ESTADÍSTICA

Tema 3: Variables Aleatorias.

3.2. Variables bidimensionales.

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Bidimensionales.

Definición: *Llamaremos variable aleatoria bidimensional a toda aplicación*

$$
\begin{aligned}
(X, Y):\ \Omega &\longrightarrow \Re^2 \\
A &\longrightarrow (x_1, y_1) \\
B &\longrightarrow (x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...\}$

Supongamos el experimento aleatorio de medir en las personas la altura y el peso.
Una variable aleatoria X sería la que nos da la altura en cm.
Una variable aleatoria Y sería la que nos da el peso en kg.
La variable bidimensional (X, Y) nos daría para cada persona su altura y su peso.
$(X, Y) = \{(1.70, 60), (1.50, 50), ...\}$

ESTADÍSTICA

Función de Distribución (I).

Definición: *Dada una v. a. bidimensional (X, Y) llamaremos función de distribución*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \qquad \forall (x, y)$$

cumpliendo

1) $0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y)$

2) $F(+\infty, +\infty) = 1 \qquad (P(X \leq +\infty, Y \leq +\infty) = P(\Omega) = 1)$

$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

3) $P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = P(X \leq a_2, Y \leq b_2) - P(X \leq a_1, Y \leq b_2)$

$- P(X \leq a_2, Y \leq b_1) + P(X \leq a_1, Y \leq b_1) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2)$

$- F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

4) *F(x, y) es continua por la derecha*

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (I).

Definición: *Diremos que X es una v. a. discreta si el conjunto imagen de Ω mediante (X, Y) es un conjunto discreto (finito o infinito numerable) de valores.*

$$(X, Y): \Omega \longrightarrow \Re^2$$
$$A \longrightarrow (x_1, y_1)$$
$$B \longrightarrow (x_2, y_2)$$

$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ *conjunto discreto de valores*

Definición: *Llamaremos función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de una v.a. discreta (X, Y)*

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) \qquad \forall (x, y)$$

1) $0 \leq f(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y)$

2) $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$

Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (II).

*La **relación** entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. discreta*

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}f(x_i,y_j)$$

Y					
4	0'07	0'04	0'06	0'01	0'08
3	0'03	0'05	0'03	0'10	0'09
2	0'08	0'05	0'03	0'05	0'08
1	0'01	0'02	0'04	0'05	0'03
	1	2	3	4	5 X

Función de probabilidad f(x, y)
$P(X=x_i, Y=y_j)$

Valores de la variable (X, Y)

F(2, 3)= f(1, 1)+f(1, 2) +f(1, 3)+f(2, 1)+f(2, 2) +f(2,3)=0.01+0.08+0.03+ 0.02+0.05+0.05=0.24

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (III).

***Ejemplo:** Supongamos un espacio muestral que es el resultado de lanzar dos monedas que en una cara tienen un 1 y en la otra un 2.*

Ω={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

Sea X= suma de las dos caras.

Sea Y= máximo de las dos caras

(X, Y)={ (2, 1), (3, 2), (4, 2)}

La función de probabilidad f(x, y) = P(X = x, Y = y) ∀(x, y)

f(2, 1) = P(X = 2, Y = 1)= 1/4

f(3, 2) = P(X = 3, Y = 2)= 2/4

f(4, 2) = P(X = 4, Y = 2)= 1/4

Y			
2	0	2/4	1/4
1	1/4	0	0
	2	3	4 X

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Bidimensionales Continuas (I).

Definición: *Diremos que (X, Y) es una v. a. bidimensional continua si su función de distribución F(x, y) es continua, derivable y con derivada continua.*

Si existe la derivada segunda $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

a f(x, y) se le llama ***función de densidad*** *de la variable (X. Y)*

1) $f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y)$

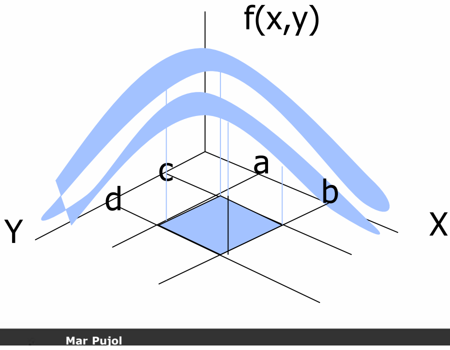
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$

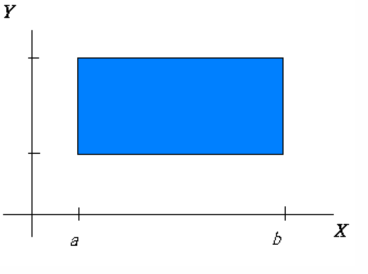
ESTADÍSTICA

Variables Aleatorias Bidimensionales Continuas (II).

La v.a. bivariante formada por (X,Y) es continua si existe una función f (x,y) tal que la probabilidad de que X pertenezca al intervalo (a,b) e Y al intervalo (c,d) se puede calcular como el volumen que queda por debajo de dicha función.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$$

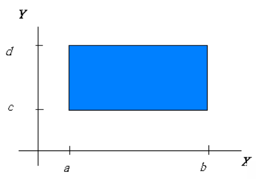


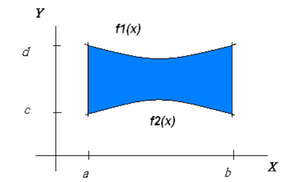


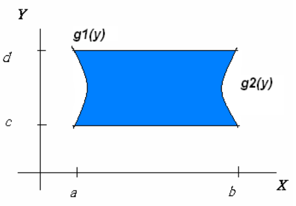
Variables Aleatorias Continuas (III).

La ***relación*** *entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. continua*

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,ds\,dt$$







ESTADÍSTICA