Nota de cuestiones sobre 10 puntos. Nota de problemas sobre 10 puntos

Cuestiones:

C1. Un campo eléctrico viene determinado por la expresión $\vec{E} = 3y^2\,\vec{j}$ N/C. Calcula la diferencia de potencial entre los puntos A:(1,2,1) m y B:(1,0,3) m. Indica, razonadamente, en qué punto debe haber mayor potencial [2 puntos].

SOLUCIÓN:

Utilizando la relación que existe entre el potencial y el campo eléctrico:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = -E\,\vec{j}\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E\cdot dy$$

$$\Rightarrow \int_B^A dV = -\int_{y=0}^{y=2} E\cdot dy \qquad \Rightarrow \qquad V_A - V_B = -\int_{y=0}^{y=2} 3\cdot y^2\cdot dy = -\left.\frac{3\cdot y^3}{3}\right|_{y=0}^{y=2} = -8\text{ V}$$

Tal como hemos obtenido matemáticamente el potencial es mayor en B, ya que el sentido del campo es positivo del eje Y. En consecuencia el potencial crece en sentido contrario porque $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Si el campo está dirigido de B hacia A, en B debe haber mayor potencial que en A.

C2. Disponemos de dos esferas conductoras huecas y concéntricas de radios a y b ($a<b$). La esfera interior tiene una carga Q estando la exterior descargada. ¿Qué vale el campo eléctrico en un punto situado entre ambas esferas? [0.5 puntos]. ¿Y la diferencia de potencial entre sus superficies? [0.5 puntos]. Una vez realizados los cálculos anteriores conectamos las dos esferas mediante un hilo conductor de capacidad despreciable. ¿Qué vale ahora el campo en el mismo punto anterior situado entre ambas esferas? [0.5 puntos]. ¿Y la diferencia de potencial entre sus superficies? [0.5 puntos]. En todos los casos razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

- Inicialmente: $Q_a = Q$ y $Q_b = 0$

Teniendo en cuenta la Ley de Gauss: $\int_{SC} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_e}{\varepsilon_0}$ para un punto que dista r del centro de las esferas, siendo: $a < r < b$, la carga encerrada es Q y por tanto el campo eléctrico es:

$$E\cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0; \qquad \rightarrow \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Diferencia de potencial: sólo hay carga en $r=a$ $\Rightarrow$ $V_a - V_b = k\frac{Q_a}{a} - k\frac{Q_a}{b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

- Si conectamos las dos esferas mediante un hilo conductor: toda la carga se traslada a la esfera exterior ya que ahora se trata de un único conductor y la carga debe quedar en su superficie. Por lo tanto, para un punto que dista r del centro de las esferas la carga encerrada es cero y el campo eléctrico es nulo en ese punto.

Como sólo hay carga en r=b el potencial en puntos interiores ($r \le b$) es constante e igual al de la superficie: $V_{(r\le b)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$ V. Por lo tanto la diferencia de potencial es $V_a - V_b = 0$

C3. Dos resistencias de valores R_1 = R y R_2 = 4R se conectan en paralelo a una fuente de tensión de 4 V. Sabiendo que dicha fuente entrega una potencia total de 20 W, determina los valores de las resistencias R_1 y R_2 [2 puntos].

SOLUCIÓN:

La resistencia equivalente de la asociación en paralelo de R_1 y R_2 es:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R \cdot 4R}{R + 4R} = \frac{4R^2}{5R} = \frac{4R}{5}.$$

La potencia total que disipan la asociación de R_1 con R_2 es igual a la potencia total que entrega la fuente de tensión, con lo que:

$$20\text{ W} = P = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{4^2}{4R/5} = \frac{16\cdot 5}{4R} = \frac{4\cdot 5}{R} = \frac{20}{R} \Rightarrow 20 = \frac{20}{R} \Rightarrow R = \frac{20}{20} = 1\ \Omega$$

Por tanto llegamos a que $R_1 = R = 1\ \Omega$ mientras que $R_2 = 4R = 4\ \Omega$.

C4. Un cable infinitamente largo está formado por un cilindro conductor macizo de 6 mm de radio por el que circula una corriente de 3 A. Suponiendo que dicha corriente se distribuye uniformemente a través de toda la sección circular del cable, determina el módulo del campo magnético a las distancias r_1 = 3 mm y r_2 = 10 mm, medidas desde el eje del cilindro [2 puntos]. Dato $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ u.S.I.

SOLUCIÓN:

Teniendo en cuenta la Ley de Ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e(r) \;\rightarrow\; 2\pi r B(r) = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e(r)$

$B(r) = \dfrac{\mu_0 I_e(r)}{2\pi r}$, donde $B(r)$ e $I_l(r)$ son, respectivamente, el módulo del vector campo magnético y la corriente neta enlazada a una distancia r del eje del cilindro conductor.

La densidad de corriente es uniforme. Así, para puntos interiores (r<R): $J = \dfrac{I_e(r)}{S_{enc}} = \dfrac{I_{Total}}{S_{Total}}$

Por tanto: $I_e(r_1) = \dfrac{I_T \cdot \pi r_1^2}{\pi R^2} = \dfrac{3\cdot 9}{36} = 0.75\text{ A} \;\rightarrow\; B(r_1) = \dfrac{\mu_0 I_e(r_1)}{2\pi r_1} = \dfrac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0.75}{2\pi\cdot 0.003} = 50\ \mu\text{T}$

Para r_2 = 10 mm > 6 mm estamos en el exterior del conductor, luego la corriente enlazada es igual a la corriente total $I_e(r_2) = 3\text{ A}$

Así: $B(r_2) = \dfrac{\mu_0 I_{Total}}{2\pi r_2} = \dfrac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3}{2\pi\cdot 0.01} = 6\cdot 10^{-5}\text{ T} = 60\ \mu\text{T}$.

C5. En un circuito disponemos de una bobina de 200 espiras, una longitud de 10 cm y una sección de 20 cm^2, por la que circula una corriente I. Calcular el valor eficaz de la f.e.m. inducida en los siguientes casos: (a) $I = 2\,sen(20t)$A, (b) $I = 2$ A [2 puntos].

SOLUCIÓN:

Sabemos que la *f.e.m.* inducida en una bobina depende de la velocidad con la que varía el flujo magnético a través de la superficie que definen las espiras de la bobina. Si la variación de flujo se debe únicamente al cambio de la corriente que circula por la bobina, entonces la *f.e.m.* inducida se puede expresar en función del coeficiente de autoinducción de la misma y de la velocidad con la que varía la corriente:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

El coeficiente de autoinducción lo obtenemos como: $L = \dfrac{\phi_B}{I}$

Siendo: $\phi_B = NBS = N\,\mu_0\,(N/l)I\,S = \mu_0\dfrac{N^2 IS}{l}$

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0\frac{N^2 S}{l} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{200^2\cdot 20\cdot 10^{-4}}{0.1} = 1\,mH$$

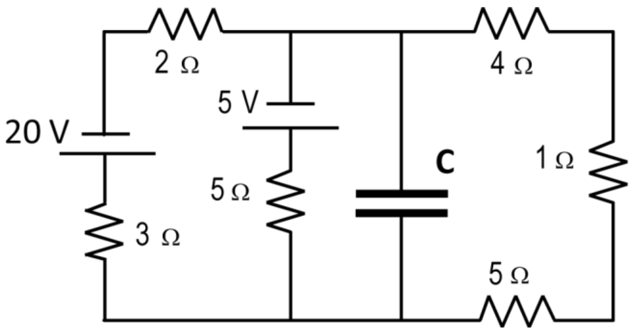
De esta manera obtenemos los siguientes resultados:

a) $\varepsilon(t) = \left| L \dfrac{dI}{dt} \right| = 40\cos(20t)\ \text{mV}$ → cuyo valor eficaz será $\varepsilon_{ef} = \dfrac{40}{\sqrt{2}}\ \text{mV}$

b) En este caso $\dfrac{dI}{dt} = 0$; ya que I es constante. Por tanto, la f.e.m. inducida es cero.

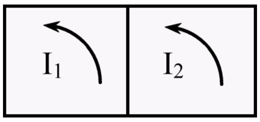
Problemas:

P1. En el circuito de la figura el condensador C se encuentra completamente cargado, siendo $0.5\ \mu J$ la energía almacenada en el mismo. Calcula: (a) Las corrientes que circulan por cada rama [2 puntos]. (b) La potencia aportada o consumida por cada una de las f.e.m. [1 punto]. (c) La capacidad del condensador [1 punto]



SOLUCIÓN:

a) Cuando el condensador está completamente cargado no circula corriente por la rama en la que se encuentra. Por tanto tendremos únicamente dos mallas:



Planteamos las ecuaciones de malla para calcular las corrientes:

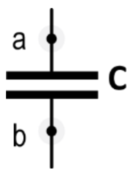
$$10I_1 - 5I_2 = 15$$
$$-5I_1 + 15I_2 = 5$$

Resolviendo el sistema: $I_1 = 2\ A$; $I_2 = 1\ A$; $i_{12} = I_1 - I_2 = 1\ A$ en el sentido de I_1.

b) En consecuencia, teniendo en cuenta el sentido de las corrientes y que las f.e.m. no tienen resistencia interna y por tanto no disipan potencia por efecto Joule:

La f.e.m. de 20 V aporta: $P_{AP} = \varepsilon_1 \cdot I_1 = 40\ W$

La f.e.m. de 5 V consume: $P_C = \varepsilon_2 \cdot i_{12} = 5\ W$



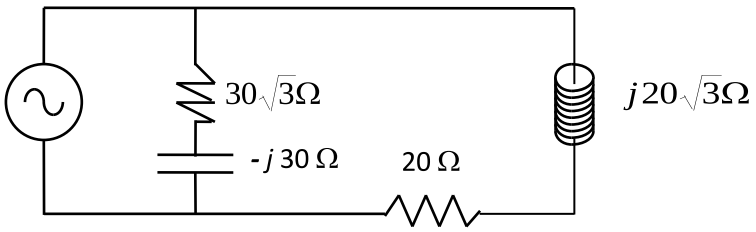
c) La diferencia de potencial entre los bornes del condensador es:

Camino: vamos desde "a" hasta "b" por el tramo derecho, sentido contrario de I_2

$$V_a - V_b = (-I_2)\cdot 10 = -10\ V$$ (mayor potencial en b que en a)

Utilizando la expresión de la energía del condensador, obtenemos el valor de la capacidad: $U = \dfrac{1}{2} C \cdot V^2 \Rightarrow C = \dfrac{2\cdot U}{V^2} = \dfrac{2\cdot 0.5\cdot 10^{-6}}{(10)^2} = 10\ nF$

P2. En el circuito de la figura la fuente de alterna suministra una corriente eficaz de 3.6 A. Determina: (a) La impedancia total [2 puntos]. (b) La potencia disipada en cada una de las resistencias [2 puntos].



SOLUCIÓN:

(a) $\bar{Z}_1 = 30\sqrt{3} - j30 = 60\,\underline{|-30^o}\ \Omega \qquad \bar{Z}_2 = 20 + j20\sqrt{3} = 40\,\underline{|60^o}\ \Omega$

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{60\,\underline{|-30^o} \cdot 40\,\underline{|60^o}}{30\sqrt{3} + 20 + (20\sqrt{3} - 30)j} = \frac{2400\,\underline{|30^o}}{72.11\,\underline{|3.69^o}} = 33.28\,\underline{|26.31^o}\ \Omega$$

(b) Para calcular la potencia disipada en cada resistencia hemos de conocer la corriente eficaz que circula por cada rama. Y para ello es necesario conocer antes la tensión eficaz de la fuente:

$$V_{ef} = I_{ef} \cdot Z_e = 3.6 \cdot 33.28 = 119.8 \cong 120\ V$$

Ahora: $I_{1ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z_1} = \dfrac{120}{60} = 2\ A \qquad I_{2ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z_2} = \dfrac{120}{40} = 3\,A$

La potencia disipada en cada resistencia es:

$$P_{d1} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = 2^2 \cdot 30\sqrt{3} \cong 208\,W \qquad P_{d2} = I_{2ef}^2 \cdot R_2 = 3^2 \cdot 20 = 180\ W$$

P3. Una onda electromagnética plana se propaga dentro de agua (índice de refracción n=1,33) en la dirección positiva del eje Z. El valor máximo del vector del campo eléctrico, que se encuentra vibrando en la dirección del eje Y, es de 30 N/C. Si su frecuencia es de 15 MHz, calcula: (a) El valor máximo del vector del campo magnético asociado [0.5 puntos]. (b) La expresión de los campos eléctrico y magnético que describen la onda indicando módulo, dirección y sentido [1.5 puntos]. Dato velocidad O.E.M. en el vacío $c=3{\cdot}10^8$ m/s.

RESOLUCIÓN:

a) El valor máximo de B se calcula a partir de: $B_0 = \dfrac{E_0}{v}$, siendo v la velocidad de propagación de la onda que podemos obtener de: $n = \dfrac{c}{v}$

$$B_0 = \frac{E_0}{c/n} = \frac{E_0 \cdot n}{c} = \frac{30 \cdot 1.33}{3 \cdot 10^8} = 1.33 \cdot 10^{-7}\ T$$

b) Calculamos previamente la velocidad angular y el número de onda:

$$w = 2\pi\ f = 2\pi 15 \cdot 10^6 = 30\pi \cdot 10^6\ rad/s$$

$$k = \frac{w}{v} = \frac{30\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8 / 1.33} = 1.33\ \pi \cdot 10^{-1}\ m^{-1}$$

Con estos datos podemos proporcionar la ecuación que corresponde a los campos eléctrico y magnético asociados a la onda:

$$\vec{E} = 30 sen\left(30\pi \cdot 10^6 t - 1.33\pi \cdot 10^{-1} z\right) \vec{j}\ \ V/m$$
$$\vec{B} = 1.33 \cdot 10^{-7} sen\left(30\pi \cdot 10^6 t - 1.33\pi \cdot 10^{-1} z\right)\left(-\vec{i}\right) T$$

El campo magnético vibra en la dirección del eje X, teniendo sentido negativo cuando el campo eléctrico lo tiene positivo, ya que: $\vec{j} \times \left(-\vec{i}\right) = \vec{k}$
