Tema 3: Variables Aleatorias.

3.1. Variables unidimensionales.
3.2. Variables bidimensionales.

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias (I).

Definición: *Llamaremos variable aleatoria a toda aplicación*

$$X: \Omega \longrightarrow \Re$$
$$A \longrightarrow x_1 \quad n^o \text{ real}$$
$$B \longrightarrow x_2 \quad n^o \text{ real}$$

$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\}$

Supongamos el experimento aleatorio de lanzar una moneda Ω *={cara, cruz}. Una variable aleatoria sería:*

$$X: \Omega \longrightarrow \Re$$
$$\text{cara} \longrightarrow 1$$
$$\text{cruz} \longrightarrow 0$$

$X = \{0, 1\}$

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias (II).

Dependiendo de cómo sea el conjunto de valores que puede tomar la variable, diremos que la variable es discreta o es continua.

X= nº de caras al lanzar n monedas = $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

X= nº de lanzamientos de un dado hasta obtener un 6 = $\{1, 2, \ldots\}$

X= estatura de las personas = $\{1.60, 1.80, 1.5999, 1.59999, \ldots\}$

X= nº de personas que llegan a una gasolinera en un día $= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

X = longitud en milímetros de los tornillos fabricados por una determinada empresa.

ESTADÍSTICA

Función de Distribución (I).

Definición: *Dada una v. a. X llamaremos función de distribución*

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x$$

cumpliendo

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$

2) $F(+\infty) = 1 \qquad (P(X \leq +\infty) = P(\Omega) = 1)$

$F(-\infty) = 0 \qquad (P(X \leq -\infty) = P(\Phi) = 0)$

3) *F(x) es no decreciente. Si* $a<b \Longrightarrow F(a) \leq F(b)$

4) *Si* $a<b$*, entonces* $P(a<X \leq b)=P(X \leq b)-P(X \leq a)= F(b)-F(a)$

5) $P(X>a)= 1- P(X \leq a)= 1-F(a)$

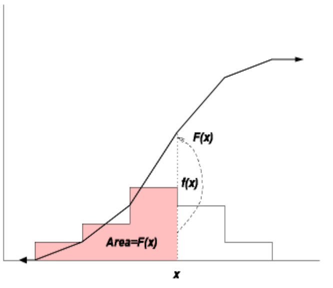
6) *F(x) es continua por la derecha*

ESTADÍSTICA

Función de Distribución (II).

$F(x) = P(X \leq x) \qquad \forall x$

- *Es la función que asocia a cada valor de una variable, la probabilidad acumulada de los valores inferiores o iguales.*
- *Piénsalo como la generalización de las frecuencias acumuladas.*
- *A los valores extremadamente bajos les corresponden valores de la función de distribución cercanos a cero.*
- *A los valores extremadamente altos les corresponden valores de la función de distribución cercanos a uno.*



ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (I).

Definición: *Diremos que X es una v. a. discreta si el conjunto imagen de Ω mediante X es un conjunto discreto (finito o infinito numerable) de valores.*

$$X: \Omega \longrightarrow \Re$$
$$A \longrightarrow x_1$$
$$B \longrightarrow x_2$$

$X = \{x_1, x_2, \ldots.\}$ *conjunto discreto de valores*

Definición: *Llamaremos función de probabilidad (función de cuantía) de una v.a. discreta X*

$$f(x) = P(X = x) \qquad \forall x$$

1) $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x$

2) $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

ESTADÍSTICA

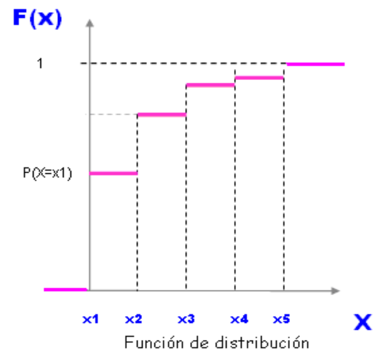
ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (II).

*La **relación** entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. discreta*

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

Es una función en escalera con saltos en cada punto x_i de valor $f(x_i) = P(X=x_i)$



ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (III).

Ejemplo: *Sea el experimento consistente en lanzar de modo ordenado tres monedas al aire para observar el número de caras y cruces que se obtienen,*
Ω= {CCC, CCR, CRC, CRR, RCC, RCR, RRC, RRR}
Definimos la variable X como el número de caras obtenido
X={0, 1, 2, 3}

La función de probabilidad $f(x) = P(X = x) \quad \forall x$

$$f(0) = \mathcal{P}[X = 0] = \mathcal{P}[\{\mathcal{RRR}\}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

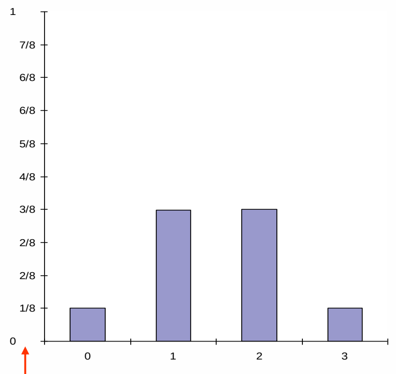
$$f(1) = \mathcal{P}[X = 1] = \mathcal{P}[\{\mathcal{RRC}, \mathcal{RCR}, \mathcal{CRR}\}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = \mathcal{P}[X = 2] = \mathcal{P}[\{\mathcal{RCC}, \mathcal{CCR}, \mathcal{CRC}\}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = \mathcal{P}[X = 3] = \mathcal{P}[\{\mathcal{CCC}\}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (IV)



Representamos gráficamente la función de probabilidad:

en el eje horizontal los valores de la variable X

en el eje vertical la probabilidad de que la v.a. tome cada uno de esos valores

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (V).

Ejemplo: *X={0, 1, 2, 3}*
f(0)=1/8, f(1)=3/8, f(2)=3/8, f(3)=1/8

La función de distribución

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

x<0 $\quad$ *F(x)= 0*

0≤x<1 $\quad F(0) = \mathcal{P}[X \le 0] = \mathcal{P}[X = 0] = f(0) = \frac{1}{8}$

1≤x<2 $\quad F(1) = \mathcal{P}[X \le 1] = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$

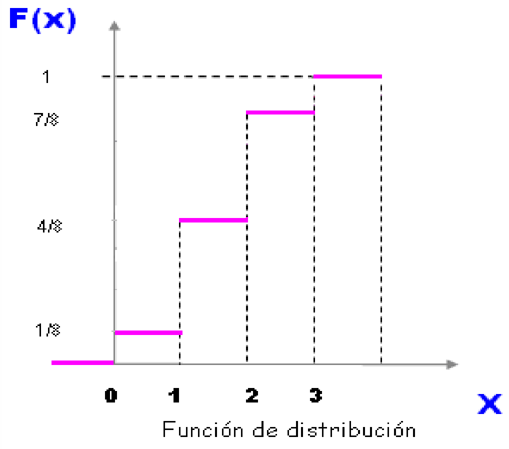
2≤x<3 $\quad F(2) = \mathcal{P}[X \le 2] = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

3≤x $\quad F(3) = \mathcal{P}[X \le 3] = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (VI).

Ejemplo: *X={0, 1, 2, 3}*
f(0)=1/8, f(1)=3/8, f(2)=3/8, f(3)=1/8
F(0)=1/8, F(1)=4/8, F(2)=7/8, F(3)=8/8=1



ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Discretas (VII).

Variable discreta uniforme

- Una v.a. **discreta** X es **uniforme** si todos los valores x_i que puede tomar son equiprobables.
  - Como debe ser finita, si hay n valores x_i la probabilidad de cada uno será $P(X=x_i) = 1/n$.
- Ejemplo: se extrae una carta de una baraja española de 40. Sea X la v.a. que se corresponde con el número obtenido. Su función de cuantía será:

X	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
f	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Continuas (I).

Definición: *Diremos que X es una v. a. continua si su función de distribución F(x) es continua, derivable y con derivada continua.*

Si existe la derivada $$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

a f(x) se le llama ***función de densidad*** *de la variable X*

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

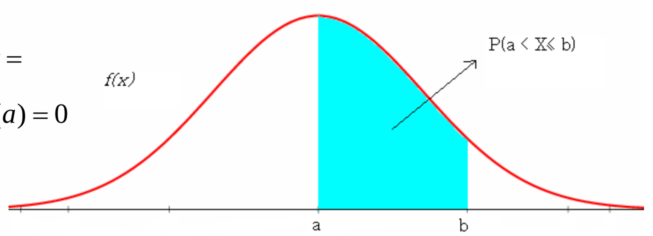
ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Continuas (II).

•Muchos procesos aleatorios vienen descritos por variables de forma que son conocidas las probabilidades en intervalos.
•La integral definida de la función de densidad en dichos intervalos coincide con la probabilidad de los mismos.
•Es decir, identificamos la probabilidad de un intervalo con el área bajo la función de densidad.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$$

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx =$$
$$= [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$



Variables Aleatorias Continuas (III).

*La **relación** entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. continua*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Suceso	Probabilidad con f	Probabilidad con F
$X \leq a$ $X < a$	$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$	$F(a)$
$a \leq X \leq b$ $a < X \leq b$ $a \leq X < b$ $a < X < b$	$\int_{a}^{b} f(x)dx$	$F(b) - F(a)$
$X \geq a$ $X > a$	$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$	$1 - F(a)$

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Continuas (IV).

Variable continua uniforme

- Una v.a. **continua** es **uniforme** sobre un intervalo $[a,b]$ si su función de densidad es constante en el intervalo y nula fuera de él.
  - La prob. de cualquier subintervalo será proporcional a su longitud.
  - La fd tendrá la forma: $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$
  - La constante se halla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 = \int_{a}^{b} k\,dx = k(b-a) \rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Problema

Supongamos una familia con cuatro hijos y que la probabilidad de nacimiento de hombre o mujer es la misma e igual a ½. El espacio muestral será:

$\Omega = \{HHHH, HHHM, HHMH, HMHH, \ldots, MMMM\}$

Sea X la variable aleatoria que nos da el número de hombres que hay entre los cuatro hijos.

Calcular la función de probabilidad de X
Calcular la función de distribución de X

<u>Solución:</u>
X= {0, 1, 2, 3, 4}

ESTADÍSTICA

$\Omega = \{HHHH, HHHM, HHMH, HMHH, \ldots, MMMM\}$
X= {0, 1, 2, 3, 4}

La función de probabilidad
$f(x) = P(X = x) \;\; \forall x$

f(0)=P(X=0)= nº casos fav/nº casos posibles=1/16

f(1)=4/16

f(2)=6/16

f(3)=4/16

f(4)=1/16

La función de distribución

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

x<0 F(x)= *0*

0≤x<1 F(x)=P(X=0)= 1/16

1≤x<2 F(x)=P(X=0)+P(X=1)= 1/16+ 4/16=5/16

2≤x<3 F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)= 11/16

3≤x<4 F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) =15/16

4≤x F(x)=1

Problema

Sea X una variable aleatoria continua. Hallar k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

sea la función de densidad de X. Además:
Calcular F(*x*)
Calcular P(X ≥4)
Calcular P(2 ≤ X ≤ 8)

Solución:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{+\infty} ke^{-x/4}dx = -4k\int_{0}^{+\infty}(-1/4)e^{-x/4}dx = -4k\left[e^{-x/4}\right]_{0}^{\infty} =$$

$$= -4k(0-1) = 4k \Rightarrow 4k = 1 \Rightarrow k = 1/4$$

ESTADÍSTICA

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =$$
$$= \int_0^x \frac{1}{4} e^{-t/4} dt = \left[-e^{-t/4}\right]_0^x = -e^{-x/4} + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-4/4}) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$P(2 \le X \le 8) = F(8) - F(2) = (1 - e^{-8/4}) - (1 - e^{-2/4}) = e^{-1/2} - e^{-2}$$