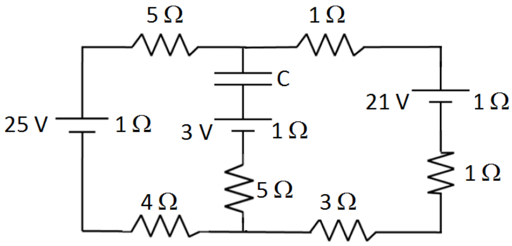
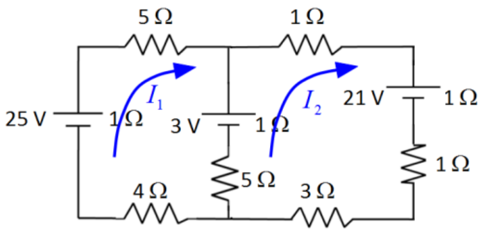
Parcial 3.

1. En el circuito de la figura en el instante inicial (t=0 s) el condensador C, de 8 nF de capacidad, se encuentra completamente descargado. Calcula: (a) La corriente en cada rama en el instante t=0 s [3 puntos]. (b) La potencia aportada o consumida (según sea el caso) por cada una de las tres f.e.m. del circuito en t=0 s [1 punto]. (c) La tensión y la energía almacenada en el condensador cuando éste se encuentra completamente cargado [1 puntos].



SOLUCIÓN:

(a) En el instante t = 0 s el condensador C está totalmente descargado y por tanto se comporta como un *cortocircuito* (cable). Resolvemos entonces el circuito de dos mallas resultante.

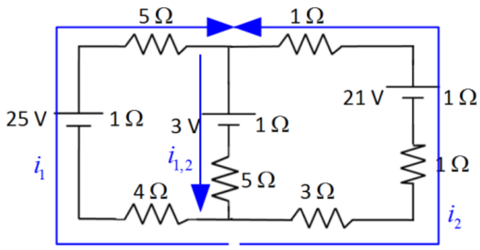


$$\left.\begin{aligned} 16I_1 - 6I_2 &= 22 \\ -6I_1 + 12I_2 &= -18 \end{aligned}\right\} \times 2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 32I_1 - 12I_2 &= 44 \\ -6I_1 + 12I_2 &= -18 \end{aligned}\right\}$$

$$26I_1 \qquad = 26$$

$$\boxed{16\cdot 1 - 6I_2 = 22 \Rightarrow I_2 = -1\,\text{A}} \qquad \boxed{I_1 = 1\,\text{A}}$$

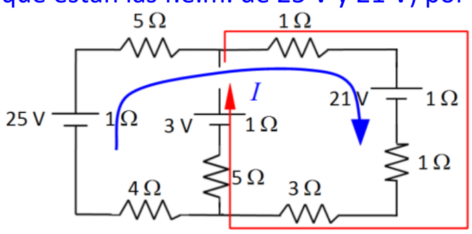
Por lo tanto, las corrientes en cada rama son:



$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= I_1 = 1\,\text{A} \\ i_2 &= -I_2 = 1\,\text{A} \\ i_{1,2} &= I_1 - I_2 = 2\,\text{A} \end{aligned}}$$

(b) La f.e.m. de 25 V **aporta** una potencia $P_{AP,25V} = 25\cdot i_1 - i_1^2\cdot 1 = 25\cdot 1 - 1^2\cdot 1 = 24\,\text{W}$. La f.e.m. de 3 V **consume** una potencia $P_{C,3V} = 3\cdot i_{1,2} + i_{1,2}^2\cdot 1 = 3\cdot 2 + 2^2\cdot 1 = 10\,\text{W}$. La f.e.m. de 21 V **aporta** una potencia $P_{AP,21V} = 21\cdot i_2 - i_2^2\cdot 1 = 21\cdot 1 - 1^2\cdot 1 = 20\,\text{W}$.

(c) Cuando el condensador se ha cargado completamente se comporta como un *circuito abierto* y por tanto *no circula corriente por la rama central* quedando así un circuito de una sola malla (en la que están las f.e.m. de 25 V y 21 V) por la que circula una corriente I:



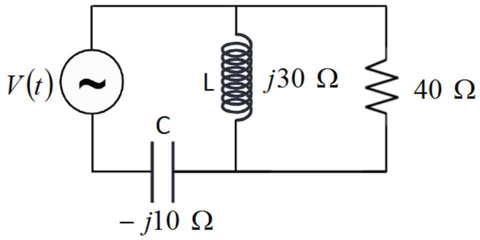
Corriente de malla I: $16\cdot I = 4 \Rightarrow I = \frac{1}{4}\,\text{A} = 0.25\,\text{A}$

Tensión en bornes del condensador (camino en rojo):

$$V = I\cdot(1+1+1+3) + 0\cdot(5+1) - (-21+3) = 19.5\,\text{V}$$

Energía en el condensador: $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10^{-9}\cdot 19.5^2 = 1.521\cdot 10^{-6}\,\text{J} = 1.521\,\mu\text{J}$.

2. Sabiendo que la f.e.m. alterna del circuito de la figura es $V(t)=17.09\sqrt{2}\mathrm{sen}(1000t)\,\mathrm{V}$. Se pide determinar: (a) La autoinducción L de la bobina y la capacidad C del condensador [1 punto]. (b) La impedancia total del circuito [2.5 puntos]. (c) La potencia compleja suministrada por la fuente y la potencia disipada por la resistencia [1.5 puntos].



SOLUCIÓN:

(a) La frecuencia angular del circuito es $\omega = 1000\ \mathrm{rad/s}$. Por lo tanto, llamando $\overline{Z}_L$ y $\overline{Z}_C$ a las impedancias de la bobina y del condensador respectivamente, tenemos que:

- $\overline{Z}_L = j\omega L = j30\,\Omega \Rightarrow L = \dfrac{30}{\omega} = \dfrac{30}{1000} = 0.03\,\mathrm{H} = 30\,\mathrm{mH}$
- $\overline{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = -j10\,\Omega \Rightarrow C = \dfrac{1}{10\omega} = \dfrac{1}{10000} = 10^{-4}\ \mathrm{F} = 100\,\mu\mathrm{F}$.

(b) Tenemos: $\overline{Z}_R = 40\,\Omega = 40\underline{|0^\circ}\,\Omega$, $\overline{Z}_L = j30\,\Omega = 30\underline{|90^\circ}\,\Omega$ y $\overline{Z}_C = -j10\,\Omega = 10\underline{|-90^\circ}\,\Omega$.

R y L están en paralelo, luego: $\overline{Z}_{RL} = \dfrac{\overline{Z}_R \cdot \overline{Z}_L}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_L} = \dfrac{40\underline{|0^\circ} \cdot 30\underline{|90^\circ}}{40 + j30} = \dfrac{1200\underline{|90^\circ}}{50\underline{|36.87^\circ}} = 24\underline{|53.13^\circ}\,\Omega$,

que en forma binómica es: $\overline{Z}_{RL} = 24\cos(53.13^\circ) + j24\mathrm{sen}(53.13^\circ)\,\Omega = 14.4 + j19.2\,\Omega$.

Y como esta impedancia está a en serie con el condensador, la impedancia total del circuito es:

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_C + \overline{Z}_{RL} = -j10 + 14.4 + j19.2\,\Omega = 14.4 + j9.2 = 17.09\underline{|32.57^\circ}\ \Omega\ .$$

(c) La tensión compleja de la f.e.m. alterna es $\overline{V} = 17.09\underline{|0^\circ}\,\mathrm{V}$, y la intensidad la calculamos como: $\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}_{eq}} = \dfrac{17.09\underline{|0^\circ}\,\mathrm{V}}{17.09\underline{|32.57^\circ}} = 1\underline{|-32.57^\circ}\,\mathrm{A}$, por tanto, la potencia compleja de la f.e.m. alterna es: $\overline{S} = \overline{V} \cdot \overline{I}^{*} = 17.09\underline{|0^\circ} \cdot 1\underline{|32.57^\circ} = 17.09\underline{|32.57^\circ}$

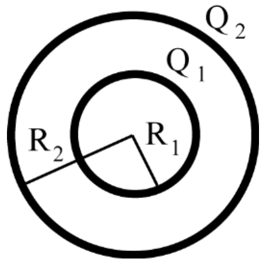
Como sólo hay una resistencia en el circuito la potencia disipada por esta resistencia es igual a la potencia activa del generador:

$$P_{dR} = P_{AC} = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi) = 17.09 \cdot 1 \cdot \cos(32.57^\circ) = 14.4\,\mathrm{W}$$

<u>NOTA</u>: También se puede hallar la potencia disipada en R como: $P_{dR} = I^2_{\mathrm{Re}f} \cdot R$, pero este camino resulta más complejo porque en este circuito, al estar $\overline{Z}_C$ en paralelo con $\overline{Z}_{RL}$, calcular I_R presenta mayor dificultad.

Parcial 1.

3. La siguiente figura está formada por 2 superficies conductoras esféricas concéntricas de espesor despreciable y radios R_1=50 cm y R_2=100 cm, respectivamente. La carga de la esfera interior es Q_1=5 nC y la exterior Q_2= 10 nC. Determina el trabajo necesario para transportar una carga de 2 μC desde un punto situado a una distancia R_1 del centro de las dos esferas hasta otro punto R_3 situado a 300 cm del centro de las dos esferas [3 puntos].



SOLUCIÓN:

El trabajo necesario para transportar la carga desde R_1 hasta R_3 se calcula como:

$$W = -\Delta U = -(U_3 - U_1) = (U_1 - U_3) = q \cdot (V_1 - V_3)$$

El potencial en V_1 y V_3 es:

$$V_1 = V_{11} + V_{12} = \frac{k \cdot Q_1}{R_1} + \frac{k \cdot Q_2}{R_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{0.5} + \frac{10 \cdot 10^{-9}}{1} \right) = 180 \quad V$$

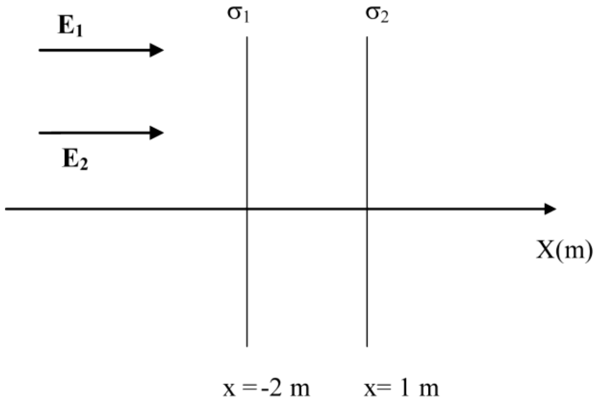
$$V_3 = V_{31} + V_{32} = \frac{k \cdot Q_1}{R_3} + \frac{k \cdot Q_2}{R_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{3} + \frac{10 \cdot 10^{-9}}{3} \right) = 45 \quad V$$

Entonces:

$$\boxed{W = q \cdot (V_1 - V_3) = 2 \cdot 10^{-6} \cdot (180 - 45) = 270 \ \mu J}$$

---

4. Paralelos al plano YZ en las posiciones (-2,0,0) m y (1,0,0) m se encuentran situados dos planos indefinidos con densidades de carga $\sigma_1 = -3 \cdot \varepsilon_0 \ C/m^2$ y $\sigma_2 = -\varepsilon_0 \ C/m^2$, respectivamente. Calcula: (a) El campo eléctrico en la región x< –2 [1.5 puntos]. (b) El potencial en el punto (-6,0,0) m si el origen de potencial está en el punto (-2,0,0) m [1.5 puntos].



SOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico en puntos x<-2m *es:*

$$\vec{E}(x < -2) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{3 \cdot \varepsilon_0}{2 \cdot \varepsilon_0} \vec{i} + \frac{\varepsilon_0}{2 \cdot \varepsilon_0} \vec{i}$$

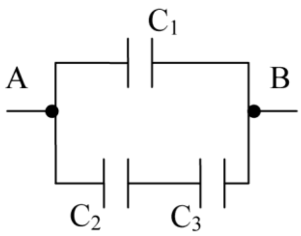
$$\vec{E}(x < -2) = 2\vec{i} \quad \text{V/m}$$

b) El potencial en el punto x= -6 m se calcula como:

$$V_{(x=-6)} - 0 = -\int_{x=-2}^{x=-6} E \cdot dx = -\int_{x=-2}^{x=-6} 2 \cdot dx = [-2x]_{x=-2}^{x=-6} = 8\,\text{V}$$

---

5. Un condensador que tiene una capacidad C_1 de 2 μF se conecta a una fuente de alimentación de 1000 V. Cuando el condensador está cargado se desconecta de la fuente y sus armaduras se unen, tal como se indica en la figura, a las de otros dos condensadores descargados y conectados en serie entre sí, con capacidades C_2=3 μF y C_3=6 μF. Calcula: (a) La carga inicial que adquiere el



condensador C_1 [1 punto]. (b) La capacidad equivalente de los tres condensadores tras la conexión [1 punto]. (c) La diferencia de potencial que hay finalmente entre los puntos A y B [1 puntos]. (d) La carga final con la que queda cada condensador [1 punto].

SOLUCIÓN:

(a) La carga que adquiere C_1 es: $Q_{1i} = Q_T = C_1 \cdot \Delta V = 2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{3} = 2\cdot 10^{-3} \quad C$

(b) La capacidad equivalente de los tres condensadores, teniendo en cuenta que C_2 y C_3 están en serie y su equivalente C_{23} en paralelo con C_1, es:

$$C_{23} = \frac{C_2\cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{3\cdot 6}{3+6} = 2\ \mu F \qquad \rightarrow \qquad C_e = C_{23} + C_1 = 2+2 = 4\ \mu F$$

(c) Ahora tenemos un único condensador entre los puntos A y B con 4 μF de capacidad y una carga total (distribuida entre los tres condensadores) igual a la carga que inicialmente tenía C_1. Por tanto la diferencia de potencial entre los puntos A y B es:

$$(V_A - V_B) = \frac{Q_T}{C_e} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{-6}} = 500\ V$$

(d) La carga final que adquiere cada condensador es:

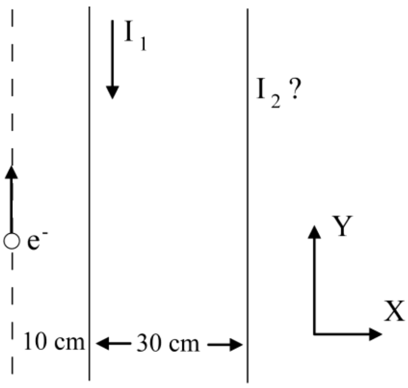
C1: $Q_{1f} = C_1\cdot V_{AB} = 10^{-3}\ C$ El resto de carga que inicialmente tenía C_1: $Q_T - Q_{1f} = 10^{-3}\ C$ se acumula en la asociación C_{23}, que como son dos condensadores en serie debe cumplirse que:

$$Q_{23} = Q_{2f} = Q_{3f} = 10^{-3}\ C$$

Nota. Puede comprobarse que: $$V_2 + V_3 = \frac{Q_{2f}}{C_2} + \frac{Q_{3f}}{C_3} = \frac{10^{-3}}{3\cdot 10^{-6}} + \frac{10^{-3}}{6\cdot 10^{-6}} = 500\ V$$

Parcial 2.

6. Un conductor rectilíneo e indefinido se encuentra situado sobre el eje Y transportando una corriente I_1=1 A en el sentido negativo de este eje. A una distancia de 30 cm a su derecha hay otro conductor similar, situado en el plano XY y paralelo al anterior, que transporta una corriente desconocida I_2 (ver figura). Sabiendo que un electrón puede viajar paralelamente a los conductores por el plano XY, a una distancia de 10 cm a la izquierda del primer conductor, determina el valor y sentido de la corriente I_2 [3 puntos].



SOLUCIÓN:

Para que el protón viaje paralelo a las corrientes sin desviarse, la fuerza neta sobre él ha de ser nula. Se debe cumplir por tanto, que: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \;\Rightarrow\; q\vec{v}\times\vec{B}_1 = -qv\times\vec{B}_2 \;\Rightarrow\; \vec{B}_1 = -\vec{B}_2$. Es decir, el campo magnético creado por ambas corrientes a una distancia de 10 cm a la izquierda de I_1 debe tener el mismo módulo y sentido contrario:

Como $\vec{B}_1 = B_1(-\vec{k}) \;\Rightarrow$ I_2 debe tener sentido positivo del eje Y, para que $\vec{B}_2 = B_2(+\vec{k})$

Ahora, igualando los módulos, podemos obtener el valor de I_2:

$$B_1 = B_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi 0.1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 0.4} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 4 \cdot I_1 = 4 \text{ A}$$

---

7. Un campo magnético de valor $\vec{B} = (10 - 2t^2)(\vec{k})$ T atraviesa una espira rectangular, de lados 10 cm y 20 cm, que se encuentra sobre el plano XY. Si la espira tiene una resistencia de 0.4 Ω, calcula la corriente inducida en la misma en t=1s y t=2s indicando, razonadamente, su sentido [3 puntos].

SOLUCIÓN:

El flujo magnético a través de la espira es: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$,

como $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ son paralelos y $\vec{B}$ es constante en toda la superficie de la espira:

$$\phi = \int_S B \cdot dS \cdot \cos 0^o = B \int_S dS = B.S = (10 - 2t^2).S \text{ Tm}^2$$

Por la Ley de Faraday-Henry-Lenz, la f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = 4 \cdot S \cdot t = 4 \cdot 0.1 \cdot 0.2 \cdot t = 0.08t \text{ V} \quad \rightarrow \quad \mathrm{i} = \frac{0.08t}{R} = 0.2t \text{ A}$$

La intensidad depende del tiempo por tanto: $\mathrm{i}_{t=1} = 0.2$ A , e $\mathrm{i}_{t=2} = 0.4$ A .

El sentido de la corriente debe ser **anti-horario** ya que el flujo magnético decrece en el tiempo:

$$S = \text{cte. si: } t \uparrow \quad \Rightarrow \quad B = (10 - 2t^2) \downarrow \quad \Rightarrow \quad \phi \downarrow$$

En consecuencia la intensidad inducida debe crear un campo en el mismo sentido que el externo.

---

8. Una onda electromagnética se propaga en sentido positivo del eje X y tiene una frecuencia de $2 \cdot 10^{10}$ Hz. Sabiendo que el campo eléctrico oscila en la dirección del eje Z con una amplitud de 8 N/C y que su número de onda es 200π rad/m, determina: (a) El índice de refracción del medio en el que viaja la onda [1 punto]. (b) La expresión de los campos eléctrico y magnético (módulo, dirección y sentido). [2 puntos]. (c) En qué posiciones colocarías una antena dipolar eléctrica y una antena dipolar magnética para recibir correctamente la onda? [1 punto]. Dato: velocidad ondas EM en el vacío: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

SOLUCIÓN

(a) $v = \dfrac{w}{k} = \dfrac{2\pi f}{k} = \dfrac{4\pi \cdot 10^{10}}{200\pi} = 2 \cdot 10^8$ m/s ; Luego: $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} = 1.5$

(b) $B_0 = E_0 / v = 8 / 2 \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^{-8}$ T ; con: $w = 2\pi f = 4\pi\, 10^{10}$ rad/s y $k = 200\pi$ rad/m

Los campos eléctrico y magnético son:

$$\vec{E} = 8\, sen(4\pi \cdot 10^{10} t - 200\pi\, x)(\vec{k}) \text{ N/C} \quad \text{y} \quad \vec{B} = 4 \cdot 10^{-8}\, sen(4\pi \cdot 10^{10} t - 200\pi\, x)(-\vec{j}) \text{ T}$$

También es válida la solución $\vec{E} = E \cdot (-\vec{k})$ con $\vec{B} = B \cdot \vec{j}$ ya que en ambos casos la dirección de propagación, determinada por el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$, es $(+\vec{i})$

(c) La antena dipolar eléctrica (hilos rectos) deben colocarse en la dirección del eje Z, donde vibra E. La antena dipolar magnética (espira) debe colocarse perpendicular al eje donde vibra B: Plano XZ.