ESTADÍSTICA

Tema 4: Esperanza y Momentos.

ESTADÍSTICA

Esperanza de una variable (I).

***Definición**: Dada una v.a. X con función de probabilidad o de densidad f, llamaremos esperanza matemática (valor esperado, media) E(X) al número (si existe):*

Caso discreto $E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i)$

Caso continuo $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx$

Supongamos una variable aleatoria X con función de probabilidad:

X	2	4	6	8	10
f(x)	0.3	0.2	0.1	0.3	0.1

E(X) = 2 (0.3) +4 (0.2)+6 (0.1)+8 (0.3)+10 (0.1) = 5.4

Esperanza de una variable (II).

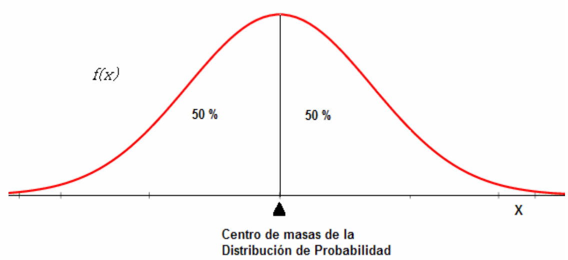
Sea X una v.a. continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6} & x\in(2,4)\\ 0 & resto\end{cases}$$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx=\int_{2}^{4} x\ \frac{x}{6}\ dx=\left[\frac{x^3}{18}\right]_{x=2}^{x=4}=\frac{4^3}{18}-\frac{2^3}{18}=\frac{64-8}{18}=\frac{56}{18}=3.11$$

Interpretación de la esperanza

Se denota por E(X) ó μ y es un promedio ponderado de X, con ponderaciones correspondientes a las probabilidades de ocurrencia.



Esperanza de una función (I).

***Definición**: Dada una función de la v.a. X, h(X) se define la esperanza de h(X) como:*

Caso discreto $E(h(X))=\sum_i h(x_i)f(x_i)=\sum_i h(x_i)P(X=x_i)$

Caso continuo $E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ f(x)dx$

Supongamos una variable aleatoria X con función de probabilidad:

X	2	4	6	8	10
f(x)	0.3	0.2	0.1	0.3	0.1

Calcular la $E(X^2)$

$E(X^2) = 2^2\ (0.3) + 4^2\ (0.2) + 6^2\ (0.1) + 8^2\ (0.3) + 10^2\ (0.1) = 37.2$

ESTADÍSTICA

Esperanza de una función (II).

Definición: *Dada una función de la v.a. bidimensional (X,Y) h(X,Y), se define la esperanza de h(X,Y) como:*

Caso discreto $E(h(X,Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$

Caso continuo $E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, f(x,y) dxdy$

Supongamos una variable aleatoria (X,Y) con función de probabilidad:

Y \ X	2	3	4
2	0	2/4	1/4
1	1/4	0	0

Calcular la E(X Y)

E(X Y) =

*(2*1*1/4)+(2*2*0)+(3*1*0)+(3*2*2/4)+(4*1*0)+(4*2*1/4)=5.5*

ESTADÍSTICA

Propiedades de la Esperanza.

1. *Sean a y b dos constantes, entonces E(aX+b)=aE(X)+b*

Es decir: E(3)= 3

E(3X)= 3E(X)

E(3X+1)= 3E(X)+1

2. *Dadas n variables* $X_1, X_2, \ldots, X_n$

$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)= E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$

3. *Dadas n variables* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *independientes*

$E(X_1 * X_2 * \ldots * X_n)= E(X_1) * E(X_2) * \ldots * E(X_n)$

ESTADÍSTICA

Varianza (I).

***Definición**: Dada una v.a. X con esperanza E(X), se define la varianza de X (si existe) como:*

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

- *También se la representa por σ^2.*
- *Siempre toma valores mayores o iguales que 0.*
- *Nos da el grado de dispersión de los valores de la variable con respecto a su media (esperanza).*
- *Se llama **desviación típica** σ a la raíz cuadrada de la varianza.*

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 + [E(X)]^2 - 2XE(X)) =$$
$$= E(X^2) + E([E(X)]^2) - 2E(XE(X)) = E(X^2) + [E(X)]^2 -$$
$$- 2E(X)E(X) = E(X^2) + [E(X)]^2 - 2[E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ESTADÍSTICA

Propiedades de la Varianza.

***1.** Sean a y b dos constantes, entonces $Var(aX+b)=a^2\ Var(X)$*

Es decir: $Var(3)= 0$

$Var(3X)= 3^2\ Var(X)=9\ Var(X)$

$Var(3X+1)= 9\ Var(X)$

***2.** Dadas n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes*

$Var(X_1+X_2+\ldots+X_n)= Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_n)$

***3.** Dadas X e Y independientes*

$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

$Var(X-Y) = Var(X+(-1)Y)= Var(X) + Var((-1)Y) =$

$Var(X) + (-1)^2 Var(Y)= Var(X) + Var(Y)$

Momentos (I).

Definición: *Dada una v.a. X, se llama momento de orden k centrado en el origen al número (si existe) a* $E(X^k)$

El momento centrado de orden 1 es la E(X)

Definición: *Dada una v.a. X con media E(X), se llama momento central de orden k al número (si existe) a*

$$E((X-E(X))^k)$$

El momento central de orden 1 es 0.
El momento central de orden 2 es la Var(X).

ESTADÍSTICA

Momentos (II).

Definición: *Dada una v.a. X, se llama función generatriz de momentos (f.g.m) a*

$$\psi(t) = E(e^{tX})$$

Propiedades:
1. *En t=0,* $\psi(0) = E(e^0) = E(1) = 1$
2. *La derivada k-ésima en t=0 es el momento centrado de orden k*

$$\psi^k(0) = E(X^k)$$

La derivada primera en t=0 coincide con la E(X)

$$\psi'(0) = E(X)$$

$$\psi''(0) = E(X^2)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \psi''(0) - (\psi'(0))^2$$

ESTADÍSTICA

Momentos (III).

Propiedades:

3. Si Y=aX+b entonces

$$\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$$

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ independientes y sea $Y=X_1+\ldots+X_n$, entonces

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(t)$$

5. Si las f.g.m de dos variables X e Y son idénticas en un entorno de 0, entonces las distribuciones de X e Y son idénticas.

ESTADÍSTICA

Problema

Determinar el número esperado de identificaciones correctas en la v. a. X que asigna tres marcas a tres cigarrillos:
X = {número de identificaciones correctas }

Los valores que puede tomar la variable son
X={0, 1, 3}
Calculamos la función de probabilidad $f(x) = P(X = x) \quad \forall x$
X=0, no se ha realizado ninguna identificación
$P(X=0)= 2/3!=1/3$
$P(X=1)=3/3!=1/2$
$P(X=3)=1/3!=1/6$
La esperanza será:
$E(X)= 0* 1/3 + 1 * 1/2 + 3 * 1/6 = 1$

ESTADÍSTICA

Problema 4.6

ESTADÍSTICA

Calcular el valor esperado de las variables:
a) X = puntuación en el lanzamiento de un dado
b) Z= suma de puntuaciones en el lanzamiento de dos dados

a) X={1, 2, 3, 4, 5, 6}

$$E(X)=\sum_i x_i f(x_i)=\sum_i x_i P(X=x_i)=1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{6}+4\frac{1}{6}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{6}=3.5$$

b) Defino las variables:
X = puntuación en el lanzamiento del primer dado
Y = puntuación en el lanzamiento del segundo dado
E(X+Y) = E(X)+E(Y)= 3.5 + 3.5 = 7

Como Z = X + Y
E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 7