Sistemas de ecuaciones Lineales

Métodos Directos:

Gauss.

Gauss-Jordan

Matriz inversa

Factorización LU

Métodos Iterativos.

Jacobi

Gauss-Seidel.

Convergencia de los métodos iterativos.

Factorización LU

→ En algunas aplicaciones se plantean sistemas con **igual matriz A** pero diferentes t. independientes:

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2, \quad Ax = b_3, \ldots$$

Ej.: compañía eléctrica que necesita calcular las entradas (incógnitas) a partir de los cambios producidos por las entradas de la derecha (bi).

→ Como la matriz A es la misma → se repetiría Gauss → gasto extra.

→ **Opción:** ¿ calcular los SL con la inversa ? ... no,

mejor, si es posible, hacer lo siguiente:

$$A = LU$$

Factorización LU

❖ Consiste en descomponer la matriz de coeficientes

$$A = LU$$

L: cuadrada triangular inferior e invertible.

U: una escalonada de A, puede ser cuadrada o no

Resolver Ax = b con Factorización A = LU

❖ Se considera

$$Ax = b$$

donde la matriz A admite la factorización LU

❖ Entonces para resolver

$$Ax = b \quad \leftrightarrow \quad LU\,x = b$$

se resuelven los SL:

$Ly = b$ SCD - resoluble por sustitución progresiva

$Ux = y$ Sistema triangular resoluble por Gauss

Factorización LU

❖ A cuadrada (n x n)

L (n x n) triangular inferior e invertible.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{bmatrix}$$

U: (n x n) triangular superior.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular:

$A=(a_{ij})$ (nxn), es triangular superior si $a_{ij} = 0$, $i > j$.

$A=(a_{ij})$ (nxn), es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, $i < j$.

Factorización LU

❖ A no cuadrada (m x n)

L: (n x n) triangular inferior e invertible con **1** en la diagonal

U: (m x n) con $\mathbf{u_{ij} = 0}$ **si i > j.** (1)

Ej matrices U que satisfacen (1)

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & \mathbf{d_2} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{d_3} & u_{31} & u_{32} \end{bmatrix}$$

(3 x 5)

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & \mathbf{d_2} & u_{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{d_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5 x 3)

Factorización LU

- Tanto si A es **(n x n)** como **(m x n)** :

- **U** es una **matriz escalonada de A** siempre y cuando se haya obtenido **sin hacer permutaciones** de filas (OE-T1)

- Si para obtener una escalonada de A es necesario hacer OE-T1 → **no existe** factorización LU.

Ventajas de resolver SL con matrices triangulares

- Los SL con matrices triangulares son **más fáciles de resolver**.
- Si U tiene **n - 1 principales** → la **factorización es única**.
- Las **matrices triangulares** se usan en análisis numérico para resolver SL, calcular inversas y determinantes de matrices.

Matrices L y U

❖ A (mxn)

L (mxm): triangular inferior invertible.

U (mxn): triangular superior

❖ Se fija **L = I**$_m$ $\rightarrow$ $l_{ii} = 1$ para $i = 1,2,\ldots,m$

❖ **U** es una de las matrices escalonadas de A

Obtención de L y U

A (mxn), L (mxm), U (mxn)

a) Inicio se fija: $\mathbf{L} = \mathbf{I_m}$

b) **Obtención de U**:

Aplicar **OE/fila (no T1: no permutar filas)** y obtener una matriz **A' escalonada de A**.

c) **Obtención de L**:

Para cada **OE-T3** : **Fi ↔ Fi + c Fj** **colocar** en la **posición (i, j)** de la **matriz L** el escalar **-c.**

d) Se **sigue** proceso hasta conseguir A'.

U = A', U no tiene pq tener 1 principales en la diagonal de A'.

L tiene **1** en la diagonal principal.

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio3 . Resolver SL por Factorización LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 5 \\ 4 & 18 & 6 \\ -2 & -9 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(4 x 3)

Con las siguientes operaciones OE-T3 se obtiene A' escalonada de A:

$F2 \leftrightarrow F2 + 3F1$

$F3 \leftrightarrow F3 + (-2)F1$

$F4 \leftrightarrow F4 + 1F1$

$F3 \leftrightarrow F3 + (-4)F2$

$F4 \leftrightarrow F4 + 2F2$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No es necesario aplicar OE-T2 para obtener 1 principales.

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De **A'** se obtiene L

Se comienza con
L = **I** (4x4)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para cada OE-T3 : Fi ↔ Fi + **c** Fj se coloca en **(i, j) de L** el escalar **-c.**

F2 ↔ F2 + 3F1 → (2, 1) = -3
F3 ↔ F3 + (-2)F1 → (3, 1) = 2
F4 ↔ F4 + 1F1 → (4, 1) = -1
F3 ↔ F3 + (-4)F2 → (3, 2) = 4
F4 ↔ F4 + 2F2 → (4, 2) = -2

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observa en L que $l_{ii} = 1$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

A = LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4x4)$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4x3)$$

- Resolver SL:

  Ly = b sustitución progresiva

  Ux = y Gauss

Resolución de Ly = b mediante sustitución progresiva

$$
\begin{array}{lllllll}
l_{11}y_1 & & & & & = & b_1 \\
l_{21}y_1 & + & l_{22}y_2 & & & = & b_2 \\
 & & & & & & \\
l_{m1}y_1 & + & l_{m2}y_2 & +\ldots+ & l_{mm}y_m & = & b_m
\end{array}
$$

Algoritmo recursivo

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_2 = \frac{b_{2} - l_{21}y_2}{l_{22}}$$

$$y_m = \frac{b_{m} - \sum_{i=1}^{m-1} l_{mi}y_i}{l_{mm}}$$

Vector solución

$$y = [\, y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m \,]^T$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 3 . Resolver SL por Factorización LU

Ly = b

sustitución progresiva

$$L_{(4x4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & & & & & & & = & -1 \\ -3y_1 & + & y_2 & & & & & = & 5 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & & & = & 6 \\ -y_1 & - & 2y_2 & & & + & y_4 & = & -3 \end{array}$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolución de Ux = y

Por Sustitución Regresiva → Gauss

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4x3) \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

Solución de Ly = b, Ux = y

→ Solución de Ax = b

$$x = \begin{bmatrix} (-6 + 3\alpha)/2 \\ (5 - 2\alpha)/3 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Obtener U con 1 principales

A (mxn), L (mxm), U (mxn)

a) Inicio se fija: $\mathbf{L} = \mathbf{I_m}$

b) **Obtención de U:**

Antes de obtener cada 1 principal en A **se copia** desde el candidato a 1 principal (sup. que es el k-ésimo) hasta el final de la columna, en la **k-ésima columna de la matriz L.**

c) U tendrá **1 en la diagonal** pero **L** no tiene por qué tenerlo.

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & 6z & = & -8 \\ -x & + & y & - & 3z & = & -8 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{11} → se **copia** en la columna 1 de L desde la posición **(1,1)**

Operaciones para escalonar A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} F1 \leftrightarrow (1/2)F1 \\ F2 \leftrightarrow F2 + F1 \\ F3 \leftrightarrow F3 - F1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{22} → se copia en la columna 2 de L desde la posición (2,2)

Operaciones para escalonar A

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} F2 \leftrightarrow (1/3)F2 \\ F3 \leftrightarrow F3 + F2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Candidato a 1 principal en A: a_{33} → se copia en la columna 3 de L desde la posición (3,3)

$$A2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz A escalonada

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Ly = b

sustitución progresiva

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3x3)

$$\begin{aligned} 2y_1 &= -8 \\ -y_1 + 3y_2 &= -8 \\ y_1 - y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 4 . Resolver SL por Factorización LU

Ux = y

sustitución regresiva

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3x3)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= --4 \\ x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución de Ly = b, Ux = y

→ Solución de Ax = b

MÉTODOS ITERATIVOS

Resuelven SL mediante sucesivas **<u>aproximaciones a la solución</u>** empezando con una estimación inicial de la solución (por lo general de cero)

Esto es los diferencia de los métodos directos que buscan soluciones exactas (por ejemplo con la inversa).

Son **útiles** para resolver problemas que involucran un número muy **grande de variables** (a veces millones), donde los métodos directos tendrían un coste prohibitivo incluso con la potencia del mejor computador disponible.

- Sólo es necesario almacenar los coeficientes no nulos de la matriz del sistema.
- Son menos sensibles a los errores de redondeo.

Métodos Iterativos

Los métodos iterativos lineales se basan en reescribir el problema

$$\mathbf{Ax = b} \rightarrow \mathbf{x = Gx + c}$$

donde **G** es una matriz (nxn) y **c** es un vector columna de dimensión n.

Algoritmo iterativo:

Sea $x^{(0)}$ una aproximación inicial a la solución

Para k = 1, 2,…

$$\mathbf{x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c}$$

Matriz G : matriz de iteración
Vector **c** : vector de iteración.

Métodos Iterativos

Se descompone:

$$A = L + D + U$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

D: diagonal

L: triangular inferior

U: triangular superior

Método Iterativo de Jacobi

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (D + L + U)x = b$$

$$\Leftrightarrow \quad Dx = b - (L + U)x$$

$$x = D^{-1}[\, b - Lx - Ux \,]$$

Algoritmo de Jacobi

1. Elegir una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$
2. Para $k = 1, 2, \ldots, MaxIter$
   1. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, calcular

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

   2. Si se cumple el criterio de parada, tomar $\mathbf{x}^{(k)}$ como aproximación a la solución

→ En la fila i
se despeja la incógnita i

Método Iterativo de Jacobi

Se aplica sólo a **sistemas cuadrados** (Nº incógnitas = Nº ecuaciones).

Para obtener ecuación de recurrencia:

Se **ordenan** las ecuaciones y las incógnitas.

De la ecuación **i** se despeja la incógnita **i** (a_{ii} <> 0).

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio5 . Resolver por Jacobi

$$\begin{aligned} 7x_1 &- x_2 &= 5 \\ 3x_1 &- 5x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Se despeja la variable x_1 en ecuación 1
variable x_2 en ecuación 2

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7}$$

$$x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

Se elige aproximación inicial a la solución **(x_1 x_2) = (0, 0)**

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio5 . Resolver por Jacobi

ITERACIONES

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0)$

$$x_1^{(1)} = \frac{5+0}{7} \approx 0'714$$
$$x_2^{(1)} = \frac{7+3\cdot 0}{5} \approx 1'400$$

El superíndice es la iteración que se está realizando

$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (0{,}714, 1{,}400)$

$$x_1^{(2)} = \frac{5+1'4}{7} \approx 0'914$$
$$x_2^{(2)} = \frac{7+3\cdot 0'714}{5} \approx 1'829$$

$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (0{,}914, 1{,}829)$

¿Cuándo paramos ?
Hacer 6 iteraciones

i	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(i)}$	0	$0'714$	$0'914$	$0'976$	$0'9934$	$0'998$	$0'999$
$x_2^{(i)}$	0	$1'400$	$1'829$	$1'949$	$1'985$	$1'996$	$1'999$

Solución → **x_1 converge** a → 1

Solución → **x_2 converge** a → 2

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6. Resolver por Jacobi

$$\begin{array}{rrrrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & 11 \\ 3x_2 & -x_3 & & +8x_4 & = & 15 \end{array}$$

Despejamos las incógnitas

Primero despejamos x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda, ...

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\ x_2 & = & (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\ x_3 & = & (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\ x_4 & = & (15 - 3x_2 + x_3)/8 \end{array}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Definimos la suceción

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10 \\
x_2^{(k+1)} &= (6 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11 \\
x_3^{(k+1)} &= (11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)})/10 \\
x_4^{(k+1)} &= (15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/8
\end{aligned}
$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Primera iteración

Punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right)^t = (0,0,0,0)^t.$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 = 0.6 \\
x_2^{(1)} &= (6 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 = 0.545 \\
x_3^{(1)} &= (11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)})/10 = 1.1 \\
x_4^{(1)} &= (15 - 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)})/8 = 1.875
\end{aligned}
$$

Criterio de parada

Impondremos que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que una 0.01.

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 4}\left(\left|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}\right|\right) = \max\,(0.6, 0.545, 1.1, 1.875) = 1.875$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

Segunda iteración

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 && = (6 + 0.545 - 2(1.1))/10 = 0.435 \\
x_2^{(2)} &= (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 && = (6 + 0.6 + 1.1 - 3(1.875))/11 = 1.886 \\
x_3^{(2)} &= (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(1)})/10 && = (11 - 2(0.6) + 0.545 + (1.875))/10 = 1.22 \\
x_4^{(2)} &= (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 && = (15 - 3(0.545) + 1.1)/8 = 1.808
\end{aligned}$$

Criterio de parada

¿Se cumple? No

$$\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\|_\infty = 0.357 > 0.01$$

Se siguen las iteraciones hasta que se **cumple** el criterio de parada

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 . Resolver por Jacobi

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.545 \\ 1.1 \\ 1.875 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.435 \\ 0.189 \\ 1.222 \\ 1.808 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.374 \\ 0.203 \\ 1.213 \\ 1.957 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.156 \\ 1.241 \\ 1.950 \end{pmatrix} \ldots \; x^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.153 \\ 1.240 \\ 1.979 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Cada vez que se calcula una iteración se comprueba el criterio de parada

En este caso se cumple en la iteración 6.

Se para y el vector **x** será la aproximación a la solución.

$$\left\| \mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(5)} \right\|_\infty = 0.007 < 0.01$$

Método iterativo de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Observa la diferencia con Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Jacobi usa el valor de las variables obtenido en la iteración anterior.

Gauss-S para la **variable i** considera el valor de la variable (i-1) que acaba de calcular en la misma iteración en la que se está haciendo el cálculo

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

$$\begin{array}{rrrrcr} 10x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 6 \\ -x_1 & +11x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +10x_3 & -x_4 & = & 11 \\ 3x_2 & -x_3 & & +8x_4 & = & 15 \end{array}$$

Despejamos incógnitas, igual que en Jacobi, en la ecuación i la incógnita i

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (6 + x_2 - 2x_3)/10 \\ x_2 & = & (6 + x_1 + x_3 - 3x_4)/11 \\ x_3 & = & (11 - 2x_1 + x_2 + x_4)/10 \\ x_4 & = & (15 - 3x_2 + x_3)/8 \end{array}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 b) . Resolver por Jacobi

Definimos la sucesión, pero en cuanto calculamos una aproximación la usamos

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/10 \\
x_2^{(k+1)} &= (6 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)})/11 \\
x_3^{(k+1)} &= (11 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)})/10 \\
x_4^{(k+1)} &= (15 - 3x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)})/8
\end{aligned}
$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 b) . Resolver por Jacobi

Primera iteración $\quad \mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right)^t = (0,0,0,0)^t.$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \;= (6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})/10 && = 0.6(6+0-0)/10 = 0.6 \\
x_2^{(1)} &= (6 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)})/11 && = (6+0.6+0-0)/11 = 0.6 \\
x_3^{(1)} &= \;= (11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(0)})/10 && = 1.1(11 - 2(0.6) + (0.6) + 0)/10 = 1.04 \\
x_4^{(1)} &= (15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)})/8 && = (15 - 3(0.6) + (1.04))/8 = 1.78
\end{aligned}
$$

Criterio de parada: diferencia entre dos iteraciones menor que 0.01

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4}\left(\left|\mathbf{x}_i^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(0)}\right|\right) = \max(0.6, 0.6, 1.04, 1.78) = 1.78$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2
Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

segunda iteración

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (6 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})/10 & &= (6 + 0.6 - 2(1.04))/10 = 0.452 \\
x_2^{(2)} &= (6 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)} - 3x_4^{(1)})/11 & &= (6 + 0.452 + 1.04 - 3(1.78))/11 = 0.196 \\
x_3^{(2)} &= (11 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + x_4^{(1)})/10 & &= (11 - 2(0.452) + 0.196 + (1.78))/10 = 1.2 \\
x_4^{(2)} &= (15 - 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)})/8 & &= (15 - 3(0.196) + 1.207)/8 = 1.953
\end{aligned}
$$

Criterio de parada < 0.01, no se cumple

$$\left\| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right\|_{\infty} = 0.404 > 0.01$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 6 b). Resolver por Jacobi

más iteraciones

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 1.04 \\ 1.78 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.452 \\ 0.196 \\ 1.207 \\ 1.953 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.157 \\ 1.235 \\ 1.971 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.369 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.368 \\ 0.154 \\ 1.239 \\ 1.972 \end{pmatrix}$$

Criterio de parada < 0.01, se cumple

$$\left\|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}\right\|_{\infty} = 0.009 < 0.01$$

Convergencia de los métodos iterativos

Una condición suficiente para que los método de Jacobi y Gauss-Seidel **converjan a la solución** del SL es que la matriz de coeficientes sea **estrictamente diagonal dominante**.

$A = (a_{ij})$ lo será si

$$\sum_{j=1(i\neq j)}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Estudio de la matriz de coeficientes

Se comprueba si A es **diagonal dominante**.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |2| > |1| + |0| \\ |5| > |2| + |-1| \\ |3| > |0| + |-1| \end{array}$$

A es diagonal dominante.

En un SL con matriz A de coeficientes está garantizada la convergencia