MATEMÀTICA DISCRETA

Violeta Migallón Gomis
Jose Penadés Martínez

MATEMÀTICA DISCRETA

CONTINGUT

Bloc 1. Introducció a la teoria de grafs

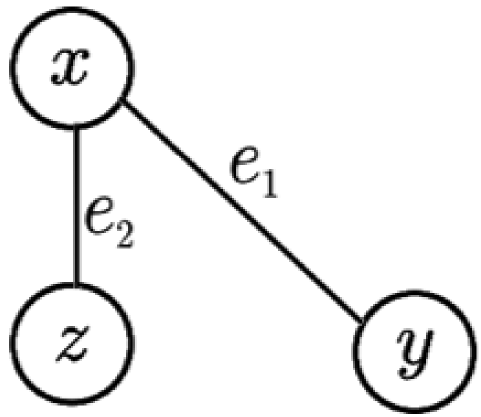
Lliçó 1.
Grafs: fonaments

1. DEFINICIÓ I CONCEPTES BÀSICS

DEFINICIONS

1. Un **graf no dirigit** G és un parell *(V,A)*, en el que *V* és un conjunt els elements del qual anomenarem **vèrtexs**, i *A* una família de parells no ordenats de vèrtexs, que anomenarem **arestes**.

EXEMPLE:



$V=\{x,y,z\}$

$A=\{e_1=\{x,y\}, e_2=\{x,z\}\}$

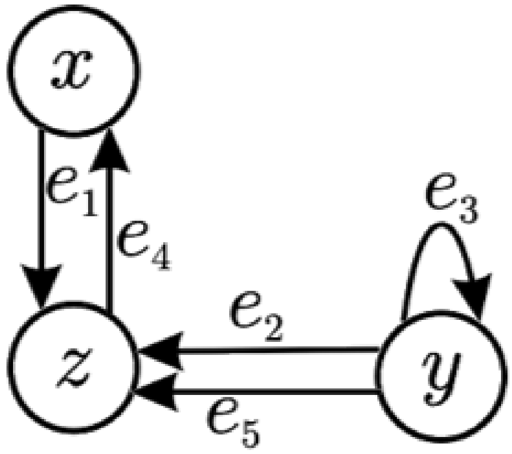
1. DEFINICIÓ I CONCEPTES BÀSICS

2. Un **graf dirigit** *G* és un parell *(V,A)*, en el qual *V* és un conjunt els elements del qual anomenarem **vèrtexs**, i *A* una família de parells ordenats de vèrtexs, que anomenarem **arcs**.

EXEMPLE:

V={x,y,z}

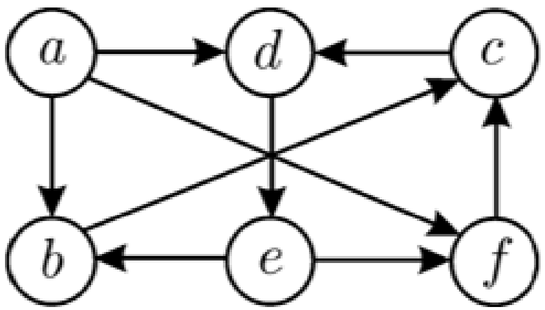
A={e_1=(x,z),e_2=(y,z), e_3=(y,y),e_4=(z,x), e_5=(y,z)}



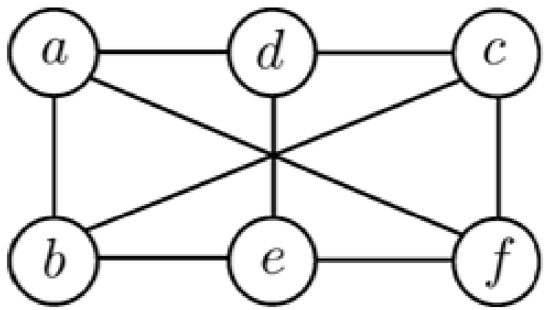
1. DEFINICIÓ I CONCEPTES BÀSICS

3. Anomenem **graf no dirigit associat** a un graf dirigit, a un graf amb el mateix conjunt de vèrtexs i en el que s'han ignorat les direccions dels arcs.

EXEMPLE:



GRAF DIRIGIT

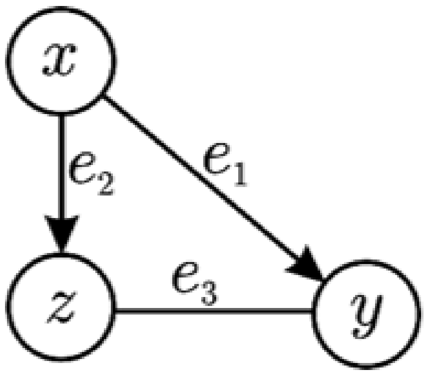


GRAFO NO DIRIGIT ASSOCIAT

1. DEFINICIÓ I CONCEPTES BÀSICS

4. Un **graf mixt** és aquell que conté tant arcs com arestes.

EXEMPLE:



GRAF MIXT

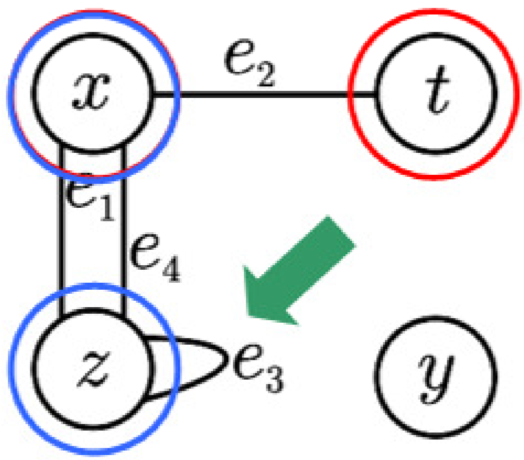
1. DEFINICIÓ I CONCEPTES BÀSICS

5. Els extrems d'una aresta (arc) es diu que són **incidents** amb l'aresta (arc).

6. Dos vèrtexs incidents amb una mateixa aresta (arc) es diuen **adjacents**.

7. Un **bucle** és una aresta (o arc) els extrems de la qual són el mateix vèrtex.

EXEMPLE:



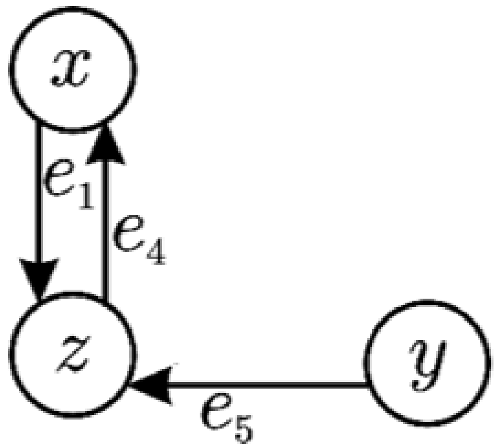
2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

DEFINICIONS:

1. Un **graf simple** és un graf sense bucles en què no hi ha dos arestes que enllacen el mateix parell de vèrtexs. Si el graf és dirigit direm que és simple si no té bucles i no hi ha dos arcs unint el mateix parell de vèrtexs i amb la mateixa direcció. Si un graf no és simple s'anomena **multigraf**.

EXEMPLE:

MULTIGRAF

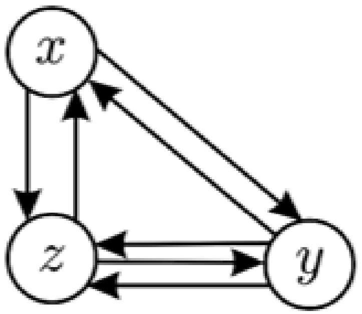


GRAF SIMPLE

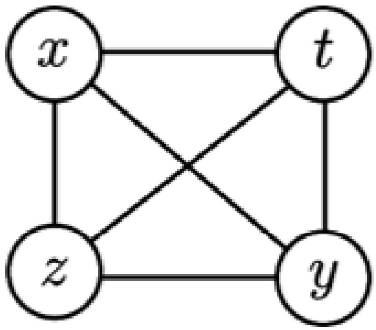
2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

2. Un graf no dirigit (dirigit) es diu que és **complet** si hi ha almenys una aresta (arc) unint cada parell de vèrtexs distints. Denominarem per K_n al graf complet no dirigit i simple amb n vèrtexs.

EXEMPLE:



GRAF DIRIGIT COMPLET NO SIMPLE

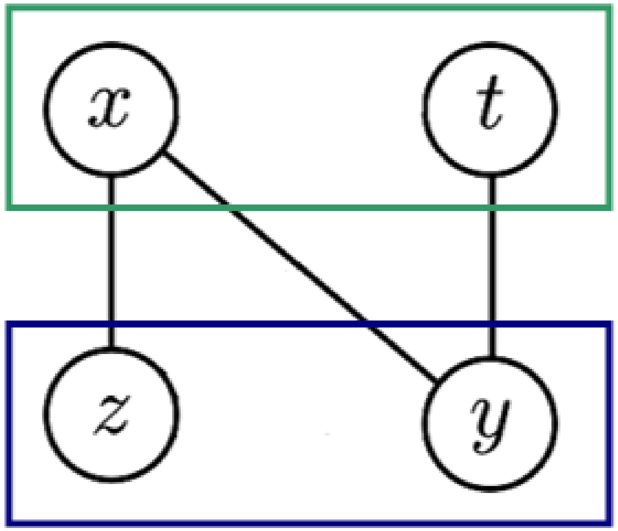


GRAF NO DIRIGIT COMPLET SIMPLE (K_4)

2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

3. Un graf no dirigit direm que és **bipartit** si hi ha una partició $\{X, Y\}$ del conjunt de vèrtexs de manera que tota aresta té un extrem en X i un altre en Y. Un graf dirigit és bipartit si ho és el seu graf no dirigit associat.

EXEMPLE:

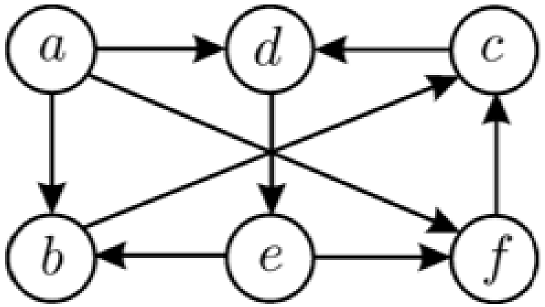


X={x,t}

Y={z,y}

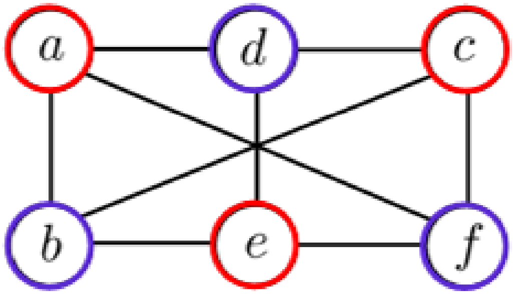
2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

EXEMPLE: És bipartit el següent graf dirigit?



Analitzant el seu graf no dirigit associat

$X=\{a,c,e\}$



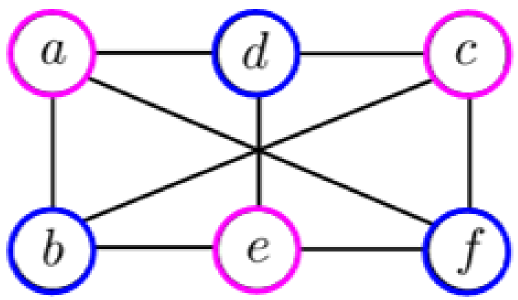
$Y=\{b,d,f\}$

És bipartit, i per tant el graf inicial ho és.

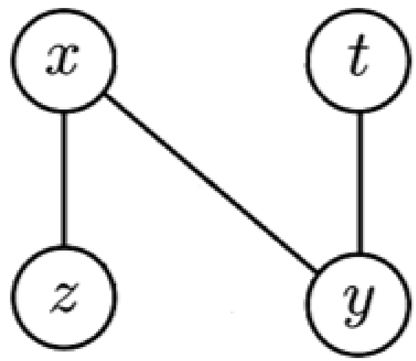
2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

4. Direm que un **graf bipartit és complet** si cada vèrtex de X està unit amb cada vèrtex de Y.

EXEMPLE:



Bipartit complet

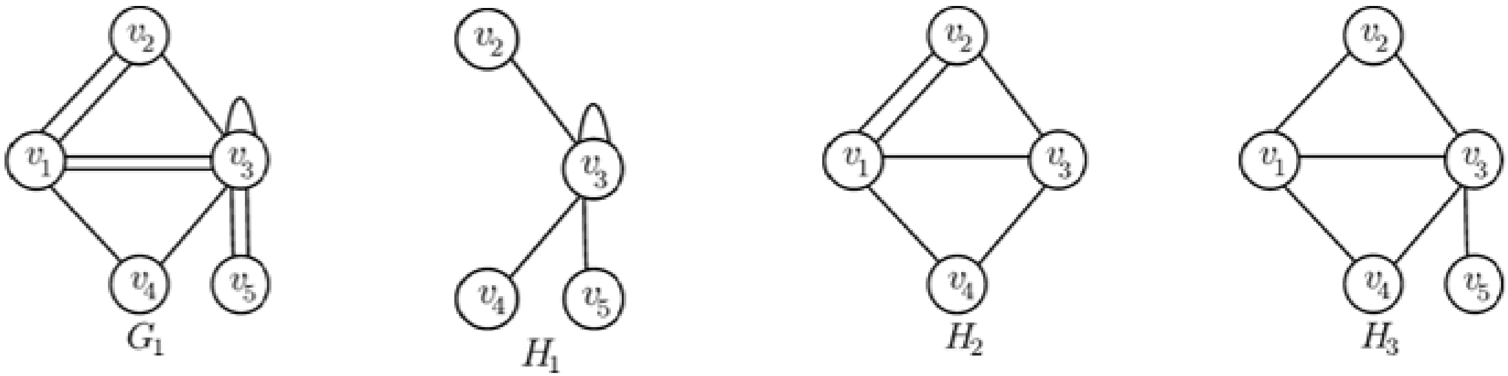


Bipartit no complet

2. TIPUS PARTICULARS DE GRAFS

5. Siguen $G = (V,A)$ i $H = (V',A')$ dos grafs. H és **subgraf** de G si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$.

EXEMPLE:



6. Direm que un subgraf H d'un graf G és **generador** si els seus conjunts de vèrtexs són iguals.

H_3 és subgraf generador (y G_1)

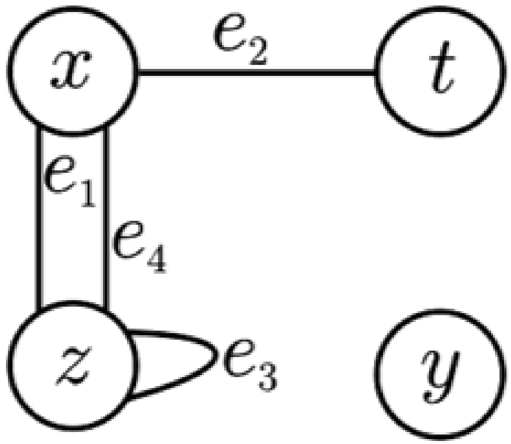
3. GRAU D'UN VÈRTEX

DEFINICIONS:

1. Anomenem **grau d'un vèrtex** v en un graf no dirigit G al nombre d'arestes incidents amb ell. Cada bucle es compta dos vegades. Es denotarà per $d_G(v)$. Designem per $\Gamma(v)$ al conjunt de vèrtexs adjacents a v.

EXEMPLE:

El vèrtex $\boldsymbol{x}$ és incident amb les arestes: e_1,e_2 i e_4. Per tant $d_G(\boldsymbol{x})=3$.
El conjunt de vèrtexs adjacents per a $\boldsymbol{x}$ és $\Gamma(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}\}$.
El grau del vèrtex z és $d_G(z)=4$.



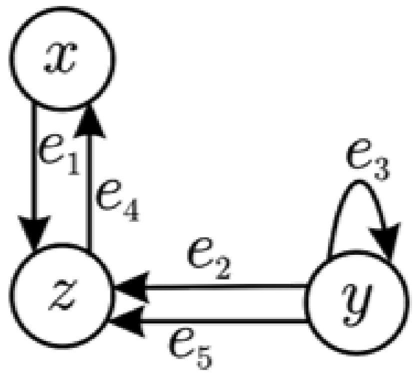
Índex

3. GRAU D'UN VÈRTEX

2. Considerem G un graf dirigit. Anomenarem **grau d'eixida** d'un vèrtex v *i* ho denotarem per $d_s(v)$ al nombre d'arcs ixents de v. Anomenarem **grau d'entrada** d'un vèrtex v i ho denotarem per $d_e(v)$ al nombre d'arcs entrants en v. S'anomenarà grau d'un vèrtex a la suma d'aquests dos graus.

   Anàlogament es pot definir $\Gamma(v)$ i $\Gamma^{-1}(v)$.

EXEMPLE:



El vèrtex ***z*** té 3 arcs entrants: $d_e(\boldsymbol{z})=3$.
El vèrtex ***z*** té només 1 arc ixent: $d_s(\boldsymbol{z})=1$.
El conjunt de vèrtexs que són extrems finals d'arcs que s'inicien en ***z*** és $\Gamma(\boldsymbol{z})=\{\boldsymbol{x}\}$.
El conjunt de vèrtexs que són extrems inicials d'arcs que acaben en ***z*** és $\Gamma^{-1}(\boldsymbol{z})=\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$.

3. GRAU D'UN VÈRTEX

TEOREMA

1. Siga $G = (V,A)$ un graf, aleshores:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2card(A)$$

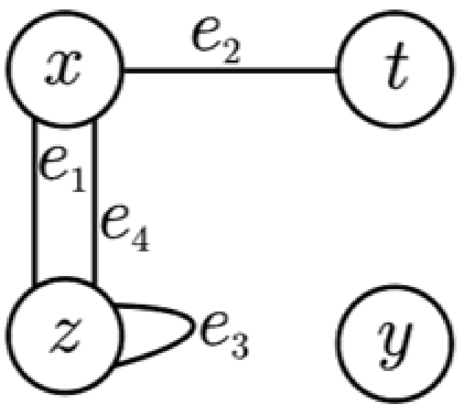
2. Siga $G = (V,A)$ un graf dirigit, aleshores:

$$\sum_{v \in V} d_s(v) = \sum_{v \in V} d_e(v) = card(A)$$

3. GRAU D'UN VÈRTEX

COROL·LARI
El nombre de vèrtexs de grau imparell d'un graf és parell.

EXEMPLE:



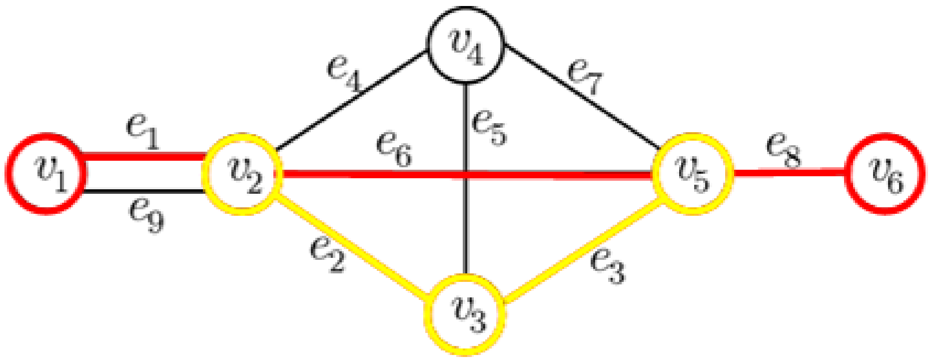
Calculem els graus dels vèrtexs:
d(***x***)=3, *d*(***y***)=0, *d*(***z***)=4, *d*(***t***)=1
Veiem que hi ha 2 vèrtexs (un nombre parell) amb grau imparell: ***x*** i ***t***.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

DEFINICIONS: Siga *G* un graf no dirigit:

1. Una **cadena** és una successió finita $W=v_0e_1v_1 \ldots e_kv_k$ els termes del qual són alternativament vèrtexs i arestes.

   EXEMPLE:



$$\mathbf{C_1=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_5e_6v_2e_2v_3e_3v_5e_8v_6}$$

2. La **longitud** d'una cadena és el nombre d'arestes que conté.

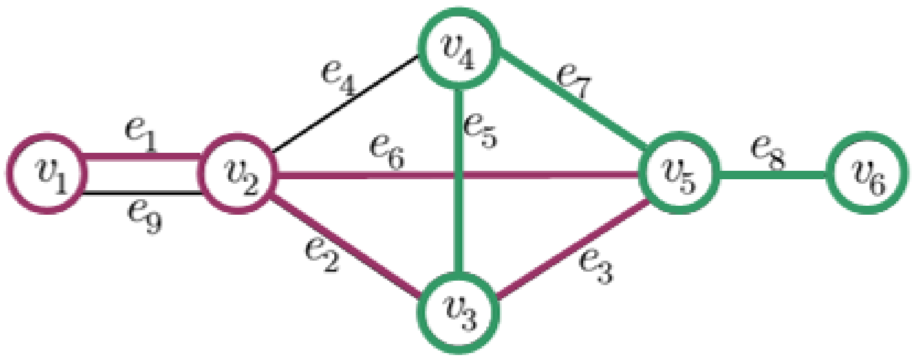
   EXEMPLE: La longitud de la cadena **C** és 7.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

3. Una **cadena simple** és una cadena amb totes les seues arestes distintes.

4. Un **camí** és una cadena amb tots els seus vèrtexs distints.

EXEMPLE:

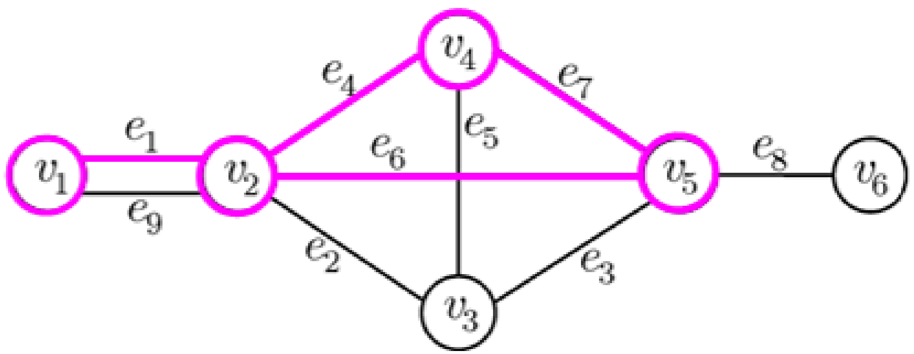


La cadena $\mathbf{C_2=v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_5e_6v_2}$ és una cadena simple de longitud 4.
La cadena $\mathbf{C_3=v_6e_8v_5e_7v_4e_5v_3}$ és un camí.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

5. Una **cadena tancada** és una cadena de longitud no nul·la on el vèrtex inicial i final coincideixen.

EXEMPLE:



La cadena $\mathbf{C_4=v_2e_6v_5e_7v_4e_4v_2e_1v_1e_1v_2}$ és una cadena tancada.

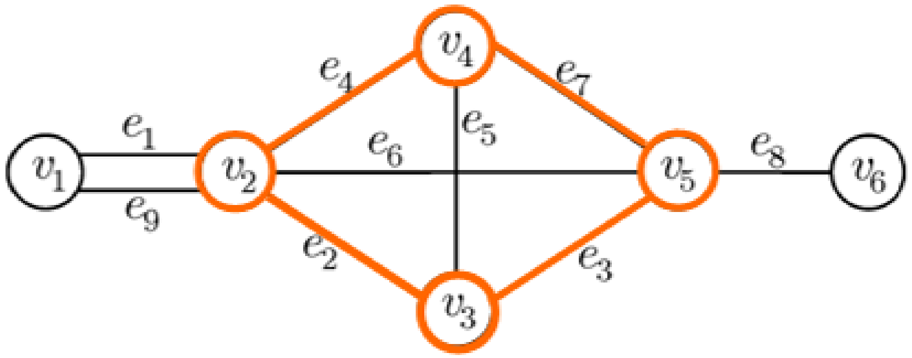
Com repeteix arestes ($\mathbf{e_1}$), la cadena $\mathbf{C_4}$ no és simple.

Com repeteix vèrtexs ($\mathbf{v_2}$), la cadena $\mathbf{C_4}$ no és un camí.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

6. Un **cicle** és una cadena simple tancada amb tots els seus vèrtexs distints.

EXEMPLE:



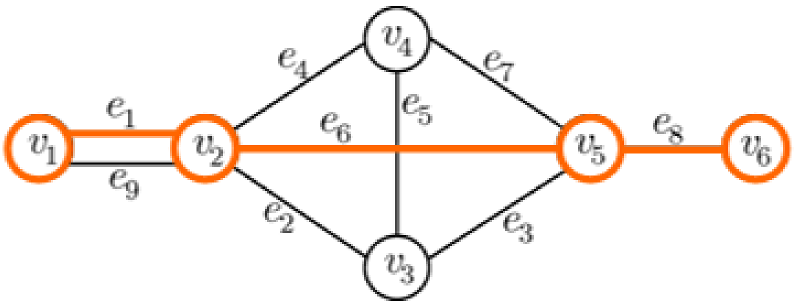
La cadena $\mathbf{C=v_2e_4v_4e_7v_5e_3v_3e_2v_2}$ és un cicle.

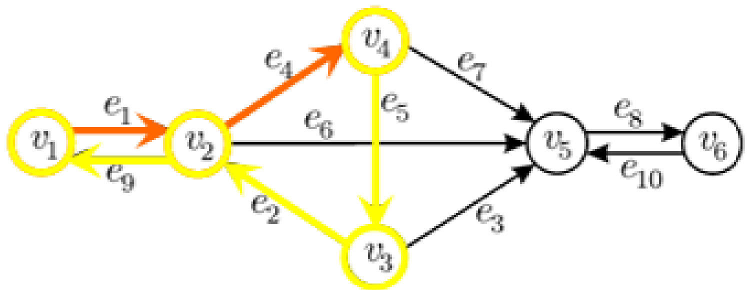
Aquests conceptes són els mateixos per a grafs dirigits llevat que les direccions dels arcs han de concordar amb la direcció del camí o cadena. En el cas dirigit el cicle rep el nom de **circuit**.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

7. Direm que dos vèrtexs ***u*** i ***v*** estan **connectats** si hi ha un camí de ***u*** a ***v*** i viceversa.

EXEMPLE:





Els vèrtex $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_6}$ estan connectats pel camí $\boldsymbol{C=v_1e_1v_2e_6v_5e_8v_6}$. Qualsevol parell de vèrtex està connectat.

Els vèrtex $\boldsymbol{v_1}$ i $\boldsymbol{v_4}$ estan connectats pels camins:

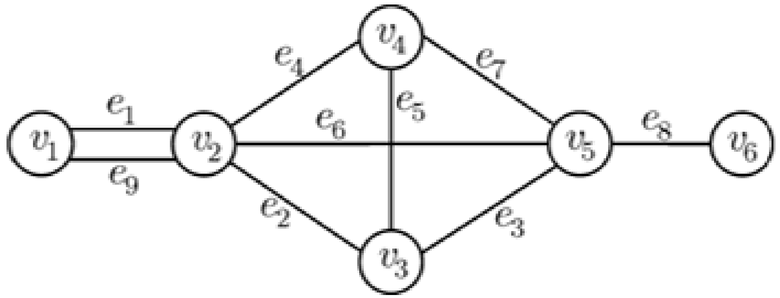
$\boldsymbol{C_1=v_1e_1v_2e_4v_4}$

$\boldsymbol{C_2=v_4e_5v_3e_2v_2e_9v_1}$

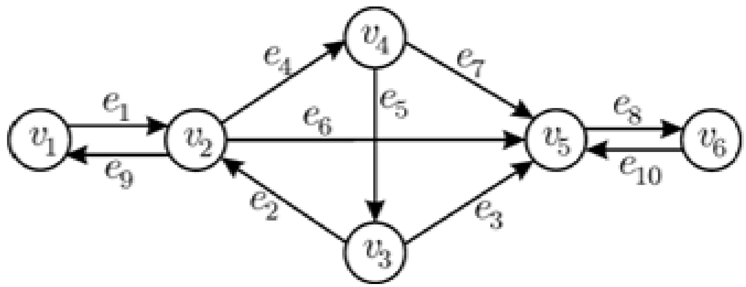
Els vèrtex $\boldsymbol{v_4}$ i $\boldsymbol{v_5}$ no estan connectats.

4. CAMINS I CONNEXIÓ

8. Un graf és **connex** si tot parell de vèrtex estan connectats.

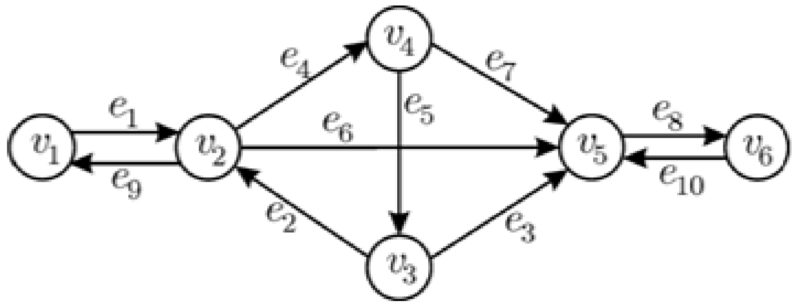


Graf connex



Graf no connex

9. Un graf dirigit és **feblement connex** si el seu graf no dirigit associat és connex.



4. CAMINS I CONNEXIÓ

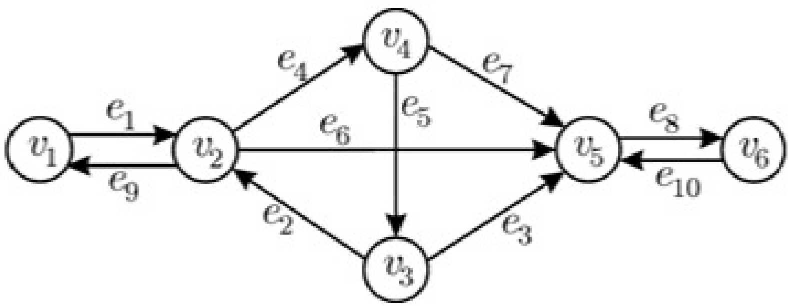
TEOREMA

La relació de connexió és d'equivalència i per tant determina una partició en el conjunt de vèrtexs. Als elements d’aquesta partició se'ls denomina **components connexes** del graf.

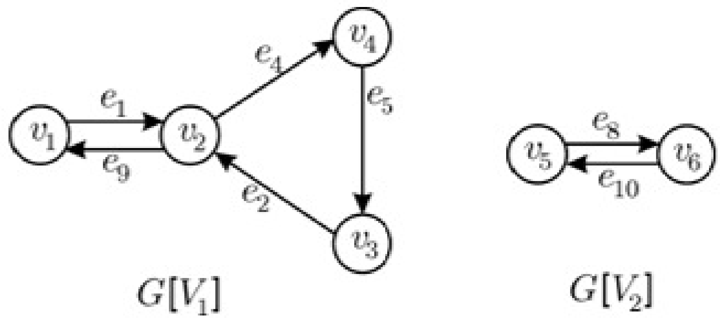
TEOREMA

Un graf és connex si, i només si, el nombre de components connexes és 1.

EXEMPLE:



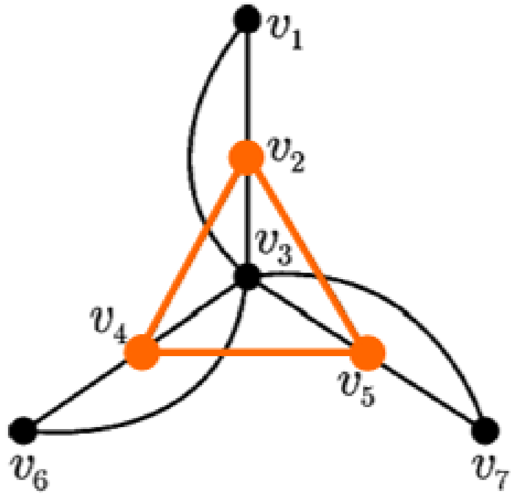
Components connexes



4. CAMINS I CONNEXIÓ

TEOREMA (Per a grafs no dirigits)
Un graf és bipartit si, i només si, no conté cap cicle imparell.

EXEMPLE:
El següent graf NO és bipartit ja que conté un cicle imparell: $v_2v_4v_5$



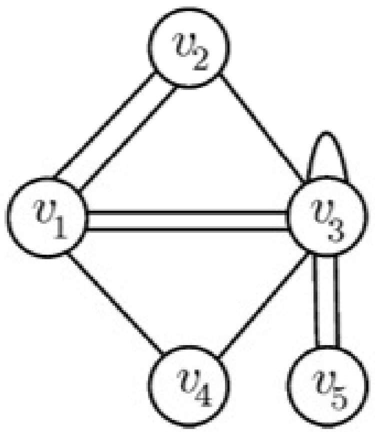
5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

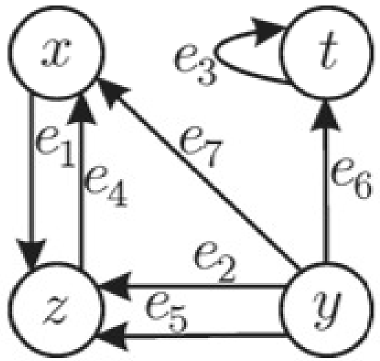
DEFINICIÓ:

Siga G un graf amb n vèrtexs $\{v_i\}_{i=1}^{n}$. Anomenem **matriu d'adjacència** a la matriu d'orde $n \times n$, $A = [a_{ij}]$ tal que a_{ij} és igual al nombre d'arestes (arcs) del vèrtex v_i al v_j. En el cas no dirigit, el bucle es compta dos vegades.

EXEMPLE:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

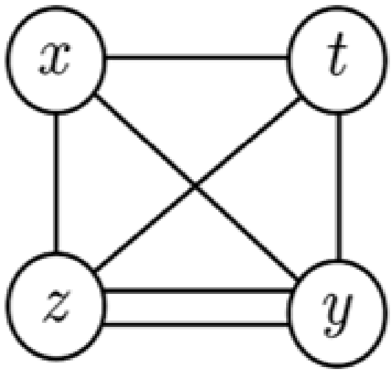
Amb l'ordre x, y, z, t

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

PROPIETATS DE LA MATRIU D'ADJACÈNCIA:

1. Siga G un graf no dirigit amb matriu d'adjacència A. Aleshores, la suma dels elements de la fila i (o columna i) és igual al grau del vèrtex v_i.

EXEMPLE:



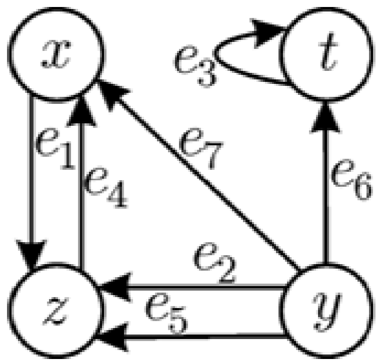
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad = 3$$

El grau del vèrtex ***x*** és 3.

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

2. Siga G un graf dirigit amb matriu d'adjacència A. Aleshores, la suma dels elements de la fila i és igual al grau d'eixida del vèrtex v_i i la suma dels elements de la columna j és igual al grau d'entrada del vèrtex j.

EXEMPLE:



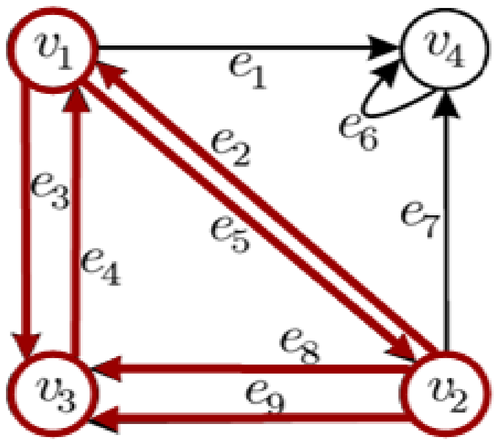
$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \\ & & 3 & \end{array} \end{array} \begin{array}{l} =1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$d_s(x)=1$ **i** $d_e(z)=3$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

3. Siga G un graf amb matriu d'adjacència A. Aleshores, l'element (i,j) de la matriu A^r, $r \geq 1$, és igual al nombre de cadenes de v_i a v_j de longitud r.

EXEMPLE:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per exemple, el nombre de cadenes de longitud 3 de $\boldsymbol{v}_2$ a $\boldsymbol{v}_3$ és 4.

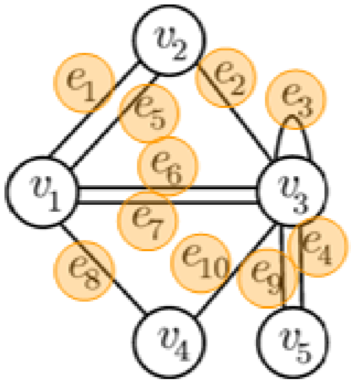
5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

DEFINICIONS:

1. Siga $G = (V,A)$ un graf no dirigit amb n vèrtexs i m arestes sent $V = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ i $A = \{a_i\}_{i=1}^{m}$. Anomenem **matriu d'incidència** de G a la matriu d'orde $n \times m$

$$M = [m_{ij}] \;/\; m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no és incident amb } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ és incident amb } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ és un bucle en } v_i \end{cases}$$

EXEMPLE:



$$\begin{array}{c} \\ M = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

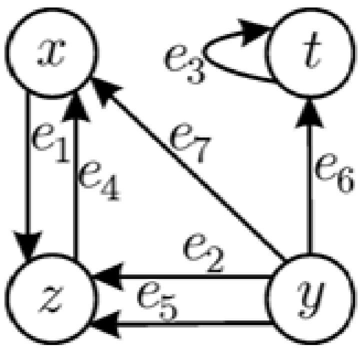
Índex

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

2. Siga $G = (V,A)$ un graf dirigit amb n vèrtexs y m arcs sent $V = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ i $A = \{a_i\}_{i=1}^{m}$. Anomenem **matriu d'incidència** de G a la matriu d'orde $n \times m$

$$M = [m_{ij}] \;/\; m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no és incident amb } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ és vèrtex inicial de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ és vèrtex final de } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ és un bucle en } v_i \end{cases}$$

EXEMPLE:



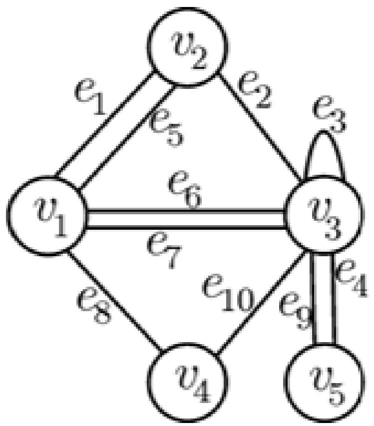
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

PROPIETATS DE LA MATRIU D'INCIDÈNCIA:

1. Siga *G* un graf no dirigit. La suma dels elements de cada fila de la matriu d'incidència és igual al grau del corresponent vèrtex.

EXEMPLE:



$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} =\mathbf{5} \\ =\mathbf{3} \\ =\mathbf{8} \\ =\mathbf{2} \\ =\mathbf{2} \end{matrix}$$

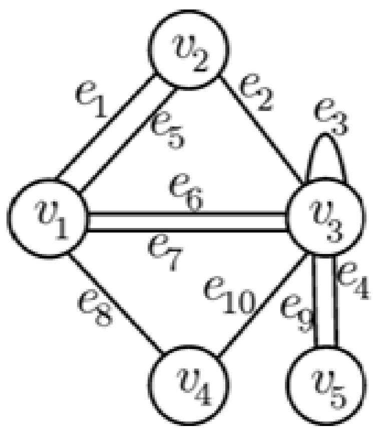
Els graus dels vèrtexs són:

$d(v_1)=5$, $d(v_2)=3$, $d(v_3)=8$, $d(v_4)=2$, $d(v_5)=2$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

2. Siga G un graf no dirigit. La suma dels elements de cada columna de la matriu d'incidència és igual a 2.

EXEMPLE:



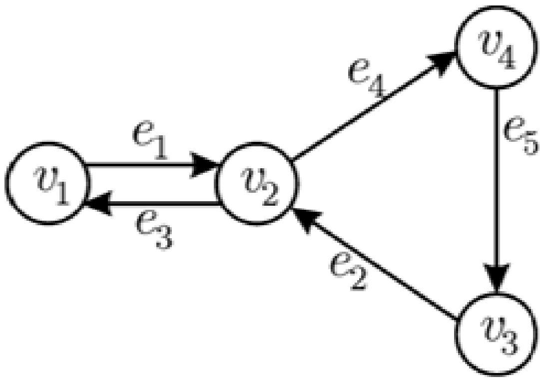
$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

3. Siga G un graf dirigit sense bucles. La suma dels elements de cada columna de la matriu d'incidència és igual a 0.

EXEMPLE:



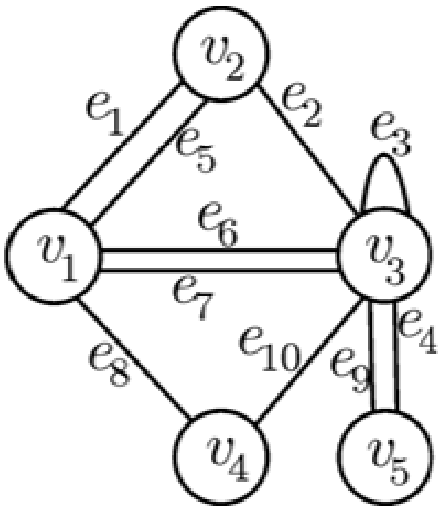
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

DEFINICIONS:

1. Siga *G* un graf no dirigit. Anomenarem **taula d'arestes incidents** del graf *G* a una taula que llista, per a cada vèrtex *v*, totes les arestes incidents amb *v*.

EXEMPLE:



Taula d'arestes incidents

$v_1: e_1, e_5, e_6, e_7, e_8$

$v_2: e_1, e_2, e_5$

$v_3: e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, e_9, e_{10}$

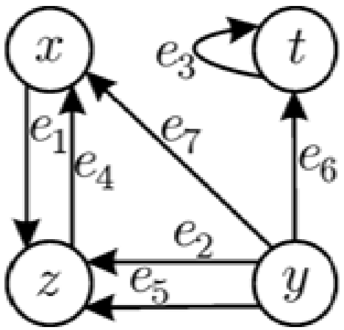
$v_4: e_8, e_{10}$

$v_5: e_4, e_9$

5. REPRESENTACIÓ MATRICIAL

2. Siga *G* un graf dirigit. Anomenarem **taula d'arcs ixents** del graf *G* a una taula que llista, per a cada vèrtex *v*, tots els arcs ixents de *v*. Anomenarem **taula d'arcs entrants** del graf *G* a una taula que llista, per a cada vèrtex *v*, tots els arcs entrants en *v*.

EXEMPLE:



Arcs ixents		Arcs entrants	
x:	e_1	x:	e_4, e_7
y:	e_2, e_5, e_6, e_7	y:	
z:	e_4	z:	e_1, e_2, e_5
t:	e_3	t:	e_3, e_6

Índex