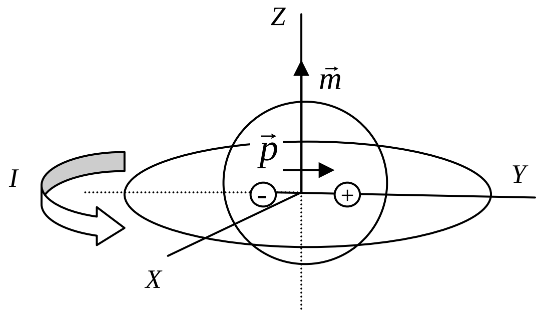
C.1 Disponemos de los siguientes elementos: Una corteza esférica de 1cm de radio sin carga, un dipolo eléctrico con distancia 1cm entre sus cargas y momento dipolar $\vec{p} = 5\vec{j}\ \mu\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}$, y una espira de 2cm de radio y momento dipolar $\vec{m} = 2\vec{k}\ \mathrm{mA}\cdot\mathrm{m}^2$. Todos ellos están situados de forma que sus centros coinciden en el eje de coordenadas (en el caso del dipolo eléctrico el centro de su eje). Se pide: (a) Realizar un dibujo de la situación indicando el sentido de la corriente en la espira (horario o anti-horario) [0.5 puntos]. (b) Calcular el flujo total, eléctrico y magnético, a través de la corteza esférica. Justifica las respuestas [0.5 puntos].

RESOLUCIÓN:



a) El dipolo eléctrico tiene que estar situado sobre el eje Y. Carga negativa a la izquierda para que p sentido +j. Espira en plano XY y corriente sentido anti-horario para que m sentido +k.

b) Como las líneas de campo de los dipolos son cerradas, el flujo total, tanto eléctrico como magnético, que atraviesa la esfera (superficie cerrada) son nulos. Todas las líneas de campo que entran a la superficie vuelven a salir y las que salen vuelven a entrar.

C2. La corriente que circula por un conductor de sección 10^{-6} m^2 varía con el tiempo en la forma: $I(t) = 2 - 0.03t^2\,\mathrm{mA}$, cuando entre sus extremos se aplican 10 V. Calcula la carga que ha circulado por el conductor en los primeros 10 segundos [0.5 puntos]. ¿Es un conductor óhmico? ¿Por qué? [0.5 puntos]

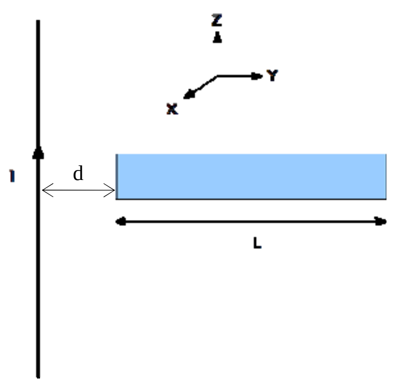
RESOLUCIÓN:

La carga transportada se puede calcular como:

$$Q(t) = \int I(t)dt = \left[2t - 0.01t^3\right]_{0s}^{10s} = 10\ mC$$

No es un conductor óhmico, porque en este caso el potencial eléctrico es constante y la intensidad eléctrica no lo es.

C.3 Una barra semiconductora de longitud *L* está situada perpendicularmente a una corriente rectilínea *I* con su extremo izquierdo a una distancia *d* de la corriente, como muestra la figura. La barra se mueve con una velocidad *v* paralela al conductor rectilíneo y en el sentido de la corriente. ¿Se inducirá una *ddp* entre los extremos de la barra móvil? ¿Por qué? [0.75 puntos]. En caso afirmativo ¿qué polaridad tendrá? [0.25 puntos].



RESOLUCIÓN: Sí se producirá una *ddp* porque existe un campo magnético producido por la corriente rectilínea en los puntos donde está la barra de la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}(-\vec{i})$$

Y la barra posee cargas libres (electrones y huecos) que se están moviendo en el seno de este campo magnético con velocidad $\vec{v} = v(\vec{k})$ m/s, por lo que actuará sobre ellas una fuerza dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qvB(-\vec{j})$$

Esta fuerza desplazará las cargas positivas (huecos) hacia el extremo izquierdo de la barra (que quedará a mayor potencial) y los electrones hacia el extremo derecho (menor potencial).

C.4 Disponemos de un hilo de Cu de sección circular de radio a = 0.5 mm y longitud l = 10 m. Enrollamos el hilo alrededor de un cilindro de Fe de radio r = 1 cm, formando una bobina de 15,9 cm de longitud. Calcular: (a) La corriente necesaria que debería pasar para producir un campo magnético de 0.5 T [0.75 puntos]. (b) La potencia eléctrica que disiparía [0.25 puntos]. Datos: resistividad del cobre ρ = 1.68 x 10^{-8} Ωm. Permeabilidad magnética relativa del Fe μ_r = 5000. μ_0 = $4\pi.10^{-7}$ S.I.

RESOLUCIÓN:

El número de espiras que podremos enrollar con el hilo alrededor del núcleo de Fe será:

$$N = \frac{l_H}{2\pi r} = 159 \text{ espiras} \quad \rightarrow \quad n = \frac{N}{l_B} = \frac{159}{0{,}159} = 1000 \text{ espiras/m}$$

El campo magnético en el interior de la bobina es $B = \mu\, n\, I$, de donde:

$$I = \frac{B}{\mu_r \mu_0 n} = \frac{0{,}5}{5000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000} = 79.6 \text{ mA}$$

b) El paso de una corriente por este dispositivo disipa una potencia que depende de la resistencia ómhica del hilo, en la forma $P = RI^2$ donde

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\pi a^2} = 0.2139\Omega$$

Por tanto P = 1.36 mW

C.5 Una onda electromagnética plana, linealmente polarizada en el eje Z, se propaga en el vacío en la dirección positiva del eje X. Si su frecuencia es de 1 MHz y la amplitud máxima del campo eléctrico es de 300 V/m, determina: (a) La velocidad angular y el número de onda [0.25 puntos]. (b) Las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]

RESOLUCIÓN:

a) La velocidad angular es: $w = 2\pi\, f = 2\pi 10^6 \ rad/s$

El número de onda es: $k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi 10^6}{3 10^8} = \frac{2\pi}{3} 10^{-2} \ m^{-1}$

b) Ecuación del campo eléctrico: Utilizando los datos del enunciado ($\vec{E} = E\,\vec{k}$, polarizada en el eje Z) y los calculados en a), tenemos:

$$\vec{E} = E_0 sen(wt - kx)\vec{k} \ V/m = 300\, sen\left(2\pi 10^6 t - \frac{2\pi}{3} 10^{-2} x\right)\vec{k} \ V/m$$

El campo magnético debe vibrar en la dirección del eje (Y). Como el sentido de propagación de la onda viene determinado por el sentido del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ y este debe ser $\vec{i}$ (dirección positiva del eje X), entonces $\vec{B} = B \cdot (-\vec{j})$, ya que: $\Rightarrow \vec{k} \times (-\vec{j}) = \vec{i}$

Por otra parte: $B_0 = E_0 / c = 10^{-6} T$

La expresión final del campo magnético es: $\vec{B} = 10^{-6} sen\left(2\pi 10^6 t - \frac{2\pi}{3} 10^{-2} x\right)(-\vec{j})T$

P.1 Dos cilindros conductores coaxiales de radios 5 y 10 mm y longitud infinita tienen una densidad de carga 2nC/m^2 y 4nC/m^2 respectivamente. Determina: (a) El campo eléctrico en todo el espacio [0.75 puntos]. (b) La diferencia de potencial entre los dos cables [0.75 puntos]. (c) Si los unimos con un cable de capacidad despreciable, ¿cómo se redistribuye la carga? [0.5 puntos]. Dato: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ S.I.$

Resolución:

a) Inicialmente la carga se distribuye uniformemente en la superficie de los conductores. $\sigma = q/S$, siendo $S = 2\pi r l$ la superficie lateral del conductor $\rightarrow q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 2\pi r l$

Así podemos obtener la carga por unidad de longitud: $q/l = \sigma \cdot 2\pi r l / l = \sigma \cdot 2\pi r$

$$\Rightarrow \quad \frac{q_i}{l} = \sigma_i 2\pi r_i = 2\pi \cdot 10^{-11}\ C/m \quad \text{y} \quad \frac{q_e}{l} = \sigma_e 2\pi r_e = 8\pi \cdot 10^{-11}\ C/m$$

Aplicando la ley de Gauss:

- para r<0.005 m, no hay carga en el interior del conductor y $\vec{E} = 0$ N/C
- para 0.005m<r<0.01m, la carga del conductor exterior no afecta y el efecto de la carga del conductor interior es la misma que la creada por un hilo de densidad lineal $\lambda_i = q_i / l$, por tanto:

$$\vec{E} = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} r}\vec{u}_r = \frac{1.13}{r}\vec{u}_r\ N/C$$

- Y para 0.01m<r

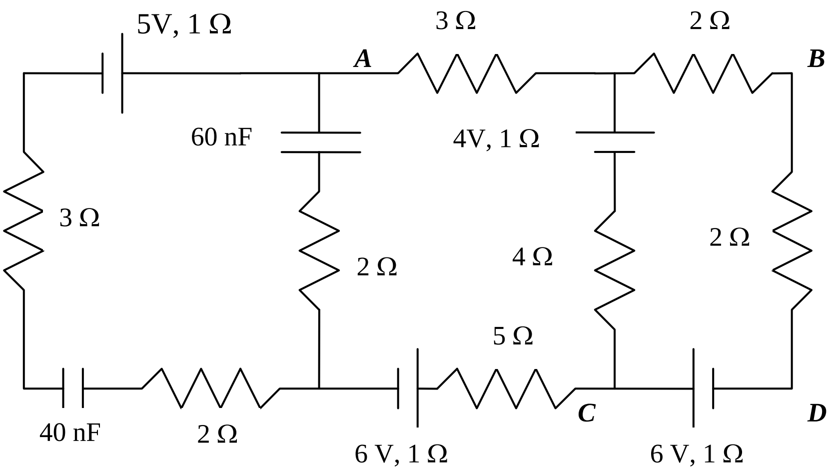
$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{u}_r = \frac{10\pi \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} r}\vec{u}_r = \frac{5.65}{r}\vec{u}_r\ N/C$$

b) Para calcular la diferencia de potencial es necesario integrar el campo que existe entre los puntos deseados.

$$V_{0.1} - V_{0.05} = -\int \vec{E}d\vec{r} = -\int_{0.05}^{0.1} \frac{1.13}{r}dr = -1.13\ln(2) = -0.78\,V$$

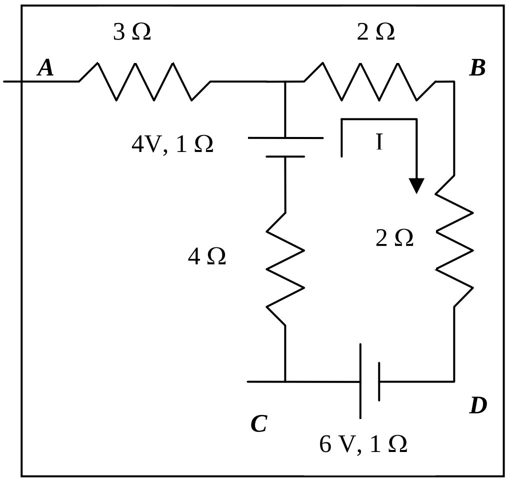
c) Cuando interconectamos con un cable ambos conductores, la carga se redistribuirá de forma que los dos conductores queden al mismo potencial. Para que esto suceda, toda la carga debe situarse en la superficie del cilindro exterior.

P.2 Determina en el circuito de la siguiente figura: (a) El equivalente de Thévenin de la porción del circuito ABCD [0.75 puntos]. (b) La carga almacenada en el condensador de 60nF cuando se alcanza el equilibrio [0.5 puntos]. (c) La diferencia de potencial entre los bornes del condensador de 40 nF cuando se alcanza el equilibrio [0.25 puntos]



RESOLUCIÓN

a) La porción de circuito que tenemos que simplificar es:



La intensidad se calcula como:

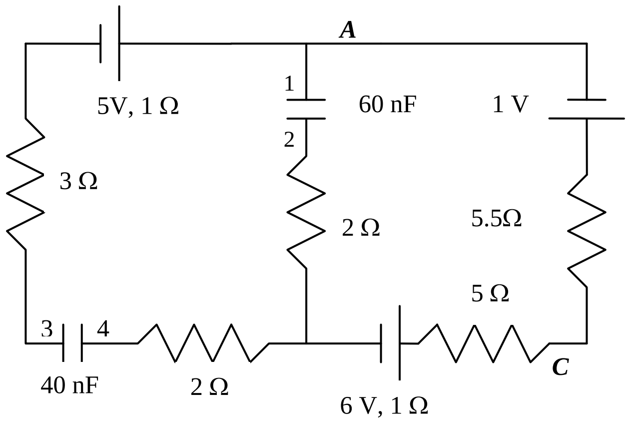
$$0 = \sum_i I \cdot R_i - \sum_i \varepsilon_i \Rightarrow 0 = I \cdot 10 - (10) \Rightarrow I = 1\,A$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y C es:

$$V_A - V_C = (-I) \cdot 5 - (-4) = -1V$$

La resistencia equivalente:
En serie: $2+2+1=5\Omega$. Y En serie: $4+1=5\Omega$.
En paralelo: $\frac{5\cdot 5}{5+5} = \frac{25}{10}\Omega$.
Y, finalmente, en serie: $\frac{25}{10}+3=5.5\Omega$

El circuito resultante es:



b) La carga almacenada en el condensador de 60 nF es: $Q = C \cdot (V_1 - V_2)$

Antes de calcular la diferencia de potencial entre los bornes del condensador, tenemos que calcular la intensidad que circula por el circuito cuando los dos condensadores están completamente cargados.

En esta situación, no hay corriente en el circuito. Entonces, podemos calcular la diferencia de potencial, yendo desde 1 hasta 2 por la parte derecha del circuito:

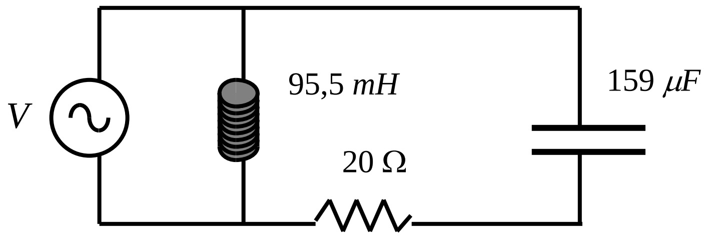
$$V_1 - V_2 = -(1-6) = 5\,V\,.$$

La carga almacenada será: $Q = C \cdot V = 60 \cdot 10^{-9} \cdot 5 = 3 \cdot 10^{-7}\ C$ (positiva en la armadura 1)

c) Si vamos desde 3 hasta 4 por el camino exterior:

$$\left(V_3 - V_4\right) = -(5+1-6) = 0\,V$$

P.3 En el circuito de la figura, calcula: (a) La corriente suministrada por la fuente [1 punto]. (b) La potencia disipada en R, L y C [0.5 puntos].
Dato: $V = 220\sqrt{2}\, sen\left(100\pi\ t + 45^0\right)$



RESOLUCIÓN:

(a) Para calcular la corriente total necesitamos conocer la impedancia equivalente:

$$\overline{V} = 220\underline{|45^o}\rangle; \qquad Lw = 95.5\cdot 10^{-3}\cdot 100\pi = 30\ \Omega; \qquad \frac{1}{Cw} = \frac{1}{159\cdot 10^{-6}\cdot 100\pi} = 20\ \Omega$$

$$\overline{Z}_1 = jLw = j30 = 30\underline{|90^o}\rangle; \qquad \overline{Z}_2 = R = 20 = 20\underline{|0^o}\rangle; \qquad Z_3 = \frac{-j}{Cw} = -j20 = 20\underline{|-90^o}\rangle;$$

Z_2 y Z_3 están en serie:

$$\overline{Z}_{23} = 20 - j20 = 20\sqrt{2}\underline{|-45^o}\rangle$$

Z_1 está en paralelo con Z_{23}:

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{z}_1\cdot\overline{z}_{23}}{\overline{z}_1+\overline{z}_{23}} = \frac{30\underline{|90^o}\cdot 20\sqrt{2}\underline{|-45^o}}{20+j10} = \frac{600\sqrt{2}\underline{|45^o}}{\sqrt{500}\underline{|26{,}57^o}} = 37{,}95\underline{|18{,}43}\ \ \Omega$$

$$\overline{I}_T = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_e} = \frac{220\underline{|45^o}\rangle}{37{,}95\underline{|18{,}43^o}\rangle} = 5{,}8\underline{|26{,}57^o}\rangle; \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_T = 5{,}8\sqrt{2}\, sen(100\pi t + 26{,}57^o)\quad A}$$

(b) L y C no disipan potencia, sólo almacenan energía y la devuelven al circuito.
La potencia disipada en R es:

$$P_{dR} = I_{2ef}^2\cdot R; \text{ siendo } I_{2ef} = \frac{V_{ef}}{Z_{23}} = \frac{220}{20\sqrt{2}} = 7{,}78\ A;$$

$$\Rightarrow \quad P_{dR} = (7{,}78)^2\cdot 20 = 1210\, W$$

Como es la única resistencia presente en el circuito, también podemos calcularla como:

$$P_{dR} = P_{AC} = V_{ef}\cdot I_{Tef}\cdot\cos\varphi = 220\cdot 5.8\cdot\cos 18{,}43^o = 1210\, W$$