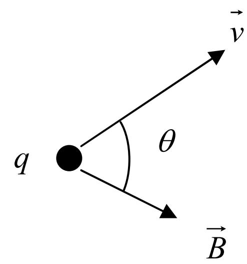
Tema 3. Campo Magnético

RESOLUCIONES

3.1. Un protón se mueve con una velocidad de $4'4 \cdot 10^6$ *m/s* en un campo magnético uniforme de $18mT$ formando un ángulo de *62°* con la dirección del campo. Determinar:
a) La fuerza magnética que actúa sobre el protón.
b) Si ésta es la única fuerza que actúa sobre el protón, ¿cuál será su aceleración?
c) ¿Con qué rapidez cambia la energía cinética del protón?

RESOLUCIÓN:

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en movimiento, en el interior de un campo magnético es:



$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F = qvBsen\theta$

Datos: $q_{protón} = +e = 1'6 \cdot 10^{-19} C$ y $m_{protón} = 1'67 \cdot 10^{-27} Kg$

a) $F = qvBsen\theta = 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 4'4 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot sen(62^o) = 1'12 \cdot 10^{-14} N$

La dirección de esta fuerza, será perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$

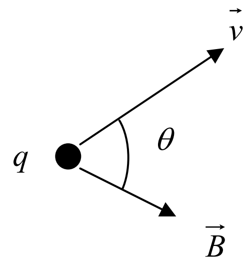
b) Utilizando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, podemos despejar la aceleración, cuya dirección y sentido serán los mismos que los de la fuerza.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1'12 \cdot 10^{-14}}{1'67 \cdot 10^{-27}} = 6'7 \cdot 10^{12} \left(m/s^2 \right)$$

c) Como el trabajo de la fuerza magnética es nulo, al ser $\vec{v} \perp \vec{F}$, la energía cinética permanece constante.

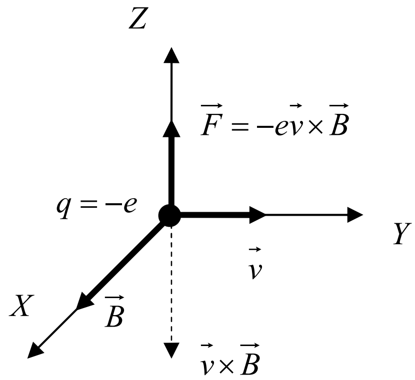
3.2. Se lanza un electrón (carga $1'6 \cdot 10^{-19}$ *C*) en un campo magnético uniforme con una velocidad de $1'5 \cdot 10^7$ *m/s* a lo largo del eje *OX*, encontrándose que no actúa ninguna fuerza sobre la carga. Cuando la carga se mueve a la misma velocidad, pero en la dirección positiva del eje *OY*, la fuerza ejercida sobre la carga es de $3'2 \cdot 10^{-13}$ *N*, estando dirigida dicha fuerza en el sentido positivo del eje *OZ*. Determinar el vector campo magnético, $\vec{B}$, en módulo, dirección y sentido.

RESOLUCIÓN:



$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F = qvBsen\theta$

-Eje X: $F = 0 \rightarrow \vec{v} \parallel \vec{B}$
Como son paralelos, significa que el campo tiene la misma dirección y sentido que la velocidad, o sea el eje *X*.
-Eje Y: $F = 3'2 \cdot 10^{-3} N$



De la figura se deduce que el campo magnético, tiene el sentido de las *X* positivas, ya que el producto $\vec{v} \times \vec{B}$, tiene el sentido de las *Z* negativas.

El módulo del campo es:

$$F = qvB \rightarrow B = \frac{F}{qv} = \frac{3'2 \cdot 10^{-13}}{1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 1'5 \cdot 10^{7}} = 0'133(T) \Rightarrow \vec{B} = 0'133\vec{i}(T)$$

3.3. Protones, deuterones (núcleos de hidrógeno) y partículas alfa (núcleos de helio), de la misma energía cinética, entran en un campo magnético uniforme B, que es perpendicular a sus velocidades. Sean r_p, r_d y r_α los radios de las órbitas circulares. Hallar los cocientes r_d/r_p y r_α/r_p teniendo en cuenta que $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$.

RESOLUCIÓN:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \xrightarrow[\vec{v}\perp\vec{B}]{} F = qvB$$

Si el campo es uniforme (B=cte), la partícula describe un movimiento circular uniforme de radio:

$$r = \frac{m\cdot v}{q\cdot B}$$

Si particularizamos para cada partícula:

$$r_p = \frac{m_p\cdot v_p}{q_p\cdot B} \quad r_d = \frac{m_d\cdot v}{q_d\cdot B} \quad r_\alpha = \frac{m_\alpha\cdot v_\alpha}{2q_\alpha\cdot B}$$

Como tienen la misma energía cinética E_c:

$$E_{cp} = E_{cd} = E_{c\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v^2{}_p = \frac{1}{2}m_d v^2{}_d = \frac{1}{2}m_\alpha v^2{}_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_d}{v_p} = \sqrt{\dfrac{m_p}{m_d}} = \sqrt{\dfrac{m_p}{2m_p}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{v_\alpha}{v_p} = \sqrt{\dfrac{m_p}{m_\alpha}} = \sqrt{\dfrac{m_p}{4m_p}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Haciendo uso de las expresiones de los radios descritos por cada partícula, y con los cocientes entre las velocidades recién calculados, obtenemos:

$$\frac{r_d}{r_p} = \frac{m_d\cdot v_d}{m_p\cdot v_p} = \frac{2m_p}{m_p}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{r_\alpha}{r_p} = \frac{m_\alpha\cdot v_\alpha}{2m_p\cdot v_p} = \frac{4m_p}{2m_p}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

3.4. Un electrón de energía cinética $25keV$ se mueve en una órbita circular en el interior de un campo magnético de $2000G$. Hallar el radio de la órbita circular, la frecuencia y el período del movimiento.

RESOLUCIÓN:

En primer lugar, pasamos las unidades del campo magnético y de la energía al S.I:

$$1G = 10^{-4}T \rightarrow B = 2000\ G = 0'2\ T$$

$$1eV = 1'6\cdot10^{-19}\ J \rightarrow E_c = 25\ KeV = 25\cdot10^3\cdot1'6\cdot10^{-19} = 4\cdot10^{-15}\ J$$

Para obtener el radio de la órbita, necesitamos la velocidad de la partícula:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 10^{-15}}{9'1\cdot 10^{-31}}} = 9'38\cdot 10^7 \left(m/s\right)$$

siendo m la masa del electrón: $m = 9'1\cdot 10^{-31}\ Kg$

El radio de la órbita será:

$$r = \frac{m\cdot v}{q\cdot B} = \frac{9'1\cdot 10^{-31}\cdot 9'38\cdot 10^7}{1'6\cdot 10^{-19}\cdot 0'2} = 0'0027\ m = 2'7\ mm$$

De la expresión del radio de la órbita, podemos obtener la frecuencia ciclotrónica:

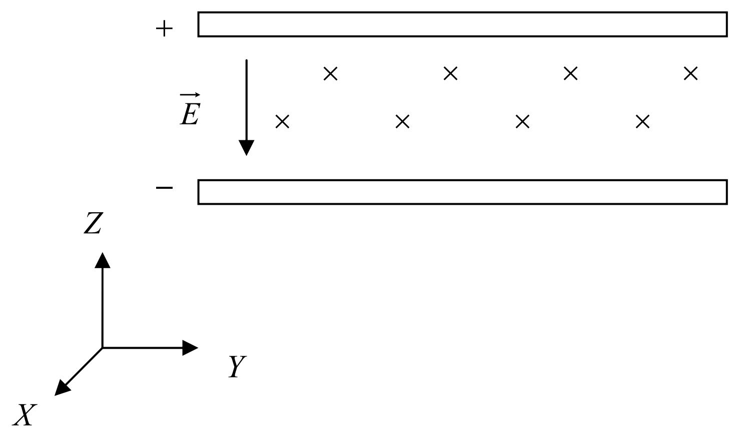
$$v = \omega\cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m}B = \frac{1'6\cdot 10^{-19}}{9'1\cdot 10^{-31}}\cdot 0'2 = 3'52\cdot 10^{10}\left(rad/s\right)$$

Por último el período será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3'52\cdot 10^{10}} = 1'79\cdot 10^{-10}\ (s)$$

3.5. Un haz de electrones se lanza entre las armaduras de un condensador en una dirección paralela a éstas. En la región existe un campo magnético uniforme de 0´1 *T*, perpendicular al campo eléctrico que crea el condensador en su interior. La separación entre las armaduras del condensador es de *1cm* y la diferencia de potencial de 1000*V*. Sabiendo que la velocidad de los electrones que no se desvían de su trayectoria es de $2\cdot 10^6$ *m/s*, determinar la orientación entre el campo magnético y el haz de electrones.

RESOLUCIÓN:



Según el sistema de referencia tomado:

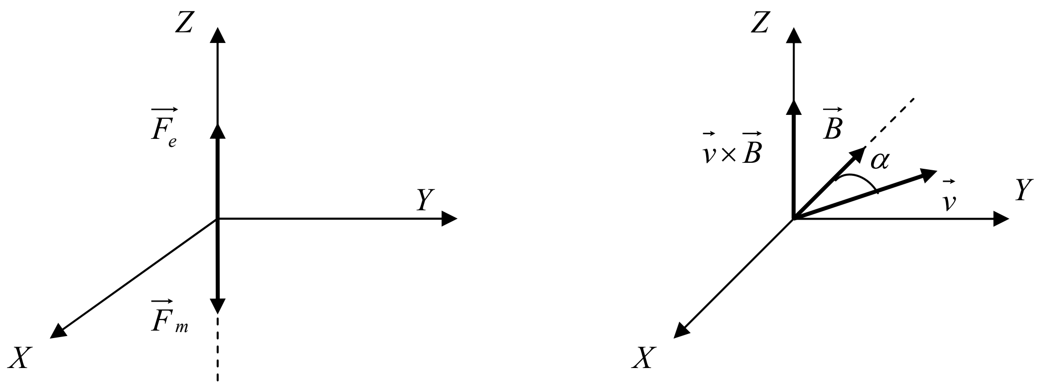
$$\vec{E} = E\left(-\vec{k}\right) \rightarrow \vec{F} = q\cdot\vec{E} = |e|\cdot E\ \left(\vec{k}\right)$$

Los signos de la carga del electrón y del campo se anulan, de modo que la fuerza eléctrica tendrá el sentido de las Z positivas.

Para que los electrones no se desvíen de su trayectoria, ha de cumplirse que:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \rightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}_e \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_m = F_m\left(-\vec{k}\right) \\ \left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_e\right| \end{cases}$$

O sea que el sentido de la fuerza del campo magnético, será el contrario a la del campo eléctrico, es decir, el de las Z negativas, y los módulos de dichas fuerzas han de ser iguales.



$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$, donde $q<0$, lo cual implica que el producto de ($\vec{v}\times\vec{B}$), tendrá sentido contrario, o sea, hacia las Z positivas. Esto sólo es posible si el vector velocidad, se encuentra en el plano XY, y formando un ángulo α con el campo magnético, del modo en que se indica en la figura.

Calculamos el valor de α, igualando los módulos de las dos fuerzas:

$$\left.\begin{aligned} |F_m| &= |e|\cdot v\cdot B\cdot sen(\alpha) \\ |F_e| &= |e|\cdot\frac{V}{d} \end{aligned}\right\} \rightarrow |e|\cdot v\cdot B\cdot sen(\alpha) = |e|\cdot\frac{V}{d} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{V}{v\cdot d\cdot B} = 0'5 \Rightarrow \alpha = 30°$$

3.6. El campo magnético en un ciclotrón que acelera protones es B = 1´5T:

a) ¿Cuántas veces por segundo se debe invertir el potencial entre las des?

b) Si el radio máximo del ciclotrón es 0´35m, ¿cuál es la velocidad máxima del protón, v_{max}?

c) ¿A través de qué diferencia de potencial se tendrá que acelerar el protón para imprimirse la v_{max} que proporciona el ciclotrón?

RESOLUCIÓN:

a) Frecuencia ciclotrónica:

$$\omega = \frac{q}{m}B = \frac{1'6\cdot 10^{-19}}{1'67\cdot 10^{-27}}\cdot 1'5 = 1'437\cdot 10^{8}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

Frecuencia:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 2'287 \cdot 10^7 (Hz)$$

Nº de inversiones:

$$2\nu = 4'574 \cdot 10^7$$

b) $v_{\max} = R_{\max} \cdot \omega = 0'35 \cdot 1'437 \cdot 10^8 = 5'03 \cdot 10^7 \left(\frac{m}{s}\right)$

c) Igualando la energía cinética y la potencial:

$$\frac{1}{2} m v^2 = qV \Rightarrow V = \frac{m v^2{}_{\max}}{2q} = \frac{1'67 \cdot 10^{-27} \cdot \left(5'03 \cdot 10^7\right)^2}{2 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}} = 13'2 \cdot 10^6 (V)$$

3.7. Un ciclotrón acelera deuterones. Si su campo magnético es de $4T$, calcular:
a) La velocidad angular de la partícula.
b) La velocidad de salida si el radio del ciclotrón es 0´4*m*.
c) El potencial necesario para acelerar mediante un campo eléctrico la partícula a la misma velocidad.

RESOLUCIÓN:

a) Para el deuterón:

$$q = +e = 1'6 \cdot 10^{-19} (C) \text{ y } m = 3'348 \cdot 10^{-27} (Kg)$$

La velocidad angular es la frecuencia ciclotrónica:

$$\omega = \frac{q}{m} B = \frac{1'6 \cdot 10^{-19}}{3'348 \cdot 10^{-27}} \cdot 4 = 19'1 \cdot 10^7 \left(\frac{rad}{s}\right)$$

b) La velocidad de salida depende del radio máximo.

$$v_{\max} = \omega \cdot R_{\max} = 19'1 \cdot 10^7 \cdot 0'4 = 7'65 \cdot 10^7 \left(\frac{m}{s}\right)$$

c) Igualando energía cinética y potencial, podemos hallar el potencial necesario para que la partícula adquiera la misma velocidad:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = qV \Rightarrow V = \frac{m v^2{}_{\max}}{2q} = \frac{3'348 \cdot 10^{-27} \cdot \left(7'65 \cdot 10^7\right)^2}{2 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19}} = 61'23 \cdot 10^6 (V)$$

3.8. Un espectrómetro de masas tiene un voltaje acelerador de *5kV* y un campo magnético de $10^{-2}\,T$. Encontrar la distancia entre los dos isótopos ^{68}Zn y ^{70}Zn del zinc. Por distancia entendemos la separación de las dos manchas que aparecen en la emulsión de la placa fotográfica después de que los iones de ^{68}Zn y ^{70}Zn con carga $+e$ son acelerados primero y luego obligados a describir una semicircunferencia en la región donde existe el campo magnético.

RESOLUCIÓN:

En el espectrómetro de masas los iones que proceden de una fuente son acelerados por una diferencia de potencial *V* y entran en un campo magnético uniforme. Si los iones

parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial *V*, entonces su energía cinética cuando entran en le campo magnético, es igual a la pérdida de energía potencial. De esta igualdad obtenemos la velocidad con que la partícula entra en el campo magnético:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \Rightarrow v^2 = \frac{2qV}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

La velocidad para cada uno de los iones será:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qV}{m_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2qV}{m_2}}$$

Una vez dentro del campo magnético, los iones se mueven describiendo una semicircunferencia de radio *r*, que para cada ión será distinto:

$$r_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{q \cdot B} \quad r_2 = \frac{m_2 \cdot v_2}{q \cdot B}$$

Sustituyendo las expresiones de las velocidades en los radios, tenemos:

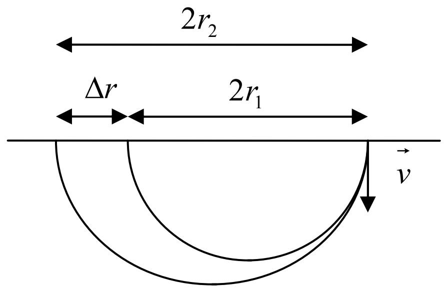
$$r_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot m_1 \cdot V}{q \cdot B^2}} \quad r_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot m_2 \cdot V}{q \cdot B^2}}$$

La masa de cada isótopo es el número de nucleones por la *u.m.a* $\left(1\ u.m.a = 1'66 \cdot 10^{-27}\ Kg\right)$:

$$m_1 = m_{68} = 68 \cdot 1'66 \cdot 10^{-27}(Kg)$$

$$m_2 = m_{70} = 70 \cdot 1'66 \cdot 10^{-27}(Kg)$$

La distancia es la separación de las dos manchas que aparecen en la emulsión de la placa fotográfica, como indica la figura:



$$\Delta r = 2r_1 - 2r_2 = 2\sqrt{\frac{2 \cdot m_1 \cdot V}{q \cdot B^2}} - 2\sqrt{\frac{2 \cdot m_2 \cdot V}{q \cdot B^2}} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2V}{q}} \cdot \left[\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right] = 0'2455 = 24'55(cm)$$

3.9. J. J. Thomson estableció la naturaleza de los rayos catódicos (rayos que salen del cátodo de un tubo similar al del televisor) midiendo su relación carga-masa, q/m, de los electrones. En la figura se observa que cuando tenemos un campo eléctrico $\vec{E}$, pero no un campo magnético, entre dos placas deflectoras, el haz de electrones se desvía una distancia y en la pantalla de detección.

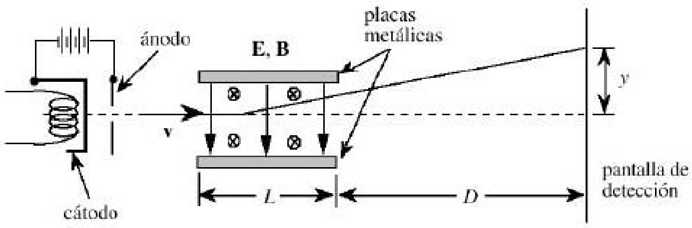
a) Demostrar que esta desviación viene dada por la ecuación:

$$y = \frac{q \cdot E}{m \cdot v^2} \cdot \left(D \cdot L + \frac{L^2}{2} \right)$$

donde v es la velocidad de los electrones que entran entre las placas y $q = +e$.
Thomson aplicó después un campo magnético, ajustando su valor hasta que el haz no se desviase.

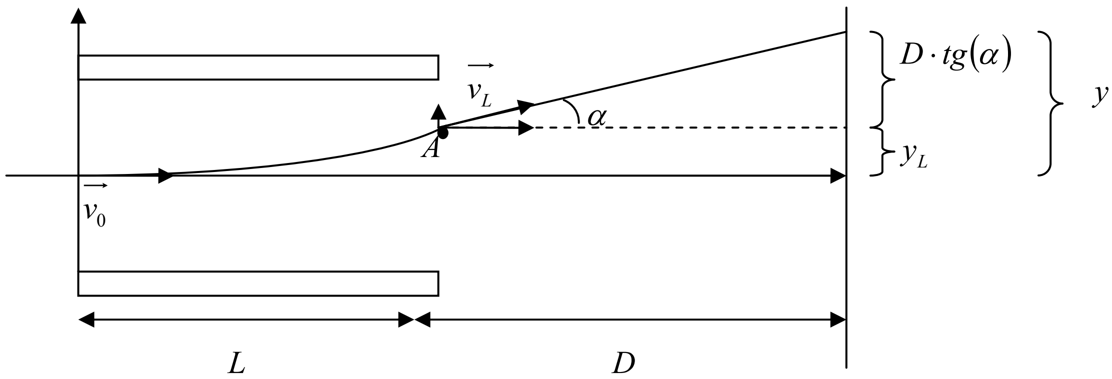
b) Demostrar que la relación carga-masa viene dada en función de magnitudes medibles por la ecuación:

$$\frac{q}{m} = \frac{y \cdot E}{B^2 \cdot \left(D \cdot L + \frac{L^2}{2} \right)}$$



RESOLUCIÓN:

a) El campo eléctrico entre las placas es perpendicular a la velocidad de los electrones. Este campo los acelera verticalmente durante el corto tiempo que permanecen entre las placas, realizando una trayectoria parabólica. Los electrones se desvían una cierta cantidad y_L, del lugar donde caerían si no existiese un campo eléctrico.



Consideramos la zona entre las placas:

Eje x: $v_x = v_0 = cte \Rightarrow x = v_0 \cdot t \rightarrow t = \dfrac{x}{v_0} = \dfrac{L}{v_0}$

Eje y: $F_E = m \cdot a_y \rightarrow q \cdot E = m \cdot a_y \Rightarrow a_y = \dfrac{q}{m} E \Rightarrow v_y = \dfrac{q}{m} E \cdot t \Rightarrow y = \dfrac{q}{2m} E \cdot t^2$

Llevando la expresión obtenida para t a la y:

$$y = \frac{q}{2m} E \frac{L^2}{{v_0}^2}$$

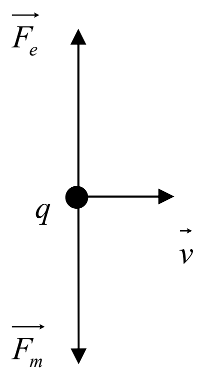
Para obtener velocidad inicial de los electrones al entrar en la zona de las placas, en función de la distancia D, utilizamos el ángulo α:

$$tg(\alpha) = \frac{v_{L_y}}{v_{L_x}} = \frac{\frac{q \cdot E \cdot L}{m \cdot v_0}}{v_0} = \frac{q \cdot E \cdot L}{m \cdot {v_0}^2}$$

Observando el dibujo, vemos que la distancia y que deseamos es:

$$y = D \cdot tg(\alpha) + y_L = D\frac{q \cdot E \cdot L}{m \cdot {v_0}^2} + \frac{q \cdot E \cdot L^2}{2m \cdot {v_0}^2} = \frac{q \cdot E}{m \cdot {v_0}^2}\left(DL + \frac{L^2}{2}\right)$$

b) Cuando aplicamos el campo $\vec{B}$ y el haz no se desvía:



$$\vec{F_e} + \vec{F_m} = 0 \Rightarrow \vec{F_e} = \vec{F_m} \Rightarrow q \cdot E = q \cdot v \cdot B \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

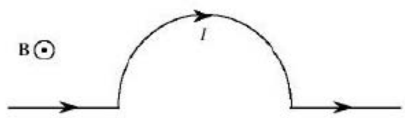
De la ecuación:

$$y = \frac{q \cdot E}{m \cdot v_0^2}\left(DL + \frac{L^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{y \cdot v^2}{E\left(DL + \frac{L^2}{2}\right)}$$

Y sustituyendo $v = \frac{E}{B}$:

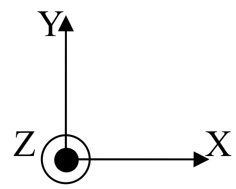
$$\frac{q}{m} = \frac{y\frac{E^2}{B^2}}{E\left(DL + \frac{L^2}{2}\right)} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{y \cdot E}{B^2\left(DL + \frac{L^2}{2}\right)}$$

3.10. Un alambre doblado como se muestra la figura, lleva una corriente I y está colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que sale del plano de la figura. Calcúlese la fuerza que actúa sobre el alambre.



RESOLUCIÓN:

En la resolución consideraremos la siguiente orientación para el sistema de referencia,



La fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo es:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

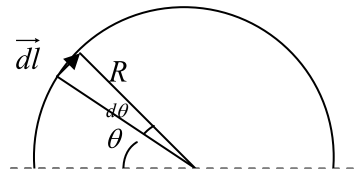
En nuestro caso, $\vec{B} = B\vec{k}$ y tanto L_1 como L_3 tienen como vector, $\vec{L} = L\vec{i}$.

Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ que actúan sobre estos tramos rectos de longitud L, vendrán dados por:

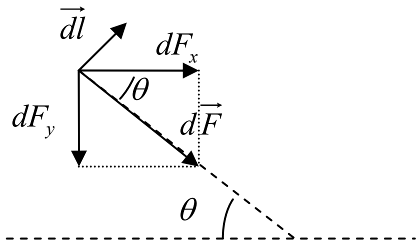
$$\vec{F_1} = \vec{F_3} = I\vec{L} \times \vec{B} = I\left(L\vec{i}\right) \times \left(B\vec{k}\right) = -ILB\vec{j}$$

Para determinar la fuerza $\vec{F}_2$ que actúa sobre el tramo semicircular, consideraremos dicho tramo descompuesto en elementos de longitud $\vec{dl}$, de tal manera que la fuerza que el campo magnético ejerce sobre cada uno de estos elementos será:

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \times \vec{B}$$



$dl = R \cdot d\theta$



$dF_x = dF \cdot \cos\theta$
$dF_y = dF \cdot sen\theta$

Para la componente *x* (horizontal), tenemos:

$$F_x = \int_0^\pi I \cdot dl \cdot B\cos\theta = I \cdot R \cdot B \int_0^\pi \cos\theta \cdot d\theta = I \cdot R \cdot Bsen\theta\Big|_0^\pi = I \cdot R \cdot B(sen\pi - sen0) = 0$$

Este resultado era de esperar debido a la simetría.

Para la componente *y* (vertical), tenemos:

$$F_y = \int_0^\pi I \cdot dl \cdot Bsen\theta = I \cdot R \cdot B \int_0^\pi sen\theta \cdot d\theta = -I \cdot R \cdot B\cos\theta\Big|_0^\pi = -I \cdot R \cdot B(\cos\pi - \cos 0) = 2I \cdot R \cdot B$$

por tanto :
$\vec{F}_2 = -2IRB\vec{j}$
luego la fuerza neta será:
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -ILB\vec{j} - ILB\vec{j} - 2IRB\vec{j} = -2IB(L+R)\vec{j}$

3.11. El coeficiente Hall del cobre es $R_H = -6 \cdot 10^{-11}(V \cdot m \cdot A^{-1} \cdot T^{-1})$:

a) Estimar la densidad de portadores de carga (electrones) del cobre
b) Si la densidad de masa del cobre es $\rho = 8'9 \cdot 10^3\, Kg/m^3$ y la masa de un átomo de cobre es $1'06 \cdot 10^{-25} Kg$, ¿con cuántos electrones libres contribuye cada átomo en promedio?
c) ¿Qué fracción del total de los *29 electrones* de un átomo de cobre se encuentran libres?

RESOLUCIÓN:

a) Coeficiente Hall:

$$R_H = \frac{1}{nq} \rightarrow n = \frac{1}{R_H q} = \frac{1}{\left(-6 \cdot 10^{-11}\right) \cdot \left(-1'6 \cdot 10^{-19}\right)} = 1'04 \cdot 10^{29} \left(portadores/m^3 \right)$$

b) Utilizando los datos que tenemos:

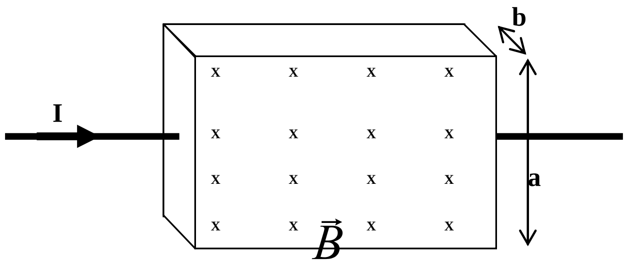
$$\frac{1'04\cdot 10^{29}\,portadores}{1m^3}\cdot\frac{1m^3}{8'9\cdot 10^3\,Kg}\cdot\frac{1'06\cdot 10^{-25}\,Kg}{átomo}=1'24\left(portadores\big/_{átomo}\right)$$

c) $\frac{1'24}{29}\cdot 100 = 4'3$ % libres

3.12. Una tira delgada de cobre tiene una altura *a=1´5 cm* y un espesor *b=0´125 cm*, y se coloca en un campo magnético *B=1´75 T* tal como el de la figura. A lo largo de la tira circula una corriente de intensidad *I=100 A*. Calcular:

a) Densidad de corriente
b) Velocidad de desplazamiento de los electrones
c) El campo eléctrico transversal debido al efecto Hall
d) Diferencia de potencial debido al efecto Hall.

Datos: densidad de portadores *n = 8´33·10^23^ portadores/m^3^* ; carga del electrón *e = 1´6·10^-19^ C*.



RESOLUCIÓN:

a) La intensidad de corriente I es perpendicular a la cara lateral de la tira, de área $S = a\cdot b$. De modo que la densidad de corriente j , la calculamos:

$$j=\frac{I}{S}=\frac{100A}{1'5\cdot 0'125\,cm^2}\ ; \qquad j = 533'3\ \text{A/cm}^2 = 5'33\ \text{A/m}^2$$

b) Para calcular la velocidad de desplazamiento v recordamos que la densidad de corriente j viene dada por, $j = nqv$, de donde despejamos,

$$v=\frac{j}{nq}=\frac{5'33{\cdot}10^6}{8'33{\cdot}10^{23}{\cdot}1'6{\cdot}10^{-16}}\ ,\quad \text{y nos queda,}\quad v = 0'04\ \text{m/s}$$

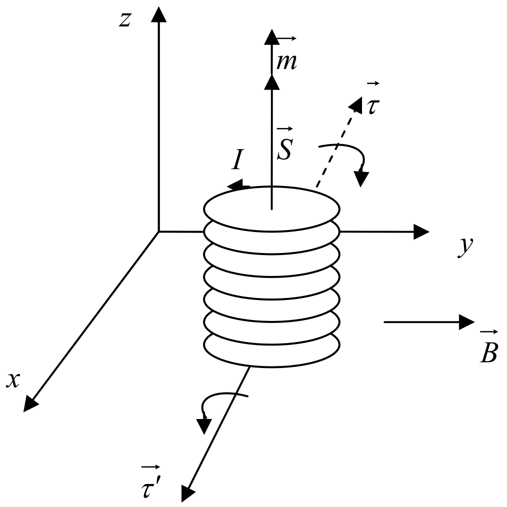
c) En el efecto Hall sabemos que se produce una fuerza magnética $\vec{F}_m = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$ sobre el portador de carga (en nuestro caso los electrones) que tiende a producir una separación de carga. Esta separación de carga a su vez genera un campo eléctrico, y por tanto una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = -e\vec{E}$. En el equilibrio, ambas fuerzas se contrarrestan $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$, con lo que nos queda (en módulo), $eE = evB$, de donde,

$$E = vB = 0'04{\cdot}1'75\ ,\ \text{y nos queda,}\ E = 0'07\ \text{V/m}$$

d) Dado que el campo eléctrico es constante y uniforme, y dado que b es la distancia de la separación de cargas tenemos, $V = E{\cdot}b = 0'07{\cdot}1'5$, y resulta, $V = 0'105$ Volts

3.13. Determínese el par necesario para mantener en equilibrio una bobina formada por *100 espiras* de área $5cm^2$ y por la que circula una corriente de $10A$ cuando se sitúa con su eje perpendicular a un campo magnético de intensidad $0'3T$.

RESOLUCIÓN:



Según el dibujo:

$\vec{B} = B\vec{j}$

$\vec{m} = N \cdot I \cdot \vec{S} = N \cdot I \cdot S\ \vec{k}$

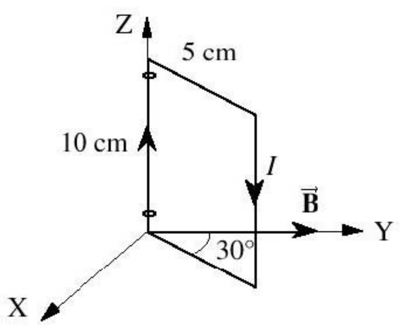
El par que actúa sobre la bobina será:

$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot sen(90°)(-\vec{i}) = -0'15\vec{i}(N \cdot m)$

El par necesario para mantener en equilibrio la bobina es:

$\vec{\tau}' + \vec{\tau} = 0 \rightarrow \vec{\tau}' = -\vec{\tau} = 0'15\vec{i}(N \cdot m)$

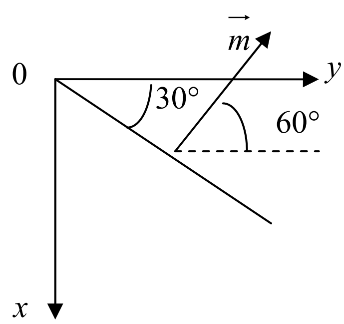
3.14. La figura muestra una de las espiras rectangulares de $10cm$ por $5cm$, de una bobina de *20 espiras*. Lleva una corriente de $0'1A$ y tiene goznes en un lado. ¿Qué momento obra sobre la espira, en módulo dirección y sentido, si está montada con su plano formando *30°* con respecto a la dirección de un campo uniforme de $0'5\ T$?



RESOLUCIÓN:

La fuerza ejercida por un campo magnético sobre un circuito eléctrico, da lugar también a un torque magnético.

El momento del par de fuerzas que actúa sobre la espira es, $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$, donde $\vec{m}$ es el momento bipolar magnético de la espira.



momento dipolar magnético de una bobina es:

$\vec{m} = NI\vec{S} = NIS\vec{n}$

con N el número de espiras y S la sección de la espira, cuyo valor es:

$S = 0'1 \cdot 0'05 = 0'005\ m^2$

Sustituyendo valores

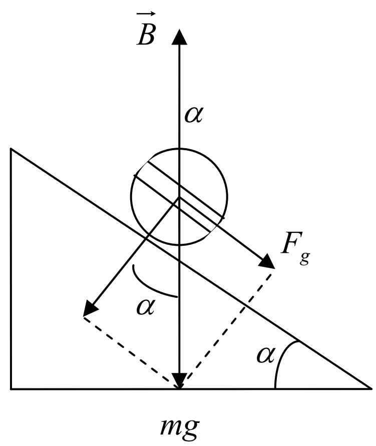
$$\vec{m} = 20 \cdot 0'1 \cdot 0'005\left(-\vec{i}\,sen60° + \vec{j}\cos 60°\right) = 20 \cdot 0'1 \cdot 0'005\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{m} = 5 \cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}\right)A \cdot m^2$$

Por tanto el momento del par de fuerzas es:

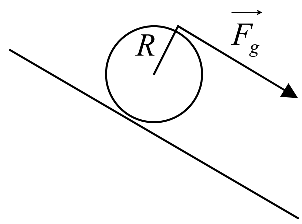
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 \cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{3}\right) & 5 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0'5 & 0 \end{pmatrix} = -4'33 \cdot 10^{-3}\vec{k}\left(N \cdot m\right)$$

3.15. La figura muestra un cilindro de madera de 0´25*kg* de masa, radio *R* y una longitud de 0´1*m* con *10* vueltas de alambre enrollado entorno a él longitudinalmente, de manera que el plano de la espira contiene al eje del cilindro. Calcular cuál es la mínima corriente que debe pasar por la espira, para impedir que el cilindro ruede por un plano inclinado α con la horizontal, en presencia de un campo magnético vertical de 0´5*T*, si el plano de las espiras es paralelo al plano inclinado.



RESOLUCIÓN:

Debido a la fuerza del peso, aparece un par que hace girar al rodillo hacia abajo. Y su sentido irá hacia el interior del papel:

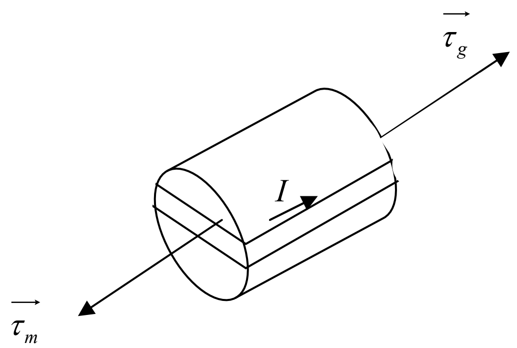


$\vec{\tau_g} = \vec{R} \times \vec{F_g}$

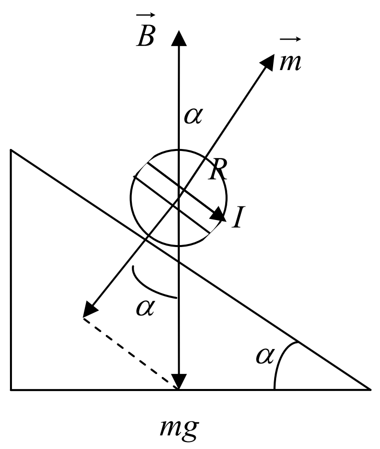
siendo $\vec{R}$ y $\vec{F_g}$ perpendiculares y el módulo de F_g, $|F_g| = mg \cdot sen\alpha$, el módulo del par será:

$\tau_g = R \cdot F_g = R \cdot mg \cdot sen\alpha$

Para obtener el equilibrio se necesita un torque de igual módulo y sentido contrario a éste.



Para ello la *I* ha de ir en sentido contrario a las agujas del reloj, de este modo el momento dipolar magnético, será el representado en la siguiente figura:



Y el torque será:

$\overrightarrow{\tau_m} = \vec{m} \times \vec{B} \rightarrow |\tau_m| = m \cdot B \cdot sen\alpha = N \cdot I \cdot S \cdot Bsen\alpha$

donde S es la superficie de la espira: $S = 2R \cdot l$

Igualando los módulos:

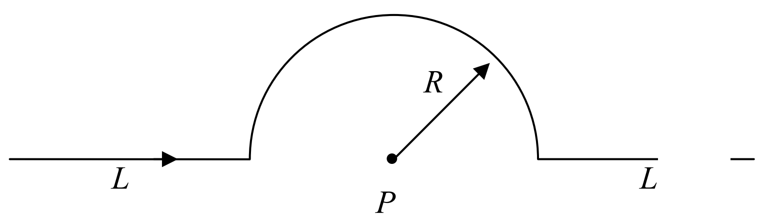
$R \cdot mgsen\alpha = N \cdot I \cdot 2R \cdot l \cdot Bsen\alpha \rightarrow mg = N \cdot I \cdot 2 \cdot l \cdot B$

Despejando la *I*:

$$I = \frac{mg}{2NlB} = \frac{0'25 \cdot 9'8}{2 \cdot 10 \cdot 0'1 \cdot 0'5} = 2'45(A)$$

3.16. El alambre de la figura lleva una corriente *I*. Calcular el campo magnético en el centro del semicírculo producido por:

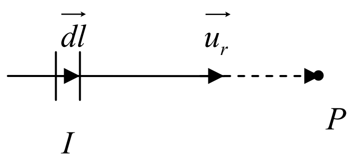
a) cada segmento recto de longitud *l*
b) el segmento circular
c) todo el alambre.



RESOLUCIÓN:

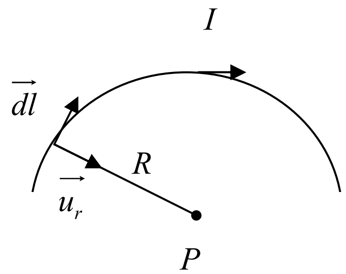
a) El campo magnético en *P* creado por cada segmento de longitud *L*, lo calculamos por la Ley de Biot-Savart:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\overrightarrow{dl}\times\overrightarrow{u_r}}{r^2}$$



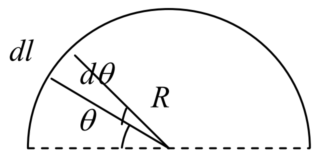
Como $\overrightarrow{dl}$ y $\overrightarrow{u_r}$ son paralelos, $\overrightarrow{dB} = 0$, los segmentos rectilíneos no crean ningún campo magnético en *P*.

b)



$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\overrightarrow{dl}\times\overrightarrow{u_r}}{R^2} \text{ con } \overrightarrow{dl}\perp\overrightarrow{u_r} \text{ y } \vec{B} \text{ hacia dentro } \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I\cdot dl}{4\pi R^2}$$

Necesitamos hacer un cambio de variable:

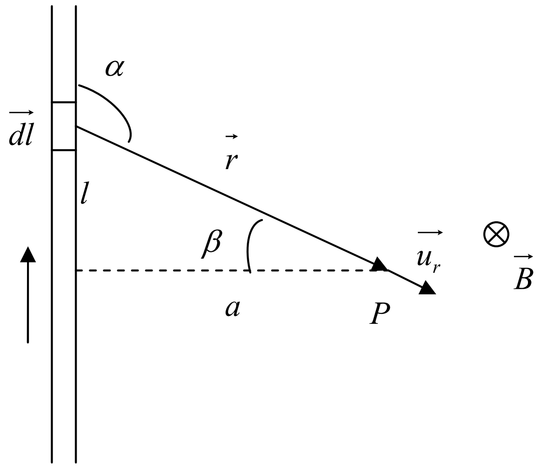


$$dl = Rd\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 IRd\theta}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 Id\theta}{4\pi R} \Rightarrow B = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 Id\theta}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

3.17. Calcular el campo magnético creado por un conductor rectilíneo filiforme de longitud L por el que circula una corriente de intensidad I. ¿Cuál sería el valor del campo si el conductor fuera infinito?

RESOLUCIÓN:



Resulta evidente que el campo $\vec{dB}$ creado por el elemento $I\vec{dl}$, es perpendicular al plano de la figura y dirigido hacia dentro. Su expresión es la de la Ley de Biot-Savart:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\left[\vec{dl}\times\vec{r}\right]}{r^3} \Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[I\vec{dl}\times\vec{u_r}\right]}{r^2}$$

Su módulo será:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot dl\cdot sen\alpha}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot dl\cdot\cos\beta}{r^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dl\cdot\cos\beta}{r^2}$$

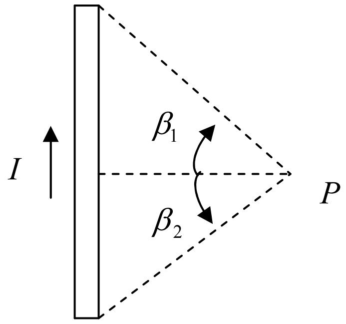
$$l = a\cdot tg\beta \Rightarrow dl = \frac{a\cdot d\beta}{\cos^2\beta}$$

$$r = \frac{a}{\cos\beta}$$

Sustituyendo el diferencial y la r:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\frac{a\cdot d\beta}{\cos^2\beta}\cos\beta}{\frac{a^2}{\cos^2\beta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int\cos\beta\cdot d\beta$$

Si el alambre es finito:



$\beta_1 \rangle 0$
$\beta_2 \langle 0$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\beta_2}^{\beta_1}\cos\beta \cdot d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\int_{\beta_2}^{0}\cos\beta \cdot d\beta + \int_{0}^{\beta_1}\cos\beta \cdot d\beta\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-sen\beta_2 + sen\beta_1\right]$$

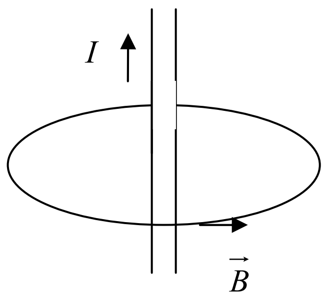
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[sen\beta_1 - sen\beta_2\right]$$

Si es infinito:

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \beta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

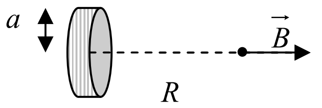
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[1+1\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Las líneas de campo son circunferencias con centro en la corriente y perpendiculares a la misma.



3.18. Una corriente de 2´5*A* circula por una bobina de vueltas muy juntas que tiene un diámetro de 0´4*m*. ¿Cuántas vueltas debe tener para que el valor del campo magnético en su centro sea $1'272 \cdot 10^{-4} T$?

RESOLUCIÓN:
N espiras muy juntas:



El campo de una espira (en le eje):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

En el centro de la espira (*R=0*):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

Para *N espiras*:

$$B = NB_1 = \frac{\mu_0 NI}{2a}$$

De donde, despejando *N*:

$$N = \frac{2aB}{\mu_0 I} = \frac{2 \cdot 0'2 \cdot 1'272 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2'5} \approx 16 \ \textit{espiras}$$

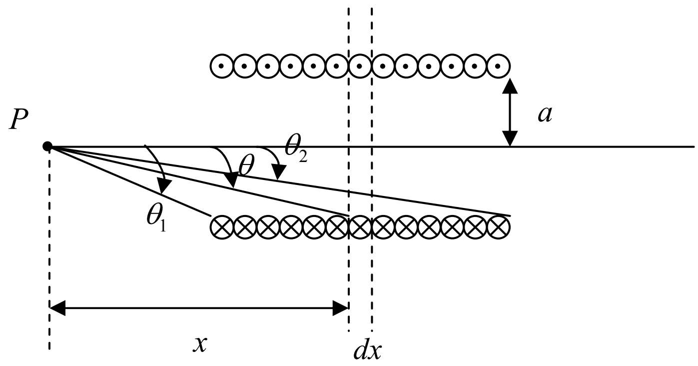
3.19. Calcular el campo magnético creado por un solenoide de radio *a* y *n* espiras por unidad de longitud, en puntos de su eje sabiendo que transporta una corriente de intensidad *I*.

RESOLUCIÓN:

El campo que crea una espira circular de radio *a* en un punto cualquiera de su eje que dista una distancia *x* de su centro, viene dada por:

$$B_{espira} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Consideremos una sección del solenoide tal y como se esquematiza en la figura:



Puesto que en un elemento del solenoide de longitud *dx* hay *ndx* espiras, siendo *n* el número de espiras por unidad de longitud, el campo creado por ese elemento *dx* en el punto *P* será:

$$dB = B_{espira} \cdot n \cdot dx = \frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} n \cdot dx$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{a}{tg\theta} \rightarrow dx = -\frac{a}{sen^2\theta} d\theta$$

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2}{\left(a^2 + \dfrac{a^2}{tg^2\theta}\right)^{3/2}} n \frac{a}{sen^2\theta} d\theta$$

Teniendo en cuenta que:

$$1 + tg^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2 \cdot tg^3\theta}{a^3\left(\dfrac{tg^2\theta + 1}{tg^2\theta}\right)^{3/2}} n \frac{a}{sen^2\theta} d\theta = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2}{a^3\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} \dfrac{\cos^2\theta}{sen^2\theta}\right)^{3/2}} n \frac{a}{sen^2\theta} d\theta =$$

$$= -\frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot a^2}{a^3\left(\dfrac{1}{sen^2\theta}\right)^{3/2}} n \frac{a}{sen^2\theta} d\theta = -\frac{\mu_0}{2} \frac{I \cdot sen^3\theta}{sen^2\theta} nd\theta = -\frac{\mu_0}{2} I \cdot sen\theta \cdot nd\theta$$

Para obtener el campo resultante integramos de un extremo del solenoide hasta el otro:

$$B = -\frac{\mu_0}{2} nI \int_{\theta_1}^{\theta_2} sen\theta d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

Y si la longitud del solenoide es *L* y el número total de espiras *N*, se tiene:

$$n = \frac{N}{L}$$

De donde:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2L}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$$

Para un solenoide infinito (muy largo), tenemos para puntos cerca del centro del solenoide:

$$\theta_1 \approx \pi$$

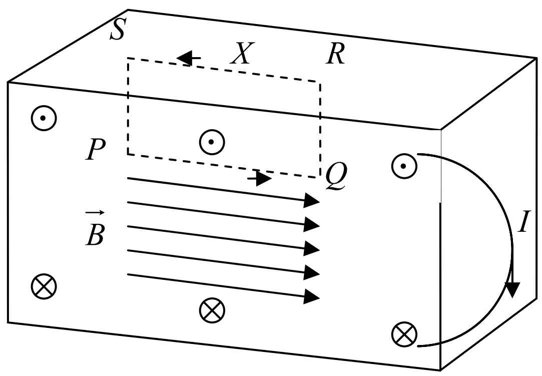
$$\theta_2 \approx 0$$

Por lo tanto:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{L} = \mu_0 nI$$

3.20. Utilizando la Ley de Ampère calcular el campo magnético en el centro de un solenoide muy largo que tiene *n* espiras por unidad de longitud.

RESOLUCIÓN:



Aplicando la ley de Ampère:

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_t$$

Elegimos como camino *L*, el rectángulo SPQR:

$$\int \vec{B} \bullet d\vec{l} = \int_S^P \vec{B} \bullet d\vec{l} + \int_P^Q \vec{B} \bullet d\vec{l} + \int_Q^R \vec{B} \bullet d\vec{l} + \int_R^S \vec{B} \bullet d\vec{l}$$

Por simetría el campo magnético es paralelo al eje del solenoide y uniforme:

$$\int_S^P \vec{B} \bullet d\vec{l} = \int_Q^R \vec{B} \bullet d\vec{l} = 0 \ \left(\vec{B} \perp \vec{dl}\right)$$

$$\int_P^Q \vec{B} \bullet d\vec{l} = B \cdot x \ (\theta = 0°)$$

$$\int_R^S \vec{B} \bullet d\vec{l} = 0 \ (B = 0)$$

Luego:

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = B \cdot x$$

Para un solenoide de n vueltas por unidad de longitud, el número de vueltas enlazadas por el camino cerrado SPQR es:

$$I_t = n \cdot I \cdot x$$

Sustituyendo en el resultado de aplicar la ley de Ampère:

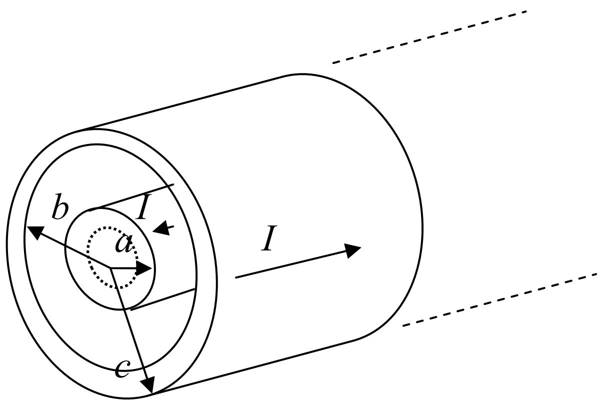
$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = B \cdot x = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot x \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

3.21. Un cable largo coaxial está formado por dos conductores cilíndricos concéntricos, con radio a, el primero, y el segundo con radio interior b y exterior c. Hay corrientes iguales y opuestas de valor I en los conductores. Obtener el campo magnético:

a) en el interior del primer conductor
b) entre el primero y el segundo conductor
c) en el segundo conductor
d) en el exterior

RESOLUCIÓN:

a)



Del Teorema de Ampère:

$$\oint_L \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

tomando el lazo L de radio r, en el interior del conductor de radio a (elipse punteada)

$$\int B \cdot dl = \mu_0 \cdot I'$$

donde:

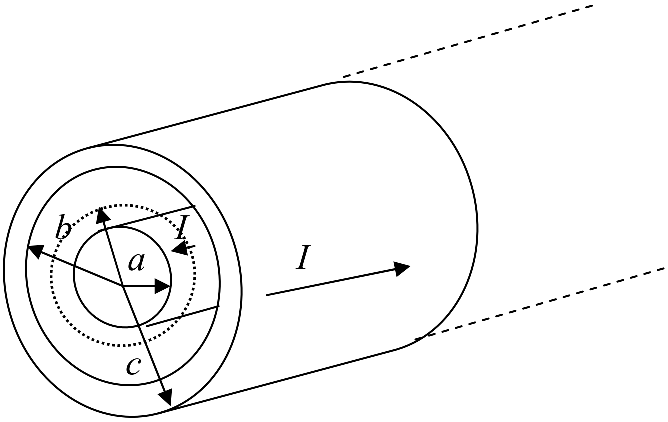
$$I' = \int J \cdot ds = \int_0^r \frac{I}{S_a} \cdot ds = \int_0^r \frac{I}{\pi \cdot a^2} 2\pi r dr = I \frac{r^2}{a^2}$$

J es la densidad de corriente, y es constante en toda la superficie de 0 a *r*.

Llevando esta corriente a la expresión de Ampère e integrando a todo *L*:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow B(r \langle\ a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

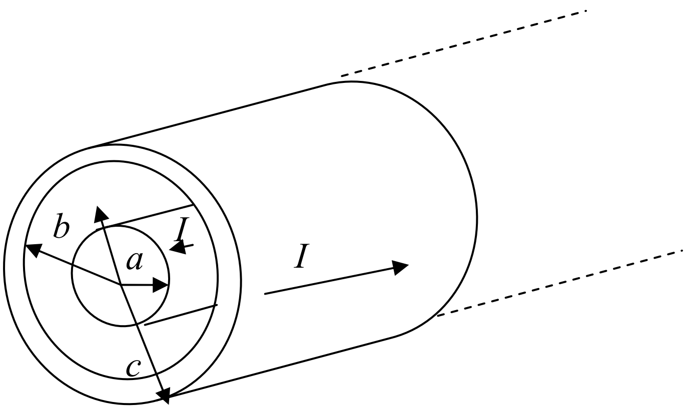
b)



tomando el lazo *L* de radio $a<r<b$, (elipse punteada) y teniendo en cuenta que toda la corriente pasa por dentro del lazo:

$$\int B \cdot dl = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

c)



Para b<r<c:

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 (I - I'')$$

$$I'' = \int J \cdot ds$$

$$J = \frac{I}{S_c - S_b} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Sustituyendo *J* en la integral:

$$I'' = \int_b^r \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} 2\pi r dr = \frac{2I}{c^2 - b^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{I}{c^2 - b^2}(r^2 - b^2)$$

Por tanto:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I'') = \mu_0 I \left(1 - \left(\frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)\right) = \mu_0 I \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$$

d) En la zona más externa, $r > c$:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) \Rightarrow B = 0$$

3.22. Un conductor largo, en forma de cilindro recto de radio *R*, lleva una intensidad de corriente I_0. Este conductor se ha construido de tal forma que la densidad de corriente *J* dentro de él varía con la distancia r al eje del cilindro según la expresión:

$$J(r) = \frac{3 \cdot I_0 \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot R^3}$$

Determinar el campo magnético:

a) en puntos interiores (r < R) del cilindro conductor
b) en puntos exteriores (r > R) del cilindro conductor

RESOLUCIÓN:

$$J(r) = \begin{cases} \frac{3}{2} I_0 \frac{r}{2\pi R^3} & r \le R \\ 0 & r \rangle R \end{cases}$$

Calculamos primero el campo magnético en puntos interiores del conductor. Para ello aplicamos la ley de Ampère sobre una circunferencia de radio r, con $r < R$, y con centro en el eje del conductor:

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I_{neta}$$

Para calcular la intensidad de corriente neta que atraviesa la sección circular de radio r, tenemos en cuenta la relación:

$$dI = J \cdot dS$$

donde $S = \pi \cdot r^2 \rightarrow dS = 2\pi r dr$

$$I_{neta} = \int J \cdot dS = \int_0^r \frac{3}{2} I_0 \frac{r}{\pi R^3} 2\pi r dr = \frac{3I_0}{R^3} \int_0^r r^2 dr = I_0 \frac{r^3}{R^3}$$

Llevando este resultado a la ley de Ampère:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \frac{r^2}{R^3} \quad \text{para } r < R$$

Para puntos exteriores al conductor, $r>R$, consideramos una trayectoria circular de radio r. En este caso la intensidad de la corriente neta que atraviesa la superficie delimitada por dicha circunferencia es la intensidad de corriente total que transporta el conductor:

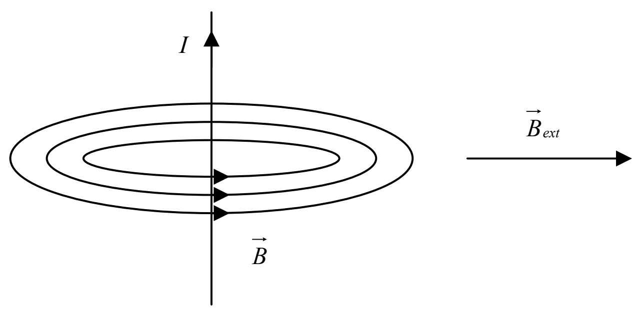
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{para r > R}$$

Puede comprobarse cómo para $r=R$, ambas expresiones del campo magnético, conducen al mismo resultado:

$$B(r = R) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}$$

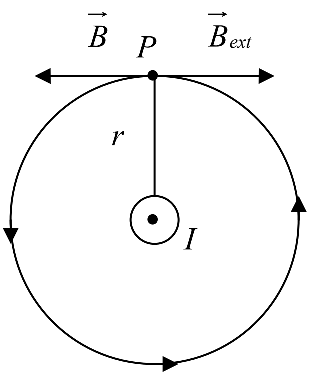
3.23. Un alambre recto lleva una corriente de 100A y está colocado en un campo magnético uniforme externo de 50G. El alambre es perpendicular a este campo externo. Localizar los puntos en los cuales el campo magnético resultante vale cero.

RESOLUCIÓN:



$$B_{ext} = 50G = 50 \cdot 10^{-4} T = 0'005 \ T$$

Viendo el alambre desde arriba, comprobamos que el campo resultante, sólo puede ser igual a 0, en el punto P.



El campo magnético crea el alambre es:

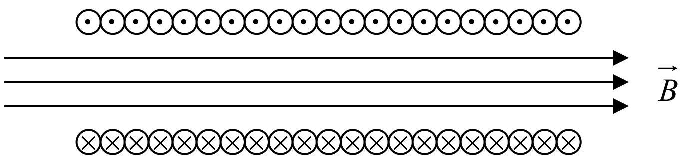
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Calculamos la r, a la cual se anularán los campos, lo cual sucede cuando sus módulos son iguales:

$$B_{ext} = B \Rightarrow B_{ext} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B_{ext}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 0'005} = 0'004m = 4mm$$

3.24. Determinar el flujo magnético a través de la sección circular de un solenoide infinito de radio R = 7´5*mm*, con n = 2000 *espiras por metro* y por el que pasa una corriente I =0´32*A*.

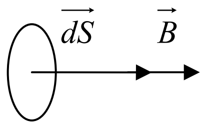
RESOLUCIÓN:



El campo magnético en el interior del solenoide infinito es:

$$B = \mu_0 n I$$

En la sección circular del solenoide todos los elementos de área $\overrightarrow{dS}$ son paralelos al eje y paralelos a $\vec{B}$:



Por lo que se cumple:

$$\vec{B} \bullet \overrightarrow{dS} = B \cdot dS$$

Además el campo es uniforme en el interior del solenoide:

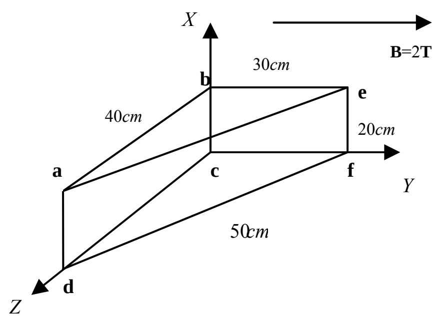
$$\phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS} = \int_S B \cdot dS = B \int_S dS = B \cdot S = B\pi R^2$$

de donde:

$$\phi_B = B\pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2 = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 0'32 \cdot \pi \left(7'5 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 1'4 \cdot 10^{-7} (Wb)$$

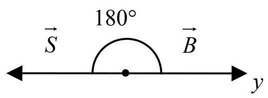
3.25. El campo B en una cierta región del espacio es de $2T$ y su dirección la del eje Y en el sentido positivo.

a) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie definida por *abcd* de la figura?
b) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie definida por *befc* de la figura?
c) ¿Cuál es el flujo a través de la superficie definida por *aefd* de la figura?



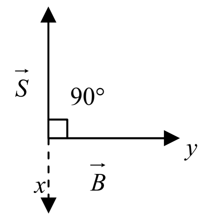
RESOLUCIÓN:

a) El ángulo que forman los vectores es:



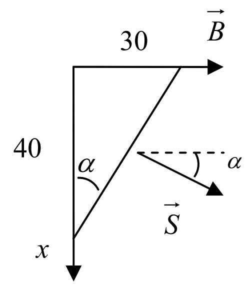
$$\phi_{abcd} = B \bullet S = B \cdot S \cdot cos(180°) = -2 \cdot 0'2 \cdot 0'4 = -0'16 (Wb)$$

b) En este caso el ángulo será:



$$\phi_{befc} = \vec{B} \bullet \vec{S} = B \cdot S \cos(90°) = 0$$

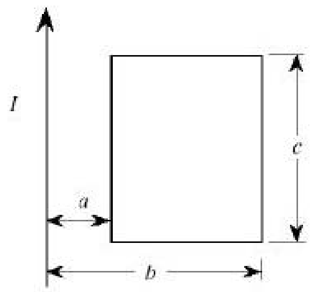
c) Para la superficie *aefd* tenemos:



$$\alpha = arctg\left(\frac{30}{40}\right) = 36'87°$$

$$\phi_{aefd} = B \bullet S = B \cdot S \cos\alpha = 2 \cdot 0'5 \cdot 0'2 \cdot \cos(36'87°) = 0'16(Wb)$$

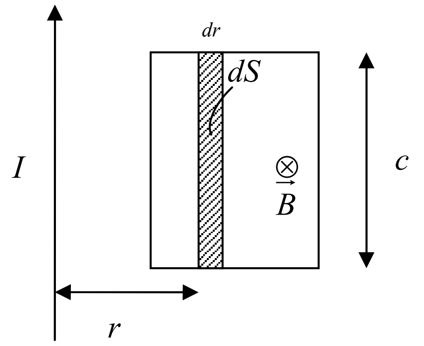
3.26. Determinar el flujo magnético a través del circuito rectangular de la figura cuando por el conductor rectilíneo fluye una corriente de intensidad *I*.



RESOLUCIÓN:

El flujo del campo magnético es:

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \vec{dS}$$



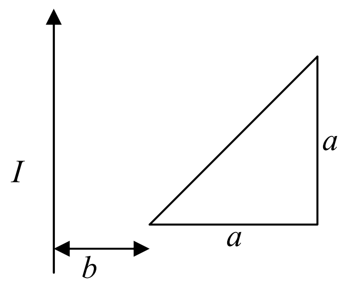
Siendo $dS = c \cdot dr$ y $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\vec{B}$ y $\overrightarrow{dS}$ son paralelos y tienen el mismo sentido y r variará de a hasta b

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS} = \int_S B \cdot dS = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} c \cdot dr = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3.27. Determinar el flujo magnético que atraviesa la espira triangular de la figura, en la que los catetos tienen una longitud *a* y el vértice más próximo dista *b* de un conductor rectilíneo e indefinido por el que circula una intensidad de corriente *I*.

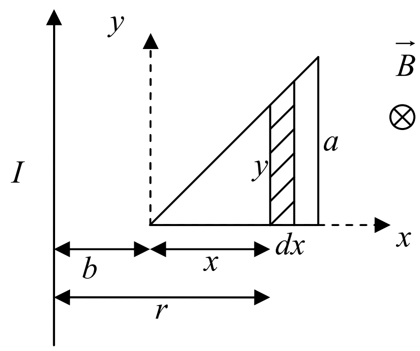
RESOLUCIÓN:



Sabemos que el flujo del campo magnético a través de una superficie *S*, viene dado por la ecuación:

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS}$$

Consideremos un elemento de superficie *dS*, de anchura *dx* y altura *y*:



El flujo que atraviesa ese elemento diferencial de superficie es:

$$d\phi_B = \vec{B} \bullet \overrightarrow{dS} = B \cdot dS = B \cdot y \cdot dx \Rightarrow \phi_B = \int_0^a B \cdot y \cdot dx$$

El campo magnético creado por el conductor rectilíneo es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+x)}$$

De donde:

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \frac{y}{b+x}dx$$

Como *y* depende de *x*, no puede salir de la integral. Mirando la figura observamos que la relación entre ellas es *y*=*x*, que llevándolo a la integral, queda:

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \frac{x}{b+x}dx$$

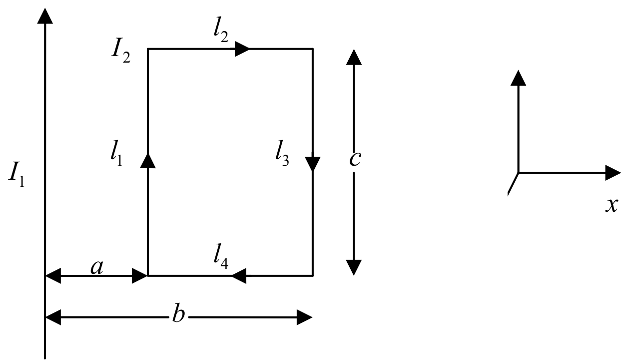
Para calcular la integral consideramos:

$$\left(\frac{x}{b+x}\right) = \frac{x+b-b}{b+x} = 1 - \frac{b}{b+x}$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \frac{x}{b+x}dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a dx - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a \frac{b}{b+x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a - \frac{\mu_0 I}{2\pi}b\ln(b+x)\Big|_0^a =$$

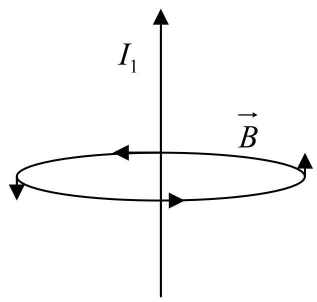
$$= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} - \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\left[\ln(b+a) - \ln b\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[a - b\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right]$$

3.28. La figura muestra un cable largo que lleva una corriente $I_1 = 30A$. La espira rectangular lleva una corriente $I_2 = 20A$. Calcular la fuerza resultante que actúa sobre la espira, siendo *a=1cm*, *b = 8cm* y *c = 30cm*.



RESOLUCIÓN:

El campo magnético que crea el cable es del tipo solenoidal.



$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Y la fuerza que actúa sobre un tramo recto de conductor es:
$\vec{F} = I_2 \cdot \vec{l} \times \vec{B}$

Para el tramo 1: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\left(-\vec{k}\right) \rightarrow \vec{F_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}\left(-\vec{i}\right)$

Para el tramo 3: $\vec{B'} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}\left(-\vec{k}\right) \rightarrow \vec{F_3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi b}\left(\vec{i}\right)$

Para los tramos 2 y 4, las fuerzas se cancelan.

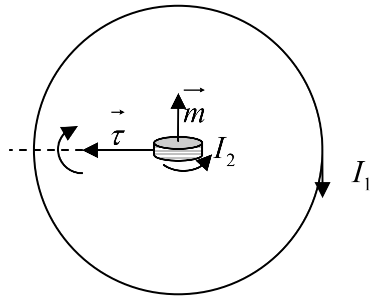
$$F = F_1 + F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)i \; = -3'17 \cdot 10^{-3}\, i \;(N)$$

La fuerza resultante sobre la espira, hará que ésta se acerque al cable.

3.29. Una espira circular de cobre de 10*cm* de radio lleva una corriente de 15*A*. En su centro se coloca una segunda bobina de 1*cm* de radio, perpendicular a la primera, que tiene 50 espiras y por la que circula una corriente de 1*A*:

a) ¿Qué campo produce la espira grande en su centro?
b) ¿Qué momento actúa sobre la pequeña?

RESOLUCIÓN:



Campo creado por la espira grande en su centro, va hacia dentro y su módulo es:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15}{2 \cdot 0'1} = 0'94 \cdot 10^{-4} (T)$$

Calculamos el momento dipolar magnético de la bobina y con él, el momento que actúa sobre la misma, teniendo en cuenta que $\vec{m} \perp \vec{B_1}$:

$$\vec{m} = N I_2 \vec{S_2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B_1} = N I_2 \vec{S_2} \times \vec{B_1} = 50 \cdot 15 \cdot \pi (0'01)^2 \cdot 0'94 \cdot 10^{-4} = 1'48 \cdot 10^{-6} (N \cdot m)$$

Y el sentido del par es el representado en la figura.

3.30. Por un conductor rectilíneo indefinido fluye una corriente $I = 15A$. Calcular el campo magnético B, la excitación magnética H y la magnetización M, en un punto que dista $r = 10cm$ del conductor, cuando éste se encuentra:

a) en el vacío
b) en un gas paramagnético de permeabilidad relativa 1´05
c) en un gas diamagnético de permeabilidad relativa $\mu_r = 0'95$
d) en el eje de un cilindro de material ferromagnético de radio 20*cm* coaxial con el hilo y de permeabilidad relativa $\mu_r = 6000[1 - exp(-H/10)]$.

RESOLUCIÓN:

a) El campo magnético creado por un conductor rectilíneo en el vacío viene dado por la ecuación:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Sustituyendo valores:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 15}{2\pi \cdot 0'1} = 3 \cdot 10^{-5}(T)$$

En este caso el conductor está en el vacío y por tanto:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 23'87\left(A/m\right)$$

Teniendo en cuenta que $\mu_r = 1$ en el vacío, la magnetización es:

$$M = (\mu_r - 1)H = 0 \rightarrow M = 0$$

b) Para un material paramagnético, $H = 23'87(A/m)$, ya que H es independiente del medio y el campo magnético será:

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H = 1'05 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 23'87 = 3'14 \cdot 10^{-5}(T)$$

Y la magnetización:

$$M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H = (1'05 - 1) \cdot 23'87 = 1'19(A/m)$$

c) Para un material diamagnético, tendremos:

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H = 0'95 \cdot 4\pi \cdot 23'87 = 2'85 \cdot 10^{-5}(T)$$

$$M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H = (0'95 - 1) \cdot 23'87 = -1'19(A/m)$$

Al ser un gas diamagnético, $\vec{M}$ tiene sentido contrario a $\vec{H}$, por lo que B toma un valor inferior al que tenía en el vacío.

d) Para el material ferromagnético, calculamos el valor de la permeabilidad relativa:

$$\mu_r = 6000\left(1 - e^{-H/10}\right) = 6000\left(1 - e^{-23'87/10}\right) = 5448$$

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H = 5448 \cdot 4\pi \cdot 23'87 = 0'163(T)$$

$$M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H = (5448 - 1) \cdot 23'87 = 1'3 \cdot 10^5(A/m)$$

3.31. Tenemos una bobina toroidal de sección transversal $S = 2'5cm^2$, r = 40cm de radio medio y permeabilidad relativa μ_r = 1500 está bobinado uniformemente con N = 3000 vueltas de cable. Si pasa a través del cable una corriente I = 1´6 A, hallar:

a) la excitación magnética H
b) el campo magnético medio B
c) la magnetización M del anillo.

RESOLUCIÓN:

a) Sabemos a partir de la ley de Ampère cuál es el campo magnético en una bobina toroidal cuando no contiene ningún material (vacío):

$$B_0 = \frac{\mu_0 \, N \, I}{2\pi \, R_{medio}}$$

De aquí podemos obtener el vector excitación magnética H,

$$H = B/\mu \Rightarrow H = \frac{N \, I}{2\pi \, R_{medio}} = \frac{3000 \cdot 1'6}{2\pi \cdot 0'4} = 1910\left(A/m\right)$$

b) El campo magnético es:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H} = 1500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1910 = 3'6(T)$$

c) La magnetización media es:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = (1500 - 1)\cdot 1910 = 2'9 \cdot 10^{6}\left(A/m\right)$$