Parcial 1.

1. Una carga q = +3 μC está distribuida uniformemente en una esfera maciza de 5cm de radio. Calcula el trabajo necesario para desplazar una carga puntual de +100 pC desde un punto situado a una distancia r_1 = 10 cm del centro de la esfera, a un punto situado a r_2 = 20 cm del centro de la esfera [2 puntos]. ¿Qué signo tiene el trabajo? ¿Quién lo realiza? [1 punto]. *Dato:* $K_e = 9\cdot 10^9$ U.S.I.

   Solución:

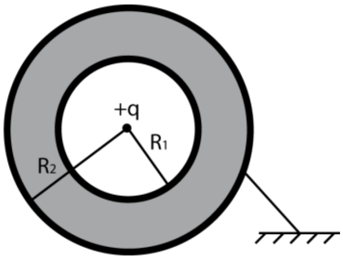
   Teniendo en cuenta la ley de Gauss la esfera se comporta como una carga puntual para r>5 cm. El trabajo para ir del punto 1 al 2 vendrá determinado por: $W_1^2 = -q_0(V_2 - V_1)$

   Siendo $V = K_e \dfrac{q}{r}$ el potencial creado por la distribución de carga en los puntos 1 y 2 (en ambos casos r>5 cm) y q_0 la carga puntual.

   $$W_1^2 = -q_0(V_2 - V_1) = -(100\cdot 10^{-12})\cdot(9\cdot 10^9)\cdot(3\cdot 10^{-6})\cdot\left[(1/0.2)-(1/0.1)\right] = 13.5\ \mu\text{J}$$

   El trabajo es positivo y por tanto lo realiza el campo eléctrico creado por la carga q = +3 μC .

2. Una corteza esférica conductora de radios R_1 y R_2 (siendo $R_1<R_2$), se encuentra conectada a tierra (potencial = 0 V) y en equilibrio electrostático. Si en el centro de la corteza esférica hay una carga puntual q = 1 nC, indica, razonando la respuesta, ¿qué carga hay sobre las superficies de radios R_1 y R_2? [3 puntos].



   Solución:

   Para S_{R1}: En la corteza esférica (entre R_1 y R_2) el campo eléctrico debe ser cero, ya que se trata de un conductor en equilibrio electrostático. Por tanto el campo creado por la carga +q, situada en el centro de la corteza esférica, debe anularse al llegar a la superficie de radio R_1. Para conseguirlo en la cara interna de la corteza esférica se induce una carga igual y de signo contrario $Q_1 = -1$ nC (carga que se distribuirá uniformemente en la cara interna de la corteza esférica).

   Para S_{R2}: Como todos los puntos de la esfera conductora están al mismo potencial (0 V), calculando el potencial en r = R_2 a partir de la suma de potenciales creados por cada carga obtenemos que:

   $$V(r=R_2) = \frac{kq}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{kq}{R_2} - \frac{kq}{R_2} + \frac{kQ_2}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{kQ_2}{R_2} = 0 \Rightarrow Q_2 = 0\,\text{nC}$$

3. Dos condensadores iguales de capacidad C = 1 μF, están cargados y aislados. El primero tiene una diferencia de potencial entre sus placas de V_1 = 5 V y el segundo de V_2 = 10 V. Se unen las placas positivas entre si y de igual modo las negativas. Calcula: (a) La carga y diferencia de potencial en cada condensador tras la unión de las placas [2 puntos]. (b) La variación de energía electrostática al efectuar el montaje indicado [2 puntos].

   Solución:

   a) Antes de conectar las placas: $Q_1 = CV_1 = 5\cdot 10^{-6}$ C; $Q_2 = CV_2 = 10\cdot 10^{-6}$ C

   Tras la conexión los dos condensadores quedan en paralelo, por tanto, al mismo potencial V’ y con cargas Q'_1 y Q'_2 respectivamente. Por el principio de conservación de la carga:

   $$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2 = 15\cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

   $$V' = Q'_1/C = Q'_2/C \quad\Rightarrow\quad Q'_1 = Q'_2 = 7.5\cdot 10^{-6}\ \text{C} \qquad \text{y} \qquad V' = 7.5\ \text{V}$$

   b) Antes de conectar las placas:

   $$U_1 = (1/2)CV_1^2 = 12.5\cdot 10^{-6}\ \text{J};\quad U_2 = (1/2)CV_2^2 = 50\cdot 10^{-6}\ \text{J};\qquad U_T = 62.5\cdot 10^{-6}\ \text{J}$$

Después de conectar las placas:

$$\text{Como: } V'_1 = V'_2 \quad \text{y} \quad C_1 = C_2 = C \quad \Rightarrow \quad U'_1 = U'_2$$

Por tanto, $U'_T = 2 \cdot U'_1 = 2 \cdot (1/2) C V_1'^2 = 56.25 \cdot 10^{-6}$ J; e $\Delta \mathrm{U} = U'_T \text{-} U_T = \text{-}6.25 \cdot 10^{-6}$ J

NOTA: También se puede obtener la energía total después de la conexión, como:

$U'_T = (1/2) C_e V'^2 = 56.25 \cdot 10^{-6}$ J; siendo $C_e = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 2\mathrm{C}$ y $V' = 7.5$ V

Parcial 2.

4. Un conductor rectilíneo transporta una corriente *I*. A una distancia *d*, a la derecha del anterior y paralelo a éste, hay un segundo conductor rectilíneo que transporta la misma corriente I en el mismo sentido. Calcula la fuerza magnética (módulo dirección y sentido) sobre un portador de carga del segundo conductor, sabiendo que es un electrón de carga –e que se mueve a una velocidad v [2 puntos]. ¿Cómo cambia la dirección y sentido de la fuerza si los portadores son protones de carga +e? [1 puntos].

Solución:
Supongamos que ambas corrientes están contenidas en el plano del papel y van hacia arriba. El primer conductor produce un campo magnético que, en la posición del segundo (a su derecha) vale: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$, y es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia adentro.

Los electrones del segundo conductor se mueven hacia abajo puesto que la corriente (por convenio, en el sentido de movimiento de las cargas positivas) va hacia arriba. El producto vectorial $\left(\vec{v} \otimes \vec{B}\right)$ va hacia la derecha y tiene módulo (*v B*). Por tanto, como la carga es (–e), la fuerza va hacia la izquierda (fuerza atractiva, dirigida hacia el conductor 1) y tiene módulo: $F = e\, v \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$

Si los portadores fueran cargas positivas todo queda exactamente igual: cambia el signo de las cargas pero también el de la velocidad ya que, ahora, ésta va en el sentido de la corriente, es decir, hacia arriba.

5. Un campo magnético varía según la expresión $B(t) = 2t^3 + 4$ Tesla, con t en segundos. La dirección de este campo es perpendicular al plano del papel y su sentido hacia adentro. Inmersa en este campo magnético hay una espira conductora cuadrada, de 30 cm de lado, cuya superficie está contenida en el plano del papel. Se pide: (a) calcular la f.e.m. inducida en la espira [2 puntos]. (b) determinar, razonándolo detalladamente, el sentido de la corriente producida en la espira [1 punto].

Solución:

a) El flujo del campo magnético a través de la espira vale:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos(0) = (2t^3 + 4)(0.3^2) \ \ \mathrm{Tm}^2$$

Por la Ley de Faraday-Henry-Lenz, la f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -(0.3^2) \cdot 6t^2 = -0.54 t^2 \ \ \mathrm{V}$$

b) El flujo de campo magnético aumenta (en valor absoluto) con el tiempo a través de la espira. La ley de Lenz (signo menos en la ecuación anterior) indica que la f.e.m. inducida será tal que tienda a oponerse a este aumento. Es decir, la espira tratará de producir un campo magnético propio opuesto al externo. Por lo tanto, utilizando la regla de la mano derecha la corriente circulará en la espira en sentido contrario a las agujas del reloj

6. Una onda EM tiene un campo eléctrico asociado dado por la expresión $\vec{E} = 4\cdot 10^{-3}\cos(2\pi\cdot 10^{9} t + 10\pi\, y)\vec{k}\ [\mathrm{V/m}]$. Determina: (a) La frecuencia y longitud de onda [1 punto]. (b) La expresión de campo magnético asociado especificando claramente su dirección y sentido [2 puntos]. (c) el índice de refracción del medio en el que viaja la onda [1 punto]. *Dato: velocidad ondas EM en el vacío: c=3·10^8 m/s*

Solución:

a) la velocidad angular es: $\omega = 2\pi \times 10^{9}$ rad/s y el número de onda: $k = 10\pi$ rad/m

Por tanto: $f = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{2\pi\cdot 10^{9}}{2\pi} = 10^{9}\ \mathrm{Hz}$ y $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{10\pi} = 0.2\ \mathrm{m}$

b) $v = \lambda f = \dfrac{w}{k} = 2\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$. La amplitud del campo magnético será: $B_0 = \dfrac{E_0}{v} = 2\cdot 10^{-11}\,\mathrm{T}$.

La onda viaja en sentido negativo del eje Y, hacia donde debe apuntar el producto vectorial $\vec{E}\otimes\vec{B}$.

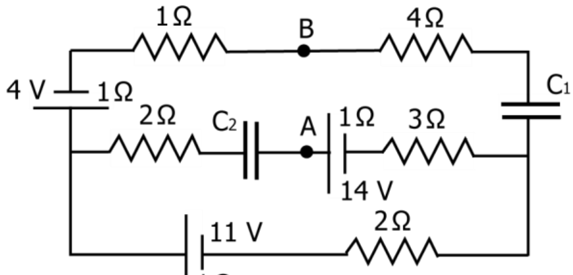
El campo magnético será por tanto: $\vec{B} = 2\cdot 10^{-11}\cos(2\pi\cdot 10^{9} t + 10\pi\, y)(-\vec{i})\ \mathrm{T}$

Ya que así el sentido de $\vec{E}\otimes\vec{B}$ [en este caso $\vec{k}\otimes(-\vec{i})$] nos proporciona el sentido de propagación de la O.M. [negativo eje Y (- $\vec{j}$)]

c) el índice de refracción será: $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{8}} = 1.5$

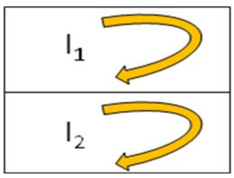
Parcial 3.

7. En el circuito de la figura, sabiendo que en el instante inicial los condensadores C_1 = 5 nF y C_2 = 10 nF están descargados, calcula: (a) La potencia que aportan o consumen, según sea el caso, en el instante inicial las *f.e.m.* presentes en el circuito [3 puntos]. (b) Una vez que los condensadores se han cargado totalmente: la carga almacenada en cada uno de ellos [1 punto] y la diferencia de potencial entre los puntos **A** y **B** [1 punto].



Solución:

a) En el instante inicial C_1 y C_2 están descargados y actúan como dos cortocircuitos. Aplicando método c. mallas:



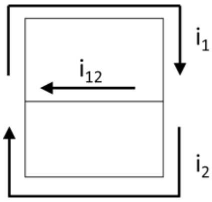
$$\left.\begin{aligned} 12I_1 - 6I_2 &= 10 \\ -6I_1 + 9I_2 &= -3 \end{aligned}\right\rangle \ x2 \left\langle\begin{aligned} 12I_1 - 6I_2 &= 10 \\ -12I_1 + 18I_2 &= -6 \end{aligned}\right\rangle$$

$$12I_2 = 4 \rightarrow I_2 = 1/3\ \mathrm{A}$$

Sustituyendo: $12I_1 - 6(1/3) = 10 \rightarrow I_1 = 1\ \mathrm{A}$

Por tanto: $i_{12} = I_1 - I_2 = 1 - (1/3) = 2/3\ \mathrm{A}$ en el sentido de I_1

El sentido real de las corrientes es el que muestra el dibujo y por tanto:



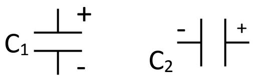
F.e.m. (14V) aporta: $P_{AP} = \varepsilon_{14}\cdot i_{12} - i_{12}^{2}\cdot r = 8.89\ \mathrm{W}$

F.e.m. (11V) aporta: $P_{AP} = \varepsilon_{11}\cdot i_{2} - i_{2}^{2}\cdot r = 3.56\ \mathrm{W}$

F.e.m. (4V) consume: .... $P_C = \varepsilon_4 \cdot i_1 + i_1^2 \cdot r = 5 \text{ W}$

b) Cuando los condensadores están completamente cargados actúan como un circuito abierto. Ahora no hay corriente por ninguna malla y la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador depende solo de las fem. Para calcular la diferencia de potencial en C1 se utiliza la malla exterior y para C2 utilizamos la malla inferior. Siguiendo en ambos casos sentido horario, tenemos:

$$V_{C1} = -(11-4) = -7 \text{ V} \qquad Q_1 = V_{C1} \cdot C_1 = 35 \text{ nC}$$
$$V_{C2} = -(-14+11) = 3 \text{ V} \qquad Q_2 = V_{C2} \cdot C_2 = 30 \text{ nC}$$



Para calcular la diferencia de potencial A-B podemos seguir un camino donde no hay condensadores (desde A hacia la derecha, abajo, izquierda, arriba y derecha hasta B:

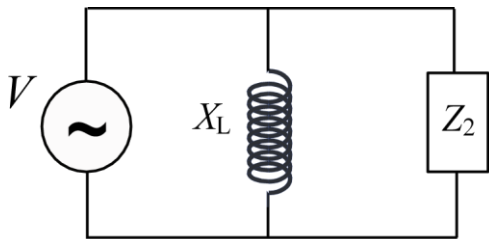
$$V_A - V_B = -(-14+11-4) = 7 \text{ V}$$

Puede utilizarse cualquier otro camino teniendo en cuenta que cada condensador actúa como una pila de valor 7V (C_1) y 3V (C_2) con la polaridad que se indica en el dibujo anterior.

---

8. Una bobina cuya reactancia es de 50Ω está conectada en paralelo con una impedancia de valor $Z_2 = 30 - j40\ \Omega$ a un generador de corriente alterna. Calcula: (a) La impedancia total del circuito [3 puntos]. (b) La potencia disipada en cada impedancia sabiendo que la potencia aparente es: $P_{AP} = V_{ef} \cdot I_{ef} = 200 \text{ VA}$ [1 punto]. (c) ¿Qué valor debería tener la reactancia de la bobina para que la tensión y la corriente estuvieran en fase? [1 punto].

Solución:



a) $\overline{Z_1} = 50\,\underline{|90^\circ} = j50\,\Omega$

$$\overline{Z_2} = 30 - j40 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z_2 = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \\ \varphi_2 = arctg(-40/30) = -53.13^\circ \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \quad \overline{Z_2} = 50\,\underline{|-53.13^\circ}\ \ \Omega$$

Z_1 y Z_2 están en paralelo

$$\overline{Z_e} = \frac{\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2}} = \frac{50\,\underline{|90^\circ} \cdot 50\,\underline{|-53.13^\circ}}{j50 + 30 - j40} = \frac{2500\,\underline{|36.87^\circ}}{31.623\,\underline{|18.435^\circ}} = 79\,\underline{|18.435^\circ}\ \ (\Omega)$$

b) Z_1 es una autoinducción y por tanto no disipa potencia (almacena y devuelve energía al circuito). Por su parte Z_2 si tiene una resistencia y por tanto disipará energía en forma de calor. No sabemos qué corriente pasa por Z_2, pero como R_2 es la única resistencia del circuito la potencia disipada tiene que ser también igual a la potencia activa del generador, y por tanto:

$$P_{d(Z2)} = P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\varphi = 200 \cos(18.435^\circ) = 189.7 \text{ W};$$

c) Buscamos una reactancia X_L ($\overline{Z_L} = X_L\,\underline{|90^\circ} = j\,X_L$ en forma compleja), que cumpla:

$$\overline{Z_e} = \frac{\overline{Z_L} \cdot \overline{Z_2}}{\overline{Z_L} + \overline{Z_2}} = \frac{X_L\,\underline{|90^\circ} \cdot 50\,\underline{|-53.13^\circ}}{jX_L + 30 - j40} = \frac{50\,X_L\,\underline{|36.87^\circ}}{30 + j(X_L - 40)} = Z_e\,\underline{|0^\circ}\ \ (\Omega)$$

Por lo tanto, la fase del denominador debe de ser igual a la del numerador:

$$\Rightarrow \quad arctg\frac{X_L - 40}{30} = 36.87^\circ \quad \rightarrow \quad X_L - 40 = 30 \cdot tg(36.87^\circ) \quad \rightarrow \quad X_L = 62.5\,\Omega$$
