C1. Disponemos de dos esferas de 10 mg de masa y 5 mm de radio, cargadas ambas con 1 nC. Una de ellas está fija mientras que la otra se lanza hacia la primera, desde una distancia muy lejana, con una velocidad de 1 m/s. ¿Chocarán las esferas? ¿Por qué? Si no chocan determina la distancia entre los centros de las esferas cuando la segunda se detiene [1 punto]. Dato: K_e=9.10^9 S.I. Nota: considerar despreciable el efecto gravitatorio entre las esferas.

RESOLUCIÓN:

Como nos encontramos en un sistema conservativo (la energía total se conserva), si no hay choque antes, en el instante en el que la segunda esfera se detiene su energía potencial eléctrica será igual a su energía cinética inicial. Ya que su energía potencial inicial es nula (por estar las esferas muy alejadas entre sí) y su energía cinética final es cero (por v = 0). En consecuencia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = K_e \frac{q^2}{d} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}10^{-5}\cdot 1 = 9\cdot 10^9 \frac{10^{-18}}{d} \qquad \Rightarrow \qquad d = 1.8\cdot 10^{-3} m$$

Dado que la distancia entre los centros de las esferas cuando están en contacto es 2r = 0,01 m y d es menor que esta distancia, las dos esferas chocarán antes de detenerse la segunda.

C 2. Determina el flujo eléctrico que atraviesa un cubo de 1 m de lado, con un vértice en el origen de coordenadas y 3 aristas colocadas en el sentido positivo de los distintos ejes coordenados, cuando el campo eléctrico es $\vec{E} = (5x+1)\vec{i}$ N/C [1 punto].

RESOLUCIÓN: $\phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$

Dado que el campo está en la dirección del eje X y teniendo en cuenta la posición del cubo, el campo es paralelo a 4 de las caras y perpendicular a dos de ellas (las dos que son paralelas al plano ZY en las posiciones x=0 y x=1). El flujo a través de las 4 primeras caras es cero (por ser $\vec{E}$ y $\vec{S}_{ci}$ perpendiculares).

Para las otras dos caras:

En x=0 $\phi_{c1} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{x=0}\vec{i}\cdot S(-\vec{i}) = -1\cdot 1 = -1$ V.m (flujo entrando al cubo)

En x=1 $\phi_{c2} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_{x=1}\vec{i}\cdot S(\vec{i}) = (5+1)\cdot 1 = 6$ V.m (flujo saliendo del cubo)

Por lo tanto el flujo neto sería de 5 V.m.

C 3. Por un cable circula una corriente eléctrica $I = (2+t)$ A, durante 10 s. Calcula la carga que atraviesa una sección transversal del cable los 2 primeros segundos y los dos últimos [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Si tenemos en cuenta que $dq = Idt$, integrando entre los límites de t adecuados podemos obtener la carga que se pide:

Los dos primeros segundos $q_1 = \int_0^2 I\cdot dt = 2t + t^2/2\Big|_0^2 = 6\ C$

Los dos últimos segundos $q_2 = \int_8^{10} I\cdot dt = 2t + t^2/2\Big|_8^{10} = 70 - 48 = 22\ C$

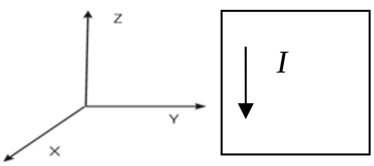
C4. Disponemos de un conductor rectilíneo, cilíndrico y de radio despreciable, por el que circula una intensidad I. El cable está situado en el eje axial de un solenoide, que se puede considerar infinito, que tiene n espiras por unidad de longitud y por el que circula la misma intensidad I. ¿A qué fuerza magnética está sometido el cable? [1 punto].

RESOLUCIÓN:

El solenoide crea en su eje axial una campo $B=\mu_0\, n\, I$ en la dirección de dicho eje. Y la fuerza que ejerce un campo magnético uniforme sobre un conductor rectilíneo por el que circula una corriente I, es:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Como el vector $\vec{l}$ tiene la dirección y sentido que I, entonces $\vec{l}$ y $\vec{B}$ serán paralelos o antiparalelos (dependiendo de los sentidos de I en solenoide y cable), pero en cualquiera de los dos casos su producto vectorial será cero. El cable no se ve afectado por ninguna fuerza magnética.



C5. Considera la espira de la figura donde se especifica el sentido de la corriente y su posición respecto de los ejes XYZ. Si la espira puede moverse libremente explica cual será su reacción en los siguientes casos: (a) La espira está inmersa en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira $\vec{B} = B(-\vec{i}\,)$T [0.5 puntos]. (b) La espira está inmersa en un campo magnético uniforme paralelo al plano de la espira $\vec{B} = B\,\vec{j}$ T [0.5 puntos].

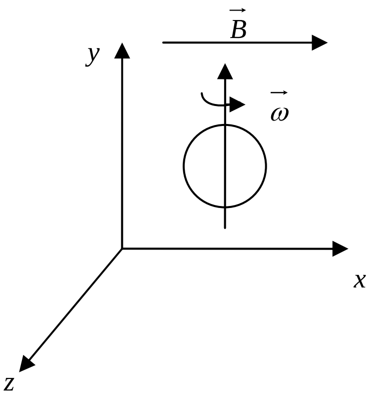
RESOLUCIÓN:

La forma más sencilla de resolver esta cuestión es utilizar el momento dipolar magnético de la espira, definido como $\vec{m} = I\vec{S}$ siendo $\vec{S}$ el vector superficie de la espira cuya dirección y sentido vienen dados por la regla de la mano derecha. En este caso $\vec{m} = m\,\vec{i}$

El momento total que obra sobre la espira viene dado por: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Caso (a):
Tenemos que $\vec{\tau} = m\vec{i} \times B(-\vec{i}\,) = 0$ ya que ambos vectores son antiparalelos. Por tanto la espira se encuentra en equilibrio. Un pequeño desplazamiento respecto de esta posición, sin embargo, la haría girar (posición de equilibrio inestable).

Caso (b):
Ahora tenemos que $\vec{\tau} = m\vec{i} \times B(\vec{j}\,) = mB\vec{k}$. Puesto que el momento no es nulo la espira efectuará una rotación para alinear su momento dipolar con el campo magnético. La rotación es tal que la parte izquierda de la espira se acerca al lector.



C 6. Tenemos una bobina formada por 200 espiras circulares de 20 cm de diámetro. La bobina gira, tal como se ve en la figura, en el interior de un campo magnético uniforme de 0.01 T a frecuencia constante. Nos interesa generar una tensión inducida de amplitud 100 V. Calcula la velocidad de giro de la bobina [1 punto].

RESOLUCIÓN:

a) El flujo de campo magnético que atraviesa la bobina es:

$$\Phi_{bobina} = \int_S N\ \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\cdot B\cdot S\cos\omega t$$

Aplicando la Ley de Faraday-Henry podemos hallar la f.e.m. inducida en la bobina:

$$\varepsilon_{inducida} = -\frac{d\Phi}{dt} = N\ B\ S\cdot\omega\cdot sen\,\omega t$$

La amplitud de la tensión es por tanto: $\varepsilon_{ampl} = N\ B\ S\,\omega$

De aquí podemos despejar ω:

$$\omega = \frac{\varepsilon_{ampl}}{N\ B\ S} = \frac{100}{200\cdot 0.01\cdot\pi\cdot(0,1)^2} \quad\rightarrow\quad \omega = \frac{5000}{\pi}\ rad/s$$

Como: $\omega = 2\pi\ f \quad\Rightarrow\quad f = \frac{w}{2\pi} = 253{,}3$ vueltas cada segundo

---

C 7. Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío en la dirección positiva del eje Y. El valor máximo del vector del campo eléctrico, que se encuentra vibrando en la dirección del eje Z, es de 3 N/C. Si la frecuencia es de $3{\cdot}10^{14}$ Hz, determina: (a) El valor máximo del vector del campo magnético asociado [0.25 puntos] (b) La expresión de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]. Dato: Velocidad O. EM. en el vacio $c=3{\cdot}10^8$ m/s

RESOLUCIÓN:

(a) El valor máximo del vector del campo magnético asociado es:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3}{3\cdot 10^8} = 10^{-8}\quad T$$

(b) El campo eléctrico asociado es: $\vec{E} = E_0\cdot sen(wt - ky)\,\vec{k}\ \ N/C$, donde:

$$E_0 = 3\ N/C;\quad w = 2\cdot\pi\cdot f = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^{14}\ rad/s;\quad k = \frac{w}{c} = \frac{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^{14}}{3\cdot 10^8} = 2\cdot\pi\cdot 10^6\ m^{-1}$$

Entonces: $$\vec{E} = 3\cdot sen\left(2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^{14}\,t - 2\cdot\pi\cdot 10^6\,y\right)\vec{k}\ \ N/C$$

El campo magnético asociado tiene la siguiente expresión:

$$\vec{B} = 10^{-8}\cdot sen\left(2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^{14}\,t - 2\cdot\pi\cdot 10^6\,y\right)\vec{i}\ \ T$$

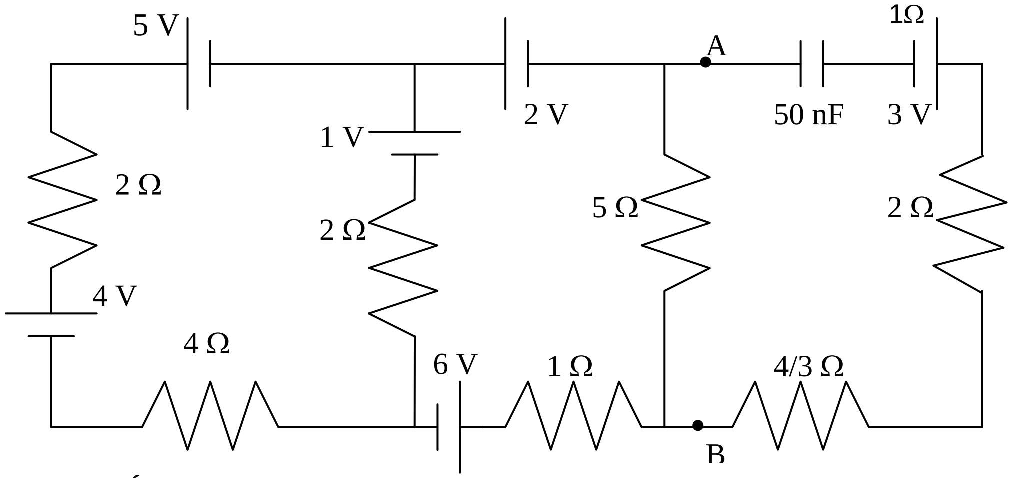
La dirección de vibración de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se obtiene a partir del producto vectorial:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{j} = \vec{k}\times\vec{i}$$

Por lo tanto también es válida la solución: $\vec{E} = E(-\vec{k})$ conjuntamente con $\vec{B} = B(-\vec{i})$,

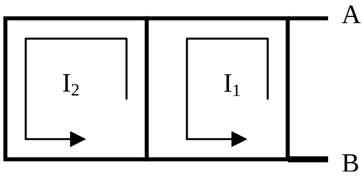
ya que: $\vec{j} = (-\vec{k})\times(-\vec{i})$

P.1 En el circuito de la figura, donde el condensador se encuentra inicialmente descargado, calcula: (a) El equivalente de Thevenin, entre los puntos A y B, de las dos mallas situadas a la izquierda del circuito [1 punto] (b) La potencia aportada o consumida, según sea el caso, en el instante inicial por la *fem* de 3 V cuya resistencia interna es de 1 Ω [0.5 puntos].



RESOLUCIÓN:

La porción del circuito que tenemos que sustituir por su equivalente de Thevenin está compuesto por 2 mallas por las que circulan las corrientes I_1e I_2.



Vamos a calcularlas, aplicando a cada malla la siguiente ecuación: $\sum_i R_i \cdot I_i - \sum_i \varepsilon_i = 0$

Malla 1:

$$0 = I_1 \cdot (5+2+1) - I_2 \cdot (2) - (2-1+6) \Rightarrow \; 8 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 = 7$$

Malla 2:

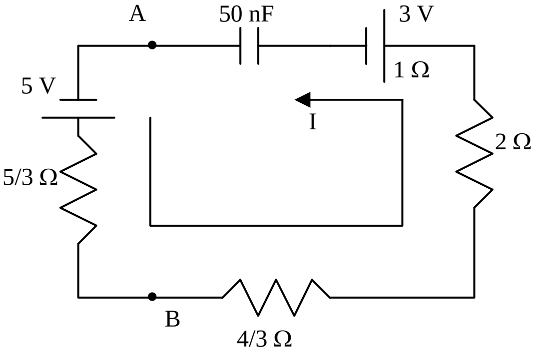
$$0 = I_2 \cdot (2+2+4) - I_1 \cdot (2) - (1+5-4) \Rightarrow -2 \cdot I_1 + 8 \cdot I_2 = 2$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $I_1 = 1\,A \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{2}\,A$

La diferencia de potencial entre A y B, si vamos por R= 5 Ω es: $V_A - V_B = -I_1 \cdot 5 = -1 \cdot 5 = -5\,V$

R_{Th} es: $\frac{6 \cdot 2}{6+2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\Omega$; Ahora 3/2 +1 =5/2, en paralelo con 5 $\Rightarrow$ $R_{Th} = \frac{5/2 \cdot 5}{5/2+5} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}\Omega$

El circuito lo dibujamos ahora de la siguiente forma:



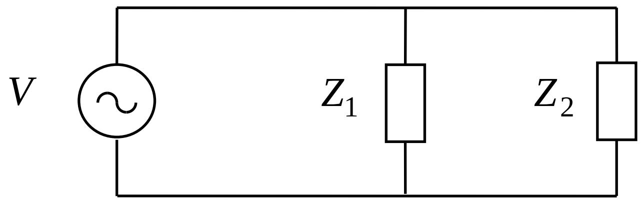
En el instante inicial, el condensador no está cargado. Actúa como si no estuviera (cortocircuito). La fem de 3 V actúa como receptor. La intensidad que pasa por ella es:

$$0 = I \cdot (5/3 + 4/3 + 2 + 1) - (5-3) \Rightarrow I = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,A$$

y la potencia que consume:

$$P_C = \varepsilon \cdot I + I^2 \cdot R = 3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1 = 1.11 \;\; W$$

P2. En el circuito de la figura, calcula: (a) La impedancia equivalente [0.75 puntos]. (b) La potencia disipada en las impedancias Z_1 y Z_2 [0.75 puntos].
Datos: $\overline{V}=220\left|\underline{0^{\circ}}\right\rangle$ V; $\overline{Z}_1 = j300\ \Omega$; $\overline{Z}_2 = 250\sqrt{2}\left|\underline{-45^{\circ}}\right\rangle\ \Omega$



RESOLUCIÓN:

a) $\overline{Z}_1 = j300 = 300\left|\underline{90^{\circ}}\right\rangle$ y $\overline{Z}_2 = 250\sqrt{2}\left|\underline{-45^{\circ}}\right\rangle = 250 - j250$

Las impedancias Z_1 y Z_2 están en paralelo:

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{300\left|\underline{90^{\circ}}\right\rangle \cdot 250\sqrt{2}\left|\underline{-45^{\circ}}\right\rangle}{j300 + 250 - j250} = \frac{106066\left|\underline{45^{\circ}}\right\rangle}{250 + j50} = \frac{106066\left|\underline{45^{\circ}}\right\rangle}{254.95\left|\underline{11.31^{\circ}}\right\rangle} = 416\left|\underline{33.69^{\circ}}\right\rangle\ \Omega$$

---

b) En Z_1 no se disipa potencia ya que al ser un número imaginario puro y positivo se trata de una autoinducción.

Podemos obtener la potencia disipada en Z_2 de tres formas (cualquiera de ellas es válida):

b.1) Puesto que la única resistencia del circuito está en Z_2 la potencia disipada será igual a la potencia activa del generador:

$$P_{z_2} = P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{Tef} \cos\varphi$$

Siendo: $\overline{I}_{Tef} = \dfrac{V_{ef}}{\overline{Z}_e} = \dfrac{220}{416} = 0.53\ A$ *y* $\varphi = 33.69^{\circ}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{z_2} = P_{AC} = 220 \cdot 0.53 \cdot \cos 33.69^{\circ} = 97 \quad W}$$

b.2) Calculando la intensidad eficaz que pasa por Z_2 y teniendo en cuenta la resistencia de Z_2:

$$P_{z_2} = I_{2ef}^2 \cdot R_2$$

Siendo: $I_{2ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z_2} = \dfrac{220}{250\sqrt{2}} = 0.622$ A *y* $R_2 = Z_2 \cos(-45^{\circ}) = 250\ \Omega$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{z_2} = I_{2ef}^2 \cdot R_2 = 0.622^2 \cdot 250 = 97 \quad W}$$

b.3) Calculando la potencia activa de la rama 2: $P_{z_2} = P_{2AC} = V_{ef} \cdot I_{2ef} \cos\varphi_2$

$$\boxed{P_{z_2} = P_{2AC} = 220 \cdot 0.622 \cdot \cos(-45^{\circ}) = 97 \quad W}$$