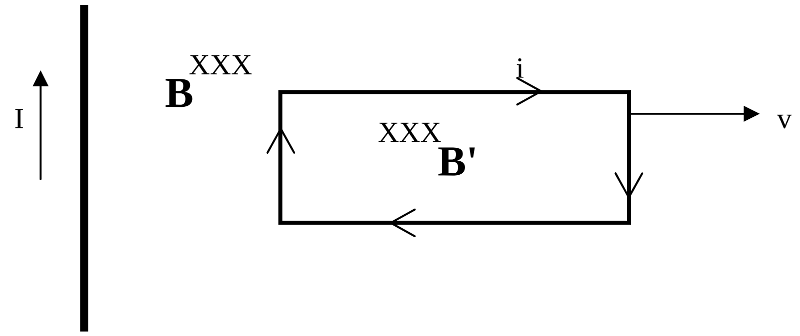
$$= -\left[\left(\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\frac{r}{r+a}\left(\frac{r-(r+a)}{r^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)\right] = -\left[\left(\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{r}{r+a}\right)\cdot\left(-\frac{a}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{a}{r(r+a)}\right)\cdot v\right]$$

Sustituyendo el valor de $r = r_0 + vt$ en la expresión anterior:

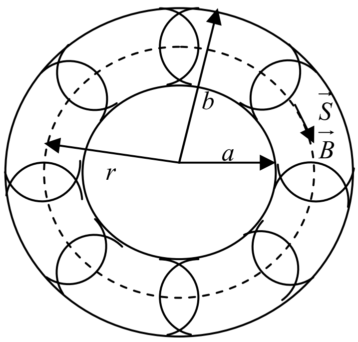
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{a}{(r_0+vt)(r_0+vt+a)}\right)\cdot v$$

Si la espira presenta una resistencia de valor *R*, se tiene que la corriente inducida, *i*, viene dada por $i = \varepsilon / R$.
Cuando alejamos la espira rectangular, el flujo de *B* disminuye, luego la intensidad inducida, *i*, en la espira tiene que ser en el sentido en que cree un campo *B'* que compense esta disminución (Ley de Lenz). Así, tendremos:



4.4. Se dispone de un arrollamiento toroidal de perímetro medio *2m* y sección *20cm²* que tiene *500 espiras*. Calcular su autoinducción. Si la corriente en la bobina aumenta a razón de *10A/s*, calcular el valor de la f.e.m. inducida.

RESOLUCIÓN:



El arrollamiento toroidal está formado por un conjunto de espiras circulares conductoras arrolladas alrededor de una figura en forma de neumático.

El flujo que atraviesa la bobina teniendo en cuenta que el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es 0:

$$\phi = N \cdot \vec{B} \bullet \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos 0° = N \cdot B \cdot S$$

El campo creado por la bobina toroidal es:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

con $l = 2 \cdot \pi \cdot r = 2\ m$ su perímetro medio.

Llevando la expresión del campo al flujo:

$$\phi = N \cdot \frac{\mu_0 NI}{l} \cdot S \Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot I \cdot S}{l}$$

Por otro lado, como el flujo propio es $\phi = L \cdot I$, donde L es el coeficiente de autoinducción, igualando las dos expresiones del flujo, tenemos:

$$\frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot I \cdot S}{l} = L \cdot I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (500)^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{2} = 3'14 \cdot 10^{-4} H$$

b) Si la corriente I varía, crea un campo magnético variable que provoca el cambio del flujo de campo magnético que atraviesa la bobina. Esto a su vez creará un voltaje inducido en la propia bobina, que se opone al cambio de la corriente inicial:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

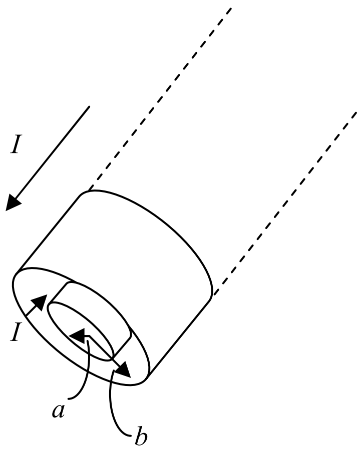
siendo el módulo de la fuerza electromotriz inducida:

$$\varepsilon_{inducida} = \left| -L\frac{dI}{dt} \right| = 3'14 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 3'14 \cdot 10^{-3} (V)$$

4.5. Un cable coaxial largo está constituido por dos cilindros concéntricos de radios *a* y *b*. Su conductor central es hueco y lleva una corriente constante *I*, el conductor exterior proporciona el camino de regreso.

a) Calcular la energía almacenada en el campo magnético para un tramo de longitud *l* de este cable
b) ¿Cuál es la autoinducción para el mismo tramo de longitud *l*?

RESOLUCIÓN:



a) Por razones de simetría las líneas de campo son circunferencias con centro sobre el eje del cable. Asímismo, el módulo de $\vec{B}$ es una función de *r*: $B = B(r)$

Aplicando el Teorema de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I \Rightarrow B \oint_C dl = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(r) = 0 \qquad r < a$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad a < r < b$$

$$B(r) = 0 \qquad r > b$$

Por tanto, la densidad de energía magnética (energía magnética por unidad de volumen), cuya expresión es:

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

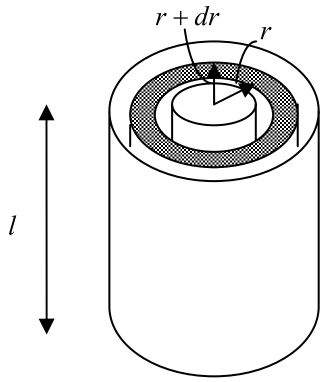
será:

$$w_B = 0 \qquad r < a$$

$$w_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \qquad a < r < b$$

$$w_B = 0 \qquad r > b$$

Es decir, sólo tendremos densidad de energía magnética, en la zona intermedia entre los dos cilindros. Consideremos un elemento de volumen comprendido entre las superficies cilíndricas de longitud *l* y radios r y $r + dr$, respectivamente, para calcular la energía magnética almacenada en este elemento de volumen:



$$V_{cilindro} = \pi r^2 l \rightarrow dV = 2\pi r l dr$$

$$dW_B = w_B \cdot dV = w_B \cdot 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

Integrando desde *a* hasta *b*, tendremos la energía magnética almacenada en un tramo de longitud *l*:

$$W_B = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) También tenemos que la energía magnética es:

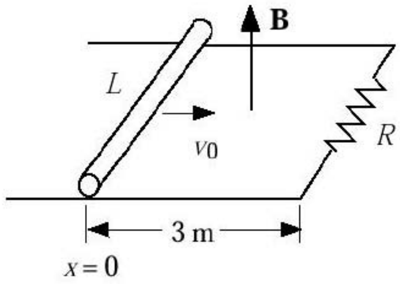
$$W_B = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

De modo, que combinando las dos expresiones de W_B, podemos obtener la autoinducción para ese mismo tramo *l*:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4.6. Una barra metálica de *60cm* de longitud y *675g* de masa se lanza desde la posición indicada en la figura con una velocidad inicial de *3cm/s*. La barra desliza sin rozamiento sobre unos raíles conductores paralelos, que se cierran en el extremo derecho mediante una resistencia de *21.6 Ω*. Todo el sistema se halla inmerso en un campo magnético uniforme *B*, perpendicular al plano que forman los raíles y la barra.

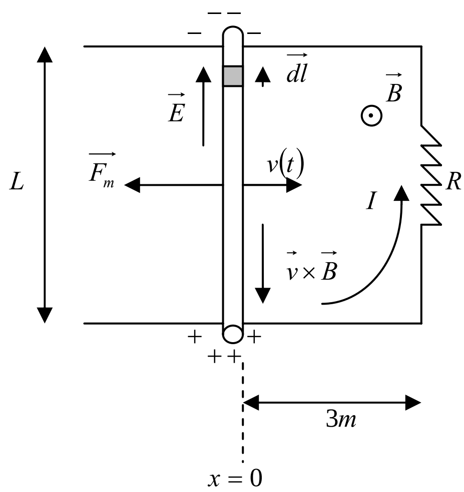
a) Calcular el valor del campo magnético *B* necesario para que la barra se quede a mitad de camino entre su posición de lanzamiento y el lado derecho del circuito, donde se encuentra la resistencia.
b) ¿Qué tiempo tardará en recorrer el *99%* de esa distancia? NOTA: Despréciese el coeficiente de autoinducción del circuito formado.



RESOLUCIÓN:

a) Para resolver este problema es necesario obtener una expresión que relacione el espacio recorrido con el campo magnético y con el tiempo.
Inicialmente, las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso y la reacción normal que sobre ella ejercen los raíles. Puesto que la resultante es cero, la fuerza neta que actúa sobre la barra es nula.

Cuando la barra inicia su movimiento sobre ella aparece una f.e.m inducida debida a su movimiento cuya polaridad, determinada por el sentido del campo eléctrico (opuesto al vector $\vec{v} \times \vec{B}$), es la que se ve en la figura



Como la barra cierra el circuito, circulará por éste una corriente inducida I en el sentido indicado en la figura. Esto significa que el campo magnético ejercerá sobre la barra móvil una fuerza que vendrá dada por:

$$F_m = I \cdot \left|\vec{L} \times \vec{B}\right| = ILBsen90° = ILB$$

Esta fuerza es la única que existe en la dirección del movimiento de la barra. Obtendremos así su aceleración, que como puede comprobarse actúa en sentido contrario a la velocidad inicial de la barra, frenándola.
Sin embargo, todavía es necesario conocer *I*. Para ello se aplica la Ley de Ohm al circuito:

$$\varepsilon = IR \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$$

La f.e.m inducida en la barra será:

$$\varepsilon = \int_{+}^{-} \vec{E} \bullet \vec{dl} = \int_{+}^{-} \left(-\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{dl} = -\int_{+}^{-} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{dl}$$

de la figura:

$$\left|\vec{v} \times \vec{B}\right| = v \cdot B \cdot sen 90° = v \cdot B$$

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{dl} = \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| \cdot dl \cdot \cos 180° = -v \cdot B \cdot dl$$

de donde:

$$\varepsilon = -\int_{+}^{-} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet \vec{dl} = \int_{+}^{-} v \cdot B \cdot dl = v \cdot B \cdot L$$

por lo que la intensidad es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{v \cdot B \cdot L}{R}$$

y la fuerza magnética que actúa sobre la barra queda:

$$F_m = ILB = \frac{v \cdot B \cdot L}{R} \cdot L \cdot B = \frac{v \cdot B^2 \cdot L^2}{R}$$

La aceleración de la barra se obtiene aplicando la 2ª ley de Newton:

$$F_m = m \cdot a \Rightarrow \frac{v \cdot B^2 \cdot L^2}{R} = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{v \cdot B^2 \cdot L^2}{R \cdot m}$$

La velocidad de la barra se obtiene integrando $a = -\frac{dv}{dt}$, donde el signo negativo significa que la velocidad disminuye con el tiempo.

$$a = -\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{v \cdot B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} = -\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} t \Rightarrow v = v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} t}$$

Para calcular *x* en función del tiempo, volvemos a integrar:

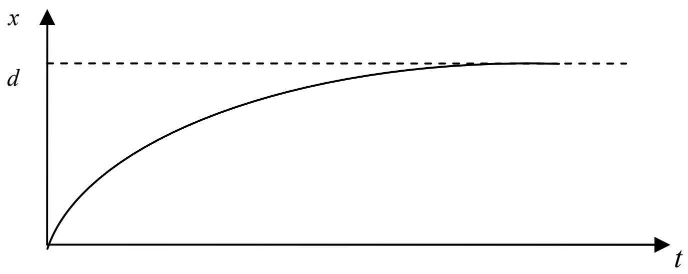
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} t} dt \Rightarrow x = \frac{mRv_0}{B^2 L^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m} t}\right)$$

a) De la expresión de *v* en función de *t*, comprobamos que la barra nunca llega a pararse, ya que el tiempo necesario para que la velocidad se anule es infinito:

$$0 = v_0 \cdot e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m}t} \Rightarrow t = -\frac{m \cdot R \cdot \ln 0}{B^2 \cdot L^2} = \infty$$

Sin embargo, la distancia recorrida cuando $t \to \infty$ es finita:

$$d = \lim_{t \to \infty} \frac{mRv_0}{B^2 L^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m}t}\right) = \frac{mRv_0}{B^2 L^2}$$



Si queremos que *d* sea la mitad de los *3m* que separan la barra inicialmente de la resistencia, tendremos:

$$1'5 = \frac{mRv_0}{B^2 L^2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{mRv_0}{1'5 L^2}} = \sqrt{\frac{0'675 \cdot 21'6 \cdot 0'03}{1'5 \cdot (0'06)^2}} = 0'9(T)$$

b) Una vez obtenido el valor de *B*, la expresión de *x* en función del *t* es:

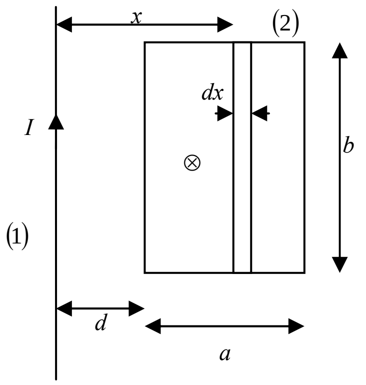
$$x = \frac{mRv_0}{B^2 L^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2 \cdot L^2}{R \cdot m}t}\right) = 1'5 \cdot \left(1 - e^{-\frac{(0'9)^2 \cdot (0'6)^2}{0'675 \cdot 21'6}t}\right) = 1'5 \cdot \left(1 - e^{-0'02t}\right)$$

El valor de *t* para que *x* sea el *99%* de los $1'5m$ recorridos, será:

$$0'99 \cdot 1'5 = 1'5 \cdot \left(1 - e^{-0'02t}\right) \Rightarrow t = -\frac{\ln(0'01)}{0'02} = 230'3s$$

4.7. Dados un conductor rectilíneo indefinido y un circuito rectangular de lados *a* y *b* como se muestra en la figura, calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambos, siendo *d* la distancia entre el conductor rectilíneo y el lado del rectángulo más próximo al mismo.

RESOLUCIÓN:



Para calcular el coeficiente de inducción mutua suponemos inicialmente que sólo circula una corriente *I* por el conductor rectilíneo indefinido.
El campo creado por el conductor rectilíneo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Calculamos el flujo de (1) sobre (2):

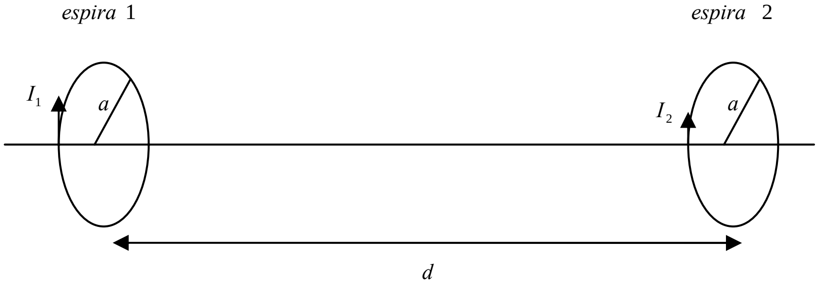
$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot b \cdot dx \Rightarrow \phi = \int_d^{d+a} d\phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Como $M = \phi / I$, queda:

$$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

4.8. Calcular la expresión del coeficiente de inducción mutua de dos espiras circulares, ambas de radio *a*, dispuestas con eje común y con sus centros separados una distancia *d* (*d* >> *a*)

RESOLUCIÓN:



Cuando 2 circuitos están próximos uno al otro, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por el otro circuito.
El flujo de campo magnético que atraviesa la espira *1* es:

$$\phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

El flujo de campo magnético que atraviesa la espira *2* es:

$$\phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción que corresponden a las espiras 1 y 2 y $M_{12}=M_{21}$ es el coeficiente de inducción mutua.

Vamos a suponer que sólo circula corriente por la espira *1*. El flujo que atravesará a la espira *2*, será sólo debido al campo magnético B_1 que crea la corriente I_1.

Además, en nuestro caso, las espiras están muy separadas en comparación con su tamaño, por lo que podemos suponer que el campo creado por una de ellas es prácticamente constante en la superficie de la otra y vale aproximadamente en toda la superficie lo mismo que en el eje.

$$\phi_2 = \int_{S_2} \overrightarrow{B_1} \bullet \overrightarrow{dS} = B_1 \cdot S_2$$

El campo magnético creado por la espira 1 es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2\left(a^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión del flujo:

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2\left(a^2 + d^2\right)^{3/2}} \cdot \pi a^2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^4}{2\left(a^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Con cuyo resultado podemos obtener el coeficiente de inducción mutua:

$$\phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \Rightarrow \phi_2 = M_{21} I_1 \Rightarrow M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2\left(a^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

Por último, como $d>>a$, podemos realizar la aproximación: $a^2 + d^2 \approx d^2$

$$M_{21} \approx \frac{\mu_0 \pi a^4}{2d^3} (H)$$

4.9. Una bobina tiene una autoinducción de *5H* y una resistencia de *20Ω*. Si se aplica una f.e.m. de *100V*. ¿Qué energía queda almacenada en el campo magnético después de que la corriente ha aumentado hasta su valor máximo?

RESOLUCIÓN:

Calculamos la intensidad que circula por la bobina:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100}{20} = 5(A)$$

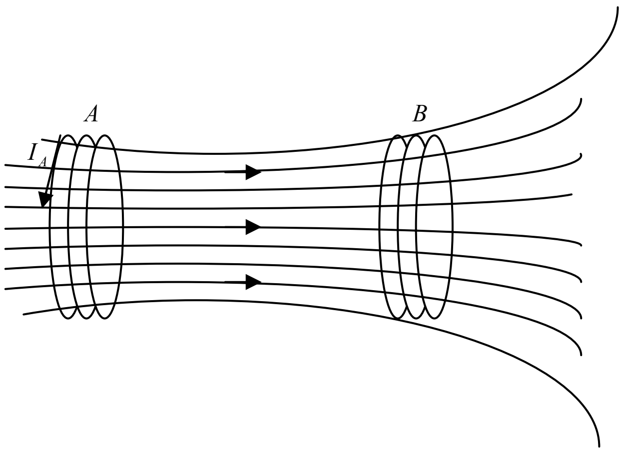
Sustituyendo valores en la expresión de la energía almacenada:

$$W_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}5\cdot 5^2 = 62'5(J)$$

4.10. Consideremos dos bobinas *A* y *B* de *400* y *900 espiras* respectivamente. Una corriente de *3A* circulando por la bobina *A* crea un flujo de $2\cdot 10^{-4}Wb$ en cada una de las espiras de la bobina *B*. Se pide:

a) Calcular el coeficiente de inducción mutua de ambas bobinas
b) La f.e.m. inducida en la bobina *B* cuando la corriente que circula por *A* varíe de *2A* a *1A* en un tiempo de *0'1s*
c) El flujo a través de la bobina *A* cuando por la bobina *B* circula una corriente de *2A*.

RESOLUCIÓN:



a) El flujo a través de la bobina *B* será:

$$\phi_B = M\cdot I_A$$

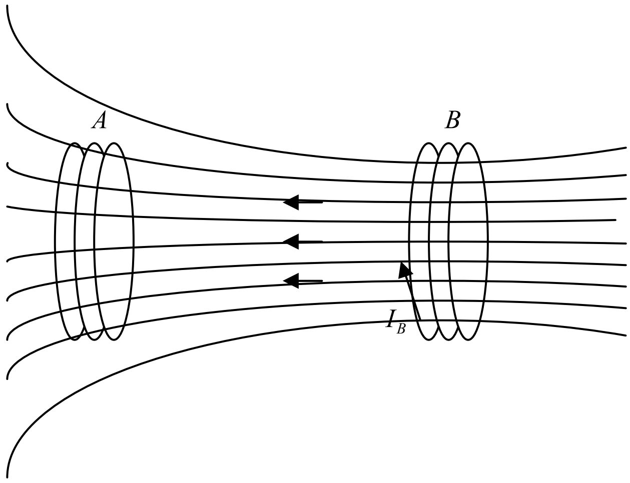
de donde:

$$M = \frac{\phi_B}{I_A} = \frac{N_B\cdot\phi_1}{I_A} = \frac{900\cdot 2\cdot 10^{-4}}{3} = 6\cdot 10^{-2}(H)$$

b) La f.e.m inducida en la bobina *B* será:

$$\varepsilon_B = -\frac{d\phi_B}{dt} = -M\frac{dI_A}{dt} \approx -M\frac{\Delta I_A}{\Delta t} = -6\cdot 10^{-2}\frac{1-2}{0'1} = 0'6(V)$$

c) Del mismo modo que la corriente en la bobina *A* crea un flujo a través de la bonina *B*, la de *B* crea un flujo a través de la bobina *A*:



cuyo valor será:

$$\phi_A = M \cdot I_B = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 12 \cdot 10^{-2} (Wb)$$

4.11. La inducción de un campo magnético homogéneo dentro de un cierto cilindro de *15cm* de radio aumenta linealmente con el tiempo según $B = kt$, siendo $k = 0.01$ *T/s*. Sabiendo que el campo magnético tiene la dirección del eje del cilindro y que fuera de él no hay campo, calcular la componente tangencial del campo eléctrico inducido a una distancia de:

a) *12cm* del eje del cilindro
b) *18cm* del eje del cilindro

RESOLUCIÓN:

Imaginemos un contorno circular cuyo centro sea un punto del eje del cilindro y cuyo radio sea la distancia respecto del eje a la que queremos determinar la componente tangencial del campo eléctrico inducido. La f.e.m inducida en él debido al flujo magnético variable en el interior del cilindro será, por definición, igual a la circulación del campo eléctrico a lo largo del contorno. Admitiendo, por simetría, que el módulo del campo eléctrico es constante en todos los puntos del contorno, la circulación vale:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \bullet \vec{dl} = \oint E_t \cdot dl = E_t \cdot 2\pi r$$

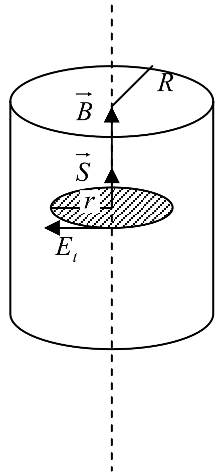
Siendo E_t la componente tangencial del campo eléctrico inducido. Así pues:

$$E_t = \frac{\varepsilon}{2\pi r}$$

El problema es entonces determinar la f.e.m inducida en el entorno circular, que se obtiene a partir de la ley de Faraday-Henry:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

a) para $r<R$, siendo R el radio del cilindro:



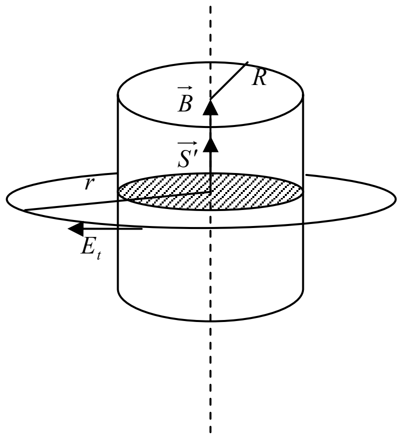
$$\phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS} = B \cdot S = Kt \cdot \pi r^2$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Kt \cdot \pi r^2\right) = -K \cdot \pi r^2$$

luego:

$$E_t = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{-K \cdot \pi r^2}{2\pi r} = -\frac{rK}{2} = -0'6 \cdot 10^{-4}\left(V/m\right)$$

b) para $r>R$:



Sólo existe flujo a través del área rayada, ya que $B=0$ para $r>R$. Por tanto:

$$\phi'_B = \int_{S'} \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS'} = B \cdot S' = Kt \cdot \pi R^2$$

$$\varepsilon' = -\frac{d\phi'_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Kt \cdot \pi R^2\right) = -K \cdot \pi R^2$$

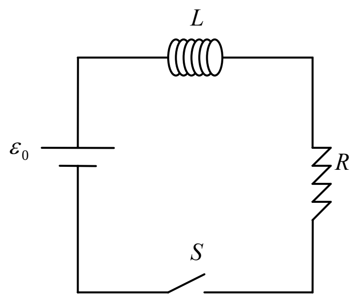
luego:

$$E'_t = \frac{\varepsilon'}{2\pi r} = \frac{-K \cdot \pi R^2}{2\pi r} = -\frac{K \cdot R^2}{2r} = -6'25 \cdot 10^4\left(V/m\right)$$

4.12. Un circuito *RL* tiene una f.e.m. $\varepsilon_0 = 9.2V$, una resistencia $R = 72\Omega$ y una inducción $L=0.25mH$. Si el interruptor se cierra en $t = 0$, calcular:

a) la corriente que pasa por el circuito
b) la d.d.p. entre los extremos de la resistencia
c) la d.d.p. entre los extremos de la inducción en los instantes $t=0$, $t=3.3\mu s$, $t =7.5\mu s$ y $t =35\mu s$.

RESOLUCIÓN:



a) Cuando el interruptor *S* se cierra, en $t=0$, la intensidad varía con el tiempo según la siguiente expresión:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \xrightarrow{t\to\infty} I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{9'2}{72} = 0'13A$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = 3'5\cdot 10^{-6}s$$

Sustituyendo las constantes nos queda:

$$I(t) = 0'13\left(1 - e^{-t/3'5\cdot 10^{-6}}\right)(A)$$

b) $V_R = I\cdot R = I(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)\cdot R = 9'2\left(1 - e^{-t/3'5\cdot 10^{-6}}\right)(A)$

c) $V_L = L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{\varepsilon_0}{R}\dfrac{1}{\tau_L}e^{-t/\tau_L} = L\dfrac{\varepsilon_0}{R}\dfrac{R}{L}e^{-t/\tau_L} = \varepsilon_0 e^{-t/\tau_L} = 9'2e^{-t/3'5\cdot 10^{-6}}$

Sustituyendo los valores de *t* indicados en el enunciado en esta última expresión tenemos:

$$t = 0 \to V_L(0) = \varepsilon_0 = 9'2(V)$$

$$t = 3'3\mu s = 3'3\cdot 10^{-6}s \to V_L(3'3\mu s) = 3'6(V)$$

$$t = 7'5\mu s = 7'5\cdot 10^{-6}s \to V_L(7'5\mu s) = 1'08(V)$$

$$t = 35\mu s = 35\cdot 10^{-6}s \to V_L(35\mu s) = 4\cdot 10^{-4} \approx 0 \Rightarrow \textit{régimen estacionario}$$

4.13. Una bobina formada por *250 espiras* de *15cm* de radio, gira en el campo magnético terrestre alrededor de su diámetro vertical, a razón de *85rad/s*. Si se induce una f.e.m. media de *40mV* en medio ciclo, calcular la componente horizontal del campo magnético terrestre en ese lugar.

RESOLUCIÓN:

Para obtener la f.e.m inducida en la bobina utilizaremos la ley de Faraday. Previamente debemos determinar el flujo magnético que atraviesa las N espiras que constituyen la bobina. Si denominamos $\overrightarrow{B_H}$ a la componente horizontal del campo magnético terrestre, dicho flujo será:

$$\phi_B = N\int_S \overrightarrow{B_H} \bullet \overrightarrow{dS} = N\int_S B_H \cos\theta \cdot dS = N \cdot B_H \cdot S\cos\theta$$

siendo S el área de cada espira.
Conforme la bobina gira, el ángulo θ que forma su vector superficie con la componente horizontal del campo magnético terrestre irá variando. Si empezamos a contar el tiempo en el instante en que dicho ángulo es 0^o, al ser uniforme el giro de la bobina, tendremos:

$$\theta = \omega t$$

Y por tanto, el flujo magnético que atraviesa la bobina será:

$$\phi_B = NB_H S\, cos\, \omega t$$

Ya podemos utilizar la Ley de Faraday para obtener la f.e.m. inducida en la bobina:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(NB_H S\, cos\, \omega t)}{dt} = NB_H S\ w\ sen\omega t$$

El valor medio de esta f.e.m. inducida, que denominaremos $\langle\varepsilon\rangle$, en medio ciclo es:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} NB_H S\ w\ sen\omega t\ dt = -\frac{2NB_H S}{T}\left[cos\, wt\right]_0^{T/2} = \frac{4NB_H S}{T}$$

El área de cada espira es, $S = \pi R^2$, y el período es, $T = 2\pi/w$, luego:

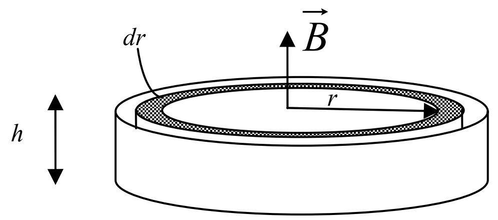
$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{4NB_H \pi R^2\ w}{2\pi} = 2NB_H R^2\ w$$

de donde:

$$B_H = \frac{\langle\varepsilon\rangle}{2NR^2\ w} = 4'18 \cdot 10^{-5}\, T$$

4.14. Un disco de hierro de diámetro $d = 0.1m$ y longitud $h = 1mm$, está situado en un campo magnético uniforme perpendicular a la base del cilindro, dependiente del tiempo t según la ecuación $B(t) = B_m\ sen\ \omega t$. Calcular la potencia promedio disipada por las corrientes de Foucault en el cilindro $B_m = 1'6T$, $\omega = \pi\ rad/s$, resistividad del Fe, $\rho = 11 \times 10^{-8}\ \Omega m$.

RESOLUCIÓN:



Tomamos un anillo diferencial de radio *r* y anchura *dr*, como se aprecia en la figura, cuyo dS es:

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi\left[r^2 + (dr)^2 + 2rdr\right] - \pi r^2 = \pi r^2 + \pi(dr)^2 + \pi 2rdr - \pi r^2$$

y aproximando $dr \approx 0$ nos queda:

$$dS = 2\pi rdr$$

Por tanto, el flujo que atraviesa ese anillo será:

$$\phi_i = \int \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS_i} = B(t)\int 2\pi rdr = B(t)\cdot \pi r^2 = B_m sen(\omega t)\cdot \pi r^2$$

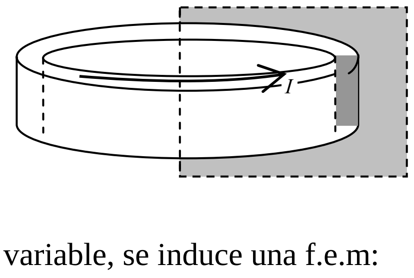
Como el flujo es variable, se induce una f.e.m:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B_m \cdot \omega \cos \omega t \cdot \pi r^2$$

La resistencia del anillo considerado es:

$$R_i = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{2\pi r}{h\cdot dr}$$

donde L es la longitud del anillo y S la sección de un corte del cilindro diferencial, como se muestra en la siguiente figura:



Como el flujo es variable, se induce una f.e.m:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B_m \cdot \omega \cos \omega t \cdot \pi r^2$$

Luego el dI_i inducido en este anillo diferencial será:

$$dI_i = \frac{\varepsilon_i}{R_i} = \frac{-\pi r^2 B_m \omega \cos(\omega t)}{\rho \cdot 2\pi r / h\cdot dr} = \frac{-rB_m \omega \cos(\omega t)\cdot h\cdot dr}{\rho\cdot 2}$$

Luego la potencia disipada por efecto Joule en este circuito es:

$$dP_i = (dI_i)^2 \cdot R = \left(\frac{-rB_m \omega \cos(\omega t) \cdot h \cdot dr}{\rho \cdot 2} \right)^2 \cdot \frac{\rho \cdot 2\pi r}{h \cdot dr} = \left(\frac{\pi h \omega^2 B_m{}^2 \cos^2(\omega t)}{2\rho} \right) \cdot r^3 \cdot dr$$

Y la potencia total instantánea *P(t)* disipada en el cilindro será:

$$P_T(t) = \int_0^{d/2} \frac{\pi h \omega^2 B_m{}^2 \cos^2(\omega t)}{2\rho} \cdot r^3 \cdot dr = \frac{\pi h \omega^2 B_m{}^2 \cos^2(\omega t)}{2\rho} \cdot \frac{\left(d/2 \right)^4}{4} = \frac{\pi h \omega^2 B_m{}^2 \cos^2(\omega t) d^4}{128\rho}$$

La potencia promedio en un período viene dada por: $\langle P_T(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_T(t) dt$

Dado que $\langle \cos^2(wt) \rangle = \frac{1}{2}$ obtenemos: $\langle P_T(t) \rangle = \frac{\pi h \omega^2 B_m{}^2 \cos^2(\omega t) d^4}{256\rho} = 0.282\, W$