Análisis y diseño de algoritmos

2. Eficiencia

José Luis Verdú Mas, Jose Oncina,
Mikel L. Forcada

Dep. Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Alicante

4 de febrero de 2020

Objetivos

- Proporcionar la capacidad para analizar con rigor la eficiencia de los algoritmos
  - Distinguir los conceptos de eficiencia en tiempo y en espacio
  - Entender y saber aplicar criterios asintóticos a los conceptos de eficiencia
  - Saber calcular la complejidad temporal o espacial de un algoritmo
  - Saber comparar, en cuanto a su eficiencia, distintas soluciones algorítmicas a un mismo problema

Contenido

Índice

¿Qué es un algoritmo?

Definición (Algoritmo)

Un algoritmo es una serie finita de instrucciones no ambiguas que expresa un método de resolución de un problema

Importante:

- la máquina sobre la que se define el algoritmo debe estar bien definida
- los recursos (usualmente tiempo y memoria) necesarios para cada paso elemental deben estar acotados
- El algoritmo debe terminar en un número finito de pasos

Noción de complejidad

Definición (Complejidad algorítmica)

Es una medida de los recursos que necesita un algoritmo para resolver un problema

Los recursos mas usuales son:

- Tiempo: Complejidad temporal
- Memoria: Complejidad espacial

Se suele expresar en función de la dificultad *a priori* del problema:

- Tamaño del problema: lo que ocupa su representación
- Parámetro representativo: *i.e.* la dimensión de una matriz

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	
Decir cuál es el mayor de 2 números	
Ordenar un vector de n enteros	
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	
Ordenar un vector de n enteros	
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	$2 \cdot 32$
Ordenar un vector de n enteros	
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	$2 \cdot 32$
Ordenar un vector de n enteros	$32n$
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	$2 \cdot 32$
Ordenar un vector de n enteros	$32n$
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	$32(mn + n\ell)$

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	$2 \cdot 32$
Ordenar un vector de n enteros	$32n$
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	$32(mn + n\ell)$

- Usualmente se omite el tamaño de enteros, reales, punteros, etc. si se asume que su tamaño está acotado

¿Cuál es el tamaño de un problema?

Definición (Tamaño de un problema o instancia)

Número de bits que se necesita para codificar una instancia

Problema	**tamaño**
Sumar uno a un entero (binario de 32 bits)	32
Decir cuál es el mayor de 2 números	$2 \cdot 32$
Ordenar un vector de n enteros	$32n$
Multiplicar dos matrices de enteros de $m \times n$ y $n \times \ell$	$32(mn + n\ell)$

- Usualmente se omite el tamaño de enteros, reales, punteros, etc. si se asume que su tamaño está acotado
- ¿Cuántos bits se necesitan para codificar un entero n arbitrariamente grande?

Atención:

La complejidad puede depender de cómo se codifique el problema

Ejemplo

Sumar uno a un entero arbitrariamente grande

- Complejidad constante si el entero se codifica en base uno
- Complejidad lineal si el entero se codifica en base dos

Normalmente se prohíben:

- codificaciones en base uno
- codificaciones no compactas

El tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución de un algoritmo depende de:

Factores externos

- La máquina en la que se va a ejecutar
- El compilador
- Los datos de entrada suministrados en cada ejecución

Factores internos

- El número de instrucciones que ejecuta el algoritmo y su duración

¿Cómo estudiamos el tiempo de ejecución?

Definición (Análisis empírico o *a posteriori*)

Ejecutar el algoritmo para distintos valores de entrada y cronometrar el tiempo de ejecución

- ▲ Es una medida del comportamiento del algoritmo en su entorno
- ▼ El resultado depende de los factores externos e internos

Definición (Análisis teórico o *a priori*)

Obtener una función que represente el tiempo de ejecución (en operaciones elementales) del algoritmo para cualquier valor de entrada

- ▲ El resultado depende sólo de los factores internos
- ▲ No es necesario implementar y ejecutar los algoritmos
- ▼ No obtiene una medida real del comportamiento del algoritmo en el entorno de aplicación

Tiempo de ejecución de un algoritmo

Definición (Operaciones elementales)

Son aquellas operaciones que realiza el ordenador en un tiempo acotado por una constante

Ejemplo (Operaciones elementales)

- Operaciones aritméticas básicas
- Asignaciones a variables de tipo predefinido por el compilador
- Los saltos (llamadas a funciones, retorno desde ellos . . .)
- Comparaciones lógicas
- Acceso a estructuras indexadas básicas (vectores o matrices)

Para simplificar, se suele considerar que el coste temporal de las operaciones elementales es unitario

Definición (Tiempo de ejecución de un algoritmo)

Una función ($T(n)$) que mide el número de operaciones elementales que realiza el algoritmo para un tamaño de problema n

Ejemplo: Suma del los elementos de un vector

Ejemplo (sintaxis de la STL)

```
int sumar( const vector<int> &v){
  int s = 0;

  for(int i = 0; i < v.size(); i++)
    s += v[i];

  return s;
}
```

Si estudiamos el bucle ($n =$ v.size()):

n	asign.	comp.	inc.	total
0	1	1	0	2
1	1	2	1	4
2	1	3	2	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$n+1$	n	$2+2n$

La complejidad del algoritmo será:

$$T(n) = \underbrace{1}_{\text{primera asignación}} + \underbrace{2+2n}_{\textit{bucle}} + \underbrace{n}_{\text{interior del bucle}} = 3+3n$$

Ejercicio: Traspuesta de una matriz cuadrada

Traspuesta de una matriz $d \times d$ (Sintaxis de la librería armadillo)

```
void traspuesta( mat& A){  // supongo que A.n_rows == A.n_cols
  for( int i = 1; i < A.n_rows; i++ )
    for( int j = 0; j < i ; j++ )
      swap( A(i,j), A(j,i) );
}
```

Como la complejidad del bucle interior es: $2 + 3i$ veces

$$T_d(d) = \underbrace{2(d-1)+2}_{\text{bucle exterior}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{d-1} (2+3i)}_{\text{interior}} = \cdots = O(d^2)$$

Si queremos la complejidad con respecto al tamaño del problema ($s = d^2$):

$$T_s(s) = T_d(d) = O(d^2) = O(s)$$

Ejercicio: Producto de dos matrices cuadradas

Producto de dos matrices $d \times d$ (Sintaxis de la librería armadillo)

```
1  mat producto( const mat &A, const mat &B ){
2    mat R(A.n_rows, B.n_cols);
3    for( int i = 0; i < A.n_rows; i++ )
4      for( int j = 0; j < B.n_cols; j++ ) {
5        double acc = 0.0;
6        for( int k = 0; k < A.n_cols; k++ )
7          acc += A(i,k) * B(k,j);
8        R(i,j) = acc;
9      }
10   }
11   return R;
12 }
```

- La complejidad de las líneas 6-7 es $O(d)$
- La complejidad de las líneas 4-9 es $O(d) + d \cdot O(d) = O(d^2)$
- La complejidad de las líneas 3-10 es $O(d) + d \cdot O(d^2) = O(d^3)$

La complejidad del algoritmo será: $T_d(d) = O(d^3)$

Ejercicio: Producto de dos matrices cuadradas

¿Cual es la complejidad con respecto al tamaño?

El tamaño del problema es $s = 2d^2$ por lo que $d = \sqrt{s/2}$

$$T_s(s) = T_d(d) = O(d^3) = O(\sqrt{s/2}^3) = O(s^{3/2})$$

¿Cual es la complejidad espacial?

- En la complejidad espacial no se tiene en cuenta lo que ocupa la codificación del problema.
- Solo se tiene en cuenta lo que es imputable al algoritmo.

$$T_d(d) = d^2 \qquad\qquad T_s(s) = T_d(\sqrt{s/2}) = O(s)$$

- Dado un vector de enteros v y el entero z
  - Devuelve el primer índice `i` tal que `v[i] == z`
  - Devuelve −1 en caso de no encontrarlo

Búsqueda de un elemento

```
int buscar( const vector<int> &v, int z ){
  for( int i = 0; i < v.size(); i++ )
    if( v[i] == z )
      return i;
  return -1;
}
```

Problema

- No podemos contar el número de pasos porque para diferentes entradas de un mismo tamaño de problema se obtienen diferentes complejidades
- En el ejemplo de la transparencia anterior:

v	z	Pasos
$(1, 0, 2, 4)$	1	3
$(1, 0, 2, 4)$	0	6
$(1, 0, 2, 4)$	2	9
$(1, 0, 2, 4)$	4	12
$(1, 0, 2, 4)$	5	14

- ¿Qué podemos hacer?
  - Acotar el coste mediante dos funciones que expresen respectivamente, el coste máximo y el coste mínimo del algoritmo (cotas de complejidad)

Índice

Cotas de complejidad

- Cuando aparecen diferentes casos para una misma talla n, se introducen las siguientes medidas de la complejidad
  - Caso peor: cota superior del algoritmo $\rightarrow C_s(n)$
  - Caso mejor: cota inferior del algoritmo $\rightarrow C_i(n)$
  - Caso promedio: coste promedio $\rightarrow C_m(n)$
- Todas son funciones del tamaño del problema
- El coste promedio es difícil de evaluar a priori
  - Es necesario conocer la distribución de probabilidad de la entrada
  - ¡No es la media de la cota inferior y de la cota superior!

Buscar elemento

```
int buscar( const vector<int> &v, int z ) {
  for( int i = 0; i < v.size(); i++ )
    if( v[i] == z )
      return i;
  return -1;
}

```

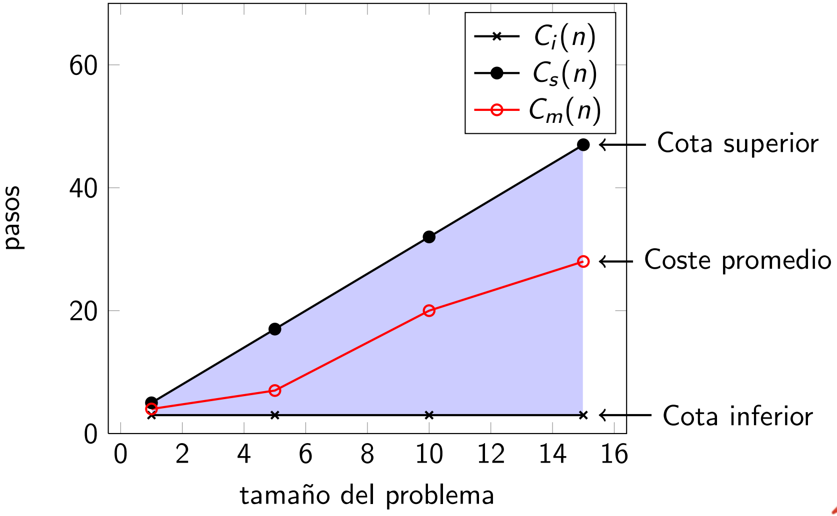
- En este caso el tamaño del problema es $n =$ `v.size()`

	Mejor caso	Peor caso
	$1+1+1$	$1+3n+1$
Suma	3	$3n+2$

Cotas:

$$C_s(n) = 3n+2 \quad = O(n)$$
$$C_i(n) = 3 \quad = O(1)$$

- Coste de la función `buscar`



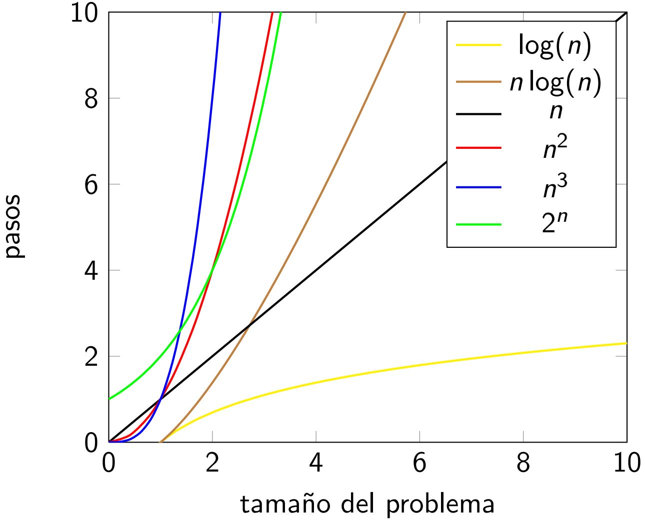
- El estudio de la complejidad resulta realmente interesante para tamaños grandes de problema por varios motivos:
  - Las diferencias "reales" en tiempo de ejecución de algoritmos con diferente coste para tamaños pequeños del problema no suelen ser muy significativas
  - Es lógico invertir tiempo en el desarrollo de un buen algoritmo sólo si se prevé que éste realizará un gran volumen de operaciones
- Al estudio de la complejidad para tamaños grandes de problema se le denomina análisis asintótico
  - Permite clasificar las funciones de complejidad de forma que podamos compararlas entre si fácilmente
  - Para ello, se definen clases de equivalencia que engloban a las funciones que "crecen de la misma forma".
- Se emplea la notación asintótica

Notación asintótica:

- Notación matemática utilizada para representar la complejidad cuando el tamaño de problema (n) crece ($n \rightarrow \infty$)
- Se definen tres tipos de notación:
  - Notación O (ómicron mayúscula o *big omicron*) $\Rightarrow$ cota superior
  - Notación Ω (omega mayúscula o *big omega*) $\Rightarrow$ cota inferior
  - Notación Θ (zeta mayúscula o *big theta*)$\Rightarrow$ coste exacto

¿Para qué sirven?

- Permite agrupar en clases funciones con el mismo crecimiento



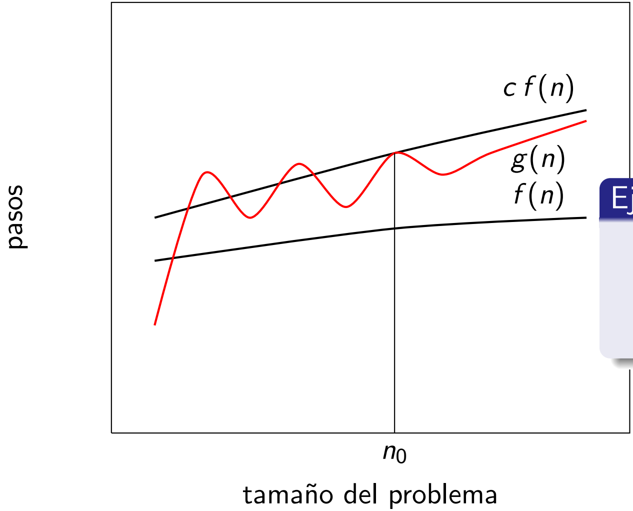
Cota superior. Notación O

- Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$; se define el conjunto $O(f)$ como el conjunto de funciones acotadas superiormente por un múltiplo de f :

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, g(n) \leqslant cf(n)\}$$

- Dada una función $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ se dice que $t \in O(f)$ si existe un múltiplo de f que es cota superior de t para valores grandes de n

Cota superior. Notación O



Ejemplos:

- ¿$3n + 1 \in O(n)$?
- ¿$3n^2 + 1 \in O(n)$?
- ¿$3n^2 + 2 \in O(n^2)$?

Propiedades

$$f \in O(f)$$

$$f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subseteq O(g)$$

$$O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge g \in O(f)$$

$$f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$$

$$f \in O(g) \wedge f \in O(h) \Rightarrow f \in O(\text{mín}\{g, h\})$$

$$f_1 \in O(g_1) \wedge f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(\text{máx}\{g_1, g_2\})$$

$$f_1 \in O(g_1) \wedge f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2)$$

$$f_1 \in O(g_1) \wedge f_2 \in O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$$

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in O(g)$$

$$f(n) = a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0 \text{ con } a_m > 0 \Rightarrow f(n) \in O(n^m)$$

$$O(f) \subset O(g) \Rightarrow f \in O(g) \wedge g \notin O(f)$$

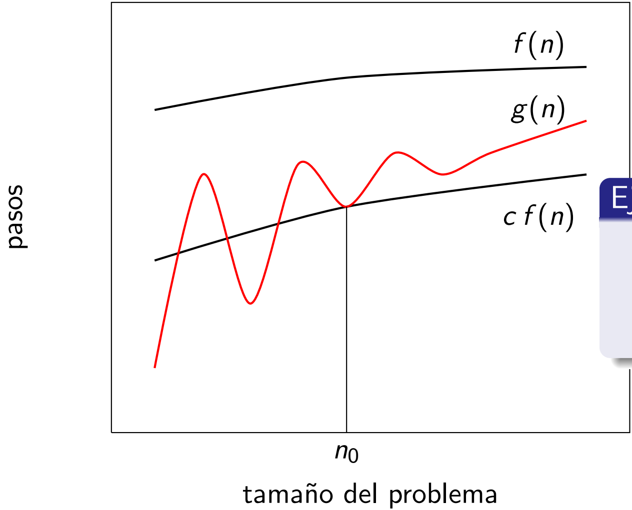
Cota inferior. Notación Ω

- Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$; se define el conjunto $\Omega(f)$ como el conjunto de funciones acotadas inferiormente por un múltiplo de f:

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0, g(n) \geqslant cf(n)\}$$

- Dada una función $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se dice que $t \in \Omega(f)$ si existe un múltiplo de f que es cota inferior de t para valores grandes de n

Cota inferior. Notación Ω



Ejemplos:

- ¿$3n + 1 \in \Omega(n)$?
- ¿$3n^2 + 1 \in \Omega(n)$?
- ¿$3n^2 + 2 \in \Omega(n^2)$?

Propiedades

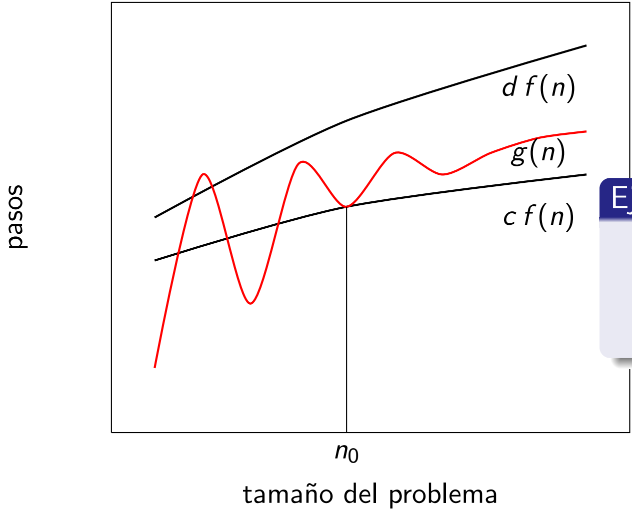
$$
\begin{aligned}
f &\in \Omega(f) \\
f \in \Omega(g) &\Rightarrow \Omega(f) \subseteq \Omega(g) \\
\Omega(f) = \Omega(g) &\Leftrightarrow f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(f) \\
f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) &\Rightarrow f \in \Omega(h) \\
f \in \Omega(g) \wedge f \in \Omega(h) &\Rightarrow f \in \Omega(\max\{g, h\}) \\
f_1 \in \Omega(g_1) \wedge f_2 \in \Omega(g_2) &\Rightarrow f_1 + f_2 \in \Omega(\min(f_1, f_2)) \\
f_1 \in \Omega(g_1) \wedge f_2 \in \Omega(g_2) &\Rightarrow f_1 + f_2 \in \Omega(f_1 + f_2) \\
f_1 \in \Omega(g_1) \wedge f_2 \in \Omega(g_2) &\Rightarrow f_1 f_2 \in \Omega(g_1 g_2) \\
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 &\Rightarrow g \in \Omega(f) \\
f(n) = a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0 &\text{ con } a_m > 0 \\
&\Rightarrow f(n) \in \Omega(n^m)
\end{aligned}
$$

- Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$; se define el conjunto $\Theta(f)$ como el conjunto de funciones acotadas superior e inferiormente por un múltiplo de f:

$$\Theta(f) = \{g : \mathbb{N} \to R^+ | \exists c, d \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geqslant n_0, cf(n) \leqslant g(n) \leqslant df(n)\}$$

- O lo que es lo mismo: $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$
- Dada una función $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ se dice que $t \in \Theta(f)$ si existen múltiplos de f que son a la vez cota superior y cota inferior de t para valores grandes de n

Coste exacto. Notación Θ



Ejemplos:

- $¿3n + 1 \in \Theta(n)?$
- $¿3n^2 + 1 \in \Theta(n)?$
- $¿3n^2 + 2 \in \Theta(n^2)?$

Propiedades

$$f \in \Theta(f)$$

$$f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(g) = \Theta(f)$$

$$\Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(f)$$

$$f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$$

$$f \in \Theta(g) \wedge f \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(\text{máx}\{g, h\})$$

$$f_1 \in \Theta(g_1) \wedge f_2 \in \Theta(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Theta(f_1 + f_2)$$

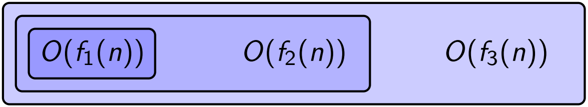
$$f_1 \in \Theta(g_1) \wedge f_2 \in \Theta(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 \in \Theta(g_1 g_2)$$

$$\text{lím}_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k, k \neq 0, k \neq \infty \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$$

$$f(n) = a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0 \text{ con } a_m > 0$$
$$\Rightarrow f(n) \in \Theta(n^m)$$

Jerarquias de funciones

- Los conjuntos de funciones están incluidos unos en otros generando una ordenación de las diferentes funciones. Por ejemplo, para $O(\cdot)$,



- Las clases más utilizadas en la expresión de complejidades son:

$$\underbrace{O(1)}_{\text{constantes}} \subset \underbrace{O(\log\log n)}_{\text{sublogarítmicas}} \subset \underbrace{O(\log n) \subset O(log^{a(>1)} n)}_{\text{logarítmicas}}$$

$$\subset \underbrace{O(\sqrt{n})}_{\text{sublineales}} \subset \underbrace{O(n)}_{\text{lineales}} \subset \underbrace{O(n\log n)}_{\text{lineal-logarítmicas}}$$

$$\subset \underbrace{O(n^2) \subset O(n^{a(>2)})}_{\text{polinómicas}} \subset \underbrace{O(2^n)}_{\text{exponenciales}} \subset \underbrace{O(n!) \subset O(n^n)}_{\text{superexponenciales}}$$

Índice

Cálculo de complejidades

- Pasos para obtener las cotas de complejidad
  1. Determinar la talla o tamaño del problema
  2. Determinar los casos mejor y peor (instancias para las que el algoritmo tarda más o menos)
     - Para algunos algoritmos, el caso mejor y el caso peor son el mismo ya que se comportan igualmente para cualquier instancia del mismo tamaño
  3. Obtención de las cotas para cada caso
     - Algoritmos iterativos
     - Algoritmos recursivos

Sumar elementos

```
1 int sumar( const vector<int> &v ) {
2   int s = 0;
3   for( int i = 0; i < v.size(); i++ )
4     s += v[i];
5   return s;
6 }
```

Línea	Pasos	C. Asintótica
2	1	$\Theta(1)$
3,4	n	$\Theta(n)$
5	1	$\Theta(1)$
Suma	n+2	$\Theta(n)$

Algoritmos iterativos

Buscar elemento

```
1 int buscar( const vector<int> &v, int z ) {
2   for( int i = 0; i < v.size(); i++ )
3     if( v[i] == z )
4       return i;
5   return -1;
6 }
```

Línea	Cuenta Pasos		C. Asintótica	
	Mejor caso	Peor caso	Mejor caso	Peor caso
2	1	n	$\Omega(1)$	$O(n)$
3	1	n	$\Omega(1)$	$O(n)$
4	1	0	$\Omega(1)$	–
5	0	1	–	$O(1)$
Suma	3	$2n+1$	$\Omega(1)$	$O(n)$

$$C_s(n) = 2n + 1$$
$$C_i(n) = 3$$

$$C_s(n) \in O(n)$$
$$C_i(n) \in \Omega(1)$$

Ejercicio

Elemento máximo de un vector

```
int maximo( const vector<int> &v ) {
  int max = v[0];
  for( int i = 1; i < v.size(); i++ )
    if( v[i] > max )
      max = v[i];
  return max;
}
```

Ejemplo

Búsqueda en un vector ordenado

```
int buscar( const vector<int> &v, int x ) {
  int pri = 0;
  int ult = v.size() - 1;
  while( pri < ult ) {
    int m = ( pri + ult ) / 2;
    if ( v[m] < x )
      pri = m + 1;
    else
      ult = m;
  }
  if( v[pri] == x )
    return pri;
  else
    return -1;
}
```

- Dado un algoritmo recursivo:

Búsqueda binaria

```
int buscar( const vector<int> &v, int pri, int ult, int x){
  if( pri == ult )
    return (v[pri] == x) ? pri : -1;
  int m = ( pri + ult ) / 2;
  if( v[m] < x )
    return buscar( v, m+1, ult, x );
  else
    return buscar( v, pri, m, x );
}
```

- El coste depende de las llamadas recursivas, y, por tanto, debe definirse recursivamente:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ \Theta(1) + T(n/2) & n > 1 \end{cases} \qquad (n = \texttt{ult} - \texttt{pri} + 1)$$

- Una relación de recurrencia es una expresión que relaciona el valor de una función f definida para un entero n con uno o más valores de la misma función para valores menores que n

$$f(n) = \begin{cases} a\, f(F(n)) + P(n) & n > n_0 \\ P'(n) & n \leqslant n_0 \end{cases}$$

Donde:

  - $a \in \mathbb{N}$ es una constante
  - $P(n), P'(n)$ son funciones de n
  - $F(n) < n$ (normalmente $n - b$ con $b > 0$, o n/b con $b \geq 1$)

Algoritmos recursivos

- Las relaciones de recurrencia se usan para expresar la complejidad de un algoritmo recursivo aunque también son aplicables a los iterativos
- Si el algoritmo dispone de mejor y peor caso, puede haber una relación de recurrencia para cada caso
- La complejidad de un algoritmo se obtiene en tres pasos:
  1. Determinación de la talla del problema
  2. Obtención de las relaciones de recurrencia del algoritmo
  3. Resolución de las relaciones
- Para resolverlas, usaremos el método de sustitución:
  - Es el método más sencillo
  - Sólo para funciones lineales (sólo una vez en función de sí mismas)
  - Consiste en sustituir cada $f(n)$ por su valor al aplicarle de nuevo la función hasta obtener un término general

Ordenación por selección

- Ejemplo: Ordenar un vector a partir del elemento `pri`:

Ordenación por selección (recursivo)

```
void ordenar( vector<int> &v, int pri) {
  if( pri == v.size() )
    return;
  int m = pri;
  for( int i = pri + 1; i < v.size(); i++ )
    if( v[i] < v[m] )
      m = i;
  swap( v[m], v[pri]);
  ordenar(v,pri + 1);
}
```

- Obtener ecuación de recurrencia a partir del algoritmo:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ \Theta(n) + T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

donde $n = \texttt{v.size()} - \texttt{pri}$.

- Resolviendo la recurrencia por sustitución

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n-1) \\
&= n + (n-1) + T(n-2) \\
&= n + (n-1) + (n-2) + T(n-3) \\
&= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + T(1) \\
&= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

Algoritmo de ordenación por partición o *Quicksort*

- Elemento pivote: sirve para dividir en dos partes el vector. Su elección define variantes del algoritmo
  - Al azar
  - Primer elemento (Quicksort primer elemento)
  - Elemento central (Quicksort central)
  - Elemento mediana (Quicksort mediana)
- Pasos:
  - Elección del pivote
  - Se divide el vector en dos partes:
    - parte izquierda del pivote (elementos menores)
    - parte derecha del pivote (elementos mayores)
  - Se hacen dos llamadas recursivas. Una con cada parte del vector

Quicksort primer elemento

Quicksort

```
void quicksort( int v[], int pri, int ult ) {
  if( ult <= pri )
    return;
  int p = pri;
  int j = ult;
  while(p < j) {
    if( v[p+1] < v[p] ) {
      swap( v[p+1], v[p] );
      p++;
    } else {
      swap( v[p+1], v[j] );
      j--;
    }
  }
  quicksort(v, pri, p-1);
  quicksort(v, p+1, ult);
}
```

- Tamaño del problema: n
  - Mejor caso: subproblemas $(n/2,\ n/2)$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(1) & n \leqslant 1 \\ \Theta(n) + T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

  - Peor caso: subproblemas $(0,\ n-1)$ o $(n-1,\ 0)$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(1) & n \leqslant 1 \\ \Theta(n) + T(0) + T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

Quicksort

- Mejor caso:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n + 2T\left(\frac{n}{2}\right) && \text{Rec. } 1\\
&= n + 2\left(\frac{n}{2} + 2f\left(\frac{n}{2^2}\right)\right) = 2n + 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) && \text{Rec. } 2\\
&= 2n + 2^2\left(\frac{n}{2^2} + 2f\left(\frac{n}{2^3}\right)\right) = 3n + 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) && \text{Rec. } 3\\
&= i\,n + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) && \text{Rec. } i
\end{aligned}
$$

La recursion termina cuando $n/2^i = 1$ por lo que habrá $i = \log_2 n$ llamadas recursivas

$$= n \log_2 n + nT(1) = n \log_2 n + n$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(n \log_2 n)$$

- Peor caso:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + T(n-1) && \text{Rec. } 1 \\ &= n + (n-1) + T(n-2) && \text{Rec. } 2 \\ &= n + (n-1) + (n-2) + T(n-3) && \text{Rec. } 3 \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + T(n-i) && \text{Rec. } i \end{aligned}$$

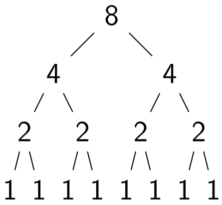
La recursión termina cuando $n - i = 1$ por lo que habrá $i = n - 1$ llamadas recursivas

$$\begin{aligned} &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + T(1) \\ &= \sum_{j=2}^{n} j + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

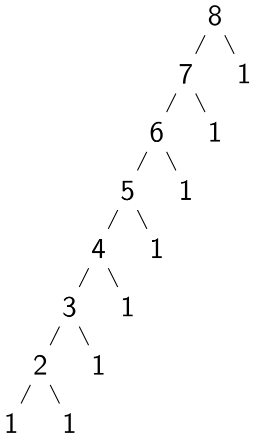
Por tanto,

$$f(n) \in O(n^2)$$

Quicksort



Caso mejor
$\Omega(n \log_2 n)$



Peor caso
$O(n^2)$

Quicksort mediana

- En la versión anterior se cumple que el caso mejor es cuando el elemento seleccionado es la mediana
- En este algoritmo estamos forzando el caso mejor
- Obtener la mediana
  - Coste menor que $O(n \log n)$
  - Se aprovecha el recorrido para reorganizar elementos y para encontrar la mediana en la siguiente subllamada
  - Su complejidad es por tanto de $\Theta(n \log n)$