Solución del examen final de FFI

Parcial 1.

1. Tenemos un campo eléctrico $\vec{E} = 5\vec{j}\ N/C$. Tomando el origen de potenciales en el punto A(1,1,0), calcula el potencial en el punto B(0,0,0) [3 puntos].

Solución:

a) $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B E\,\vec{j}\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E\cdot\int_1^0 dy = -5\cdot y\big|_1^0 = 5\ \text{V}$

Lógicamente hay más potencial en B que en A, ya que el campo va de y=0 hacia y=1

2. Una esfera conductora y hueca tiene radios R_1 y R_2 ($R_1<R_2$) y carga Q. En el centro de dicha esfera hay una carga puntual de valor –q. Calcula: (a) el campo eléctrico a una distancia r del centro de la esfera, siendo $r<R_1$ [1.5 puntos]. (b) La diferencia de potencial entre dos puntos que distan R_1 y R_2 del centro de la esfera [1.5 puntos].

(a) Teniendo en cuenta la ley de Gauss: $\phi_E = \oint_S \overline{E}\cdot \overline{dS} = \dfrac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$

La carga encerrada para r<R1 es $Q_e = -q$; por tanto: $E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{-q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(b) Dos puntos que distan R_1 y R_2 del centro de la esfera pertenecen a la esfera conductora, en cuyo interior el campo es E=0 y el potencial constante. Por tanto: $V_{R1} - V_{R2} = 0$

3. Dos condensadores de 30 y 60 nF se conectan en serie a una fuente de alimentación de 15 V. (a) Calcula la carga que se almacena en cada uno de ellos [2 puntos]. (b) Una vez cargados se desconectan de la fuente y se conectan en paralelo entre sí ¿Qué carga se almacena en cada condensador después de la unión? [2 puntos].

Solución:

a) Si C_1 y C_2 están en serie se cumple: $Q_1 = Q_2 = Q_{Total}$ Y $Q_{Total} = V\cdot C_{eq}$

Siendo: $C_{eq} = \dfrac{C_1\cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{30\times 60}{30+60} = 20\ \text{nF}$

Por tanto: $Q_1 = Q_2 = Q_{Total} = 15\times 20 = 300\ \text{nC} = 0.3\ \mu\text{C}$

b) Si una vez cargados desconectamos C_1 y C_2 de la fuente y los unimos en paralelo, la carga total que tienen inicialmente los condensadores (entre los dos $Q_1 + Q_2 = 0.6\ \mu\text{C}$) se recombina para conseguir que el potencial en ambos condensadores sea el mismo.

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \rightarrow Q_2' = \frac{C_2}{C_1}\cdot Q_1' = 2\cdot Q_1' \Rightarrow Q_1' = 0.2\,\mu\text{C} \ \text{ y } \ Q_2' = 0.4\,\mu\text{C}$$

Parcial 2.

4. Un campo magnético $\vec{B} = (10 - 2t^2)\vec{i}$ T atraviesa una espira cuadrada de 10 cm de lado que se encuentra sobre el plano YZ y cuya resistencia es de 0.1Ω. Calcula: (a) El flujo que atraviesa la espira [2 puntos]. (b) La f.e.m. inducida [1 punto]. (c) La corriente inducida en t=1s y t=2s, indicando razonadamente su sentido [3 puntos].

Solución:

a) El campo es perpendicular a la espira en todo momento y su valor no depende de la posición, por lo tanto el flujo es: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \int_S dS = BS = (10 - 2t^2) \cdot 0.1^2 = (0.1 - 0.02t^2)$ Wb

b) $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d(0.1 - 0.02t^2)}{dt} = 0.04t$ V

c) $I_{(t=1s)} = \dfrac{\varepsilon_{1S}}{R} = \dfrac{0.04}{0.1} = 0.4$ A y $I_{(t=2s)} = \dfrac{\varepsilon_{2S}}{R} = \dfrac{0.08}{0.1} = 0.8$ A

Considerando $\vec{B} = (10 - 2t^2)\vec{i}$, vemos que conforme aumenta t, desde cero hasta los 2s (t máximo a considerar), el campo está disminuyendo y por tanto disminuye el flujo que atraviesa la superficie de la espira. En consecuencia, la corriente inducida debe crear un campo en el mismo sentido que el externo, es decir ($+\vec{i}$); lo que se consigue si el sentido de la corriente es antihorario.

5. Una onda electromagnética plana está representada por su campo magnético: $\vec{B} = 2 \cdot 10^{-8} sen(4\pi \cdot 10^7 y - 6\pi \cdot 10^{15} t)\vec{i}\ T$. Calcula: (a) La frecuencia y longitud de onda [1 punto]. (b) El índice de refracción del medio donde se propaga [1 punto]. (c) El campo eléctrico asociado [2 puntos]. *Dato: Velocidad de las o.e.m. en el vacío: $c=3\cdot 10^8$ m/s*

Solución:

a) $f = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{6\pi \cdot 10^{15}}{2\pi} = 3 \cdot 10^{15}$ Hz y $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{4\pi \cdot 10^7} = 0.5 \cdot 10^{-7}$ m

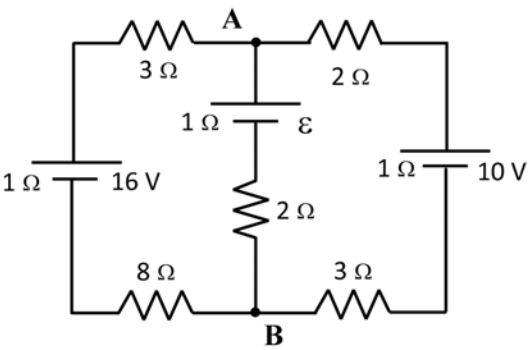
b) $v = \lambda\, f = \dfrac{w}{k} = \dfrac{6\pi \cdot 10^{15}}{4\pi \cdot 10^7} = 1.5 \cdot 10^8$ m/s $\rightarrow$ $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{1.5 \cdot 10^8} = 2$

a) $E_0 = v \cdot B_0 = 1.5 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 3$ V/m y $\vec{E} = 3 sen(4\pi \cdot 10^7 y - 6\pi \cdot 10^{15} t)(\vec{k})\ T$

Ya que así el sentido de $\vec{E} \otimes \vec{B}$ (en este caso $\vec{k} \otimes \vec{i}$) nos proporciona el sentido de propagación de la onda [positivo del eje Y (+ $\vec{j}$) considerando la expresión de $\vec{B}$ en el enunciado].

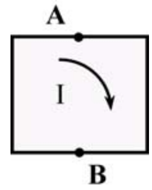
Parcial 3.

6. Sabiendo que por la rama central del circuito de la figura circula una corriente de 1A, con sentido desde A hacia B, calcula: (a) El valor de la *f.e.m.* ε [4 puntos]. (b) La potencia que aporta o consume, según sea el caso, dicha *f.e.m.* [1 punto].



Solución:

Utilizando Thevenin: Lo más efectivo es simplificar toda la parte externa del circuito, entre A y B, sustituyéndolo por su equivalente.

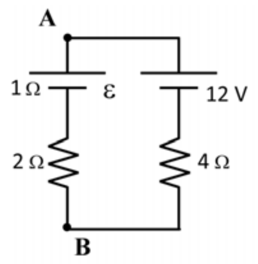


$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i}{R_T} = \frac{16-10}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

$\Rightarrow \quad V_A - V_B = \frac{1}{3}\cdot 6 - (-10) = 12 \text{ V}$ (Polo positivo de V_{Th} en A porque $V_A > V_B$)

R_{Th}) Entre A y B las resistencias de la izquierda (3, 1 y 8Ω) están en serie entre sí (12Ω) y por la derecha (2, 1 y 3Ω) también (6Ω). Ahora las de 12Ω y 6Ω están en paralelo:

$$R_{Th} = \frac{12\cdot 6}{12+6} = 4\ \Omega$$



(a) Para seguir trabajando recomponemos el circuito con la rama central y el equivalente de Thévenin calculado. Donde conocemos el valor 1A y sentido (antihorario) de la corriente.

$$1 = \frac{12-\varepsilon}{1+2+4} \quad \rightarrow \quad 12-\varepsilon = 7 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 5 \text{ V}$$

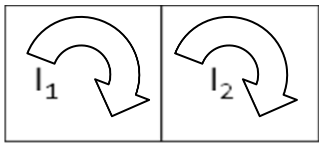
(b) Teniendo en cuenta el sentido de la corriente la f.e.m. actúa como receptor y por tanto consume potencia, siendo esta:

$$P_C = \varepsilon \cdot I + I^2 r = 5\cdot 1 + (1)^2\cdot 1 = 6 \text{ W}$$

Resolución por mallas (a):

$$\left.\begin{aligned} 15I_1 - 3I_2 &= 16-\varepsilon \\ -3I_1 + 9I_2 &= \varepsilon - 10 \end{aligned}\right|$$

Además sabemos que
$I_1 - I_2 = 1\ A$

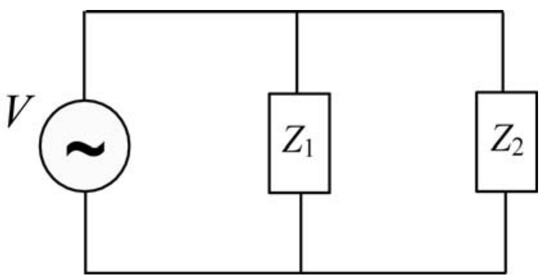


$$\left.\begin{aligned} 15\cdot(1+I_2) - 3I_2 &= 16-\varepsilon \\ -3\cdot(1+I_2) + 9I_2 &= \varepsilon - 10 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} 12I_2 + \varepsilon &= 1 \\ 6I_2 - \varepsilon &= -7 \end{aligned}\right| \Rightarrow I_2 = -6/18 = -1/3\ A \quad \text{y} \quad \varepsilon = 1 - 12(-1/3) = 5 \text{ V}$$

Parte (b) igual

---

7. En el circuito de la figura calcula: (a) La impedancia equivalente [2 puntos]. (b) La potencia disipada en Z_1 y Z_2 [3 puntos].
Datos: $\overline{V} = 60\,|\underline{0^\circ}$ V, $\overline{Z}_1 = 20\,|\underline{-60^\circ}\ \Omega$, $\overline{Z}_2 = 30\,|\underline{30^\circ}\ \Omega$



Solución:

a) Z_1 y Z_2 están en paralelo

$$\overline{Z}_1 = 20|\underline{-60^\circ} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} R_1 &= 20\cdot\cos(-60^\circ) = 10\ (\Omega) \\ X_1 &= 20\cdot sen(-60^\circ) = -17.32\ (\Omega) \end{aligned}\right\} \rightarrow \overline{Z}_1 = 10 - j17.32$$

$$\overline{Z_2} = 30\underline{|30^o} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_2 = 30 \cdot \cos(30^o) = 25.98\ (\Omega) \\ X_2 = 30 \cdot sen(30^o) = 15\ (\Omega) \end{array} \right\} \rightarrow \overline{Z_2} = 25.98 + j15$$

$$\overline{Z_e} = \frac{\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}} = \frac{20\underline{|-60^o} \cdot 30\underline{|30^o}}{35.98 - j2.32} = \frac{600\underline{|-30^o}}{36\underline{|-3.7^o}} = 16.67\ \underline{|-26.3^o}\ (\Omega)$$

b) Para calcular la potencia necesitamos saber la intensidad eficaz que circula por cada rama

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z_1}} = \frac{60\underline{|0^o}}{20\underline{|-60^o}} = 3\underline{|60^o}\ (A); \qquad \overline{I_2} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z_2}} = \frac{60\underline{|0^o}}{30\underline{|30^o}} = 2\underline{|-30^o}\ (A)$$

Por tanto: $P_{d(Z1)} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = 3^2 \cdot 10 = 90\ \text{W};$ $P_{d(Z2)} = I_{2ef}^2 \cdot R_2 = 2^2 \cdot 25{,}98 = 104\ \text{W};$