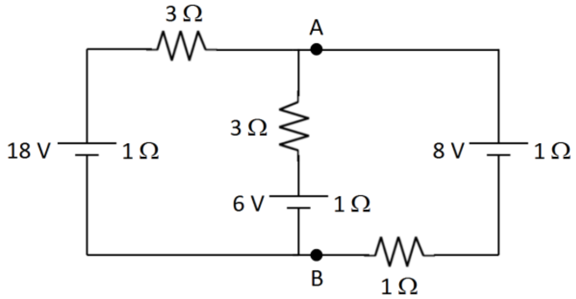
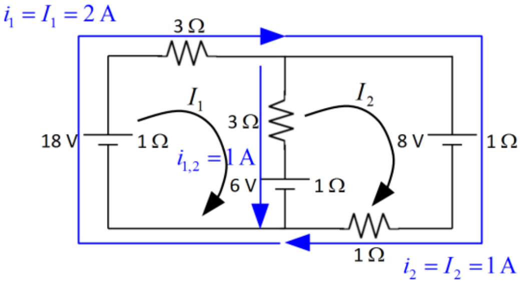
Parcial 3.

1. En el circuito de la figura se pide: (a) La corriente en cada rama y la potencia aportada o consumida (según sea el caso) por cada f.e.m. [3 puntos]. (b) El potencial de Thevenin del circuito equivalente de Thevenin entre los puntos A y B de la parte izquierda del circuito [1 punto]. (c) Si al sustituir la f.e.m. de 8 V por una nueva f.e.m. de valor ε se observa que por dicha nueva f.e.m. no circula corriente, ¿cuál es el valor de ε? [1 punto].



(a) Considerando las corrientes de malla I_1 e I_2 ambas en *sentido horario* tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 8I_1 - 4I_2 = 12 \\ -4I_1 + 6I_2 = -2 \end{array}\right| \times 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 8I_1 - 4I_2 = 12 \\ -8I_1 + 12I_2 = -4 \\ \hline 8I_2 = 8 \end{array} \Rightarrow \quad I_2 = 1\,\text{A} \Rightarrow 8I_1 - 4 = 12 \Rightarrow 8I_1 = 16 \Rightarrow I_1 = 2\,\text{A}$$



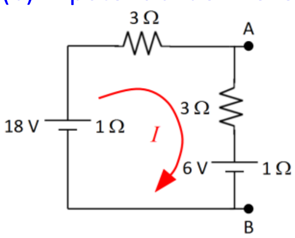
Corriente de la rama central: $i_{1,2} = I_1 - I_2 = 1\,\text{A}$ **en el sentido de I_1** (hacia abajo, como muestra la figura)

La f.e.m. de 18 V aporta potencia mientras que **las f.e.m. de 6 V y 8 V consumen potencia**.

$$P_{AP,18V} = 18 \cdot 2 - 2^2 \cdot 1 = 32\,\text{W}$$

$$P_{C,6V} = 6 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 7\,\text{W} \qquad P_{C,8V} = 8 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 9\,\text{W}$$

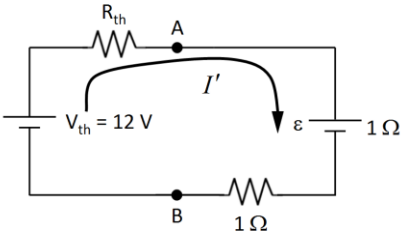
(b) El potencial de Thevenin V_{th} es la tensión entre A y B a circuito abierto:



Corriente por la malla del circuito izquierdo: $I = \dfrac{18-6}{1+3+3+1} = \dfrac{12}{8} = 1.5\,\text{A}$

$$V_{th} = V_A - V_B = I \cdot (3+1) - (-6) = 1.5 \cdot 4 + 6 = 12\,\text{V}$$

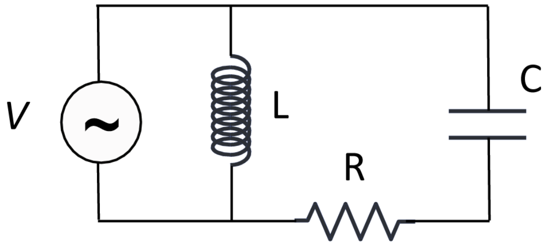
(c) Al sustituir el circuito equivalente de Thevenin y la f.e.m. de 8 V por una nueva f.e.m. ε:



La corriente por la f.e.m. ε es $I' = \dfrac{V_{th} - \varepsilon}{R_{th} + 2} = 0 \Rightarrow \varepsilon = V_{th} = 12\,\text{V}$

<u>NOTA</u>: Obsérvese que el resultado es independiente del valor de la resistencia de Thevenin R_{th} e incluso de la resistencia interna de la nueva f.e.m. ε.

2. En el circuito de la figura calcula: (a) La corriente que circula por cada rama (expresada en forma senusoidal) [2 puntos]. (b) La impedancia total [1 punto]. (c) La potencia disipada en la resistencia [1 punto]. (d) El valor que debería tener la autoinducción para que tensión e intensidad estén en fase [1 punto]. Datos: $V(t)=100\sqrt{2}\text{sen}(500t)\,\text{V}$, $L=80\ \text{mH}$, $C=40\ \mu\text{F}$, $R=50\ \Omega$



(a) La frecuencia angular del circuito es $\omega = 500\ \text{rad/s}$. Por lo tanto las impedancias son:

$$\overline{Z}_L = j\omega L = j\,500\cdot 0.08 = j\,40 = 40\,\underline{|90^\circ}\,\Omega \qquad \overline{R} = R = 50 = 50\,\underline{|0^\circ}\,\Omega$$

$$\overline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{500\cdot 40\cdot 10^{-6}} = -j50 = 50\,\underline{|-90^\circ}\,\Omega.$$

R y C están en serie: $\overline{Z}_{RC} = 50 - \text{j}50 = 50\sqrt{2}\,\underline{|-45^\circ}\,\Omega$,

$$\overline{I}_L = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_L} = \frac{100\,\underline{|0^\circ}}{40\,\underline{|90^\circ}} = 2.5\,\underline{|-90^\circ}\ \ \text{A}; \qquad \text{I}_\text{L} = 2.5\sqrt{2}\,\text{sen}(500t-90^\circ)\,\text{A}$$

$$\overline{I}_{RC} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_{RC}} = \frac{100\,\underline{|0^\circ}}{50\sqrt{2}\,\underline{|-45^\circ}} = \sqrt{2}\,\underline{|45^\circ}\ \ \text{A} \qquad \text{I}_\text{RC} = 2\,\text{sen}(500t+45^\circ)\,\text{A}$$

(b) $\overline{Z}_L$ Está en paralelo con $\overline{Z}_{RC}$, por tanto la impedancia total es:

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{Z}_L\cdot\overline{Z}_{RC}}{\overline{Z}_L+\overline{Z}_{RC}} = \frac{40\,\underline{|90^\circ}\cdot 50\sqrt{2}\,\underline{|-45^\circ}}{50-j10} = \frac{2000\sqrt{2}\,\underline{|45^\circ}}{50.99\,\underline{|-11.3^\circ}} = 55.47\,\underline{|56.3^\circ}\,\Omega,$$

(c) La potencia disipada en la resistencia es: $\boxed{P_{dR} = I_{RCef}^2\cdot R = \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 50 = 100\ \ \text{W}}$

También se puede calcular como potencia activa del generador o potencia activa de la rama RC

(d) Para que tensión e intensidad esté en fase se tiene que cumplir que $\overline{Z}'_T = Z'_T\,\underline{|0^\circ}$

$$\overline{Z}'_T = \frac{\overline{Z}_L\cdot\overline{Z}_{RC}}{\overline{Z}_L+\overline{Z}_{RC}} = \frac{X_L\,\underline{|90^\circ}\cdot 50\sqrt{2}\,\underline{|-45^\circ}}{50+j(X_L-50)} = Z'_T\,\underline{|0^\circ}$$ Luego la fase del denominador debe ser 45º

$$arctg\frac{X_L-50}{50} = 45^\circ \quad\rightarrow\quad X_L - 50 = 50\cdot tg(45^\circ) \quad\rightarrow\quad X_L = 100\,\Omega$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{500} = 200\,\text{mH}}$$

Parcial 1.

3. Calcula: (a) La fuerza con que se atraen dos esferas metálicas de radios r_1 = 5 cm y r_2 = 10 cm, sabiendo que están cargadas con +3 μC y –9 μC, respectivamente, y colocadas en el vacío a una distancia de 90 cm entre sus centros [1 punto]. (b) Si las dos esferas se ponen en contacto y luego se colocan en la misma posición inicial, ¿Qué fuerza habrá ahora entre las dos esferas? [2 puntos]. Dato: $K_e = 9 \times 10^9$ USI.

(a). La carga, situada en la superficie de las esferas, se comporta como una carga puntual situada en su centro:

$$\vec{F} = K_e \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot (-9) \cdot 10^{-12}}{0.9^2}\vec{u}_r = -0.3\,\vec{u}_r \mathrm{N} \qquad \text{(Fuerza atractiva)}$$

(b) Si ponemos las esferas en contacto sus potenciales se igualan y la carga total se conserva.

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q'_1}{r_1} = \frac{q'_2}{r_2} \rightarrow q'_1 = \frac{q'_2}{2};\ \text{y}\ q'_1 + q'_2 = Q_T = -6\ \mu\mathrm{C} \ \Rightarrow\ q'_1 = -2\mu\mathrm{C}\ \ \text{y}\ \ q'_2 = -4\mu\mathrm{C}$$

Al colocarlas de nuevo en su posición inicial la fuerza es:

$$\vec{F}' = K_e \frac{q'_1 \cdot q'_2}{r^2}\vec{u}_r = 9 \cdot 10^9 \frac{(-2) \cdot (-4) \cdot 10^{-12}}{0.9^2}\vec{u}_r = 0.089\,\vec{u}_r \mathrm{N} \qquad \text{(Fuerza repulsiva)}$$

---

4. Calcula la energía potencial eléctrica que tiene una carga puntual $q = 10 \cdot \mathrm{nC}$ que está situada en el eje Z a 20 cm de un plano indefinido. El plano tiene densidad superficial de carga $\sigma = 0.354\,\mathrm{nC/m^2}$, se encuentra situado en el plano XY y está a potencial cero [3 puntos]. ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de 10 cm de radio centrada en el origen de coordenadas? [1 punto]. Dato: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ USI

$U = qV$, Luego tenemos que calcular el potencial, creado por la carga que hay en el plano, en el punto z=0.2 m. Y para ello, previamente hemos de hallar el campo que crea al plano.

$$\vec{E}_{(z>0)} = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}\vec{k} = \frac{0.354 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}\vec{k} = 20\vec{k}\ \ \mathrm{N/C}$$

$$V_{(z=0.2)} - 0 = -\int_{z=0}^{z=0.2} E \cdot dz = -\int_{z=0}^{z=0.2} 20 \cdot dz = \left[-20z\right]_{z=0}^{z=0.2} = -4\,\mathrm{V}$$

Por tanto: $U = qV = 10 \cdot 10^{-9} \cdot (-4) = -40 \quad \mathrm{nJ}$

El flujo a través de la esfera sólo depende de la carga encerrada. En este caso, como la esfera está centrada en el origen, la carga encerrada es la que hay en la superficie de intersección entre la esfera y el plano, es decir, la carga contenida en un círculo de radio 10 cm. La carga q queda fuera.

$$\phi = \frac{q_e}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot \pi r^2}{\varepsilon_0} = \frac{0.354 \cdot 10^{-9}\pi \cdot 0.1^2}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 0.4\pi\ \mathrm{Vm}$$

---

5. Un condensador plano paralelo tiene placas cuadradas de 12 cm de lado y una separación entre ellas de 6 mm. Un bloque dieléctrico, de constante dieléctrica relativa ε_r=2, tiene la misma superficie que las placas y un espesor de 4 mm. (a) ¿Cuál es la capacidad del condensador si introducimos este dieléctrico entre sus placas? [2 puntos]. (b). Si el

condensador se encuentra conectado a una batería de 100 V, ¿Qué energía tiene antes y después de introducir el dieléctrico? [1 punto]. Dato: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ USI

(a) La capacidad del condensador se puede calcular como la capacidad equivalente de dos condensadores, C_1 y C_2, dispuestos en serie, de valores:

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S_1}{d_1} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(0.12)^2}{2 \cdot 10^{-3}} = 63.7 \cdot 10^{-12} F = 63.7 \ pF$$

$$C_2 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S_2}{d_2} = 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(0.12)^2}{4 \cdot 10^{-3}} = 63.7 \cdot 10^{-12} F = 63.7 \ pF$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\left(63.7 \cdot 10^{-12}\right)^2}{2 \cdot 63.7 \cdot 10^{-12}} = 31.85 \cdot 10^{-12} \ F = 31.85 \ pF$$

O bien se puede resolver usando la definición general de capacidad:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V_1 + \Delta V_2} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0} \cdot d_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{S \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(d_1 + \frac{d_2}{\varepsilon_r}\right)} = \frac{S \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\left(d_1 \cdot \varepsilon_r + d_2\right)} = 31.85 \ pF$$

(b). La energía antes y después de introducir el dieléctrico es:

$$U_i = \frac{1}{2} C_0 \cdot V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d} \cdot V^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(0{,}12)^2}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \cdot 100^2 = 0.1 \ \mu \mathrm{J}$$

$$U_f = \frac{1}{2} C_{eq} \cdot V^2 = \frac{1}{2} 31.85 \cdot 10^{-12} \cdot (100)^2 = 0.16 \ \mu \mathrm{J}$$

Lógicamente la energía aumenta porque el condensador final tiene más capacidad, siendo V=cte.

Parcial 2.

6. Un cable de sección circular de radio a = 1 cm transporta una corriente eléctrica I = 10 A distribuida uniformemente en toda su sección. Calcula el campo magnético a las siguientes distancias, medidas desde el eje axial del cable: (a) r = 0 cm, (b) r = 0.5 cm, (c) r = 2 cm [4 puntos]. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI

Aplicando la ley de Ampère a un camino cerrado, circular, de radio r y centrado en el eje del cable, tenemos que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e \quad \rightarrow \quad B \oint d\ell = \mu_0 I_e \quad \rightarrow \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_e$$

Donde I_e es la corriente que atraviesa el área limitada por el camino circular de radio *r*. Para r<a $I_e = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \pi r^2$ (por ser la densidad de corriente uniforme). Tomando *r=a* $j = I / \pi a^2$

Por tanto para *r<a*: $$B(r) = \frac{\mu_0 I_e}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

Y para *r>a* la corriente es constante y no depende de *r* : $I_e = I = 10 \text{ A} \ \Rightarrow \ B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Tomando valores de r: (a) $B(0) = 0 \text{ T}$ (b) $B(0.5cm) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2\pi (10^{-2})^2} = 10^{-4} \text{ T}$

(c) $B(r) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 10^{-4} \text{ T}$

---

7. En un teléfono fijo, el cable que une el auricular con el cuerpo del teléfono posee 200 vueltas muy juntas, de 0.5cm de radio cada una, resultando el típico cable helicoidal de 1m de longitud. Supongamos que la corriente que transporta la señal auditiva es, por simplicidad, una sinusoide de valor $I(t) = I_0 \cos(wt)$ mA, siendo $I_0 = 10$ mA y su frecuencia $f = 4$ kHz (*t* en segundos), comúnmente usada para transmisión de voz. Calcula: (a) la autoinducción del cable [1.5 puntos] (b) la *f.e.m.* inducida en el hilo por dicha señal y su valor máximo [1.5 puntos].

(a)Como buena aproximación, el cable puede ser considerado como un solenoide. Su autoinducción será por tanto:

$$L = \frac{\phi}{I} = \frac{NBS}{I} = \frac{N(\mu_0 n I)S}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200^2 \cdot \pi (0.5.10^{-2})^2}{1} \cong 4\ \mu\text{H}$$

(b) La f.e.m. inducida vendrá dada por la Ley de Faraday

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} = L I_0 w\, sen(wt) \;, \qquad \text{como: } w = 2\pi f = 8000\pi \ \text{rad/s}$$

$$\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 8000\pi \cdot sen(8000\pi \cdot t) = 0.32\pi \cdot sen(8000\pi \cdot t)\ \text{mV}$$

Y la f.e.m. máxima es: $\varepsilon_{max} = 0.32\pi\ \text{mV} = 1\ \text{mV}$

---

8. Una onda electromagnética está representada por su campo magnético $B_Z = 10^{-8}\, sen[2\pi(3 \cdot 10^{14} t - 10^6 y)]$ T, donde el subíndice Z indica que el vector B vibra en la dirección del eje Z. Calcula: (a) La velocidad de propagación de la onda EM, indicando en qué tipo de medio se mueve y su dirección de propagación [1 punto]. (b) La expresión completa del campo eléctrico asociado, con sus unidades correspondientes, especificando la dirección de vibración [1 punto]. (c) El sentido del vector $\vec{E}$ en función del sentido de $\vec{B}$ [1 punto].

(a) $v = \frac{w}{k} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{14}}{2\pi \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^8$ m/s ; Como v=c la onda EM se propaga en el vacio, su dirección de propagación viene especificada en la expresión de B (eje Y) sentido positivo.

(b) : $E_0 = B_0 v = 3$ N/C; El campo eléctrico vibra en la dirección del eje X y su expresión es:

$$E_X(y,t) = 3\, sen[2\pi(3 \cdot 10^{14} t - 10^6 y)]\ \text{N/C}$$

(c) Teniendo en cuenta que la dirección de propagación se determina por el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$, y la onda se propaga en el eje Y sentido $(+\vec{j})$ cuando $\vec{B} = B(+\vec{k})$ el campo eléctrico debe tener sentido $\vec{E} = E(-\vec{i})$ y si $\vec{B} = B(-\vec{k})$ entonces $\vec{E} = E(+\vec{i})$