COLECCIÓN DE EJERCICIOS DE LÓGICA RESUELTOS

2. LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Colección de ejercicios relacionados con PASO 1 del cálculo lógico: formalización de proposiciones para el estudio de la validez de razonamientos en el contexto del sistema formal de la lógica de primer orden.

Cálculo lógico

Para resolver un problema de razonamiento con el sistema lógico se deben seguir los siguientes pasos:

1º.-Formalizar el problema con el lenguaje lógico y obtener las fórmulas lógicas (fbfs) que conforman su estructura.

2º.- Interpretar las fórmulas valorando si son verdaderas o falsas para determinar la validez de la estructura.

3º.- Aplicar un método de prueba, como el de Deducción Natural, que permita obtener nuevas fórmulas,

Usaremos:

Pi: Enunciado de la proposición i. En un razonamiento Pi hará referencia a una proposición premisa.

Q: Enunciado de la proposición conclusión.

Fbf: fórmula lógica bien formada. Fbf-P: fórmula lógica bien formada de la proposición P.

≡ símbolo para indicar expresiones equivalentes.

⇔ símbolo para indicar fórmulas equivalentes.

En las frases en las que aparezcan A, B,... consideraremos que éstas representan enunciados de proposiciones cualesquiera.

Formalización de razonamientos con el lenguaje lógico Proposicional y Predicativo de Primer Orden

*Apunte teórico: Una **proposición** es un enunciado del lenguaje natural que expresa un hecho que declara o bien una propiedad de un individuo o una relación entre varios individuos. En el contexto del cálculo de la lógica de primer orden puede ser verdadera o falsa. Una proposición es atómica (hecho) cuando la información que declara es completa e indivisible; es molecular cuando conecta varias proposiciones atómicas. Cada proposición molecular se caracteriza por su conectiva principal. ¡Cuidado! con las sentencias que no son proposiciones hay que saber detectarlas y descartarlas.*

***Formalizar** proposiciones con el lenguaje lógico consiste en escribirlas con los símbolos propios del lenguaje para obtener fórmulas lógicas (fbf). En el nivel proposicional las proposiciones atómicas se formalizan con variables proposicionales y en el nivel predicativo de primer orden con predicados de n-argumentos escritos entre paréntesis. En un conjunto, llamado marco conceptual (MC), se escriben los elementos del lenguaje elegidos para formalizar las proposiciones.*

Alfabeto del Lenguaje **Proposicional.**

<u>**Variable proposicional**</u>: expresión formada por letras y/o números que formaliza proposiciones atómicas.

<u>**Conectivas**</u>: Sean A y B proposiciones:

	Símbolo	**Esquema**	**Formalización**
Negación	$\neg$	no A, es falso A, no es cierto A,…	$\neg A$
Conjunción	$\wedge$	A y B, A pero B, A aunque B,…	$A \wedge B$
Disyunción	$\vee$	A o B, al menos uno de ellos,…	$A \vee B$
Implicador o condicional	$\rightarrow$	Si A entonces B A es suficiente para B B es necesario para A B sólo si A No A a menos que B	$A \rightarrow B$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	A si y sólo si B A es necesario y suficiente para B,…	$A \leftrightarrow B$

Lenguaje de **Predicados de primer orden**.

Se determina qué se afirma y de quién se afirma.

<u>Predicado:</u> expresión que formaliza una propiedad o característica de un sujeto, o bien una relación entre varios. Se formaliza con la siguiente sintaxis: P(arg1,…argn), P:nombre del predicado; argi: argumentos que representan a los sujetos a los que el predicado P afecta.

<u>Tipos de Argumentos</u>:

Constante: representan a sujetos concretos de la proposición. Se formalizan con letras: a, b…

Variable: representan a sujetos constantes de cualquier domino o conjunto de referencia. Se formalizan: x, y,…. Suelen relacionarse con un cuantificador.

<u>Cuantificadores:</u>

Universal ($\forall$): símbolo que acompaña a una variable e indica que todos los sujetos verifican un predicado.

Existencial ($\exists$): símbolo que acompaña a una variable e indica que algunos sujetos verifican un predicado.

Fórmulas equivalentes

Cualquier fbf puede expresarse de forma equivalente usando reglas de equivalencia (ver hoja de reglas).

¿Qué se debe hacer para formalizar proposiciones con el lenguaje lógico?

1º.- Elegir nivel de formalización.

2º.- Nivel proposicional: Para cada proposición detectar las proposiciones atómicas y las posibles conexiones. Para cada proposición atómica diferente elegir una variable proposicional e incluirla en el conjunto MC (marco conceptual.

3º.- Nivel de predicados: Determinar predicados, conectivas y cuantificadores. Para cada predicado diferente elegir un nombre y sus argumentos e incluirlo en el conjunto MC.

4º.- Formalizar las sentencias teniendo en cuenta la prioridad de las conectivas y el alcance de los cuantificadores.

EJERCICIO 1 Determina qué expresiones son **proposiciones** marcando SI, NO:

a) ¡Qué rollo de película! **SI** **NO**

b) María es la más guapa de la clase, pero es muy seria. **SI** **NO**

c) ¡Date prisa que ya es tarde! **SI** **NO**

d) No es necesario que trabajes los domingos. **SI** **NO**

e) Los números terminados en 2 son pares. **SI** **NO**

f) María e Irene son policías. **SI** **NO**

g) Para que funcione el ordenador es necesario que lo enciendas **SI** **NO**

h) ¿Me puedes ayudar a salir del coche? **SI** **NO**

i) Buenas noches. **SI** **NO**

j) 2 + 2 = 5. **SI** **NO**

EJERCICIO 2 Clasifica las siguientes proposiciones como atómicas o moleculares. En éstas indica la conectiva principal. Para cada proposición describe un MC en el lenguaje de proposiciones.

a) Luis saca a pasear al perro.

b) Si vas a pasear al perro compra el periódico.

c) Juan no sale esta noche, aunque vaya con Ana.

d) Sansón y Dalila se amaron locamente.

e) Para que salga de paseo es necesario que no llueva, aunque es suficiente que no nieve.

f) Juan entra en el cine si compra una entrada o se cuela.

g) Cuatro y cuatro ocho y dos por dos veinte.

h) Sólo si Ana estudia lógica es feliz y está contenta.

i) A menos que Ana esté contenta será feliz

Solución

a) Proposición atómica. MC = {p: Luis saca a pasear al perro}

b) Proposición molecular. Conectiva principal: implicador; MC = {p: paseas perro; q: compra el periódico}.

c) Proposición molecular Conectiva principal: conjunción;

MC = {p: Juan sale esta noche; q: Juan va con Ana a comprar el periódico}.

d) Proposición atómica. MC = {p: Sansón y Dalila se amaron locamente}.

e) Proposición molecular. Conectiva principal: conjunción; MC = {p: Salgo de paseo; q: Llueve; r: Nieva}.

f) Proposición molecular. Conectiva principal: implicador;

MC = {p: Juan entra en el cine; q: Juan compra una entrada; r: Juan se cuela en el cine}.

g) Proposición molecular. Conectiva principal: conjunción; MC = {p: Cuatro y cuatro ocho; q: Dos por dos veinte}.

h) Proposición molecular Conectiva principal: implicador;

MC = {p: Ana estudia lógica; q: Ana está contenta; r: Ana es feliz}.

i) Proposición molecular Conectiva principal: implicador; MC = {p: Ana está contenta; q: Ana es feliz}.

EJERCICIO 3 El propósito de este ejercicio es el de practicar la formalización de conocimiento con el lenguaje de proposiciones revisando la prioridad de cada conectiva. **Formaliza** con el lenguaje de **proposiciones** las expresiones propuestas. Usa los mismos nombres (A, B…) para las variables proposicionales y señala cuál es la conectiva principal (CP) en cada fórmula.

1. **A y B**.

   Fbf: $A \wedge B$

   Conectiva principal: $\wedge$

2. **Dadas A y B, al menos una de ellas es cierta**.

   Fbf: $\mathbf{A \vee B}$**.**

   Conectiva principal: $\vee$

3. **Es cierto A y B, pero falso C.**

   Fbf: $\mathbf{A \wedge B \wedge \neg C}$**.**

   Conectiva principal: $\wedge$

4. **Es cierto A, aunque no lo es B, ni C ni D**.

   Fbf: $\mathbf{A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D}$**.**

   Conectiva principal: $\wedge$

5. **O es cierto A y B, o es falso, C y D**.

   Fbf: $\mathbf{(A \wedge \neg B) \vee \neg(C \wedge D)}$

   Conectiva principal: $\wedge$

6. **Si es cierto A, también lo es B pero no C** $\equiv$ **Es suficiente A para que sea B y no C**.

   Fbf: $\mathbf{A \rightarrow B \wedge \neg C}$

   Conectiva principal: $\rightarrow$

7. **Sólo si es cierto A o B, lo es C y D** $\equiv$ **Es necesario A o B para que sea C y D.**

   Fbf: $\mathbf{C \wedge D \rightarrow A \vee B}$

   Conectiva principal: $\rightarrow$

8. **Es cierto A a menos que sea falso B** $\equiv$ **Si B entonces A** $\equiv$ **Sólo si no B, no A.**

   Fbf: $\mathbf{\neg A \rightarrow \neg B}$

   Conectiva principal: $\rightarrow$

9. **A menos que sea cierto B, es falso A pero cierto C** $\equiv$ **Si no B entonces no A y C.**

   Fbf: $\mathbf{\neg(\neg A \wedge C) \rightarrow B}$

   Conectiva principal: $\rightarrow$

10. **Si es cierto A y B, no lo es C ni D** $\equiv$ **Es suficiente A y B para que sea no C y no D.**

    Fbf: $\mathbf{A \wedge B \rightarrow \neg C \wedge \neg D}$

    Conectiva principal: $\rightarrow$

11. **Sólo si es falso A o falso B pero cierto D, entonces es cierto B.**

    Fbf: $\mathbf{B \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \wedge D}$

    Conectiva principal: $\rightarrow$

12. **A menos que sea cierto B, no lo es A pero sí lo es C.**

    Fbf: $\mathbf{\neg(\neg A \wedge C) \rightarrow B}$

    Conectiva principal: $\rightarrow$

13. **No es suficiente, pero sí necesario, que sea cierto A o B para que sea cierto C.**

    Fbf: $\mathbf{\neg (A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A \vee B)}$

    Conectiva principal: $\rightarrow$

14. **No es necesario que sea falso B pero cierto C, para que sea cierto A.**

    Fbf: $\mathbf{\neg(A \rightarrow \neg B \wedge C)}$

    Conectiva principal: $\neg$

15. **Si es cierto A y B entonces, si no es cierto C pero sí lo es D tenemos que es falso A o es falso B.**

    Fbf: $\mathbf{A \wedge B \rightarrow (\neg C \wedge D \rightarrow \neg A \vee \neg B)}$

    Conectiva principal: $\rightarrow$

16. **Es suficiente que sea cierto A para que lo sea B, sin embargo, es cierto C si, y sólo si, es falso A.**

    Fbf: $\mathbf{(A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg A)}$

    Conectiva principal: $\wedge$

17. **A menos que sea cierto B o falso C, es cierto A pero es necesario y suficiente que sea cierto D y B para que sea falso A.**

    Fbf: $\mathbf{(\neg A \rightarrow B \vee \neg C) \wedge (D \wedge B \leftrightarrow \neg A)}$

    Conectiva principal: $\wedge$

EJERCICIO 4 Con el marco conceptual: MC = { **ba**: bailo; **ca**: canto; **za**: necesito zapatillas; **gu**: necesito guitarra}

Escribe en **lenguaje natural** dos enunciados equivalentes para cada una de las fbfs propuestas. Usa las reglas de equivalencia entre conectivas de la hoja de reglas.

1. $ba \wedge ca$
2. $ba \wedge ca \rightarrow za$
3. $ba \vee ca$
4. $ba \vee ca \rightarrow gu$
5. $(ba \rightarrow za) \wedge (ca \rightarrow gu)$
6. $ba \wedge ca \leftrightarrow za \vee gu$
7. $\neg(ba \vee ca) \rightarrow \neg gu$

Solución

1. Bailo y canto ≡ Es falso que no baile o no cante (De Morgan).
2. Si bailo y canto necesito zapatillas ≡ Es suficiente que baile y cante para que necesite zapatillas ≡ Bailo y canto sólo si necesito zapatillas.
3. Bailo o canto ≡ Si no bailo entonces canto (DIv).
4. Si bailo o canto entonces necesito la guitarra ≡ Es necesario que necesite la guitarra para que baile o cante ≡ Sólo si necesito la guitarra entonces bailo o canto.
5. Si bailo necesito zapatillas y si canto necesito guitarra.
6. Bailo y canto si, y sólo si, necesito zapatillas o guitarra ≡ Para que baile y cante es necesario y suficiente que necesite zapatillas.
7. Si no bailo ni canto entonces no necesito guitarra ≡ Necesito guitarra sólo si bailo o canto.

EJERCICIO 5 Para cada proposición Pi escribe su fórmula lógica, fbf-Pi, teniendo en cuenta el conjunto MC dado. Después escribe cada fbf-Pi de forma equivalente mediante una conjunción de disyunciones (las disyunciones pueden tener sólo una variable, i.e., $p \wedge q$ es una conjunción de 2 disyunciones, p y q, cada una, de una componente). Para ello aplica las reglas de equivalencia que creas conveniente (hoja de reglas) y escribe cada paso.

MC = {af: Ana va a la fiesta; lf: Luís va a la fiesta}

P1: Luís va a la fiesta si Ana va, pero Luís no va si no va Ana.

Fbf-P1: $(af \rightarrow lf) \wedge (\neg af \rightarrow \neg lf)$

$= (\neg af \vee lf) \wedge (\neg\neg af \vee \neg lf)$ DI

$= (\neg af \vee lf) \wedge (af \vee \neg lf)$ DN

P2: No es cierto que si Luís va a la fiesta vaya Ana.

Fbf-P2: $\neg(lf \rightarrow af) = \neg(\neg lf \vee af)$ DI

$= \neg\neg\, lf \wedge \neg af$ Morgan

$= lf \wedge \neg af$ DN

P3: O Ana va a la fiesta sólo si va Luís, o no sucede que no vaya Luís y que vaya Ana.

Fbf-P3: $(af \rightarrow lf) \vee \neg(\neg lf \wedge af)$

$= (\neg af \vee lf) \vee \neg(\neg lf \wedge af)$ DI

$= (\neg af \vee lf) \vee \neg\neg lf \vee \neg af$ de Morgan

$= \neg af \vee lf \vee lf \vee \neg af$ DN

$= \neg af \vee lf$ Idempotencia

P4: Sólo si Luís va a la fiesta Ana va.

Fbf-P4: $lf \rightarrow af = \neg lf \vee af$ DI

P5: Ni Luís ni Ana van a la fiesta a menos que vaya alguno de ellos.

Fbf-P5: $\neg(\neg lf \wedge \neg af) \rightarrow lf \vee af$

$= \neg\, \neg(\neg lf \wedge \neg af) \vee lf \vee af$ DI

$= (\neg lf \wedge \neg af) \vee (lf \vee af)$ DN

$= (\neg lf \vee lf \vee af) \wedge (\neg af \vee lf \vee af)$ Dist

P6: Luís va a la fiesta sólo si va Ana, aunque si Ana no va, Luís tampoco.

Fbf-P6: $(lf \rightarrow af) \wedge (\neg af \rightarrow \neg lf) = (\neg lf \vee af) \wedge (af \vee \neg lf)$ DI

P7: Es necesario que Luís vaya a la fiesta para que también vaya Ana.

Fbf-P7: $af \rightarrow lf = \neg af \vee lf$ DI

P8: No es necesario que Ana no vaya a la fiesta para que vaya Luís.

Fbf-P8: $\neg(lf \rightarrow \neg af) = \neg(\neg if \vee \neg af)$ DI

$= \neg\neg if \wedge \neg\neg af$ de Morgan

$= if \wedge af$ DN

P9: Es necesario y suficiente que Ana vaya a la fiesta para que vaya Luís.

Fbf-P9: $(lf \rightarrow af) \wedge (af \rightarrow lf)$

$= (\neg lf \vee af) \wedge (af \vee \neg lf)$ DI

P10: Al menos uno de los dos, Ana o Luis, van a la fiesta.

Fbf-P10: $af \vee lf$

P11: Es suficiente, pero no necesario, que Luís vaya a la fiesta para que vaya Ana.

Fbf-P11: $(lf \rightarrow af) \wedge \neg(af \rightarrow lf)$

$= (\neg lf \vee af) \wedge \neg(\neg af \vee lf)$ DI

$= (\neg lf \vee af) \wedge af \wedge \neg lf$ DN y De Morgan

P12: A menos que Ana vaya a la fiesta no va Luís.

Fbf-P12: $\neg(\neg lf) \rightarrow af = lf \rightarrow af = \neg lf \vee af$

P13: Ana va a la fiesta a menos vayan los dos.

Fbf-P13: $(\neg af \rightarrow af \wedge lf)$

$= \neg\neg af \vee (af \wedge lf)$ DI

$= af \vee (af \wedge lf)$ DN

$= af \wedge (af \vee lf)$ Distr

>> El propósito de los siguientes ejercicios es aprender a simplificar fórmulas lógicas usando reglas de equivalencia (hoja de reglas) Esto es muy importante en teoría de circuitos.

EJERCICIO 6 Al simplificar la fbf: **¬[¬(¬p ∨ q) → p] ∨ q,** se obtiene:

a) p ∨ ¬q

b) p ∧ q

c) ¬q

d) q

Solución de cómo obtener la opción correcta.

¬[¬(¬p ∨ q) → p] ∨ q	
¬[¬¬(¬p ∨ q) ∨ p] ∨ q	DI∨
¬[(¬p ∨ q) ∨ p] ∨ q	DN
¬(¬p ∨ q) ∧ ¬p) ∨ q	de Morgan
(¬¬p ∧ ¬q ∧ ¬p) ∨ q	de Morgan
(p ∧ ¬q ∧ ¬p) ∨ q	DN
F ∨ q	E6
q	E6

EJERCICIO 7 Al simplificar la fbf: **[(p ∧ ¬q) ∧ (q → p) ∧ r] ∨ p,** se obtiene:

a) p ∨ q

b) p ∧ q

c) p

d) ¬q

EJERCICIO 8 Al simplificar la fbf: **p ∧ [q ∨ (p → (¬p ∧ r))],** se obtiene:

a) p ∨ ¬q

b) p ∧ q

c) p

d) ¬p

EJERCICIO 9 La fbf: **[(¬p ∨ q) → (p ∧ q)] ∨ (¬p ∧ ¬q),** es equivalente a:

a) ¬p ∨ q

b) ¬p ∧ q

c) p ∨ q

d) p ∨ ¬q

EJERCICIO 10 La fbf: **[¬(p → q) → ¬ (q → p)] ∧ (p ∨ q),** es equivalente a:

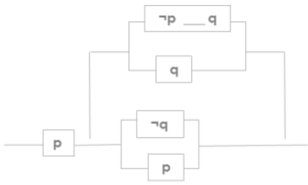
a) p

b) q ∧ p

c) p ∨ q

d) p ∨ ¬q

EJERCICIO 11 La fbf: **$p \wedge \{ [(\neg p \wedge q) \vee q] \vee [\neg q \vee p] \}$** que se corresponde con el siguiente circuito es equivalente a:



a) p
b) q
c) $\neg p$
d) $p \to q$
e) $\neg q$

EJERCICIO 12 La fbf: **$[(p \to q) \to q] \wedge [\neg p \to (\neg p \to q)]$** es equivalente a:

a) p
b) q
c) $p \wedge q$
d) $\neg p$
e) $p \vee q$

EJERCICIO 13 La fbf: **$p \wedge \{ q \vee [p \to (\neg p \wedge r)] \}$** es equivalente a:

a) $p \wedge q$
b) $q \wedge r$
c) $p \wedge q$
d) $q \wedge r$
e) p

EJERCICIO 14 Formaliza con el lenguaje de predicados usando el marco conceptual:

MC = { **Me(x):** x es médico; **Jug(x,y):** x juega a y; **Al(x):** x es alumno; **Am(x,y):** x es amigo de y }

1. **Pedro es médico y Juan alumno, ambos juegan al tenis**

   Fbf: Me(pedro) $\wedge$ Al(juan) $\wedge$ Jug(pedro, tenis) $\wedge$ Jug(juan, tenis)

2. **Es suficiente que Pedro juegue al tenis para que Juan juegue** $\equiv$ Si Pedro juega al tenis, Juan también.

   Fbf: Jug(pedro, tenis) $\rightarrow$ Jug(juan, tenis)

3. **Sólo si Pedro juega al tenis, Juan juega** $\equiv$ Juan juega al tenis sólo si Pedro también juega.

   Fbf: Jug(juan, tenis) $\rightarrow$ Jug(pedro, tenis)

4. **Pedro juega al tenis a menos que juegue Juan**.

   Fbf: $\neg$Jug(pedro, tenis) $\rightarrow$ Jug(juan, tenis)

5. **Algunos médicos y alumnos juegan al tenis**.

   Fbf: $\exists x \exists y$ [Me(x) $\wedge$ Al(y) $\wedge$ Jug(x, tenis) $\wedge$ Jug(y, tenis)]

6. **Todos los médicos juegan al tenis** $\equiv$ Es suficiente que un sujeto sea médico para que juegue al tenis.

   Fbf: $\forall x$ [Me(x) $\rightarrow$ Jug(x, tenis)]

7. **Todos los médicos son amigos de los alumnos**.

   Fbf: $\forall x \forall y$ [Me(x) $\wedge$ Al(y) $\rightarrow$ Am(x,y)]

8. **Sólo los médicos son amigos de los alumnos**.

   Fbf: $\forall x \forall y$ [Al(x) $\wedge$ A(y,x) $\rightarrow$ Me(y)]

9. **Los alumnos que juegan al tenis son amigos de algunos médicos**.

   Fbf: $\forall x$ [Al(x) $\wedge$ Jug(x, tenis) $\rightarrow$ $\exists y$ [Me(y) $\wedge$ Am(x,y)]]

EJERCICIO 15 Formaliza con el lenguaje de predicados usando el marco conceptual:

MC = { Ca(x): x canta; **Ba(x):** x baila; **Fe(x):** x es feliz; **Ta(x):** x taconea **}**

1. **Si Luis canta entonces Ana baila y es feliz.**

   Fbf: $Ca(Luis) \rightarrow Ba(ana) \wedge Fe(ana)$

2. **Es suficiente, pero no necesario, que Luis cante y baile para que Ana baile y sea feliz.**

   Fbf: $[Ca(Luis) \wedge Ba(Luis) \rightarrow Ba(ana) \wedge Fe(ana)] \wedge \neg [Ba(ana) \wedge Fe(ana) \rightarrow Ca(Luis) \wedge Ba(Luis)]$

3. **Sólo si Luis y Ana cantan, pero no bailan son felices.**

   Fbf: $Fe(luis) \wedge Fe(ana) \rightarrow Ca(Luis) \wedge Ca(ana) \wedge \neg Ba(luis) \wedge \neg Ba(ana)$

4. **Para que Ana sea feliz, aunque no cante, es necesario que Luis no baile ni taconee.**

   Fbf: $Fe(ana) \wedge \neg Ca(ana) \rightarrow \neg Ba(luis) \wedge \neg Ta(luis)$

5. **A menos que Luis cante, aunque no baile, Ana canta, pero no taconea.**

   Fbf: $\neg(Ca(ana) \wedge \neg Ta(ana)) \rightarrow Ca(Luis) \wedge \neg Ba(luis)$

6. **Ana canta a menos que Luis cante, pero no es feliz a menos que Luis lo sea.**

   Fbf: $[\neg Ca(ana) \rightarrow Ca(Luis)] \wedge [Fe(ana) \rightarrow Fe(Luis)]$

7. **Ana y Luis cantan y al menos uno de los dos es feliz.**

   Fbf: $Ca(ana) \wedge Ca(Luis) \wedge (Fe(luis) \vee Fe(ana))$

8. **Todos los que cantan o bailan, son felices, aunque no taconeen.**

   Fbf: $\forall x [Ca(x) \vee Ba(x) \rightarrow Fe(x) \wedge \neg Ta(x)]$

9. **Todos los que cantan y bailan son felices pero los que taconean y no bailan, no.**

   Fbf: $\forall x [Ca(x) \wedge Ba(x) \rightarrow Fe(x)] \wedge \forall y [Ta(y) \wedge \neg Ba(y) \rightarrow \neg Fe(y)]$

10. **Sólo los que cantan y taconean son felices.**

    Fbf: $\forall x [Fe(x) \rightarrow Ca(x) \wedge Ta(x)]$

11. **Algunos de los que taconean, bailan, pero no son felices, aunque canten.**

    Fbf: $\exists x [Ba(x) \wedge Ta(x) \wedge \neg Fe(x) \wedge Ca(x)]$

12. **Existen sujetos que cantan y bailan, aunque no taconeen.**

    Fbf: $\exists x [Ca(x) \wedge Ba(x) \wedge \neg Ta(x)]$.

EJERCICIO 16 **Formaliza** las siguientes proposiciones a) lenguaje proposicional, b) lenguaje predicativo, escribiendo el marco conceptual y la fbf correspondiente.

1. Juan estudia y lee.
2. Ana es novia de Juan o de Miguel.
3. Si Ana estudia entonces es novia de Juan que estudia.
4. Sólo si Ana lee, no estudia ni es novia de Miguel.
5. Es necesario que Ana estudie para que sea novia de Juan que también estudia.
6. Para que Ana estudie es suficiente que Juan estudie y que Ana y Juan sean novios.

Solución

1. a) MC = { jes: Juan estudia; jle: Juan lee }.

   Fbf-1: jes $\wedge$ jle.

   b) MC = { Es(x): x estudia; Le(x): x lee}.

   Fbf-1: Es(juan) $\wedge$ Le(juan).

2. a) MC = { aj: Ana es novia de Juan; am: Ana es novia de Miguel }.

   Fbf-2: aj $\vee$ am.

   b) MC = { Nv(x,y): x es novia de y}.

   Fbf-2: Nv(ana,juan) $\vee$ Nv(ana,miguel).

3. a) MC = { aes: Ana estudia; aj: Ana es novia de Juan; jes: Juan estudia}.

   Fbf-3: aes $\rightarrow$ aj $\wedge$ jes.

   b) MC = { Es(x): x estudia; Le(x): x lee; Nv(x,y): x es novia de y }

   Fbf-3: Es(ana) $\rightarrow$ Nv(ana,juan) $\wedge$ Es(juan).

4. a) MC = { ale: Ana lee; aes: Ana estudia; am: Ana es novia de Miguel}.

   Fbf-4: $\neg$aes $\wedge$ $\neg$am $\rightarrow$ ale.

   b) MC = { Es(x): x estudia; Le(x): x lee; Nv(x,y): x es novia de y }.

   Fbf-4: $\neg$Es(ana) $\wedge$ $\neg$Nv(ana,miguel) $\rightarrow$ Le(ana).

5. a) MC = { aes: Ana estudia; aj: Ana es novia de Juan}.

   Fbf-5: aj $\wedge$ jes $\rightarrow$ aes.

   b) MC = { Es(x): x estudia; Nv(x,y): x es novia de y }.

   Fbf-5: Nv(ana,juan) $\wedge$ Es(juan) $\rightarrow$ Es(ana).

6. a) MC = { aes: Ana estudia; aj: Ana es novia de Juan}.

   Fbf-5: aj $\wedge$ jes $\rightarrow$ aes.

   b) MC = { Es(x): x estudia; Nv(x,y): x es novia de y }.

   Fbf-5: Nv(ana,juan) $\wedge$ Es(juan) $\rightarrow$ Es(ana).

EJERCICIO 17 **Formaliza** las siguientes proposiciones a) nivel **proposicional;** b) nivel **predicativo**. Escribe el MC.

¡! Se consideran A, B, C y D propiedades y/o relaciones cualesquiera entre sujetos (suj_i).

P1: El sujeto suj1 es B

a) MC = {p: suj1 es B}

Fbf-P1: p

b) MC = {B(x): x es B}

Fbf-P1: B(suj1).

P2: Ana es guapa

a) MC = {p: Ana es guapa}

Fbf-P2: p

b) MC = {G(x): x es guapa}

Fbf-P2: G(Ana).

P3: El sujeto suj1 es B y C aunque no D.

a) MC = {p: suj1 es B; q: suj1 es C; r: suj1 es D}

Fbf-P3: $p \wedge q \wedge r$

b) MC = {B(x): x es B; C(x): x es C; D(x): x es D}

Fbf-P3: $B(suj1) \wedge C(suj1) \wedge \neg D(suj1)$.

P4: Los sujetos suj1 y suj2 son B y C. suj1 es D pero suj2, no.

a) MC = {p1: suj1 es B; p2: suj2 es B; q1: suj1 es C; q2: suj2 es C; r1: suj1 es D; r2: suj2 es D }

Fbf-P4: $p1 \wedge p2 \wedge q1 \wedge q2 \wedge r1 \wedge \neg r2$

b) MC = {B(x): x es B; C(x): x es C; D(x): x es D}

Fbf-P4: $B(suj1) \wedge B(suj2) \wedge C(suj1) \wedge C(suj2) \wedge D(suj1) \wedge \neg D(suj2)$.

P5: Ana y María son guapas y simpáticas, aunque Ana tiene buen humor y María, no.

a) MC = {p1: Ana es guapa; p2: María es guapa; q1: Ana es simpática; q2: María es simpática; r1: Ana tiene buen humor; r2: María tiene buen humor}

Fbf-P5: $p1 \wedge p2 \wedge q1 \wedge q2 \wedge r1 \wedge \neg r2$

b) MC = {G(x): x es guapa; Si(x): x es simpática; Bh(x): x tiene buen humor}

Fbf-P5: $G(ana) \wedge G(maria) \wedge Si(ana) \wedge Si(maria) \wedge Bh(ana) \wedge \neg Bh(maria)$

P6: Los sujetos suj1 y suj2 son B o C si, y sólo si suj1 no se relaciona con suj2 mediante D pero suj2 sí se relaciona con suj1 mediante D.

a) MC = {p1: suj1 es B; p2: suj2 es B; q1: suj1 es C; q2: suj2 es C; r1: suj1 se relaciona con suj2 mediante D; r2: suj2 se relaciona con suj1 mediante D }

Fbf-P6: $(p1 \vee q1) \wedge (p2 \vee q2) \leftrightarrow \neg r1 \wedge \neg r2$

b) MC = {B(x): x es B; C(x): x es C; D(x,y): x se relaciona con y mediante D; suj1: suj1; suj2: suj2 }

Fbf-P6: $[B(suj1) \vee C(suj1)] \wedge [B(suj2) \vee C(suj2)] \leftrightarrow \neg D(suj1,suj2) \wedge D(suj2,suj1)$

EJERCICIO 18 Determina cuál de las siguientes proposiciones se corresponden con la fbf: **$p \rightarrow \neg q$**,

donde MC = {p: Bebes/Beber; q: Conduces/Conducir}

1. No conduces si bebes. **$p \rightarrow \neg q$**
2. Bebes sólo si no conduces. **$p \rightarrow \neg q$**
3. Para conducir es necesario que no bebas **$q \rightarrow \neg p = p \rightarrow \neg q$ (Cp)**
4. No bebas a menos que no conduzcas. **$p \rightarrow \neg q$**
5. A pesar de que no bebes no conduces. **$\neg p \wedge \neg q$**
6. Para no conducir es suficiente que bebas. **$p \rightarrow \neg q$**

EJERCICIO 19 Escribe paréntesis en las siguientes fbfs de forma que se mantenga la prioridad de las conectivas.

1. $\neg p \wedge r \rightarrow s \wedge t$ = $((\neg p) \wedge r) \rightarrow (s \wedge t)$
2. $p \rightarrow q \vee \neg r \rightarrow p \wedge \neg q$ = $p \rightarrow ((q \vee (\neg r)) \rightarrow (p \wedge (\neg q)))$
3. $p \wedge q \vee r \rightarrow s \vee \neg t \vee u$ = $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee (\neg t) \vee u)$
4. $s \rightarrow p \rightarrow q \vee \neg r \leftrightarrow w$ = $s \rightarrow (p \rightarrow ((q \vee (\neg r)) \leftrightarrow w))$

EJERCICIO 20 **Formalizar** los siguientes argumentos con el lenguaje de **predicados** de primer orden:

Raz-1: Ningún caradura es matemático. Algunos matemáticos triunfan en la vida. Luego, existen sujetos que triunfan en la vida y no son caraduras.

MC = { C(x): x es caradura; M(x): x es matemático; T(x): x triunfa en la vida }	
Fbf-P1	$\forall x\ [\ C(x) \rightarrow \neg M(x)\ ]$
Fbf-P2	$\exists x\ [\ M(x) \wedge T(x)\ ]$
Fbf-Q	$\exists x\ [\ T(x) \wedge \neg C(x)\ ]$

Raz-2: Todos los profesores son simpáticos, luego, si todos los individuos son profesores, todos son simpáticos.

MC = { P(x): x es profesor; Si(x): x es simpático }	
Fbf-P1	$\forall x\ [\ P(x) \rightarrow Si(x)\ ]$
Fbf-Q	$\forall x\ P(x) \rightarrow \forall y\ Si(y)$

Raz-3: Algunos profesores son simpáticos luego existen sujetos que son profesores y otros que son simpáticos.

MC = { P(x): x es profesor; Si(x): x es simpático }	
Fbf-P1	$\exists x\ [\ P(x) \wedge Si(x)\ ]$
Fbf-Q	$\exists x\ P(x) \wedge \exists y\ Si(y)$

Raz-4: Carlos es modelo. Para que un sujeto sea modelo es necesario que tenga buen tipo, y ésta es una condición suficiente para que esté macizo. Sin embargo, cualquier sujeto es atractivo a menos que sea modelo, pero no es atractivo a menos que sea macizo. ¿Carlos y Luis están macizos?

MC = { Mo(x): x es modelo; Bt(x): x tiene buen tipo; At(x): x es atractivo; Ma(x): x es macizo }	
Fbf-S1	Mo(carlos)
Fbf-S2	$\forall x$ [Mo(x) $\rightarrow$ Bt(x)] $\wedge$ $\forall x$ [Bt(x) $\rightarrow$ Ma(x)]
Fbf-S3	$\forall x$ [$\neg$Mo(x) $\rightarrow$ At(x)] $\wedge$ $\forall x$ [At(x) $\rightarrow$ Ma(x)]
Fbf-Q	Ma(carlos) $\wedge$ Ma(luis)

➔ *Los siguientes ejercicios tratan de la escritura de proposiciones y fórmulas lógicas en otras equivalentes aplicando alguna de las reglas de equivalencia (Hoja de reglas):*

EJERCICIO 21 Dada la proposición P1: **No llueve en Alicante a menos que cantes en la ducha.** Escribe tres proposiciones (P2, P3 y P4) que **signifiquen lo mismo**. Formaliza todas ellas con el lenguaje de proposiciones declarando MC.

P2	O no llueve en Alicante o cantas en la ducha
P3	Si no cantas en la ducha entonces no llueve en Alicante
P4	Para que llueva en Alicante es necesario que cantes en la ducha
MC = { lla: llueve en Alicante; ca: cantas en la ducha }	
Fbf-P1	lla $\rightarrow$ ca
Fbf-P2	$\neg$lla $\vee$ ca
Fbf-P3	$\neg$ca $\rightarrow$ $\neg$lla
Fbf-P4	lla $\rightarrow$ ca

EJERCICIO 22 Dada la fbf: **di → lo** formalizada con MC = {lo: estudias lógica; di: las clases son divertidas}. Escribir tres sentencias (S1, S2 y S3) en lenguaje natural que sean equivalentes a la fbf dada.

S1	Si las clases son divertidas estudias lógica
S2	Es suficiente que las clases sean divertidas para que estudies lógica
S4	Es necesario que estudies lógica para que las clases sean divertidas

EJERCICIO 23 Dada la sentencia **S1: No se enciende la lámpara A ni la B ni ambas.** Escribir dos sentencias (S2 y S3) que sean equivalentes. Formalizar todas ellas en el nivel proposicional declarando el MC conveniente.

S2	No es cierto que se encienda la lámpara A o B o ambas
S3	Es falso que, si no se enciende la lámpara A ni la B entonces se enciendan ambas
MC = { eA: enciende lámpara A; eB: enciende lámpara B }	
Fbf-S1	$\neg eA \wedge \neg eB \wedge \neg(eA \wedge eB)$
Fbf-S2	$\neg (eA \vee eB \vee (eA \wedge eB))$
Fbf-S3	$\neg (\neg eA \wedge \neg eB \rightarrow eA \wedge eB)$

EJERCICIO 24 Busca proposiciones equivalentes. Primero formaliza cada una con MC = { lu: Luis va a la fiesta; an: Ana va a la fiesta }:

S1: Luis va a la fiesta si va Ana

S2: Si Ana va a la fiesta Luis también

S3: Luis va a la fiesta sólo si va Ana

S4: Es suficiente que Luis vaya a la fiesta para que vaya Ana

S5: Luis no va a la fiesta a menos que vaya Ana

S6: Para que Ana vaya a la fiesta es necesario que vaya Luis

	Fbf	Equivalente a:
S1	$an \rightarrow lu$	S2,S6
S2	$an \rightarrow lu$	S1,S6
S3	$lu \rightarrow an$	S4,S5
S4	$lu \rightarrow an$	S3,S5
S5	$lu \rightarrow an$	S3,S4
S6	$an \rightarrow lu$	S1,S2

EJERCICIO 25 Formaliza cada sentencia según MC = {C(x): x es caradura; M(x): x es matemático; T(x): x triunfa en la vida} y después escribe dos fbfs equivalentes a cada una indicando la regla que has aplicado.

a) S1: Ningún caradura es matemático, pero triunfa en la vida.

Fbf-S1	$\forall x\ [\ C(x) \rightarrow \neg M(x) \wedge T(x)\ ]$	
1ª fbf equivalente	$\forall x\ [\ \neg C(x) \vee (\neg M(x) \wedge T(x))\ ]$	Regla : DI2
2ª fbf equivalente	$\forall x\ [\ \neg(C(x) \wedge \neg(\neg M(x) \wedge T(x)))\ ]$	Regla : RI1

b) S2: Existen caraduras que son matemáticos pero que no triunfan en la vida.

Fbf-S2	∃x [C(x) ∧ M(x) ∧ ¬T(x)]	
1ª fbf equivalente	∃x ¬[¬C(x) ∨ ¬M(x) ∨ T(x)]	Regla : De Morgan DM1
2ª fbf equivalente	¬∀x [¬C(x) ∨ ¬M(x) ∨ T(x)]	Regla : ∃x¬P(x) = ¬∀xP(x)

EJERCICIO 26 (julio 2017)

Formaliza correctamente con el lenguaje de proposiciones:

a) Me muevo cuando veo a un fantasma o a un enemigo.
b) No veo el fantasma a menos que no me mueva.
c) Me muevo sólo si veo un fantasma
d) Veo un fantasma, pero no me muevo
e) Para que me mueva es suficiente que vea un enemigo.

Solución

Para la formalización en lenguaje de proposiciones consideramos el siguiente marco conceptual:

MC = {fa: veo un fantasma; en: veo un enemigo; mv: me muevo}

a) Me muevo cuando veo a un fantasma o a un enemigo.
Si veo un fantasma o un enemigo, me muevo fbf: fa ∨ en → mv

b) No veo el fantasma a menos que no me mueva.
Si me muevo no veo un fantasma: Si veo un fantasma, no me muevo fbf: mv → ¬fa

c) Me muevo sólo si veo un fantasma.
Si me muevo, veo un fantasma fbf: mv → fa

d) Veo un fantasma, pero no me muevo. fbf: fa ∧ ¬mv

e) Para que me mueva es suficiente que vea un enemigo fbf: en → mv

EJERCICIO 27 (enero 2017)

Sean A, B, C y D variables proposicionales que formalizan enunciados de proposiciones atómicas cualesquiera. Se trata de escribir las fórmulas lógicas (fbf) que representen a las siguientes expresiones.

a) **La disyunción de A y B es cierta si y sólo si lo es la conjunción de C y D.**
Fbf: A ∨ B ↔ C ∧ D

b) **A menos que sea falso A y B, es cierto C.**
Fbf: **¬C → ¬ (A ∧ B)**

c) **Para que no sea cierto C ni D es suficiente que sea cierto A pero no B**
Fbf: A ∧ ¬B → ¬C ∧ ¬D

d) **O es necesario que sea falso A pero cierto B para que sea falso C, o es falso C a menos que lo sea B.**
Fbf: (¬C → ¬A ∧ B) ∨ (C → ¬B).

EJERCICIO 28 (julio 2014)

Formaliza con el lenguaje de **proposiciones** las expresiones propuestas, donde A, B, C y D son enunciados de proposiciones atómicas. Usa los mismos nombres (A, B…) para las variables proposicionales.

e) **Sólo si es cierto A o B, lo es C y D.**
Fbf: $C \wedge D \rightarrow A \vee B$

f) **Es cierto A y B a menos que sea falso C**
Fbf: $\neg (A \wedge B) \rightarrow \neg C$

g) **Es suficiente que sea cierto A y B para que no lo sea C ni D.**
Fbf: $A \wedge B \rightarrow \neg C \wedge \neg D$

h) **Para que sea falso A y B es necesario y suficiente que sea cierto A y C pero falso B.**
Fbf: $\neg (A \wedge B) \leftrightarrow A \wedge C \wedge \neg B$.

🕮 Libros donde encontrar más ejercicios

Lógica Formal para Informáticos
Lourdes Arenas Alegrías. Ediciones Díaz de Santos, S. A., Madrid 1996.

Lógica de Primer Orden
Mª Jesús Castel y Faraón Llorens. Dpto. Ciencia de la Computación e IA. Universidad de Alicante, 1999.

Lógica Informática
José Cuena. Alianza Editorial, S.A., 1985.

Lógica Simbólica
Manuel Garrido. Editorial Tecnos, S.A. 2ª ed. 1991.

Lógica de predicados: http://di002.edv.uniovi.es/~labra/FTP/LPRED.pdf