RESOLUCIONES

6.1. En una onda electromagnética plana, que se propaga en el vacío, el campo eléctrico viene dado por:

$E_x = E_y = 0$

$E_z = 2sen(2\pi y - 6\pi 10^8 t)\ (S.I)$

Determinar:
a) la longitud de onda y su frecuencia
b) el tipo de polarización
c) la dirección de propagación
d) el campo magnético asociado.

RESOLUCIÓN:

a) La longitud de onda y su frecuencia:

Comparando la ecuación que describe el comportamiento del campo eléctrico con la ecuación del modelo:

$E_z = E_0 sen(ky - \omega t)\ (S.I)$

tenemos que :

$$k = 2\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \rightarrow \lambda = 1m$$

$$\omega = 6\pi \cdot 10^8 \rightarrow 2\pi\nu = 6\pi \cdot 10^8 \rightarrow \nu = 3 \cdot 10^8 Hz$$

b) El tipo de polarización:

Ya que el campo eléctrico oscila según la dirección del eje z, se trata de una onda polarizada linealmente en el eje z.

c) La dirección de propagación:

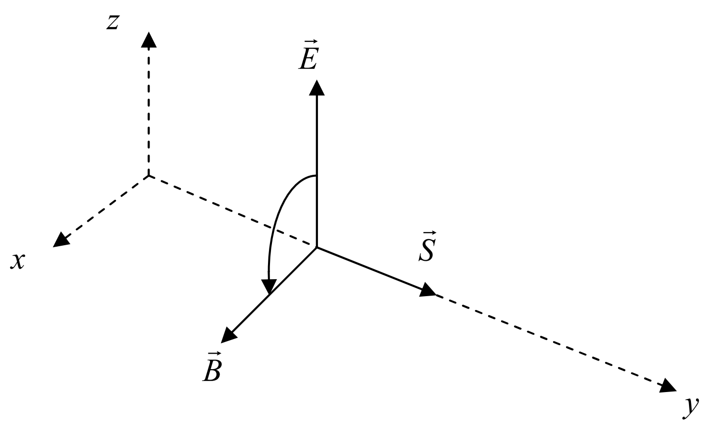
Obsérvese, en primer lugar, la dependencia de E_z con la coordenada y, lo que indica que la onda se propaga en la dirección de dicho eje. Además, el signo negativo que aparece en la fase del campo eléctrico indica que la propagación tiene lugar hacia la derecha (valores crecientes de la coordenada y). En consecuencia, puede afirmarse que la onda se propaga en el sentido positivo del eje y.

d) El campo magnético asociado:

La dirección y sentido de propagación de la onda vienen dados por el vector de Pointing ($\vec{S}$), que está definido por:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Teniendo en cuenta la dirección de propagación de la onda, es claro que el campo magnético asociado, debe estar dirigido hacia el eje x:



Por tanto, dicho campo magnético será de la forma:

$B_y = B_z = 0$

$B_x = \dfrac{E_z}{c}$

Así pues:

$$B_x = \frac{2sen(2\pi y - 6\pi \cdot 10^8 t)}{3 \cdot 10^8} = 6'67 \cdot 10^{-9} sen(2\pi y - 6\pi \cdot 10^8 t) \ (S.I)$$

de donde:

$B_y = B_z = 0$

$B_x = 6'67 \cdot 10^{-9} sen(2\pi y - 6\pi \cdot 10^8 t) \ (S.I)$

6.2. Una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío, en la dirección positiva del eje *X*, tiene una intensidad máxima del campo eléctrico de $6 \cdot 10^3 V/m$. Si la onda está polarizada linealmente según el eje *Y*, y su longitud de onda es de *2m*, determinar:

a) las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda
b) el vector de Poynting
c) la intensidad media de energía que transporta la onda.

RESOLUCIÓN:

a) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda:

Si la onda está polarizada linealmente según el eje *y*, y se propaga en la dirección positiva del eje *x*, el campo eléctrico será:

$E_x = E_z = 0$

$E_y = E_0 sen(kx - \omega t)$

donde:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2m} = \pi \ \left(m^{-1}\right)$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda} = 2\pi\frac{3\cdot 10^8}{2} = 3\pi\cdot 10^8 \ \left(s^{-1}\right)$$

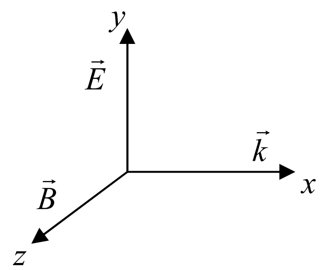
Por lo tanto, $\vec{E}$ será:

$$\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right) = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 6\cdot 10^3 sen(\pi x - 3\pi\cdot 10^8 t) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

El campo magnético tendrá la dirección z y sentido positivo, entonces $\vec{E}\times\vec{B}$ tendrá el sentido de $\vec{k}$, (dirección positiva de x):

$$B_x = B_y = 0$$

$$B_z = B_0 sen(kx - \omega t)$$



de forma que:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \rightarrow \begin{cases} B_z = \dfrac{E_y}{c} \\ B_z = \dfrac{E_y}{c} = \dfrac{6\cdot 10^3 sen(\pi x - 3\pi\cdot 10^8 t)}{3\cdot 10^8} \end{cases}$$

Es decir:

$$B_z = 2\cdot 10^{-5} sen(\pi x - 3\pi\cdot 10^8 t) \ \left(S.I\right)$$

b) El vector de Poynting será:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

por lo que:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(E_y\vec{j}\times B_z\vec{k}\right) = \frac{E_y B_z}{\mu_0}\left(\vec{j}\times\vec{k}\right) = \frac{E_y B_y}{\mu_0}\vec{i}$$

sustituyendo valores:

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}}\left(6\cdot 10^3\right)\left(2\cdot 10^{-5}\right) sen^2(\pi x - 3\pi\cdot 10^8 t)\vec{i}$$

de donde:
$\vec{S} = \left[9'5 \cdot 10^4 sen^2(\pi x - 3\pi \cdot 10^8 t)\right] \vec{i} \; (S.I)$

c) La intensidad media de energía que transporta la onda, es el valor medio del vector de Pointing:

$$S_{medio} = \vec{S} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 4'8 \cdot 10^4 \left(W/m^2 \right)$$

6.3. El vector de Poynting de una onda electromagnética plana que se propaga en el vacío es:
$\vec{S} = -\left[100 \cos^2\left(10z + 3 \cdot 10^9 t\right)\right] \vec{k} \; (S.I)$
Determinar:
a) la dirección de propagación de la onda
b) la longitud de onda y la frecuencia
c) las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético.

RESOLUCIÓN:

a) La dirección y sentido de propagación de una onda electromagnética, vienen dadas por los del vector de Pointing, en este caso, el eje *z* negativo.

b) Viendo la expresión del vector de Pointing, podemos asociar:

$$k = 10 \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10} = 0'628m$$

$$\omega = 3 \cdot 10^9 \rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^9}{2\pi} = 4'77 \cdot 10^8 Hz$$

c) Las ecuaciones de los campos las hallamos a partir de S_0:

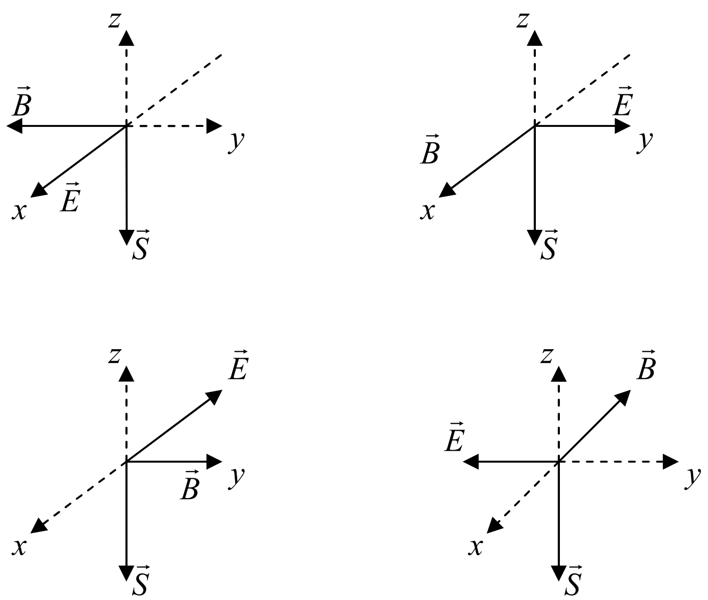
$$S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \xrightarrow{B_0 = \frac{E_0}{c}} S_0 = \frac{E_0^{\;2}}{\mu_0 c}$$

De donde:

$$E_0 = \sqrt{\mu_0 c S_0} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 100} = 194'2 \left(V/m \right)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{194'2}{3 \cdot 10^8} = 6'47 \cdot 10^{-7} (T)$$

Cuatro posibles soluciones que satisfacen las soluciones del problema serían las siguientes:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}=\vec{E}_0\cos(kx+\omega t)\\ \vec{B}=\vec{B}_0\cos(kx+\omega t)\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{E}_1=194'2\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{i}\,;\;B_1=-6'47\cdot10^{-7}\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{j}\\ \vec{E}_2=194'2\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{j}\,;\;B_2=6'47\cdot10^{-7}\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{i}\\ \vec{E}_3=-194'2\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{i}\,;\;B_3=6'47\cdot10^{-7}\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{j}\\ \vec{E}_4=-194'2\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{j}\,;\;B_4=-6'47\cdot10^{-7}\;\cos(10z+3\cdot10^9 t)\vec{i}\end{array}\right.$$

6.4. Una antena de radiodifusión emite isotrópicamente a *100 kHz* con una potencia de *60 kW*. Determinar:
a) el número de onda y la frecuencia angular de las ondas radiadas
b) la intensidad media de la onda a una distancia de *6 km* de la antena
c) la presión de radiación a esa distancia
d) los valores máximos de los campos eléctrico y magnético.

RESOLUCIÓN:

a) Frecuencia angular:

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\cdot100\cdot10^3=2\cdot10^5\pi\left(rad/s\right)$$

Número de onda:

$$\omega=kc\rightarrow k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\cdot10^5\pi}{3\cdot10^8}=6'67\cdot10^{-4}\pi\left(m^{-1}\right)$$

b) Puesto que la antena emite en forma isótropa, la emisión es uniforme en todas las direcciones. Así pues, a una distancia *r* de la antena emisora, la energía se distribuye uniformemente en una superficie esférica de radio *r*. La intensidad media es el valor medio del vector de Pointing:

$$I_{med} = S_{med} = \frac{P_{med}}{4\pi r^2} = \frac{6\cdot 10^4}{4\pi\cdot\left(6\cdot 10^3\right)^2} = 1'33\cdot 10^{-4}\left(W/_{m^2}\right)$$

c) La presión de radiación en un punto, es igual a la intensidad media de la onda en dicho punto, dividida por su velocidad de propagación:

$$P_{rad} = \frac{S_{rad}}{c} = \frac{1'33\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^8} = 4'43\cdot 10^{-13}\,Pa$$

d) A una distancia *r = 6km* del foco podemos considerar que la onda es plana, por lo que la intensidad media se relaciona con el valor máximo del campo eléctrico mediante:

$$S_{med} = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2 \rightarrow E_0 = \sqrt{2\mu_0 c S_{med}}$$

Sustituyendo valores se tiene:

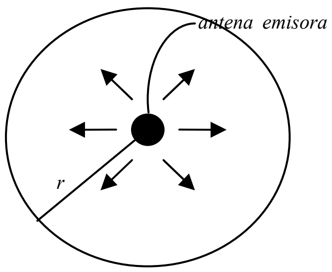
$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c S_{med}} = \sqrt{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\cdot 10^8\cdot 1'33\cdot 10^{-4}} = 0'317\left(V/_m\right)$$

Por lo tanto el campo magnético será:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{0'317}{3\cdot 10^8} = 1'06\cdot 10^{-9}\left(T\right)$$

6.5. Con objeto de detectar la señal de una antena de radio que emite a *90 MHz* se emplea una espira conductora circular de *30 cm* de radio. Suponiendo que la antena radia isotrópicamente con una potencia de *25 kW*, determinar la tensión eficaz que la onda electromagnética induce en la espira, si ésta se encuentra a una distancia de 20 km de la antena.

RESOLUCIÓN:



Si la antena emite isotrópicamente, el sistema tiene simetría esférica. El área de la superficie esférica a una distancia *r* es, $A=4\pi r^2$, y en ella se distribuye la uniformemente la potencia media emitida:

$$I_{med} = \frac{P_{med}}{A} = \frac{P_{med}}{4\pi r^2}$$

Para un valor de $r = 20Km$ y una $P_{med}=25KW$:

$$I_{med} = \frac{P_{med}}{4\pi r^2} = \frac{25 \cdot 10^3}{4\pi\left(20 \cdot 10^3\right)^2} = 4'97 \cdot 10^{-6}\left(W/m^2\right)$$

Como la intensidad media es igual al valor medio del vector de Pointing, queda:

$$S_{med} = 4'97 \cdot 10^{-6}\left(W/m^2\right)$$

Como a esa distancia, (*20Km*), la onda puede considerarse plana (aproximación de onda plana de la onda esférica), el valor medio del vector de Pointing es:

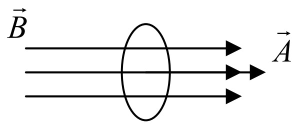
$$S_{med} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{B_0{}^2 c}{2\mu_0}$$

De donde puede despejarse B_0:

$$B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 S_{med}}{c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4'97 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^8}} = 2'04 \cdot 10^{-10}(T)$$

que es la amplitud del campo magnético de la onda emitida por la antena.
Para detectar la señal se usa una pequeña espira conductora circular de radio $R=0'3m$, que es un valor pequeño:

Como la espira es muy pequeña, podemos suponer que el campo magnético de la onda es constante en la superficie de la espira y además supondremos la situación más favorable posible, es decir, que $\vec{B}$ es perpendicular a la superficie de la espira:



El flujo magnético que atraviesa la espira será:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cos\theta \xrightarrow{\theta=0°} \Phi_B = B \cdot A$$

Podemos calcular la *f.e.m* inducida aplicando la ley Faraday-Henry:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot A) = -A\frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Como estamos suponiendo que a la distancia de *20km* la onda es plana, *B* tendrá la forma general:

$$B = B_0\ sen(kx - \omega t)$$

de donde:

$$\varepsilon = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} = -\pi R^2\left(-B_0 \omega \cos(kx - \omega t)\right)$$

cuyo valor máximo es:

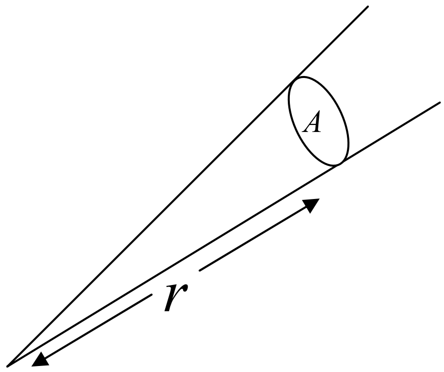
$$\varepsilon_0 = \pi R^2 B_0 \omega = \pi R^2 B_0 2\pi\nu = 2\pi^2 R^2 B_0 \nu$$

Puesto que la f.e.m inducida es sinusoidal, su valor eficaz es:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi^2 R^2 B_0 \nu}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi^2 \cdot 0'3^2 \cdot 2'04 \cdot 10^{-10} \cdot 90 \cdot 10^6}{\sqrt{2}} = 0'023V = 23mV$$

6.6. Un transmisor de radar emite su energía dentro de un cono que abarca un ángulo sólido de *0.01 Sr*. El campo eléctrico tiene una amplitud de *10 V/m* a una distancia de *1km*. Encontrar la amplitud del campo magnético y la potencia del transmisor.

RESOLUCIÓN:



El campo magnético se puede hallar fácilmente de la relación:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10}{3 \cdot 10^8} = 0'33 \cdot 10^{-7}(T)$$

Para hallar la potencia del transmisor, debemos tener en cuenta que:

$$I_{med} = \frac{P_{med}}{A} \rightarrow P_{med} = I_{med} \cdot A$$

De modo que necesitamos hallar el área A, a partir del ángulo sólido:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = 0'01\ Sr \rightarrow A = \Omega \cdot r^2 \xrightarrow{r=10^{3m}} A = \Omega \cdot r^2 = 0'01 \cdot (10^3)^2 = 10^4(m^2)$$

Por otro lado la I_{med} (suponiendo ondas electromagnéticas planas armónicas), es:

$$I_{med} = \frac{1}{2} u \cdot c$$

donde $u = \varepsilon_0 \cdot E_0{}^2$

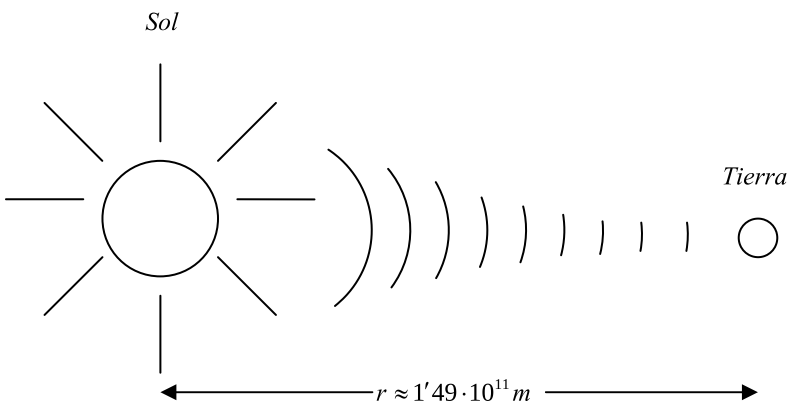
$$I_{med} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0{}^2 \cdot c = \frac{1}{2} 8'85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^8 = 13'27 \cdot 10^{-2} \left(W/m^2 \right)$$

Sustituyendo en la expresión de la potencia:

$$P_{med} = I_{med} \cdot A = 13'27 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = 1327\ W$$

6.7. La radiación electromagnética del Sol incide sobre la superficie de la Tierra con una intensidad media de $1'4 \cdot 10^3 \ W/m^2$. Suponiendo que esta radiación puede considerarse como una onda plana, estimar el módulo de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda.

RESOLUCIÓN:



La intensidad media es:

$$I_{media} = 1'4 \cdot 10^3 \left(W/m^2 \right)$$

Considerando que la onda que nos llega a la tierra, es aproximadamente una onda plana, igualamos este valor al de la intensidad media de una onda plana:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0{}^2 c = 1'4 \cdot 10^3 \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I_{med}}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1'4 \cdot 10^3}{8'85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 1'15 \cdot 10^3 \, V/m$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1'15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 3'84 \cdot 10^{-6} (T)$$

6.8. Las ondas de radio recibidas en un radiorreceptor tienen un campo eléctrico de amplitud máxima igual a $10^{-1} \ V/m$. Suponiendo que la onda se puede considerar plana, calcular:

a) la amplitud del campo magnético
b) la intensidad media de la onda
c) la densidad media de energía
d) Suponiendo que el receptor está a *1 km* de la radioemisora y que ésta irradia energía en forma isótropa, determinar la potencia en la estación.

RESOLUCIÓN:

a) Si la onda es plana podemos hacer:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10^{-1}}{3 \cdot 10^8} = 0'33 \cdot 10^{-9} (T)$$

b) La intensidad media de la onda es el valor medio del módulo del vector de Pointing, cuyo valor es:

$$I_{med} = S_{med} = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0{}^2 c$$

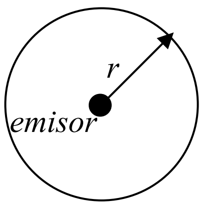
de donde:

$$I_{med} = 1'33 \cdot 10^{-6} \left(W/_{m^2} \right)$$

c)La intensidad media de energía será:

$$I_{med} = u_{med} \cdot c \rightarrow u_{med} = \frac{I_{med}}{c} = 4'42 \cdot 10^{-15} \left(J/_{m^3} \right)$$

d)



$$I_{med} = \frac{P_{med}}{área} = \frac{P_{med}}{4\pi r^2} \rightarrow P_{med} = 4\pi r^2 I_{med} = 167 \ (W)$$

6.9. Una onda electromagnética de frecuencia ν, que se propaga en el vacío, penetra en un medio material no magnético de permitividad relativa ε_r. Determinar la variación que experimenta su longitud de onda.

RESOLUCIÓN:

Si λ_0 y c son la longitud de onda y la velocidad de la onda en el vacío, y λ y v la longitud de onda y la velocidad de la onda en el medio, como la frecuencia, f, no cambia:

$$c = \lambda_0 f \rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f}$$

La c puede expresarse mediante:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Y en el medio material:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

La v se puede expresar como:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Si el medio es no magnético, $\mu_r = 1$, por lo que:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$$

La variación en la longitud de onda, $\Delta\lambda$, queda:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} - \frac{c}{f} = \frac{c}{f}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1\right)$$

Como $\varepsilon_r > 1$, queda:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} < 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1 < 0$$

con lo cual:

$$\Delta\lambda < 0 \rightarrow \lambda < \lambda_0$$

Por tanto la longitud de onda de una onda electromagnética, disminuye al pasar del vacío a un medio material.