Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

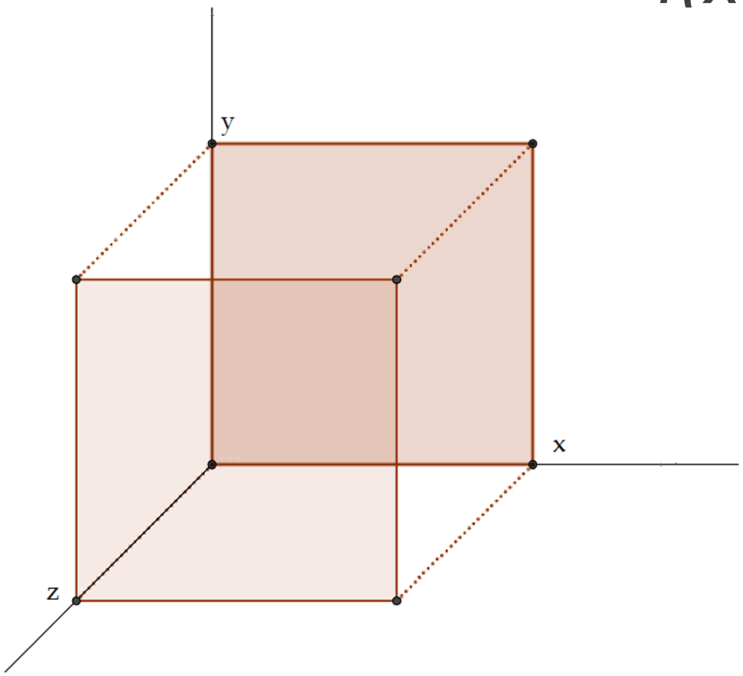
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

- Definición

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El volumen de una caja rectangular de dimensiones: x, y, z vale x·y·z; éste es un ejemplo de una función real de tres variables reales, que simbolizamos por:

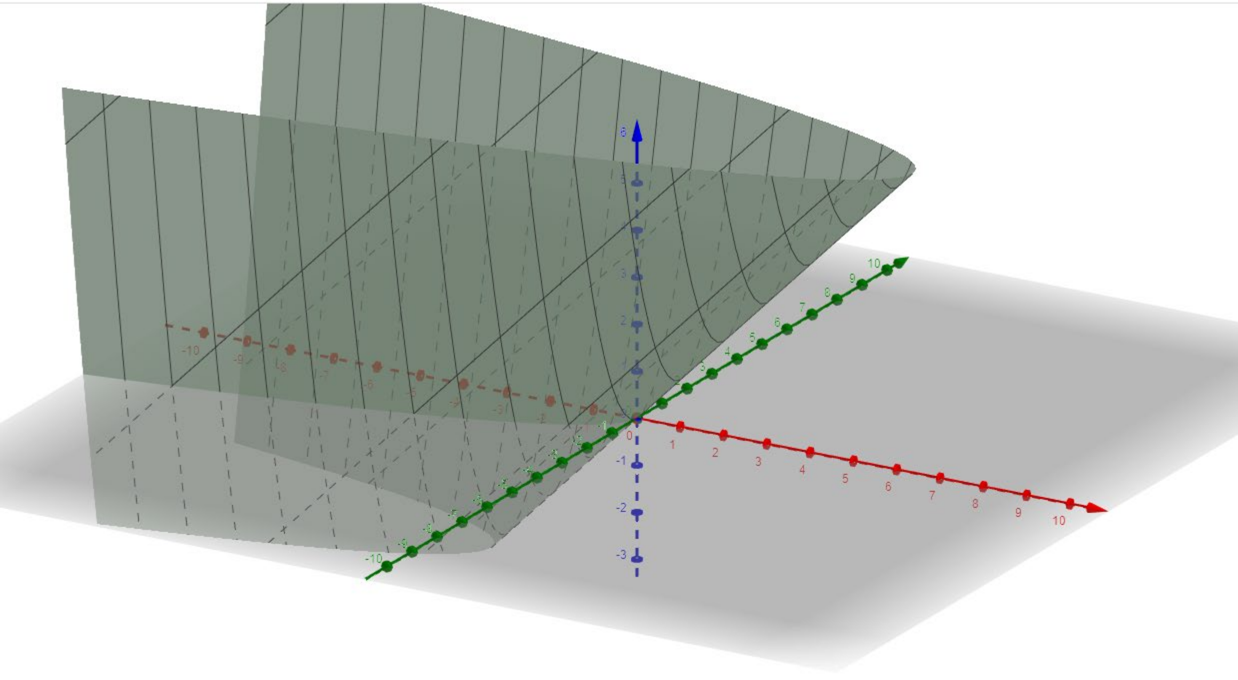
$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En general, una función real de *n* variables reales es una correspondencia que asigna a cada $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, un único valor $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Por ejemplo, $f(x, y) = x + y^2$ es una función de dos variables.



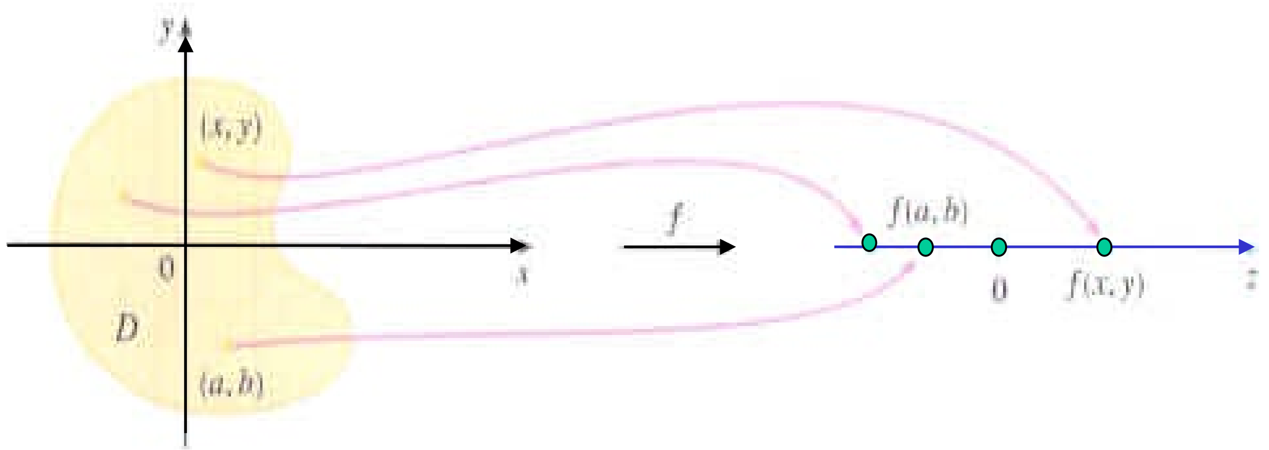
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Los conceptos conocidos para funciones de una variable tienen su equivalente para funciones de *n* variables.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Una función *f* de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales *(x,y)* de un conjunto *D*, un número real único denotado por *f(x,y)*.

El conjunto *D* es el dominio de *f* y su imagen es el conjunto de valores que toma *f*.



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

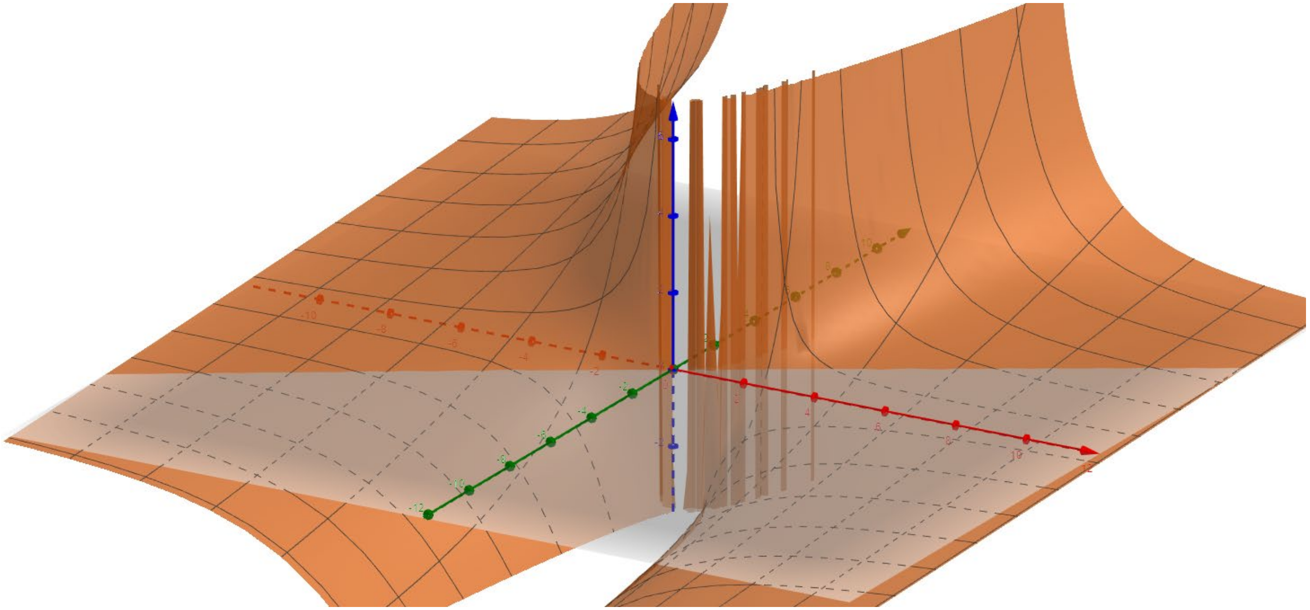
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Si *f* es una función de dos variables con dominio *D*, entonces la gráfica de *f* es el conjunto de los puntos (x, y, z) de R^3 tales que $z = f(x,y)$ y (x,y) está en *D*.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

$$z=f(x,y)=\frac{3x-5y}{y-x^2} \Rightarrow D=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y-x^2 \neq 0\right\}$$

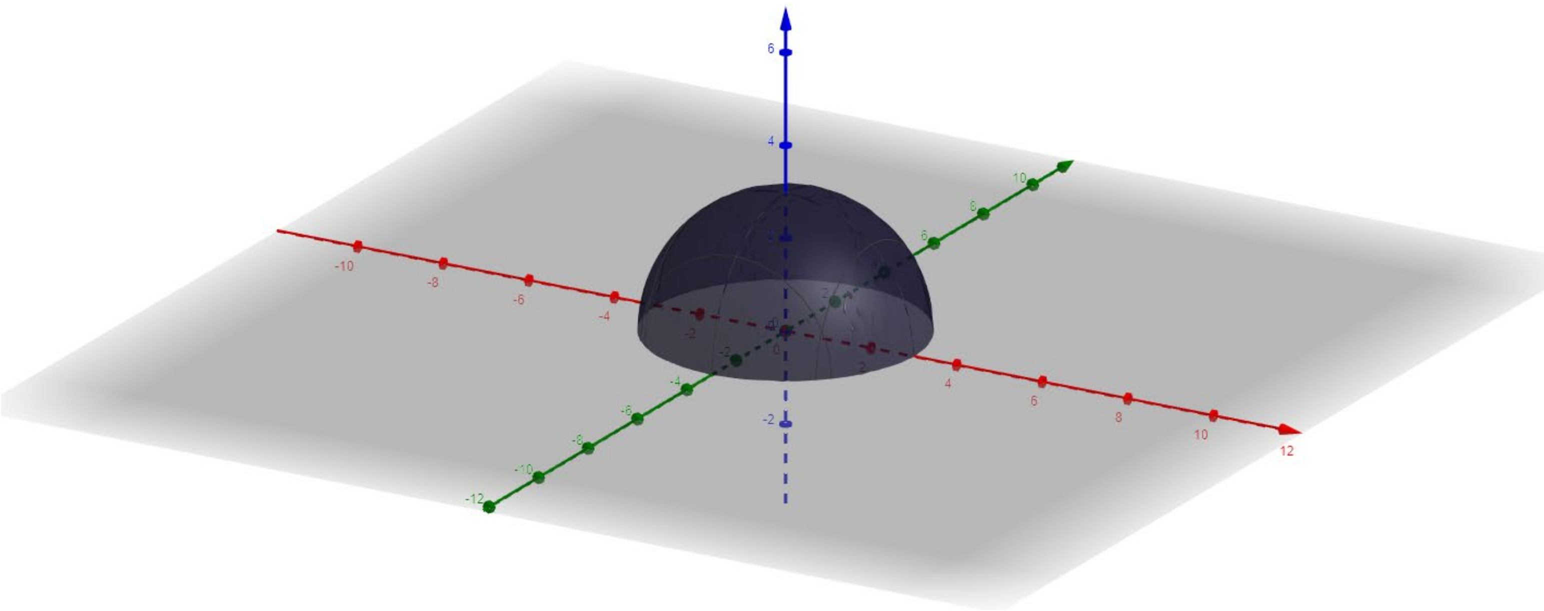


El dominio es todo el plano R^2 excepto los puntos de la parábola $y = x^2$.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

$$z=f(x, y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow D=\left\{(x, y) \in R^2 / 9-x^2-y^2 \geq 0\right\}$$



Como $x^2 + y^2 = 9$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 3, *D* representa el interior y la frontera de dicha circunferencia.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Las funciones de varias variables pueden operarse de igual forma que las de una variable, ya sea con suma, producto, cociente o composición de funciones.

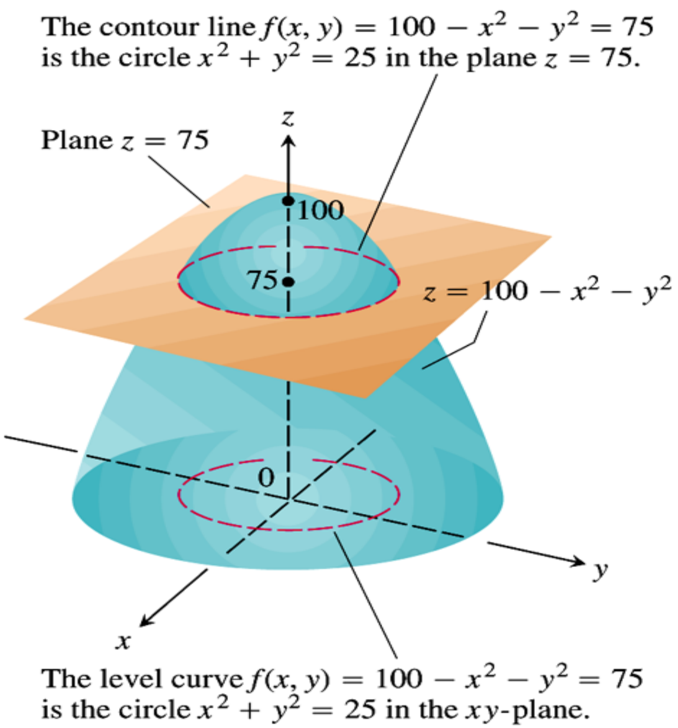
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

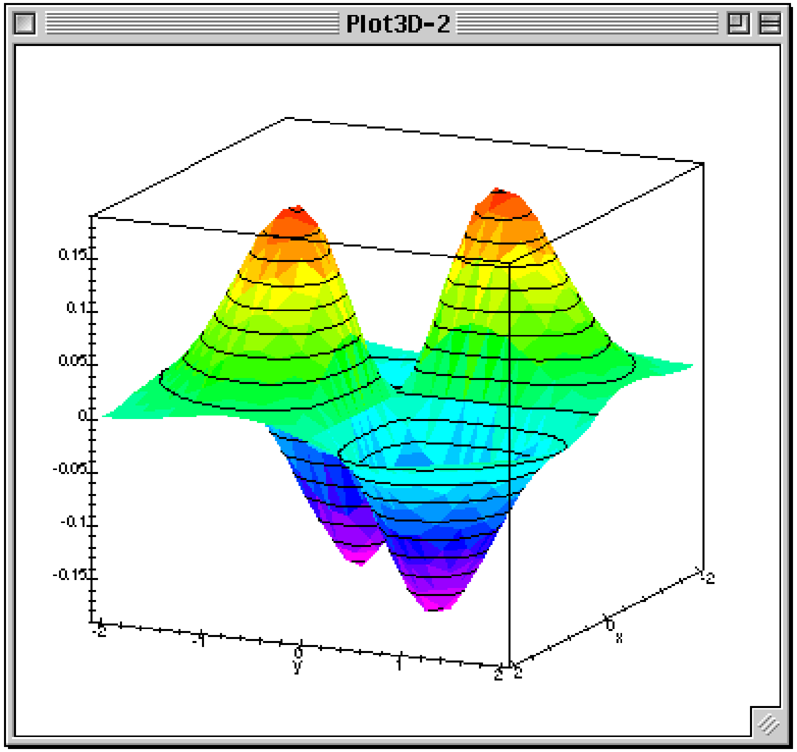
- Definición
- Curvas de nivel

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CURVAS DE NIVEL

Las curvas de nivel de una función *f* de dos variables, son las curvas con ecuaciones *f(x,y)=k*, donde *k* es una constante (que pertenece a la imagen de f)





FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

Hacemos z = c. Sustituyendo,

$$c = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

Elevando al cuadrado,

$$c^2 = 100 - x^2 - y^2$$

Reorganizando

$$x^2 + y^2 = 100 - c^2$$

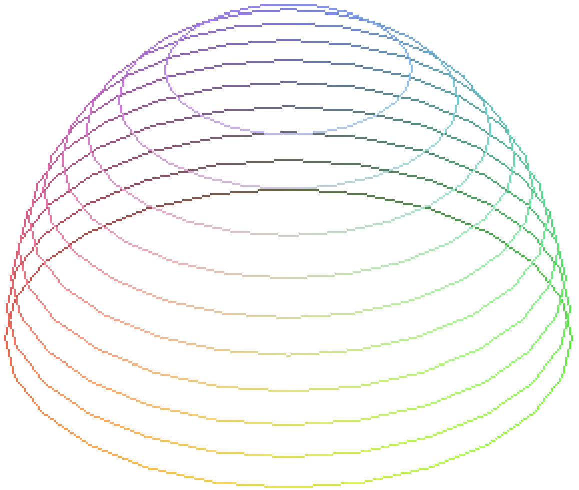
Así pues, se tienen circunferencias de centro el origen para c < 10; el punto (0, 0) para c = 10; y para c > 10 no tienen significado geométrico

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Obtener las curvas de nivel de

$$z = \sqrt{100 - x^2 -}$$

$$x^2 + y^2 = 100 - c^2$$



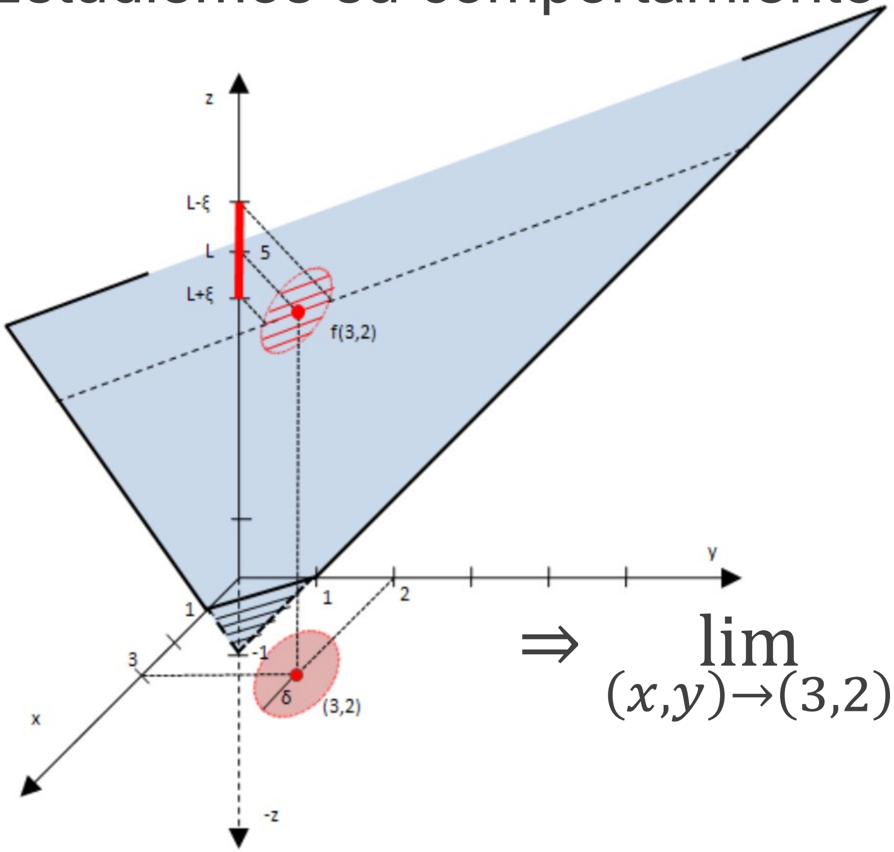
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

- Definición
- Curvas de nivel
- Límite de funciones de dos variables

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES DE DOS VARIABLES: EJEMPLO

Consideremos la función *f(x, y) = x + y*
*E*studiemos su comportamiento en los alrededores de (3, 2)



$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(3,2)} (x+y) = 5$$

x	y	f(x,y)
2,991	2	4,991
2,995	2	4,995
2,999	2	4,999
3	2	5
3	1,999	4,999
3	1,995	4,995
3	1,991	4,991

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES DE DOS VARIABLES

Sea *f* una función de dos variables cuyo dominio *D* incluye puntos arbitrariamente cercanos a *(a,b)*. Entonces decimos que el límite de *f(x,y)* cuando *(x,y)* se aproxima a *(a,b)* es *L* y escribimos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si, para cada número *e* > *0*, existe un número correspondiente *d* > *0* tal que para todo punto (*x*, *y*) $\in$ *D* se cumple

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < d \Rightarrow |f(x,y) - L| < e$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES ITERADOS

Los límites iterados de f(x, y) en (a, b) se definen como:

$$l(y) = \lim_{x \to a} f(x, y) \qquad l(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

$$l_1 = \lim_{y \to b} l(y) \qquad l_2 = \lim_{x \to a} l(x)$$

Si existen los límites l_1 y l_2, se dice que son los límites iterados de *f(x, y)* en (*a, b*). Si existe el límite doble l de *f(x, y)* en (*a, b*) y el límite $l(y)$ de *f(x, y)* para todo *y* en un intervalo de centro y_0, entonces existe el límite doble *y*, además, es l_1.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES ITERADOS

Como consecuencia:

1. Si *f(x, y)* tiene límite l en (*a, b*) y existe el límite iterado l_1 en (*a, b*), $l = l_1$
2. Si existen los dos límites iterados l_1 y l_2 de *f(x, y)* en (*a, b*) y, además, $l_1 \neq l_2$, entonces *f(x, y)* no tiene límite en (*a, b*)
3. Puede suceder que los límites iterados de *f(x, y)* en (*a, b*) existan y sean iguales, pero que no exista el límite de *f(x, y)* en (*a, b*)
4. Puede suceder que exista el límite de *f(x, y)* en (*a, b*) y no exista alguno de los límites iterados

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES ITERADOS

Los límites iterados se utilizan para ver que no existe el límite doble (existen los reiterados pero son distintos) o para calcular cuánto valdría éste en caso de que existiera. No obstante, no sirven por sí mismos para probar la existencia del límite doble, pues puede ocurrir que exista el doble y no algún unidimensional, y también puede que existan ambos iterados y coincidan, pero no exista el límite doble.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

Estudia la existencia del límite doble de la función en (0, 0) a partir de los límites iterados:

$$f(x,y) = \frac{xy - x + y}{x + y}$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJEMPLO

$$f(x,y) = \frac{xy - x + y}{x + y}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{xy - x + y}{x + y}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{y}\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{xy - x + y}{x + y}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Los límites iterados existen, pero son distintos ➔ NO EXISTE el límite doble $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy-x+y}{x+y}\right)$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES ITERADOS

Estudia la existencia de los siguientes límites dobles a través de los límites reiterados:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{-4x + 2}{1 - x + y^2}$$

LÍMITES REITERADOS: EJERCICIO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Los límites iterados existen y son iguales ➔ El límite doble $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)$, si existe, vale 0

LÍMITES ITERADOS

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-y^2}{x^2+y^2}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{x-y^2}{x^2+y^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Un límite iterado no existe, pero eso no descarta la existencia del límite doble $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}$

LÍMITES ITERADOS

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{-4x+2}{1-x+y^2}$$

$$\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{-4x+2}{1-x+y^2}\right)\right) = \lim_{y\to 2}\left(\frac{-2}{y^2}\right) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\left(\frac{-4x+2}{1-x+y^2}\right)\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-4x+2}{3-x}\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Los límites reiterados existen y son iguales ➔ El límite doble $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{-4x+2}{1-x+y^2}$, si existe, vale $-\frac{1}{2}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES DE N VARIABLES

Sea $f(\vec{x})$ definida sobre un intervalo abierto alrededor de $\vec{x}_0$, excepto posiblemente en $\vec{x}_0$. Decimos que $f(\vec{x})$ tiende al límite L cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$ y escribimos

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f\left(\vec{x}\right) = L$$

si, para cada número $e > 0$, existe un número correspondiente $d > 0$ tal que para todo punto $\vec{x} \in D$ se cumple

$$0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < d \Rightarrow \|f(\vec{x}) - L\| < e$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

- Definición
- Curvas de nivel
- Límite de funciones de dos variables
- Continuidad de funciones de dos variables

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD

Una función *f* de dos variables, se denomina continua en *(a, b)* si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Decimos que *f* es continua en *D* si *f* es continua en todo punto *(a, b)* de *D*

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD

Si las funciones *f* y *g* son continuas en *(a, b)*, entonces las siguientes funciones son continuas en *(a, b)*:

1. $f + g$ y $f - g$

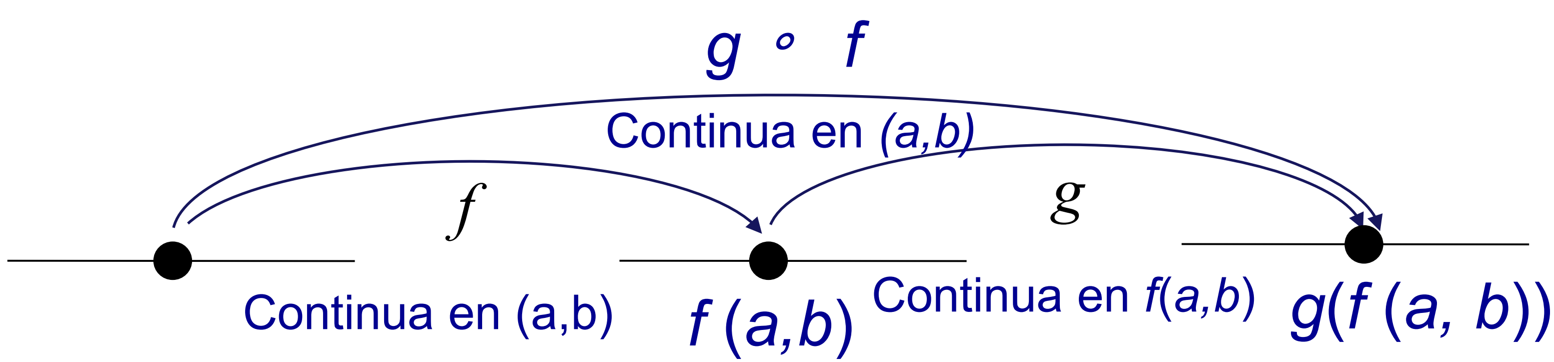
2. $f \cdot g$

3. $k \cdot f$, donde k es cualquier número

4. f/g (si $g(a, b) \neq 0$)

CONTINUIDAD

Si f es una función de dos variables continua en (a, b) y, g es una función de una variable continua en $f(a, b)$, entonces la función compuesta $(g \circ f)(a, b) = g(f(a, b))$ es continua en (a, b).



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD. EJEMPLO

Estudia la continuidad de la función $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD. EJEMPLO

Estudia la continuidad de la función $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

La función $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todo R^2 al ser composición de las funciones $g(x) = e^x$ y $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD. EJEMPLO

Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y) = cos\big(log(x+y)\big)$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

CONTINUIDAD. EJEMPLO

Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y) = cos\big(log(x+y)\big)$$

La función $f(x,y) = cos\big(log(x+y)\big)$ es continua en el semiplano $x+y > 0$ al ser composición de las funciones $g(x) = \cos(x)$ y $f(x,y) = \log(x+y)$

CONTINUIDAD. EJEMPLO

Estudia la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq\ (0,0)\\ 0\ \ si\ (x,y)=(0,0\end{cases}$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

EJERCICIOS

1) Encontrar el dominio de la función

$$f(x,y,z) = \arcsin(xy)\, e^{3z} + e^{(y+z)\ln(x+z)}$$

2) Describe los conjuntos de curvas de nivel para los valores de k indicados

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, k = 0,1,2,3.$

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2, k = 0,1,2.$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2, k = -2,-1,0,1,2.$

3) Calcula el límite de la función $f(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$