CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES

- Noción de derivada
- Reglas básicas de derivación
- Derivación implícita
- Derivadas de orden superior
- Máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento
- Concavidad (Segunda derivada)
- Teoremas de Rolle y Valor medio
- Regla de L'Hôpital
- Polinomios de Taylor
- Optimización

- Derivada de funciones de varias variables
- Interpretación geométrica
- Derivada direccional
- Matriz Jacobiana
- Derivadas parciales de orden superior. Matriz Hessiana
- Extremos locales de funciones de dos variables
- Optimización

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES

MATRIZ JACOBIANA

Dado un conjunto de funciones $f = (f_1, f_2, \ldots f_s)$, de q variables cada una, se define la matriz Jacobiana de f (J_f) como una matriz con s filas y q columnas, tal que en la fila i, columna j, tiene el elemento $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$J_f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_q} \end{bmatrix}$$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES

MATRIZ HESSIANA

Dado una función real *f* de *n* variables reales. Si todas las segundas derivadas parciales existen, se define la matriz Hessiana de *f* (H_f) como una matriz cuadrada de tamaño n, tal que en la fila *i*, columna *j*, tiene el elemento $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

CALCULO DIFERENCIAL. APLICACIONES

Procedimiento para determinar extremos locales

Criterio de los valores propios

Dada una función *f*, si en (*a*, *b*) sus derivadas parciales son cero y dada su matriz Hessiana *H(a, b)*

$$|H(a,b) - \lambda I| = 0$$

1. Mínimo relativo: todos los valores propios positivos $\lambda_i > 0$
2. Máximo relativo: todos los valores propios negativos $\lambda_i < 0$
3. Punto de silla: tiene valores propios positivos y negativos $\lambda_i > 0$ y $\lambda_i < 0$

Si el $\lambda_i = 0$ no se tiene información

Criterio de las segundas derivadas

Dada una función *f*, si en (*a*, *b*) sus derivadas parciales son cero. Dado el determinante de la matriz Hessiana

$$|H_j| = G = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

Entonces

mínimo local si $G > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$

máximo local si $G > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$

punto de silla si $G < 0$

Si el determinante de la matriz Hessiana G es cero no se decide

CÁLCULO INTEGRAL. APLICACIONES

- El problema del área. Concepto de integral definida
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow
- Integral indefinida
- Integración por cambio de variable
- Integración por partes
- Integrales impropias
- Aplicaciones. Áreas, longitudes y volúmenes
- Integrales múltiples

Integración y aplicaciones

$$\left|\int_{a}^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_n}^{b} f(x)dx\right|$$

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$V = \int_{a}^{b} A(x)dx$$

$$V = \sum_{n\to\infty} (\pi \cdot f(x_i)^2 \Delta x) = \pi \int_{a}^{b} f(x)^2\, dx$$

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{y_a}^{y_b} \int_{x_a}^{x_b} f(x,y)dx\, dy = \int_{x_a}^{x_b} \int_{y_a}^{y_b} f(x,y)dy\, dx$$

ERRORES

- Errores absolutos y relativos (Definiciones y acotación)
- Dígitos significativos y dígitos exactos
- Relación entre error relativo y dígitos exactos
- Errores de redondeo
- Operaciones con errores

Errores

Dígitos exactos

$$\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_{m-n+1}$$

$$\Delta = | A - a | \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

Ejemplo

Si $A=3,25$ y $a=3,29$

¿Cuántos dígitos exactos tiene a?

$$\Delta = | A - a | = 0,04 \qquad a = 3 \cdot 10^{m=0} + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

$$0,04 \leq 0,05$$

$$\Delta \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1} = 0,05$$

$$-1 = m - n + 1 \Rightarrow n = 2$$

por arriba $n=2$

$$\delta \leq \frac{1}{\beta_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

Ejemplo 2

Se pretende aproximar $\mathrm{e} = 2.718281828\ldots$

¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,05%*?

- Calculamos el primer dígito $\beta_m = \beta_0 = 2$
- Queremos que $\delta_a = 0,0005$
- Aplicamos el Teorema de la Acotación

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \quad 0,0005 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \quad 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{1-n}$$

- Y despejamos n $\qquad -3 = 1 - n \qquad n=4$

Errores

Error absoluto de una función raíz

El error absoluto de una raíz cuadrada tiende al error absoluto de su variable partido dos veces el valor de la función, cuando el error absoluto de esta variable tiende a *0*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \Delta f(x) \approx \Delta x \cdot \left| f'(x) \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \Delta\sqrt{x} \approx \frac{\Delta x}{2\left|\sqrt{x}\right|}$$

Ejemplo $\sqrt{(23 \pm 1{,}09)} \approx \sqrt{23} \pm \left(1{,}09 \times \frac{1}{2\left|\sqrt{23}\right|} \right) \approx$

$$\approx \pm \left(4{,}796 \pm 0{,}11364\right) \approx \pm \left(4{,}796 \pm 2{,}37\%\right)$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

- Método de la Bisección
- Método de la secante
- Método de la Regula Falsi
- Método de Newton
- Método del punto fijo

Método de la Bisección

Algoritmo del método de búsqueda de raíces por bisección:

```
BúsquedaPorBisección (f(x),a,b,ε,Δ,n)
      i:=0
      h:=abs(b-a)
      repetir
                  i:=i+1
                  c:=(a+b)/2
                  h:=h/2
                  si signo(f(a))*signo(f(c))<0
                        entonces
                              b:=c
                        si no
                              a:=c
      hasta (abs(f(c))≤ε) ó (h≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Método de la Secante

Algoritmo del método de búsqueda de raíces por la secante:

```
BúsquedaPorSecante (f(x),a,b,ε,Δ,n)
      i:=0
      repetir
                  i:=i+1
                  si abs(f(a))>abs(f(b)) entonces
                        (*/ Intercambiar 'a' por 'b' /*)
                        a⇔b
                  h:=f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
                  c:=a-h
                  b:=c
      hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Método Regula Falsi

Algoritmo del método de Regula Falsi o falsa regla:

```
BúsquedaRegulaFalsi (f(x),a,b,ε,Δ,n)
    i:=0
    repetir
            i:=i+1
            si abs(f(a))>abs(f(b)) entonces
                a⇔b
            h:=f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
            c:=a-h
            si signo(f(a))*signo(f(c))<0
                entonces b:=c
                si no     a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Método de Newton

Algoritmo del método de búsqueda de raíces por Newton:

```
BúsquedaPorNewton (f(x),a,ε,Δ,n)
•       f'(x)::=df(x)/dx
    i:=0
    repetir
            i:=i+1
            h:=f(a)/f'(a)
            c:=a-h
            a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Método de Newton modificado

Algoritmo para Newton modificado quedaría así:

```
BúsquedaPorNewtonmodificado (f(x),a,ε,Δ,n)
    f’(x)::=df(x)/dx
    f’’(x)::=df’(x)/dx
    i:=0
    repetir
        i:=i+1
        h:=(f(a)f’(a))/((f’(a))^2-(f(a)f’’(a)))
        c:=a-h
        a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

Interpolación

- Concepto y Teorema de la Aproximación
- Interpolación de Lagrange
- Tablas de interpolación
- Diferencias divididas
- Interpolación Hermite
- Splines
- Curvas paramétricas
- Curvas de Bézier

Interpolación

- Interpolación de Lagrange

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \ldots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Tablas de interpolación

Interpolación

- Algoritmo de Neville

$$p_{i,i}(x) = y_i \quad 0 \le i \le n$$

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j)\,p_{i,j-1}(x) + (x_i - x)\,p_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j}$$

x_i	$y_i = f(x_i)$			
x_0	$p_{0,0}(x) = y_0$			
		$p_{0,1}(x)$		
x_1	$p_{1,1}(x) = y_1$		$p_{0,2}(x)$	
		$p_{1,2}(x)$		$p_{0,3}(x)$
x_2	$p_{2,2}(x) = y_2$		$p_{1,3}(x)$	
		$p_{2,3}(x)$		
x_3	$p_{3,3}(x) = y_3$			

Pirámide de Diferencias divididas

Pirámide para calcular $P_n(x)$ para $n=3$:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	…	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				

Los valores para calcular $P_n(x)$ son los de la diagonal superior:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Hermite por diferencias divididas

Versión para Hermite:

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-j}, \cdots, z_i]$
x_0	$f(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
			$\frac{f[z_1,z_2]-f[z_0,z_1]}{z_2-z_0}$	
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$\vdots$	
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\vdots$	$\vdots$
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\vdots$	$f[z_0, \cdots, z_n]$
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$\vdots$	$\frac{f[z_1,\cdots,z_{2n}]-f[z_0,\cdots,z_{2n-1}]}{z_{2n}-z_0}$
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$	$\vdots$	
x_n	$f(x_n)$		$\frac{f[z_{2n},z_{2n-1}]-f[z_{2n-1},z_{2n-2}]}{z_{2n}-z_{2n-2}}$	
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$		

Tabla para spline cúbico natural

$$h_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & m_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_n = 0$$

x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
x_0	h_0	a_0	b_0	c_0	d_0
x_1	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	h_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}
x_n		a_n		c_n	

$$m_{i,i} = 2(h_{i-1} + h_i)$$

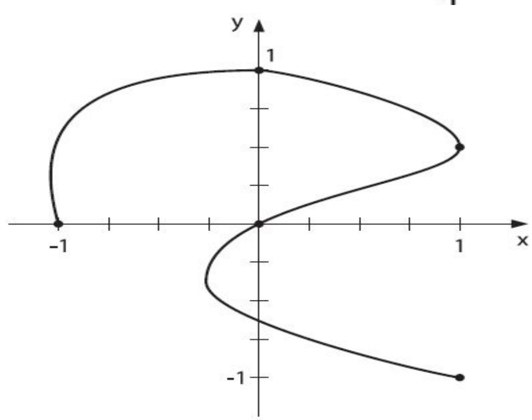
$$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = h_i$$

$$v_i = (3/h_i)(a_{i+1} - a_i) - (3/h_{i-1})(a_i - a_{i-1})$$

Curvas paramétricas. Ejemplo

Elegimos los puntos t_i espaciados de forma equidistante en [*0. 1*]. obteniendo los siguientes c

i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	-1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	-1



Ejemplo Polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein de grado *3*:

$$B_0^3(t) = \binom{3}{0} t^0 (1-t)^{3-0} = \frac{3!}{0!3!}(1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \binom{3}{1} t^1 (1-t)^{3-1} = \frac{3!}{1!2!} t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = \binom{3}{2} t^2 (1-t)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} t^2(1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3} t^3 (1-t)^{3-3} = \frac{3!}{3!0!} t^3 = t^3$$

Ejemplo. Curva de Bézier de 3 puntos

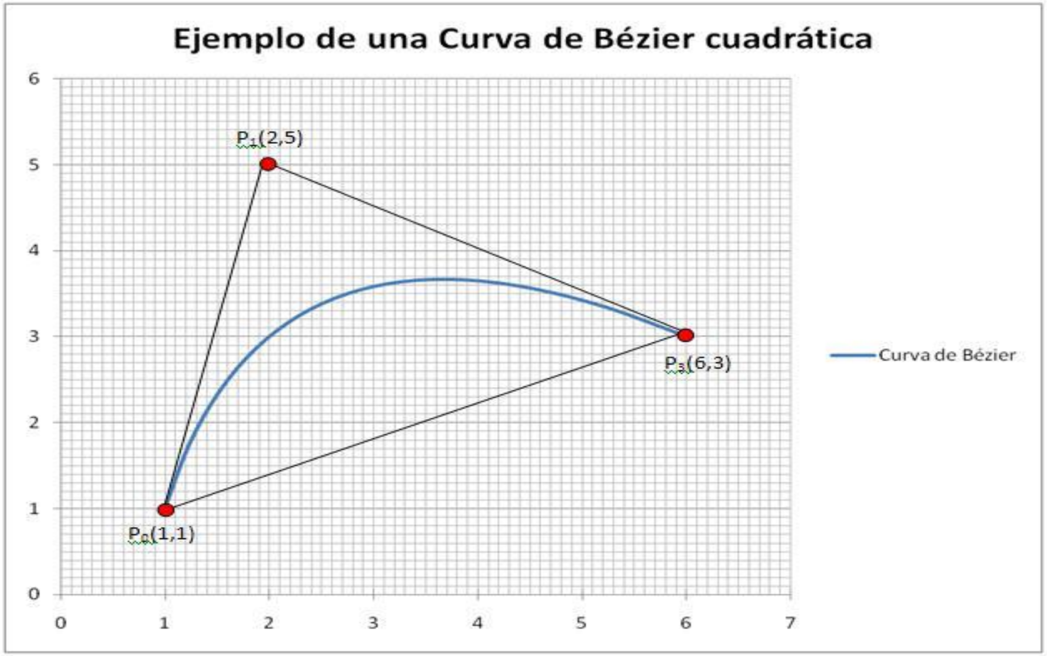
$P_0=(1,1)$ $P_1=(2,5)$ $P_2=(6,3)$

$$(x(t),y(t))=\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t)P_i = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

$$(x(t),y(t))=(1-t)^2(1,1)+(2t-2t^2)(2,5)+t^2(6,3)$$

$$x(t)=(3t^2+2t+1)$$

$$y(t)=(-6t^2+8t+1)$$



Curvas de Bézier. Formulación de De Casteljau

$$
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[dr, "(1-t)"] & & \\
& (1-t)P_0 + tP_1 \arrow[dr, "(1-t)"] & \\
P_1 \arrow[ur, "t"'] \arrow[dr, "(1-t)"] & & (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\
& (1-t)P_1 + tP_2 \arrow[ur, "t"'] & \\
P_2 \arrow[ur, "t"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Primera columna: Puntos de control.
Segunda columna: Curvas de Bézier lineales.
Tercera columna: Curvas de Bézier cuadráticas.
Cuarta columna: Curvas de Bézier cúbicas.

Es una forma recursiva de construir las curvas.

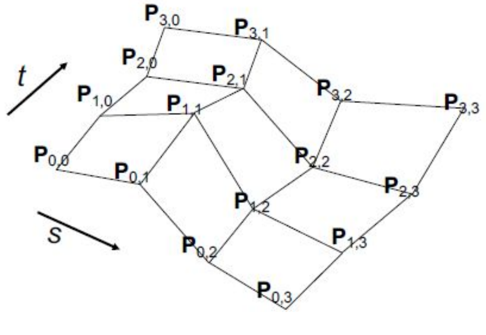
Superficies de Bézier.

Sea una superficie bicúbica de Bezier (bicúbica significa que es una función cúbica en los parámetros s y t)

$$b(s,t) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(s) B_j^3(t) P_{i,j}$$

Una curva cúbica tiene 4 puntos de control, y una superficie bicúbica tiene una cuadrícula de puntos de control 4 x 4

$$P = \{P_{0,0}, P_{0,1}, P_{0,2}, P_{0,3}, P_{1,0}, \dots, P_{3,3}\}$$



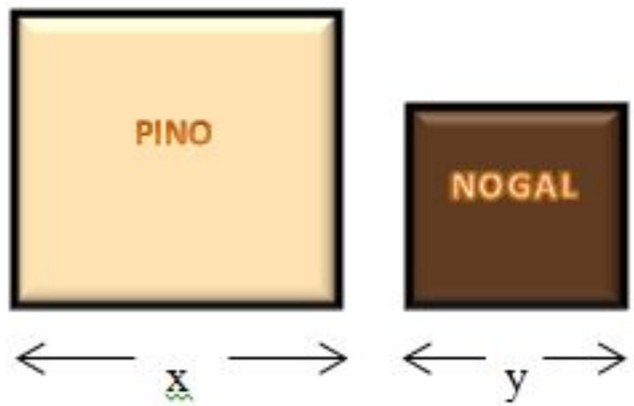
1. Un cliente acude a una tienda de bricolaje y le indica al dependiente que necesita dos piezas de madera cuadradas, una de pino y otra de nogal, cuyo perímetro total (ambas piezas) debe ser exactamente 10 metros y que, además, desea gastarse lo menos posible.

   Antes de cortar las piezas, el dependiente introduce los datos en una aplicación informática que calcula las medidas óptimas y el coste total.

   Sabiendo que el precio de las maderas que desea el cliente es de 2 € el m^2 para la de pino y de 3 € por m^2 para la de nogal.

   a) *(1,8 puntos)* ¿Cuánto debe medir el lado de cada una de las piezas para que el coste total sea mínimo?

   b) *(0,2 puntos)* ¿Cuánto le costarán las dos piezas al cliente?



a) Dados los dos cuadrados con lados x e y respectivamente, el perímetro total viene dado por la expresión $4x + 4y$. Como debe ser igual a 10 m., tendremos

$$4x + 4y = 10. \qquad (1)$$

La superficie de ambas piezas viene dada por la expresión $x^2 + y^2$.

Con el precio de la madera que se nos ha facilitado, el coste de la compra es

$$2x^2 + 3y^2 \text{ €}. \qquad (2)$$

Despejando y en la expresión (1) tendremos

$$y = \frac{10-4x}{4} = \frac{5}{2} - x\,.$$

Sustituyendo en la expresión (2) tendremos la función coste

$$C(x) = 2x^2 + 3\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = 5x^2 - 15x + \frac{25}{4}.$$

El coste mínimo se alcanzará en los valores de x que cumplan $C'(x)=0$ y $C''(x)>0$.

$$C'(x)=10x-15=0 \rightarrow x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ m.}$$

$$C''(1,5)=10>0$$

A partir del valor obtenido para x, vamos a calcular el valor de y

$$y = \frac{5}{2} - x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \text{ m.}$$

En consecuencia, la pieza de pino debe medir 1'5 m. de lado y la de nogal 1 m. de lado.

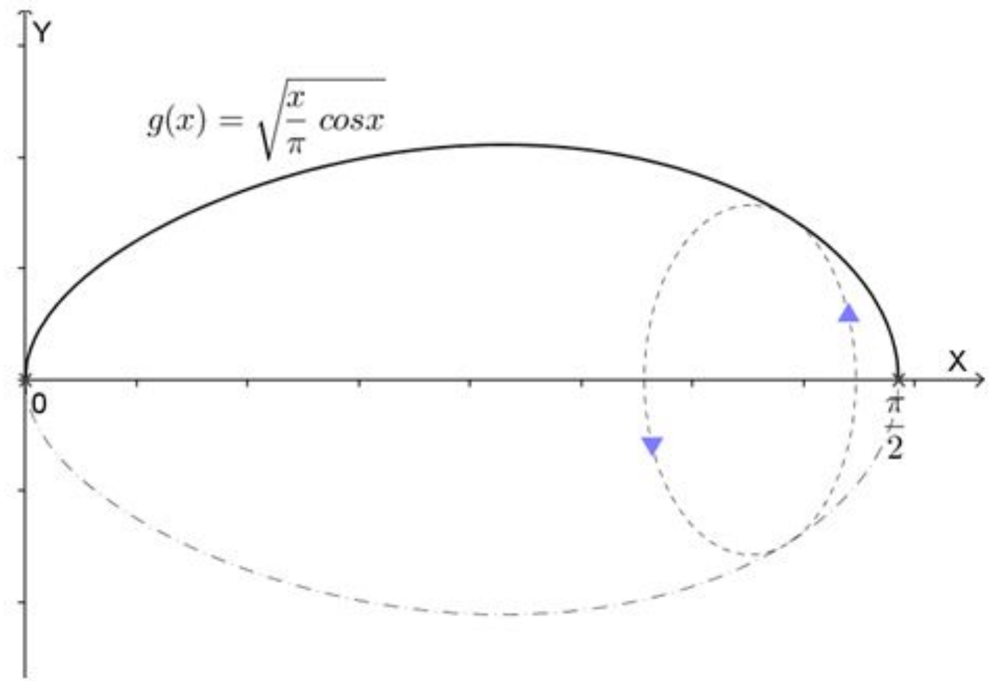
b) El coste total de la compra es

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot 1^2 = 7'5 \text{ €}.$$

2. Integración.

a) *(1,3 puntos)* Dada la función $f(x)=\frac{x}{\pi}\cos x$, justifica (utilizando integración por partes) que $\int f(x)dx=\frac{1}{\pi}(\cos x+x\ \mathrm{sen}\, x)+C$.

b) *(0,7 puntos)* Dada la función $g(x)=\sqrt{f(x)}$, haciendo uso del apartado anterior, calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar el arco de curva $g(x)$, con $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, alrededor del eje de abscisas.



a) Recordemos, en primer lugar, la fórmula utilizada en la integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Denotando por $u = \frac{x}{\pi}$, $dv = \cos x\,dx$, tendremos $du = \frac{1}{\pi}dx$, $v = \int \cos x\,dx = senx$

y, en consecuencia,

$$\int \frac{x}{\pi}\cos x\,dx = \frac{x}{\pi}\,\text{sen}\,x - \frac{1}{\pi}\int \text{sen}\,x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x\,\text{sen}\,x + \cos x\right) + C.$$

b) El volumen pedido viene dado por la expresión

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pi\left[\frac{1}{\pi}\left(x\,\text{sen}\,x + \cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

1. *(2 puntos)* Se sabe que $H_3(x) = 4 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + 3/2(x+1)^2(x-1)$ es el polinomio interpolado de Hermite que aproxima cierta función f, basado en los datos $f(-1), f(1), f'(-1), f'(1)$.

   a) (0.25 puntos) ¿Por qué el grado del polinomio es 3?

   b) (1.75 puntos) Sin evaluar $H_3(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite utilizada para la construcción de $H_3(x)$.

1. *(2 puntos)* Se sabe que $H_3(x) = 4 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + 3/2(x+1)^2(x-1)$ es el polinomio interpolado de Hermite que aproxima cierta función f, basado en los datos $f(-1), f(1), f'(-1), f'(1)$.

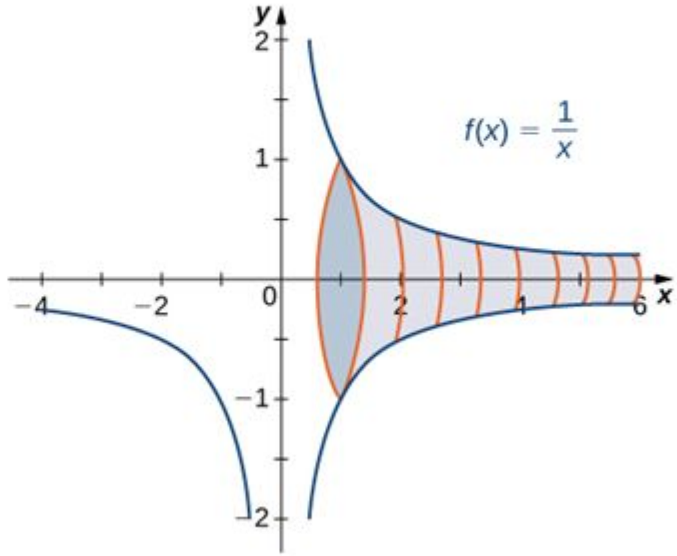
   a) (0.25 puntos) ¿Por qué el grado del polinomio es 3?

   b) (1.75 puntos) Sin evaluar $H_3(x)$ ni sus derivadas en -1 y 1, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite utilizada para la construcción de $H_3(x)$.

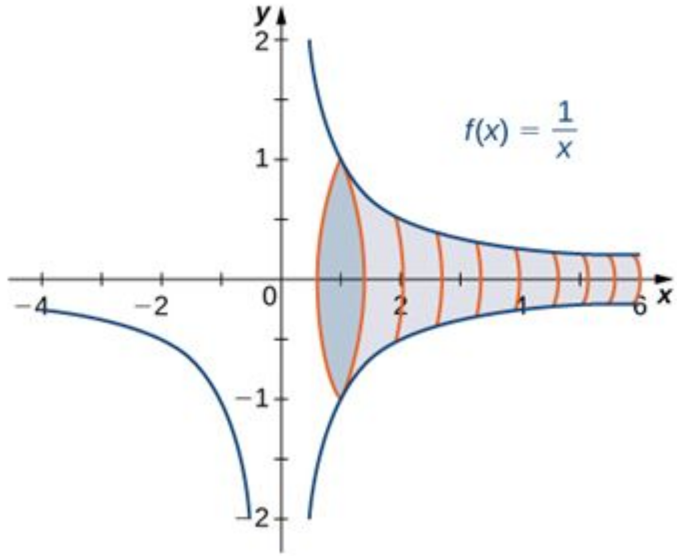
Porque grado =2*n-1, con n=número de puntos

-1	4			
		3		
-1	4		-2	
		-1		3/2
1	2		1	
		1		
1	2			

2. *(2 puntos)* Encontrar el volumen del solido de revolución obtenido al girar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del eje x, desde $x = 1$ hasta $x = \infty$.



2. *(2 puntos)* Encontrar el volumen del solido de revolución obtenido al girar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del eje x, desde $x = 1$ hasta $x = \infty$.



Tenemos que $V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{t \to \infty} (-\frac{1}{x})_1^t = \cdots = \pi$

3. La velocidad de una partícula que se mueve, expresada en metros por segundo, está determinada por la función $v(t) = t^3 - 2t^2$.

Utilizando el método de la Regla Falsa (o Regula Falsi) se pide que obtengas una estimación del tiempo necesario para que la partícula alcance la velocidad de 1 metro por segundo partiendo del reposo (t=0). Para ello:

a) *(0,1 puntos)* Plantea la ecuación a resolver.

b) *(0,1 puntos)* Expresa la fórmula de recurrencia del método.

c) *(1,3 puntos)* Realiza hasta la quinta iteración, considerando como intervalo inicial [2,3] y utilizando para los cálculos cinco cifras decimales con redondeo.

d) *(0,5 puntos)* Calcula el número de dígitos exactos en la estimación obtenida en el apartado anterior.

Método Regula Falsi

Algoritmo del método de Regula Falsi o falsa regla:

```
BúsquedaRegulaFalsi (f(x),a,b,ε,Δ,n)
    i:=0
    repetir
            i:=i+1
            si abs(f(a))>abs(f(b)) entonces
                a⇔b
            h:=f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
            c:=a-h
            si signo(f(a))*signo(f(c))<0
                entonces b:=c
                si no    a:=c
    hasta (abs(f(c))≤ε) ó (abs(h)≤Δ) ó (i=n)
devolver c
```

a) La ecuación a resolver es v(t) = 1, esto es, $t^3 - 2t^2 - 1 = 0$.

b) La fórmula para obtener en cada iteración, i, el valor interior c_i del intervalo $[a_i, b_i]$ es

$$c_i = a_i - h_i,\ i = 1, 2, \cdots$$

donde

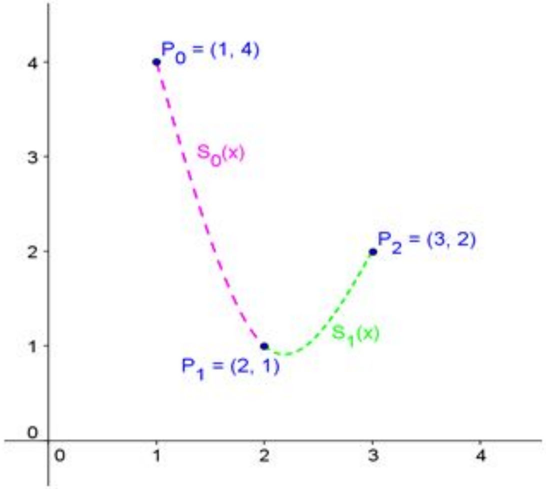
$$h_i = \frac{v(a_i)(b_i - a_i)}{v(b_i) - v(a_i)},\ i = 1, 2, \cdots$$

c)

i	a_i	b_i	c_i	h_i	$v(a_i)$	$v(b_i)$	$v(c_i)$
1	2	3	2,11111	-0,11111	-1	8	-0,5048
2	2,11111	3	2,16387	-0,05276	-0,5048	8	-0,2327
3	2,16387	3	2,18750	-0,02363	-0,2327	8	-0,10276
4	2,18750	3	2,19781	-0,01003	-0,10276	8	-0,04451
5	2,19781	3	2,20225	-0,00444	-0,04451	8	-0,01912

d) $t^3 - 2t^2 - 1 = 0 \rightarrow t = 2{,}20557$. Error= $\Delta = |2{,}20557 - 2{,}20225| = 0{,}00332$.
$\rightarrow 0{,}00332 < 0{,}5 \cdot 10^{1-n} \rightarrow n = 3$.

4. *(2 puntos)* Encuentra el spline cúbico natural $S(x)$ que empieza en el punto $P_0 = (1, 4)$, pasa por el punto $P_1 = (2, 1)$ y termina en el punto $P_2 = (3, 2)$.



No es necesario que agrupes las potencias en x de los polinomios $S_0(x)$ y $S_1(x)$, puedes dejarlos con potencias de $(x - x_i)$, como en la expresión

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3; \quad \text{con } i = 0,1.$$

Observa que el número de trozos del spline es $n = 2$ y recuerda que las indeterminadas se pueden obtener de las expresiones

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \text{para } i = 0,1;$$

$$a_i = f(x_i), \quad \text{para } i = 0,1,2;$$

$$v_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}), \quad \text{para } i = 1;$$

$$c_0 = c_2 = 0, \quad [c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1}[v_1];$$

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad \text{para } i = 0,1;$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad \text{para } i = 0,1.$$

Completa la siguiente tabla y escribe S(x) en el espacio reservado para ello.

i	x_i	h_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	1	4	-4	0	1
1	2	1	1	-1	3	-1
2	3		2		0	

$$v_1 = \frac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{3(a_1 - a_0)}{h_0} = \frac{3(2-1)}{1} - \frac{3(1-4)}{1} = 3 + 9 = 12$$

$$[c_1] = [2(h_0 + h_1)]^{-1} \text{x} [v_1] = [2(1+1)]^{-1} \text{x} [12] = [4]^{-1} \text{x} [12] \qquad c_1 = \frac{1}{4} 12 = 3$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) = \frac{(1-4)}{1} - \frac{1}{3} 3 = -4$$

$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = \frac{(2-1)}{1} - \frac{1}{3} 6 = -1$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{(3-0)}{3} = 1$$

$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{(0-3)}{3} = -1$$

5. Se pretende aproximar los valores que toma la función $f(\mathrm{x}) =$ sen x mediante un polinomio de interpolación de Hermite, partiendo de dos valores x_0, x_1.

a) *(0,1 puntos)* Obtén, de forma razonada, el grado máximo del polinomio buscado.

b) *(0,6 puntos)* Si los valores de partida son $x_0 = 0{,}40$, $x_1 = 0{,}42$, completa la tabla de diferencias divididas de Hermite y anota los resultados en el espacio reservado a continuación.

0,40	0,38942			
		0,92106		
0,40	0,38942		-0,20300	
		0,91700		0,37500
0,42	0,40776		-0,19550	
		0,91309		
0,42	0,40776			

c) *(0,7 puntos)* A partir de la tabla del apartado anterior, construye el polinomio interpolador de Hermite.

d) *(0,6 puntos)* Haciendo uso del polinomio obtenido en el apartado anterior, obtén un valor aproximado de sen 0,41 y compáralo con el que se obtiene con la calculadora.

Notas:

- Redondea a cinco cifras decimales todos los cálculos.
- Los valores x de la función $f(\mathrm{x}) =$ sen x vienen expresados en radianes ($f : R \to [0,1]$); no olvides configurar tu calculadora en modo radián.
- En el apartado c) no es necesario desarrollar las potencias de $(x - x_0)$, $(x - x_1)$ y simplificar.
- Si el apartado b) se te resiste, te recomendamos que hagas los siguientes ya que los valores que necesitas están en la tabla.

a) Partiendo de dos valores x_0, x_1, el grado máximo del polinomio de interpolación es $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

b) En la tabla.

c) $P(x) = 0{,}38942 + 0{,}92106\ (x - x_0) - 0{,}203\ (x - x_0)^2 - 0{,}375\ (x - x_0)^2 (x - x_1)$

d) Denotando por c=0,41, se tiene que $c - x_0 = 0{,}01$, $c - x_1 = -0{,}01$ y $(c - x_0)^2 = 0{,}0001$.
Operando en $P(x)$, se tiene que $P(c) = 0{,}39861$.
Por otro lado, haciendo uso de la calculadora y redondeando a cinco cifras decimales, se obtiene el mismo resultado: sen c = 0,39861.

4. *(2 puntos)* La cantidad de calor que se desprende de una reacción química al interactuar x moléculas de un compuesto con y moléculas de otro se modelista por la función matemática $Q(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar x e y para que la cantidad de calor desprendida sea máxima.

4. *(2 puntos)* La cantidad de calor que se desprende de una reacción química al interactuar x moléculas de un compuesto con y moléculas de otro se modelista por la función matemática $Q(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar x e y para que la cantidad de calor desprendida sea máxima.

$f_x = -10x - 2y + 42 = 0$ $\quad$ $f_y = -16y - 2x + 102 = 0x = 3y = 6$

$f_{xx} = -10f_{yy} = -16f_{xy} = f_{yx} = -2$

$G = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 156 > 0$

Como $G > 0$ y $f_{xx} < 0$ es un máximo

2. **(2 puntos)** Dados los puntos de control $p_0=(-1,0)$, $p_1=(1,1)$, $p_2=(2,3)$. Calcula la curva de Bezier mediante:

    a. La fórmula recursiva de De Casteljau
    b. Polinomios de Bernstein.

$(-1,0)$		
	$(1-t)(-1,0)+t(1,1)$	
$(1,1)$		$(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))$
	$(1-t)(1,1)+t(2,3)$	
$(2,3)$		

$$(X(t),Y(t))=(1-t)((1-t)(-1,0)+t(1,1))+t((1-t)(1,1)+t(2,3))=$$
$$=(1-2t+t^2)(-1,0)+(t-t^2)(1,1)+(t-t^2)(1,1)+t^2(2,3)$$

$$X(t)=-(1-2t+t^2)+2(t-t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$$

$$Y(t)=2(t-t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$$

b.

$$(X(t),Y(t)) =(1-t)^2(-1,0)+2(1-t)t(1,1)+t^2(2,3)=(1-2t+t^2)(-1,0)+(2t-2t^2)(1,1)+t^2(2,3)$$

$$X(t)= -(1-2t+t^2)+(2t-2t^2)+2t^2=-1+2t-t^2+2t-2t^2+2t^2=-t^2+4t-1$$

$$Y(t)=(2t-2t^2)+3t^2=2t-2t^2+3t^2=t^2+2t$$

6. *(1 punto)* Se tienen tres valores aproximados con sus correspondientes cotas de error absoluto:

$$A = 8 \pm 0{,}08 \quad B = 3 \pm 0{,}06 \quad C = 0{,}25 \pm 0{,}01$$

Calcula el valor aproximado de $\sqrt{B - AC}$ y su cota de error relativo.

$$\sqrt{B-(8\pm 1\%)(0{,}25\pm 4\%)}=\sqrt{B-(2\pm 5\%)}=\sqrt{(3\pm 0{,}06)-(2\pm 0'1)}=\sqrt{1\pm 0{,}16}$$

$$f(x\pm\Delta)=f(x)\pm\Delta\cdot f'(x)\quad \left\|\begin{matrix} f(x)=\sqrt{x} \\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{matrix}\right\| f(1\pm 0{,}16)=\sqrt{1}\pm 0{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{1}}=1\pm 0{,}08=$$

$$=1\pm 8\%$$

3. **(2 puntos)** Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 e^x$, el eje x y las rectas x=0 y x=1.

3. **(2 puntos)** Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 e^x$, el eje x y las rectas x=0 y x=1.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\int x\, e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = 1 & v = e^x \end{vmatrix} = e^x x^2 - 2\left[x e^x - \int e^x dx\right] = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x]_0^1 = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$$

Se ha utilizado dos veces la integración por partes.

2. Usando el método de Newton-Raphson con tres iteraciones, y tomando como valor inicial $x_0 = 1.8$, encontrad el valor de $\ln 7$ indicando el error absoluto que se comete.
Ten en cuenta que $\ln 7$ es una raíz de la función $f(x) = e^x - 7$.

2. Usando el método de Newton-Raphson con tres iteraciones, y tomando como valor inicial $x_0 = 1.8$, encontrad el valor de $\ln 7$ indicando el error absoluto que se comete.
Ten en cuenta que $\ln 7$ es una raíz de la función $f(x) = e^x - 7$.

	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	h
1	1.8	-0.950353	6.049647	-0.157092
2	1.957092	0.078712	7.078712	0.01112
3	1.945972	0.000433	7.000433	0.000062

La función es $f(x) = e^x - 7$ y su derivada $f'(x) = e^x$. El método de Newton-Raphson sigue la fórmula de recurrencia: $x_{i+1} = x_i - h = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.
Así pues el valor de $\ln 7$ es $x_3 = 1.945972 \pm 0.000062$

4. **(2 puntos)** Aplicar el método de Newton para obtener una estimación del punto de corte de las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ con dos dígitos decimales exactos. Tomar 1 como valor inicial y redondea las operaciones a 8 decimales.

4. **(2 puntos)** Aplicar el método de Newton para obtener una estimación del punto de corte de las funciones $g(x) = x - 1/2$ y $h(x) = \cos x$ con dos dígitos decimales exactos. Tomar 1 como valor inicial y redondea las operaciones a 8 decimales.

	x	$f(x)$	$f'(x)$	h
1	1	-0,04030231	1,84147098	-0,02188593
2	1,02188593	0,00012792	1,85309354	0,00006903
3	1,0218169			
4				
5				
6				
7				

$f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x) \qquad f'(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$

El resultado es una magnitud de orden unidades. Si exigimos exactitud a las décimas y centésimas (dos dígitos decimales exactos) tenemos tres dígitos exactos, por lo que:

$m = 0 \qquad n = 3$

Segú el teorema de la acotación: $\Delta \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = 0{,}5^{-2} = 0{,}005$

Sólo se necesitan dos iteraciones porque h $<= 0{,}005$ garantiza 3 dígitos exactos.

El resultado es 1,0218169 con los dígitos exactos 1,02

Dado el spline cúbico interpolador de los puntos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,a)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si \;\; 0 \leq x \; < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si \;\; 1 \leq x \; \leq 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural.

Dado el spline cúbico interpolador de los puntos $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2, a)$:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3 & si \;\; 0 \leq x \; < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & si \;\; 1 \leq x \; \leq 2 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b, c y d para que cumpla todas las condiciones de un spline cúbico de extremo natural.

$$S'_0(x) = 2 - 3x^2$$
$$S''_0(x) = -6x$$

$$S_1(x) = 2 + bx - b + cx^2 - 2cx + c + dx^3 - 3dx^2 + 3dx - d$$
$$S'_1(x) = b + 2cx - 2c + 3dx^2 - 6dx + 3d$$
$$S''_1(x) = 2c + 6dx - 6d$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1'(1) = S_0'(1) \\ b + 2c - 2c + 3d - 6d + 3d = -1 \end{array}\right\} b = -1$$
$$\left.\begin{array}{l} S_1''(1) = S_0''(1) \\ 2c + 6d - 6d = -6 \end{array}\right\} c = -3$$
$$\left.\begin{array}{l} S_1''(2) = 0 \\ 2c + 12d - 6d = 2c + 6d = -6 + 6d = 0 \end{array}\right\} d = 1$$

$$S_1(x) = 2 - (x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$
$$S_1(2) = 2 - 1 - 3 + 1 = -1 \qquad a = -1$$

Supongamos que nos dan una curva de Bezier de la forma:

$$B(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (1 + t + t^2, t^2) \quad t \in [0\,, 1]$$

Encuentra los puntos de control que definen esa curva.

Recuerda que la curva de Bezier pasa por el primer y el último punto de control.

Supongamos que nos dan una curva de Bezier de la forma:

$$B(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (1 + t + t^2, t^2) \quad t \in [0\,,1]$$

Encuentra los puntos de control que definen esa curva.

Recuerda que la curva de Bezier pasa por el primer y el último punto de control.

Si t=0 tenemos el primer punto de control P_0 y si t=1 el último P_2.

$$t = 0 \rightarrow\ P_0 = (1, 0) \qquad t = 1 \rightarrow\ P_2 = (3, 1)$$

Mediante polinomios de Bernstein:

si $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (x, y)$ y $P_2 = (3, 1)$

y $B_0^2(t) = (1 - t)^2$, $B_1^2(t) = 2(1 - t)t$ y $B_2^2(t) = t^2$

$$B(t) = (1 + t + t^2, t^2) = (1 - t)^2(1{,}0) + 2(1 - t)t(x, y) + t^2(3{,}1)$$

$$1 + t + t^2 = (1 - t)^2 + (2t - 2t^2)x + 3t^2$$

$$t^2 = (2t - 2t^2)y + t^2$$

$$P_1 = \left(x = \frac{3t-3t^2}{2t-2t^2}, y = 0\right) \qquad \text{para } t = 0{,}5 \qquad P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Supongamos que nos dan una curva de Bezier de la forma:

$$B(t) = \big(X(t), Y(t)\big) = (1 + t + t^2, t^2) \quad t \in [0\,,1]$$

Encuentra los puntos de control que definen esa curva.

Recuerda que la curva de Bezier pasa por el primer y el último punto de control.

Mediante De Casteljau:

si $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (x,y)$ y $P_2 = (3,1)$

$b_0^0(t) = P_0 = (1,0)$	$b_1^0(t) = (1-t)(1,0) + t(x,y)$	$b_2^0(t) = (1-t)b_1^0(t) + tb_1^1(t) = B(t) = (1+t+t^2, t^2)$
$b_0^1(t) = P_1 = (x,y)$	$b_1^1(t) = (1-t)(x,y) + t(3,1)$	
$b_0^2(t) = P_2 = (3,1)$		

Para $t = \frac{1}{2}$

$(1,0)$	$b_1^0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(x,y)$	$b_2^0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}b_1^0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$
(x,y)	$b_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(x,y) + \frac{1}{2}(3,1)$	
$(3,1)$		

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{x}{2} = \frac{7}{4} \qquad \frac{y}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad y = 0 \quad P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$