Solución examen FFI 28-06-2018

Nota de cuestiones sobre 10 puntos. Nota de problemas sobre 10 puntos

Cuestiones:

C1. Sea una corteza esférica conductora de radio $R=10$ cm y carga Q. Una partícula con carga $q=10$ nC está situada a una distancia de 15 cm del centro de la esfera y se encuentra sometida a una fuerza repulsiva de $16\cdot10^{-3}$ N. Calcula: (a) La densidad superficial de carga de la corteza esférica [1 punto]. (b) El trabajo necesario para mover la partícula q desde su posición inicial hasta la superficie de la esfera [1 punto]. Dato: $K=9\cdot10^{9}$ u.S.I.

(a) La densidad superficial de carga se calcula como: $\sigma=\dfrac{Q}{S}=\dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

La carga Q debe ser positiva (por ser la fuerza repulsiva) pero desconocemos su valor. No obstante, podemos conocer éste a partir del valor de la fuerza que proporciona el enunciado.

$$\vec{F}=q\cdot\vec{E} \;\rightarrow\; |\vec{F}|=q\cdot|\vec{E}|=q\cdot k\cdot\frac{Q}{d^2} \;\rightarrow Q=\frac{|\vec{F}|\cdot d^2}{q\cdot k}=\frac{16\cdot10^{-3}\,(0.15)^2}{10\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^{9}}=4\,\mu C$$

Escriba aquí la ecuación.

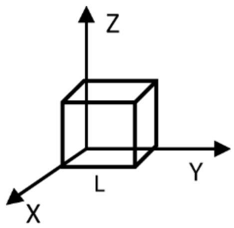
$$\sigma=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot R^2}=\frac{4\cdot10^{-6}}{4\cdot\pi\cdot\left(10\cdot10^{-2}\right)^2}=3.18\cdot10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

(b) El trabajo se calcula como:

$$W_{15}^{10}=-\Delta U=-q\cdot\Delta V=q\cdot(V_{15}-V_{10})=q\cdot k\cdot Q\left(\frac{1}{d_{15}}-\frac{1}{d_{10}}\right)=$$

$$=10^{-8}\cdot9\cdot10^{9}\cdot4\cdot10^{-6}\cdot\left(\frac{1}{0.15}-\frac{1}{0.10}\right)=-12\cdot10^{-4}\ \text{J}$$

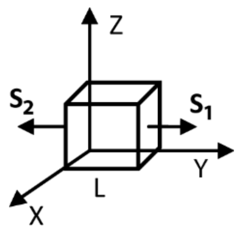
C2. Una superficie cúbica cerrada de lado L, situada tal como indica la figura respecto de los ejes cartesianos, se encuentra sumergida en una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}=(1+2y^2)\vec{\jmath}\ \ N/C$. La carga encerrada en dicha superficie es de 3 nC. Calcula: (a) El flujo total de campo eléctrico a través de la caja [0.5 puntos]. (b) El valor de L [1.5 puntos]. Dato: $\varepsilon_0=8.85\cdot10^{-12}$ USI



(a) El flujo total de campo eléctrico a través de la caja se puede calcular usando la ley de Gauss:

$$\phi_E=\frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}=\frac{3\cdot10^{-9}}{8.85\cdot10^{-12}}=339\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot\text{m}^2$$

(b) El flujo total de campo eléctrico a través del cubo es: $\emptyset_E=\int_{SC}\vec{E}\cdot d\vec{S}$; y será la suma del flujo a través de cada una de sus seis caras. Como el campo eléctrico tiene dirección del eje Y, sólo por las caras perpendiculares a este eje (S1 y S2 en la figura) puede atravesar flujo. En este caso el vector $\vec{E}$ forma con $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ ángulos de 0º o 180º, mientras que para las otras 4 caras el producto $\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$ por ser los vectores perpendiculares.

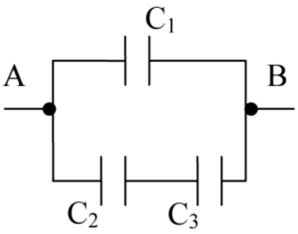


Por tanto: $\phi_E = \phi_1 + \phi_2 = E_{enS1} \cdot S_1 \cdot \cos 0^o + E_{enS2} \cdot S_2 \cdot \cos 180^o$

Tenemos que: y=L en S_1 e y=0 en S_2 Luego: $\phi_E = (1+2L^2) \cdot L^2 - L^2 = 2L^4$

Despejando: $L = (339/2)^{1/4} = 3.6$ m

C3. Dos condensadores C_2=6 μF y C_3=12 μF se conectan en serie a una fuente de alimentación de 20 V. (a) Calcula la carga que se almacena en cada uno de ellos [1 punto]. (b) Una vez cargados se desconectan de la fuente y se conectan en paralelo a un condensador inicialmente descargado, C_1 = 12 μF, tal y como se muestra en la figura, ¿Qué carga quedará finalmente en cada condensador y qué diferencia de potencial habrá entre A y B? [1 punto].



(a) A estar C_2 y C_3 en serie ambos condensadores almacenan la misma carga y la misma que su equivalente:

$$C_{23} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{6 \cdot 12}{6+12} = 4\ \mu F \quad \rightarrow \quad Q_{23} = Q_2 = Q_3 = C_{23} \cdot V = 4 \cdot 20 = 80\ \mu\text{C}$$

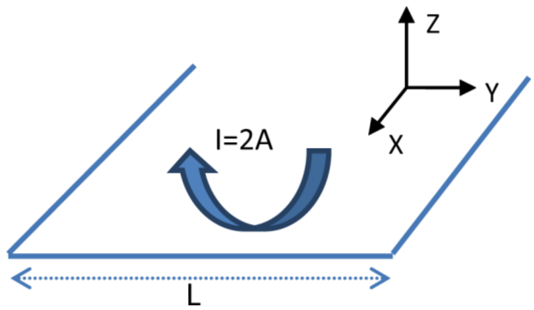
(b) C_2 y C_3 se comportan como un único condensador de valor C_{23}. Parte de la carga pasa al condensador C_1 hasta que los potenciales se igualan. La carga total debe permanecer constante.

$$V_{AB} = V'_1 = V'_{23} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_{23}}{C_{23}} \quad \Rightarrow \quad Q'_1 = \frac{C_1}{C_{23}} Q'_{23} = 3Q'_{23}$$

$Q'_1 + Q'_{23} = Q_{23} = 80\ \mu\text{C}$ Por tanto: $Q'_1 = 60\ \mu\text{C}$ y $Q'_{23} = Q'_2 = Q'_3 = 20\ \mu\text{C}$

$$V_{AB} = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{60}{12} = 5 \quad \text{V}$$

C4. Tenemos una parte de un circuito suspendido en el aire, ver diagrama. El conductor tiene una densidad lineal de 200 g/m. (a) Calcula el campo magnético mínimo (módulo, dirección y sentido) necesario para compensar el peso del segmento de longitud L=20 cm [1.5 puntos]. (b) Con ese campo magnético, ¿qué fuerza magnética aparece sobre los segmentos laterales del conductor? [0.5 puntos].



(a) La fuerza total sobre el conductor ha de ser nula: $\vec{F}_G + \vec{F}_B = 0$, por tanto la fuerza magnética tiene que tener sentido $(+\vec{k})$.

Como $\vec{F}_B = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$ y $\vec{l} = L\,(-\vec{j})$, el campo magnético **mínimo** debe ser perpendicular al hilo, en la dirección del eje X y sentido: $\vec{B} = B\,(+\vec{i})$

Su módulo será: $mg = ILB \quad \rightarrow \quad B = \frac{mg}{LI} = \frac{m}{L} \cdot \frac{g}{I} = 0.2 \cdot \frac{10}{2} = 1 \quad \text{T}$

Puede observarse que el valor de B es independiente de la longitud del hilo.

(b) En los segmentos laterales $\vec{l} = l\,(\pm\,\vec{\imath}\,)$ y como $\vec{F}_B = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$ la fuerza magnética será cero ya que $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son paralelos o anti-paralelos y su producto vectorial es nulo.

C5. Una espira circular de radio 1 cm y resistencia de 0.6 Ω está situada dentro de una bobina de forma coaxial (el eje axial de la bobina es perpendicular a la espira y pasa por su centro). La bobina tiene 80 cm de largo, 10000 espiras de 10 cm^2 de sección y por ella circula una corriente alterna $I = 2\cos(60t)$ A. (a) Calcula la corriente inducida en la espira [1.5 puntos]. (b) ¿Girará la espira dentro de la bobina? Razona tu respuesta [0.5 puntos]. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI

(a) El campo magnético dentro de la bobina, de valor $B = \mu_0 (N/d) \cdot I$, está en la dirección de su eje y es perpendicular a la superficie de la espira. Por tanto, el flujo que atraviesa la espira es:

$$\emptyset = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cos 0° = B \int_S dS = B\,S$$

$$\phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10000}{0.8} \cdot 2\cos(60t) \cdot \pi (0.01)^2 \cong 10^{-5} \cos(60t) \text{ Wb}$$

La f.em. ε(t) inducida la obtenemos con la Ley de Faraday: $\varepsilon(t) = -\dfrac{d\phi}{dt} = 0.6\, sen(60t)$ mV

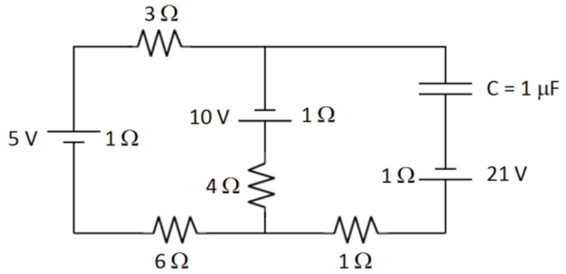
y la corriente con la Ley de Ohm: $I_i(t) = \dfrac{0.6\, sen(60t)}{0.6} = sen(60t)$ mA

(b) El campo magnético en el interior de la bobina y el vector superficie de la misma son paralelos. por lo tanto, el momento que opera sobre la espira es nulo y la espira no gira:

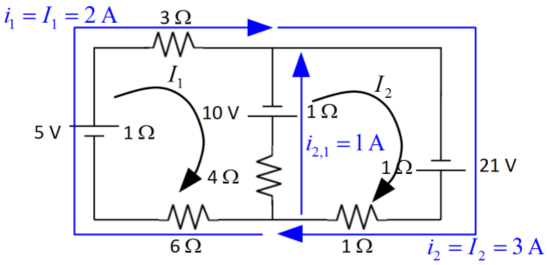
$$\vec{\tau} = I\,\vec{S} \times \vec{B} = ISB\; sen\; 0° = 0$$

Problemas:

P1. En el circuito de la figura el condensador se encuentra completamente descargado en el instante inicial (t=0 s). Calcula: (a) La corriente en cada rama en t = 0 s [2 puntos]. (b) La potencia aportada o consumida (según sea el caso) por cada f.e.m. en t = 0 s [1 punto]. (c) La energía almacenada en el condensador cuando éste se encuentra completamente cargado [1 punto].



(a) En t = 0 s el condensador completamente descargado se comporta como un cortocircuito. Considerando entonces las corrientes de malla I_1 e I_2 ambas en *sentido horario* tenemos que:



$$\left.\begin{aligned} 15I_1 - 5I_2 &= 15 \\ -5I_1 + 7I_2 &= 11 \end{aligned}\right| \times 3 \Rightarrow \begin{aligned} 15I_1 - 5I_2 &= 15 \\ -15I_1 + 21I_2 &= 33 \\ \hline 16I_2 &= 48 \end{aligned}$$

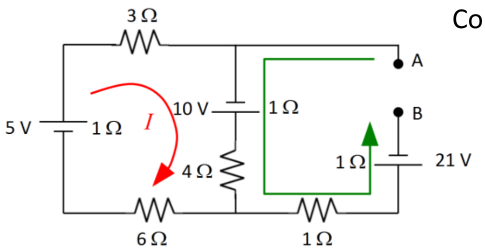
$$I_2 = 3 \Rightarrow 15I_1 - 15 = 15 \Rightarrow 15I_1 = 30 \Rightarrow I_1 = 2\,\mathrm{A}$$

Corriente por la rama central: $i_{2,1} = I_2 - I_1 = 1\,\mathrm{A}$ **en el sentido de I_2** (hacia arriba)

(b) Las f.e.m. de 5 V y 21 V **aportan** y la de 10 V **consume**: $P_{AP,5V} = 5 \cdot 2 - 2^2 \cdot 1 = 6\,\mathrm{W}$

$P_{AP,21V} = 21 \cdot 3 - 3^2 \cdot 1 = 54\,\mathrm{W}$ $\qquad P_{C,10V} = 10 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 11\,\mathrm{W}$

(c) El condensador ya cargado es un circuito abierto, luego no circula corriente por la resistencia de 1 Ω ni por la f.e.m. de 21 V. Según la figura, la d.d.p. en bornes del condesador es V_A-V_B:

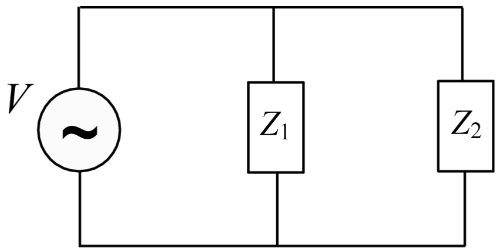


Corriente por la malla izquierda: $I = \dfrac{5+10}{1+3+1+4+6} = 1\,\mathrm{A}$

Camino verde: $V_A - V_B = I \cdot (1+4) - (10-21) = 16\,\mathrm{V}$

Energía: $U = \dfrac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 = \dfrac{1}{2}10^{-6} \cdot 16^2\ \mathrm{J} = 128\,\mu\mathrm{J}$

P2. En el circuito de la figura calcula: (a) La impedancia total [1.5 puntos]. (b) la potencia disipada en Z_1 y Z_2 [1 punto]. (c) El valor que debería tener el módulo de Z_2 (manteniéndose la fase en 90º) para que tensión e intensidad estén en fase [1.5 puntos]. Datos: $\overline{V} = 100\,|\underline{60^\circ}\ \mathrm{V}$, $\overline{Z}_1 = 40\,|\underline{-45^\circ}\ \Omega$, $\overline{Z}_2 = 20\,|\underline{90^\circ}\ \Omega$



(a) $\overline{Z}_1 = 40\,|\underline{-45^\circ} = 20\sqrt{2} - j\,20\sqrt{2}\ \Omega$ $\quad$ y $\quad$ $\overline{Z}_2 = 20\,|\underline{90^\circ} = j\,20\ \Omega$

La potencia total es: $\overline{Z}_T = \dfrac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \dfrac{40\,|\underline{-45^\circ} \cdot 20\,|\underline{90^\circ}}{20\sqrt{2} - j\,8.284} = \dfrac{800\,|\underline{45^\circ}}{29.47\,|\underline{-16.32^\circ}} = 27.15\,|\underline{61.32^\circ}\ \Omega$

(b) $\bar{Z}_2 = 20\,\underline{|90^\circ}\ \Omega$ tiene fase 90º y por tanto es una autoinducción, luego no disipa potencia.

Para conocer la potencia disipada en Z1 necesitamos saber qué corriente pasa por ella:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} = \frac{100\,\underline{|60^\circ}}{40\,\underline{|-45^\circ}} = 2.5\,\underline{|105^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_{dR} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = 2.5^2 \cdot 20\sqrt{2} = 125\sqrt{2}\ \ W$$

(c) Para que tensión e intensidad esté en fase se tiene que cumplir que $\bar{Z}'_T = Z'_T\,\underline{|0^\circ}$

$$\bar{Z}'_T = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}'_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}'_2} = \frac{40\,\underline{|-45^\circ} \cdot X\,\underline{|90^\circ}}{20\sqrt{2} - j\,20\sqrt{2} + jX} = \frac{40X\,\underline{|45^\circ}}{20\sqrt{2} + j(X - 20\sqrt{2})} = Z'_T\,\underline{|0^\circ}$$

Luego la fase del denominador debe ser 45º

$$\Rightarrow\quad arc\,tg\frac{(X-20\sqrt{2})}{20\sqrt{2}} = 45^\circ \quad\rightarrow\quad X = 20\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\cdot tg(45^\circ) \quad\rightarrow\qquad X = 40\sqrt{2}\ \Omega$$

P3. Una onda electromagnética plana, con un campo eléctrico de amplitud 5 V/m y frecuencia de 10^{15} Hz, se propaga en un medio material en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 10^8 m/s. (a) Calcula la frecuencia angular, el número de onda, la amplitud del campo magnético y el índice de refracción del medio en que se propaga la onda [1 punto]. (b) Suponiendo que el campo eléctrico vibra en el eje Y, determina la expresión de los vectores campo eléctrico y campo magnético [1 punto].

(a) Puesto que la frecuencia lineal es $f = 10^{15}\ \mathrm{Hz}$, la frecuencia angular vendrá dada por $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 10^{15}\ \mathrm{rad/s}$. Además, la velocidad de propagación es $v = 10^8\ \mathrm{m/s}$, con lo que el número de onda es $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\cdot 10^{15}}{10^8} = 2\pi\cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.

La amplitud del campo magnético es $B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{5}{10^8} = 5\cdot 10^{-8}\ \mathrm{T}$.

Y el índice de refracción es $n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8}{10^8} = 3$.

(b) El vector campo eléctrico se puede escribir como $\vec{E} = E_0\, sen\,(kx + wt)\,\vec{\jmath}$, con lo que sustituyendo los valores anteriores se tiene que $\vec{E} = 5\, sen\,(2\pi\, 10^7 x + 2\pi\, 10^{15}\, t)\,\vec{\jmath}$. Y como además $\vec{\jmath} \times (-\vec{k}) = -\vec{\imath}$ el vector campo magnético será $\vec{B} = 5\cdot 10^{-8}\, sen\,(kx + wt)\cdot(-\vec{k})$, es decir: $\vec{B} = B_0\, sen(2\pi\, 10^7 x + 2\pi\, 10^{15}\, t)\cdot\left(-\vec{k}\right)\ T$

NOTA: También habría sido válida la solución:

$\vec{E} = 5\, sen\,(2\pi\, 10^7 x + 2\pi\, 10^{15}\, t)\cdot(-\vec{\jmath})\ V/m$ y $\vec{B} = 5\cdot 10^{-8}\, sen(2\pi\, 10^7 x + 2\pi\, 10^{15}\, t)\cdot\vec{k}\ \ T$