

## Ejercicios de Álgebra

### Hoja 1

#### T1: Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Los ejercicios que se presentan están relacionados con la resolución y estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (escribiremos SL) en el dominio de los números reales.

**Ejercicio 1.** Dado el SL:

$$\begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & = & 9 \end{array}$$

- Comprueba que el vector  $v = [1,1,1]$  es **solución** de dicho sistema
- Escribe la primera ecuación multiplicada por 4.
- Escribe la tercera ecuación dividida por 3.
- Comprueba si el vector  $v$  sigue siendo solución del sistema
- Representa el SL de forma matricial indicando cuál es la matriz de coeficientes y cuál la ampliada.

**Ejercicio 2.** Aplica las siguientes operaciones elementales por filas a la matriz e indica de qué tipo son.

Escribe la matriz que resulta en cada caso

- a)  $F1 \leftrightarrow F3$    b)  $F1 \leftrightarrow \frac{1}{2} F1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 3.** Aplica más operaciones elementales por filas a la matriz resultante del apartado b) del Ejercicio 2, hasta conseguir otra que esté en forma escalonada.

**Ejercicio 4.** Seguir con la matriz del Ejercicio 3 hasta obtener la matriz escalonada reducida

**Ejercicio 5.** Indica cuál de las siguientes matrices está escalonada o escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 6.** Estudia si los SL asociados a las siguientes matrices escalonadas son incompatibles.

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$    b)  $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$    c)  $\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 7.** Estudia si los SL asociados a las siguientes matrices escalonadas son compatibles determinados o indeterminados.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Clasifica los SL de las matrices del Ejercicio 5.

**Ejercicio 9.** Escribe los SL de las matrices del Ejercicio 5.

**Ejercicio 10.** Clasifica y, si es el caso, resuelve el SL mediante reducción de Gauss.

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned}$$

**Ejercicio 11.** Clasifica y, si es el caso, resuelve mediante Gauss el SL asociado a la siguiente matriz ampliada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 12.** Clasifica y, si es el caso, resuelve el SL mediante Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} \text{x a) } 2y + 3z &= 9 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x - y + z &= 8 & 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x - z &= 3 & -x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

**Ejercicio 13.** Calcula el valor que debe tomar  $a$  en cada SL para que sean compatibles. Realiza el estudio en una de las matrices escalonadas asociadas a la matriz ampliada de cada SL.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + 3y &= 4 & \text{b) } 2x + 3y &= 4 & \text{c) } x + ay &= 4 \\ 4x + ay &= 8 & 4x + 6y &= a & -x + 3y + 3z &= -a \\ & & & & y + z &= 0 \end{aligned}$$