Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial

Apellidos:	
Nombre:	
Grupo teoría:	□ **Grupo 1 - Martes de 11:00 a 13:00 (Prof. Francisco Miguel Martínez Pérez)** □ **Grupo 2 - Martes de 9:00 a 11:00 (Prof. José Francisco Vicent Francés)** □ **Grupo 3 - Valenciano - Viernes de 9:00 a 11:00 (Prof. José Francisco Vicente Francés)** □ **Grupo 4 - ARA -Miércoles de 9:00 a 11:00 (Prof. Francisco Javier Escolano Ruiz)** □ **Grupo 5 - Martes de 15:30 a 17:30 (Prof. José María Salinas Serrano)**
DNI:	
Email:	
Aula del examen:	

Convocatoria de julio. Teoría. Matemáticas II, 28-06-2013

Instrucciones generales:

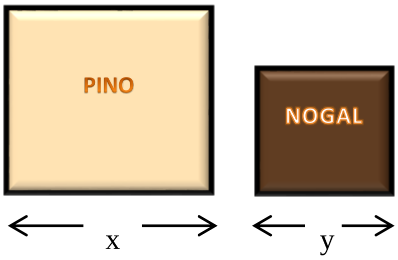
- ✓ Debes rellenar los datos personales (apellidos y nombre, DNI, etc.) seleccionando tu grupo de teoría.
- ✓ Debes usar únicamente las hojas grapadas que se te facilitan, no pudiendo haber sobre la mesa ningún otro papel durante el examen.
- ✓ Procura poner los resultados y datos importantes para la corrección y evaluación en la página donde aparece el enunciado (página par) y las operaciones relacionadas en la siguiente página (página impar). Dispones además de una hoja adicional (la última) para más operaciones, hacer referencias, aclaraciones, etc.

Pregunta	Máx	Nota
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
	Total:	

1. Un cliente acude a una tienda de bricolaje y le indica al dependiente que necesita dos piezas de madera cuadradas, una de pino y otra de nogal, cuyo perímetro total (ambas piezas) debe ser exactamente 10 metros y que, además, desea gastarse lo menos posible.
Antes de cortar las piezas, el dependiente introduce los datos en una aplicación informática que calcula las medidas óptimas y el coste total.
Sabiendo que el precio de las maderas que desea el cliente es de 2 € el m^2 para la de pino y de 3 € por m^2 para la de nogal.

a) *(1,8 puntos)* ¿Cuánto debe medir el lado de cada una de las piezas para que el coste total sea mínimo?

b) *(0,2 puntos)* ¿Cuánto le costarán las dos piezas al cliente?



a) Dados los dos cuadrados con lados x e y respectivamente, el perímetro total viene dado por la expresión 4x + 4y. Como debe ser igual a 10 m., tendremos

$$4x + 4y = 10. \qquad (1)$$

La superficie de ambas piezas viene dada por la expresión $x^2 + y^2$.
Con el precio de la madera que se nos ha facilitado, el coste de la compra es

$$2x^2 + 3y^2 \text{ €}. \qquad (2)$$

Despejando y en la expresión (1) tendremos

$$y = \frac{10-4x}{4} = \frac{5}{2} - x\,.$$

Sustituyendo en la expresión (2) tendremos la función coste

$$C(x) = 2\,x^2 + 3\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = 5\,x^2 - 15\,x + \frac{25}{4}\,.$$

El coste mínimo se alcanzará en los valores de x que cumplan $C'(x)=0$ y $C''(x)>0$.

$$C'(x)=10x-15=0 \to x=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1{,}5 \text{ m.}$$

$$C''(1{,}5)=10>0$$

A partir del valor obtenido para *x*, vamos a calcular el valor de *y*

$$y=\frac{5}{2}-x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \text{ m.}$$

En consecuencia, la pieza de pino debe medir 1’5 m. de lado y la de nogal 1 m. de lado.

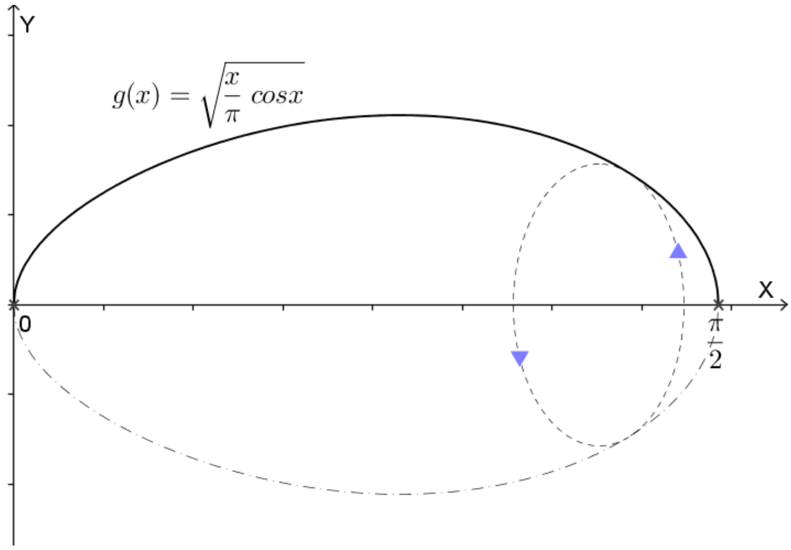
b) El coste total de la compra es

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot 1^2 = 7'5 \text{ €.}$$

2. Integración.

a) *(1,3 puntos)* Dada la función $f(x)=\frac{x}{\pi}\cos x$, justifica (utilizando integración por partes) que $\int f(x)dx=\frac{1}{\pi}(\cos x + x\ \text{sen} x)+C.$

b) *(0,7 puntos)* Dada la función $g(x)=\sqrt{f(x)}$, haciendo uso del apartado anterior, calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar el arco de curva $g(x)$, con $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, alrededor del eje de abscisas.



a) Recordemos, en primer lugar, la fórmula utilizada en la integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Denotando por $u=\frac{x}{\pi}$, $dv=\cos x\,dx$, tendremos $du=\frac{1}{\pi}dx$, $v=\int \cos x\,dx = sen x$

y, en consecuencia,

$$\int \frac{x}{\pi}\cos x\,dx = \frac{x}{\pi}\text{sen}\,x - \frac{1}{\pi}\int \text{sen}\,x\,dx = \frac{1}{\pi}(x\ \text{sen}\,x + \cos x)+C.$$

b) El volumen pedido viene dado por la expresión

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pi\left[\frac{1}{\pi}(x\ \text{sen}\,x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

3. La velocidad de una partícula que se mueve, expresada en metros por segundo, está determinada por la función $v(t) = t^3 - 2t^2$.

Utilizando el método de la Regla Falsa (o Regula Falsi) se pide que obtengas una estimación del tiempo t necesario para que la partícula alcance la velocidad de 1 metro por segundo. Para ello:

a) *(0,1 puntos)* Plantea la ecuación a resolver.
b) *(0,1 puntos)* Expresa la fórmula de recurrencia del método.
c) *(1,3 puntos)* Realiza hasta la quinta iteración, considerando como intervalo inicial [2,3] y utilizando para los cálculos cinco cifras decimales con redondeo.
d) *(0,5 puntos)* Calcula el número de dígitos exactos en la estimación obtenida en el apartado anterior.

a) La ecuación a resolver es $v(t) = 1$, esto es, $t^3 - 2t^2 - 1 = 0$.

b) La fórmula para obtener en cada iteración, *i*, el valor interior c_i del intervalo $[a_i,b_i]$ es

$$c_i = a_i - h_i,\ i = 1,2,\cdots$$

donde

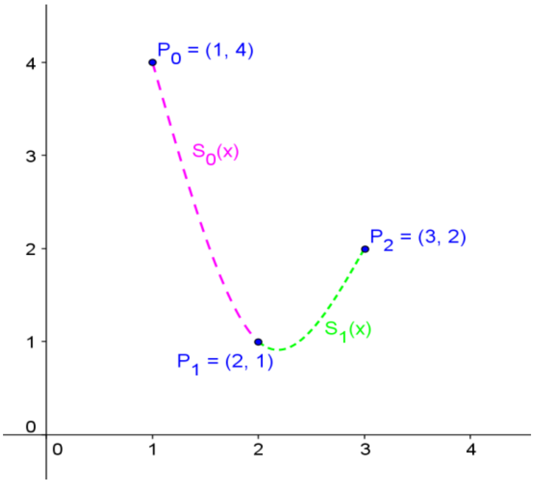
$$h_i = \frac{v(a_i)(b_i - a_i)}{v(b_i) - v(a_i)},\ i = 1,2,\cdots$$

c)

i	a_i	b_i	c_i	h_i	$v(a_i)$	$v(b_i)$	$v(c_i)$
1	2	3	2,11111	-0,11111	-1	8	-0,5048
2	2,11111	3	2,16387	-0,05276	-0,5048	8	-0,2327
3	2,16387	3	2,18750	-0,02363	-0,2327	8	-0,10276
4	2,18750	3	2,19781	-0,01003	-0,10276	8	-0,04451
5	2,19781	3	2,20225	-0,00444	-0,04451	8	-0,01912

d) El error absoluto cometido está acotado por el valor absoluto de:
$\Delta \leq |h| = 0,00444$.
El resultado obtenido (2,20225) es del orden de unidades,
por lo que m=0 en la expresión:
$0,00444 \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1} \rightarrow m-n+1 = -2$
si m=0, entonces el número de dígitos exactos es n=3

4. *(2 puntos)* Encuentra el spline cúbico natural $S(x)$ que empieza en el punto $P_0 = (1,4)$, pasa por el punto $P_1 = (2,1)$ y termina en el punto $P_2 = (3,2)$.



No es necesario que agrupes las potencias en x de los polinomios $S_0(x)$ y $S_1(x)$, puedes dejarlos con potencias de $(x-x_i)$, como en la expresión

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3; \quad \text{con } i = 0,1.$$

Observa que el número de trozos del spline es $n=2$ y recuerda que las indeterminadas se pueden obtener de las expresiones

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \text{para } i = 0,1;$$
$$a_i = f(x_i), \quad \text{para } i = 0,1,2;$$
$$v_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1}-a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad \text{para } i = 1;$$
$$c_0 = c_2 = 0, \quad [c_1] = [2(h_0+h_1)]^{-1}[v_1];$$
$$b_i = \frac{a_{i+1}-a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad \text{para } i = 0,1;$$
$$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}, \quad \text{para } i = 0,1.$$

Completa la siguiente tabla y escribe S(x) en el espacio reservado para ello.

i	x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	1	4	-4	0	1
1	2	1	1	-1	3	-1
2	3		2		0	

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 4 - 4(x-1) + (x-1)^3 & \text{si } x \in [1,2] \\ S_1(x) = 1 - (x-2) + 3(x-2)^2 - (x-2)^3 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} = \frac{3(2-1)}{1} - \frac{3(1-4)}{1} = 3 + 9 = 12$$

$$[c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1} \text{ x } [v_1] = [2(1+1)]^{-1} \text{ x } [12] = [4]^{-1} \text{ x } [12] \qquad c_1 = \frac{1}{4} 12 = 3$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2\mathrm{c}_0 + \mathrm{c}_1) = \frac{(1-4)}{1} - \frac{1}{3} 3 = -4$$
$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2) = \frac{(2-1)}{1} - \frac{1}{3} 6 = -1$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{(3-0)}{3} = 1$$
$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{(0-3)}{3} = -1$$

5. Se pretende aproximar los valores que toma la función $f(\text{x}) = \text{sen x}$ mediante un polinomio de interpolación de Hermite, partiendo de dos valores x_0, x_1.

a) *(0,1 puntos)* Obtén, de forma razonada, el grado máximo del polinomio buscado.

b) *(0,6 puntos)* Si los valores de partida son $x_0 = 0,40$, $x_1 = 0,42$, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite y anota los resultados en el espacio reservado a continuación.

0,40	0,38942			
		0,92106		
0,40	0,38942		-0,20300	
		0,91700		0,37500
0,42	0,40776		-0,19550	
		0,91309		
0,42	0,40776			

c) *(0,7 puntos)* A partir de la tabla del apartado anterior, construye el polinomio interpolador de Hermite.

d) *(0,6 puntos)* Haciendo uso del polinomio obtenido en el apartado anterior, obtén un valor aproximado de sen 0,41 y compáralo con el que se obtiene con la calculadora.

Notas:

- Redondea a cinco cifras decimales todos los cálculos.
- Los valores x de la función $f(\text{x}) = \text{sen x}$ vienen expresados en radianes ($f : R \to [0,1]$); no olvides configurar tu calculadora en modo radián.
- En el apartado c) no es necesario desarrollar las potencias de $(x - x_0)$, $(x - x_1)$ y simplificar.
- Si el apartado b) se te resiste, te recomendamos que hagas los siguientes ya que los valores que necesitas están en la tabla.

a) Partiendo de dos valores x_0, x_1, el grado máximo del polinomio de interpolación es 2·1+1=3.

b) En la tabla.

c) $P(x) = 0,38942 + 0,92106\,(x - x_0) - 0,203\,(x - x_0)^2 - 0,375\,(x - x_0)^2 (x - x_1)$

d) Denotando por c=0,41, se tiene que $c - x_0 = 0,01$, $c - x_1 = -0,01$ y $(c - x_0)^2 = 0,0001$.
Operando en $P(x)$, se tiene que $P(c) = 0,39861$.
Por otro lado, haciendo uso de la calculadora y redondeando a cinco cifras decimales, se obtiene el mismo resultado: sen c = 0,39861.