RESOLUCIONES

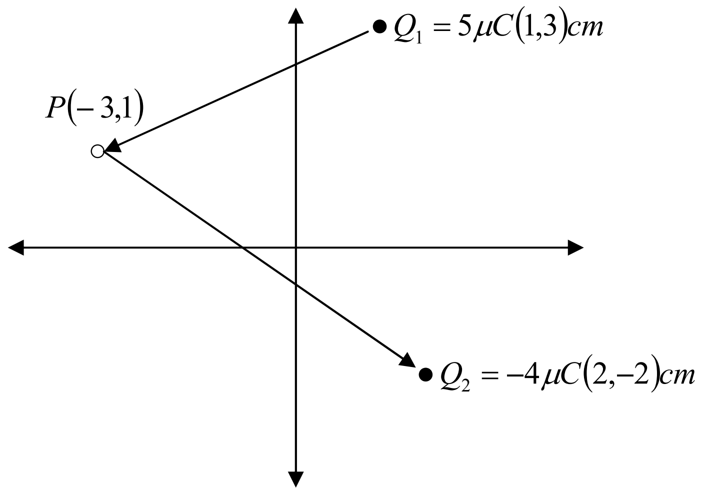
1.1 Cargas Puntuales

1.1.1. Una carga puntual de $5\mu C$ está localizada en el punto $x=1cm$, $y=3cm$ y otra de -$4\mu C$ está situada en el punto $x=2cm$, $y=-2cm$. Determinar:

a) El campo eléctrico en el punto $x=-3cm$ e $y=1cm$

b) La fuerza que actúa sobre una carga de $-6\mu C$ situada en el punto $x=-3cm$ e $y=1cm$

RESOLUCIÓN:



a) El campo eléctrico en P es la suma de los campos eléctricos creados en P por Q_1 y Q_2:

$$\vec{E} = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P}$$

$$\vec{E}_{1P} = K \cdot \frac{Q_1}{d_{1P}^2} \cdot \vec{u}_{1P} \qquad \vec{E}_{2P} = K \cdot \frac{Q_2}{d_{2P}^2} \cdot \vec{u}_{2P}$$

donde:

$$\overrightarrow{1P} = (-3,1) - (1,3) = (-4,-2)$$

$$\left|\overrightarrow{1P}\right| = +\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = +\sqrt{16+4} = +\sqrt{20} \Rightarrow d_{1P} = \sqrt{20} \cdot 10^{-2} m \Rightarrow d_{1P}^2 = 20 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$\vec{u}_{1P} = \left(\frac{-4}{\sqrt{20}}, \frac{-2}{\sqrt{20}}\right)$$

$$\vec{E}_{1P} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{-4}{\sqrt{20}}, \frac{-2}{\sqrt{20}}\right) \Rightarrow \vec{E}_{1P} = \left(\frac{-90 \cdot 10^6}{\sqrt{20}}, \frac{-45 \cdot 10^6}{\sqrt{20}}\right) N/C$$

$$\overrightarrow{P2} = (2,-2) - (-3,1) = (5,-3)$$

$$\left|\overrightarrow{P2}\right| = +\sqrt{25+9} = +\sqrt{34} \Rightarrow d_{2P} = \sqrt{34} \cdot 10^{-2} m \Rightarrow d_{2P}^2 = 34 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$\vec{u}_{P2} = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}} \right)$$

$$\vec{E}_{P2} = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{34 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}} \right) = \left(\frac{52'9 \cdot 10^6}{\sqrt{34}}, \frac{-31'8 \cdot 10^6}{\sqrt{34}} \right) N/C$$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{P2} = \left(\frac{-90 \cdot 10^6}{\sqrt{20}} + \frac{52'9 \cdot 10^6}{\sqrt{34}}, \frac{-45 \cdot 10^6}{\sqrt{20}} - \frac{31'8 \cdot 10^6}{\sqrt{34}} \right) =$$

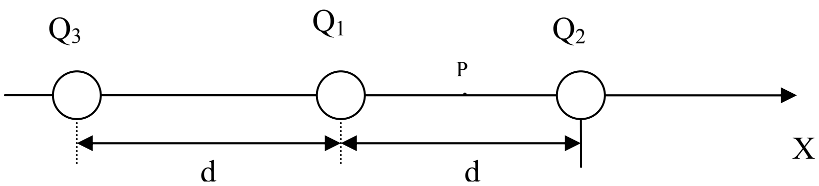
$$= \left(10^6 \cdot \frac{\left(-90 \cdot \sqrt{34} + 52'9 \cdot \sqrt{20}\right)}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{34}}, 10^6 \cdot \frac{\left(-45 \cdot \sqrt{34} - 31'8 \cdot \sqrt{20}\right)}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{34}} \right) =$$

$$= \left(10^6 \cdot \frac{(-288'2)}{26'08}, 10^6 \cdot \frac{(-404'6)}{26'08} \right) = 10^6 \cdot (-11'05, -15'5) N/C$$

b) $\vec{F} = q \cdot \vec{E}_P = \left(-6 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \left(-11'05 \cdot 10^6, -15'5 \cdot 10^6\right) = (66'3, 93) N$

1.1.2. Dos cargas fijas q_1 y q_2 se encuentran separadas por una distancia d. Una tercera carga libre q_3 se encuentra en equilibrio cuando está situada en la línea que une ambas cargas, a una distancia d de q_1 y $2d$ de q_2.

a) ¿Qué relación existe entre las cargas q_1 y q_2?
b) Si $q_3 = -q_1$, determinar en función de q_1 el valor del campo eléctrico creado por las tres cargas en el punto medio del segmento que une q_1 y q_2



RESOLUCIÓN:

a) La carga Q_3 está en equilibrio si el campo eléctrico es nulo en el punto donde se encuentra. Este campo está creado por las cargas Q_1 y Q_2, que inicialmente suponemos que son positivas:

$$\vec{E}_{P_1} + \vec{E}_{P_2} = \vec{0} \Rightarrow k \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) + k \cdot \frac{Q_2}{(2 \cdot d)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) = \vec{0} \Rightarrow -\frac{Q_1}{d^2} = \frac{Q_2}{(2 \cdot d)^2} \Rightarrow Q_2 = -4 \cdot Q_1$$

b) Suponemos que Q_1 es positiva:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} + \vec{E}_{P3} = k \cdot \left(\frac{Q_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \vec{i} + \frac{Q_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \left(\vec{i}\right) + \frac{Q_3}{\left(\frac{3 \cdot d}{2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) \right) = \frac{k \cdot 4}{d^2} \cdot \left(Q_1 + 4Q_1 - \frac{Q_1}{9} \right) \cdot \vec{i}$$

$$\vec{E}_P = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4}{d^2} \cdot \frac{44}{9} \cdot Q_1 \cdot \vec{i} = 176 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot \vec{i} \quad \frac{N}{C}$$

Suponemos que Q_1 es negativa:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} + \vec{E}_{P3} = k \cdot \left(\frac{Q_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) + \frac{Q_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) + \frac{Q_3}{\left(\frac{3 \cdot d}{2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) \right) = \frac{k \cdot 4}{d^2} \cdot \left(-Q_1 - 4Q_1 + \frac{Q_1}{9} \right) \cdot \vec{i}$$

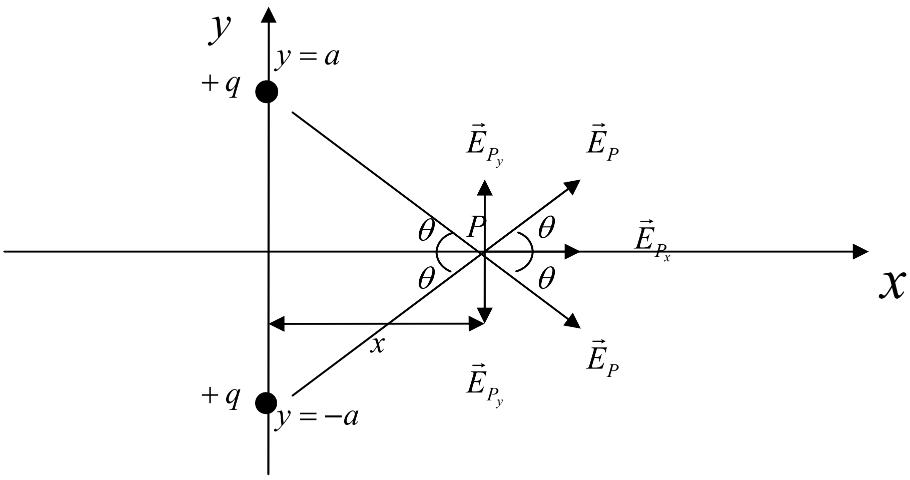
$$\vec{E}_P = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4}{d^2} \cdot \left(-\frac{44}{9} \right) \cdot Q_1 \cdot \vec{i} = 176 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_1}{d^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) \quad \frac{N}{C}$$

En este último caso el módulo y la dirección son lo mismo que en el primero, pero el sentido es el contrario.

1.1.3. Dos cargas positivas e iguales q están en el eje Y, una en la posición $y=a$ y otra en la posición $y=-a$.

a) Calcular el campo eléctrico que crean estas cargas en el eje X, dando su valor en los casos en los que se cumple que $x \ll a$ y $x \gg a$
b) Demostrar que el campo eléctrico que crean estas cargas en el eje X tiene su máximo valor en $x=-a \cdot (2)^{-1/2}$ y en $x=a \cdot (2)^{-1/2}$
c) Representar gráficamente E_x en función de x

RESOLUCIÓN:



a) El campo eléctrico en el eje *x* es la suma de los campos eléctricos creados en este eje por las 2 cargas +*q* que están situadas en el eje *y*.

$$\vec{E}_{(P)} = \vec{E}_{1(P)} + \vec{E}_{2(P)}$$

Las componentes en el eje *y*, de los campos que crean ambas cargas, se anulan. Sin embargo, las componentes en el eje *x*, se suman:

$$\vec{E}_p(x) = \frac{k \cdot q}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^2} \cdot cos(\theta)\vec{i} + \frac{k \cdot q}{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^2} \cdot cos(\theta)\vec{i}$$

donde:

$$d = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\vec{E}_P(x) = \frac{2 \cdot k \cdot q}{\left(a^2 + x^2\right)} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\vec{i} = \frac{2 \cdot k \cdot q \cdot x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\vec{i}\left(N/C\right)$$

Para $x << a \Rightarrow \vec{E}_P(x) = \frac{2 \cdot k \cdot q \cdot x}{a^3}\vec{i}\left(N/C\right)$

Para $x >> a \Rightarrow \vec{E}_P(x) = \frac{2 \cdot k \cdot q \cdot x}{x^3}\vec{i} = \frac{2 \cdot k \cdot q}{x^2}\vec{i}\left(N/C\right)$

b) Para calcular el valor máximo del campo:

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2 \cdot k \cdot q \cdot x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}\right) = 0 \Rightarrow$$

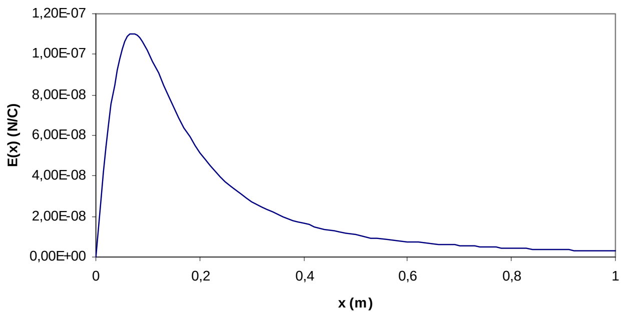
$$\frac{2 \cdot k \cdot q\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} - 2 \cdot k \cdot q \cdot x\left(\frac{3}{2}\right)\left(a^2 + x^2\right)^{1/2} \cdot 2 \cdot x}{\left(a^2 + x^2\right)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot k \cdot q\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} - 2 \cdot k \cdot q \cdot x\left(\frac{3}{2}\right)\left(a^2 + x^2\right)^{1/2} \cdot 2 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot k \cdot q\left(a^2 + x^2\right)^{1/2} \cdot \left[\left(a^2 + x^2\right) - 3 \cdot x^2\right] = 0 \Rightarrow$$

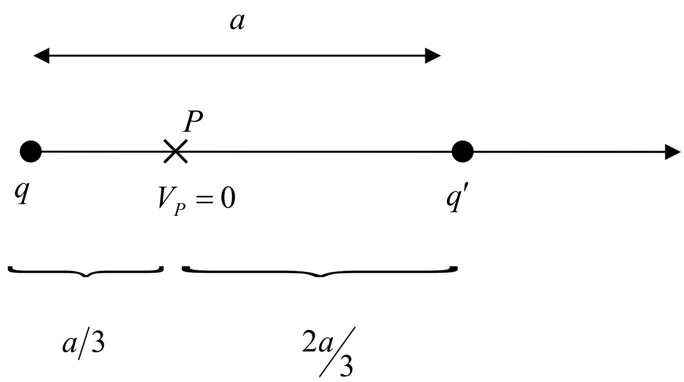
$$a^2 + x^2 - 3 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \quad (c.q.d)$$

c) Tomando los parámetros $q = 1.6 \cdot 10^{-19}(C)$ y $a = 0.1$ *(m)* obtenemos:



1.1.4. Dos cargas puntuales q y q' están separadas por una distancia a. En un punto a la distancia $a/3$ de q y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero.
a) Determinar la relación q/q'
b) ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo eléctrico al desplazar una carga de $2\mu C$ desde un punto situado a una distancia $a/3$ de q a otro punto que está a una distancia a/3 de q'?

RESOLUCIÓN:



a) $V_P = 0 = \frac{k \cdot q}{a/3} + \frac{k \cdot q'}{2a/3} \Rightarrow \frac{k \cdot q}{a/3} = \frac{-k \cdot q'}{2a/3} \Rightarrow \frac{q}{q'} = -\frac{1}{2}$

b) El trabajo viene dado por:

$$W = -q\left(V_{final} - V_{inicial}\right)$$

$$V_{inicial} = 0$$

$$V_{final} = k\frac{q}{2a/3} + k\frac{q'}{a/3} = \frac{k}{a}\left(\frac{-q'/2}{2/3} + \frac{q'}{1/3}\right) = \frac{k}{a}\left(\frac{-3 \cdot q'}{4} + 3 \cdot q'\right) = \frac{3 \cdot k \cdot q'}{a}\frac{3}{4} = \frac{9 \cdot k \cdot q'}{4 \cdot a}(V)$$

$$W = -2 \cdot 10^{-6}\frac{9 \cdot k \cdot q'}{4 \cdot a} = -\frac{81 \cdot 10^{3} \cdot q'}{2 \cdot a}(J)$$

1.1.5. Se disponen en forma alternada un número infinito de cargas positivas y negativas $\pm q$ sobre una línea recta. La separación entre cargas adyacentes es d. Determinar la energía potencial eléctrica de una carga $+q$.

Dato: El desarrollo en serie de $ln(1+x)$ es: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdot$

……… +q -q +q -q +q -q +q -q …………..

$\longleftrightarrow$

d

RESOLUCIÓN:

El potencial en un punto *P* creado por *N*=*i* cargas puntuales es:

$$V_p = \sum_i k \cdot \frac{q_i}{r_i}$$

La energía potencial de una partícula cargada *q* que se encuentra en ese punto *P* es:

$$U_q = V_P \cdot q$$

El potencial en el punto *P* donde se encuentra una carga positiva es la suma del potencial creado por las cargas positivas V_P^+ y el potencial creado por las cargas negativas V_P^-:

$$V_P = V_P^+ + V_P^-$$

donde el potencial creado por las cargas positivas situadas a la derecha de esa carga y el creado por las cargas positivas situadas la izquierda de esa carga son, respectivamente:

$$V_P^+(derecha) = k \cdot q \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot d} + \frac{1}{4 \cdot d} + \frac{1}{6 \cdot d} + \ldots\right]$$

$$V_P^+(izquierda) = k \cdot q \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot d} + \frac{1}{4 \cdot d} + \frac{1}{6 \cdot d} + \ldots\right]$$

$$V_P^+ = V_P^+(derecha) + V_P^+(izquierda) = \frac{2 \cdot k \cdot q}{d} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right]$$

Igualmente, si consideramos el potencial creado por las cargas negativas situadas a la derecha e izquierda de la carga positiva:

$$V_P^-(derecha) = -k \cdot q \cdot \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{3 \cdot d} + \frac{1}{5 \cdot d} + \ldots\right]$$

$$V_P^-(izquierda) = -k \cdot q \cdot \left[\frac{1}{d} + \frac{1}{3 \cdot d} + \frac{1}{5 \cdot d} + \ldots\right]$$

$$V_P^- = V_P^-(derecha) + V_P^-(izquierda) = -\frac{2 \cdot k \cdot q}{d} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right]$$

La energía potencial de la carga positiva *q* situada en *P* es:

$$U_q = q \cdot V_P = q \cdot \left(V_P^+ + V_P^-\right) = q \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot q}{d} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \cdots\right]\right) =$$

$$= -\frac{2 \cdot k \cdot q^2}{d}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right] \quad (J)$$

Sustituyendo *x=1* para el desarrollo en serie:

$$\ln(1+1) = \ln 2 = \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\cdot\right]$$

Sustituyendo esta expresión en el resultado U_q:

$$U_q = -\frac{2 \cdot k \cdot q^2 \cdot \ln 2}{d} \quad (J)$$

1.1.6. En dos vértices contiguos de un cuadrado de *1m* de lado se tienen cargas eléctricas positivas de $2{\cdot}10^{-6}C$ y en los otros dos de $5{\cdot}10^{-6}C$. Hallar el valor del campo eléctrico y el potencial en el centro del cuadrado

RESOLUCIÓN:

El campo eléctrico en el punto *P* es la suma de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas puntuales situadas en los vértices del cuadrado:

$$\overrightarrow{E_P} = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{4} k \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_r$$

Siendo los vectores de posición, sus módulos y sus vectores unitarios:

$$\vec{r}_1 = (0,0) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow r_1 = +\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow r_1^2 = \frac{1}{2}$$

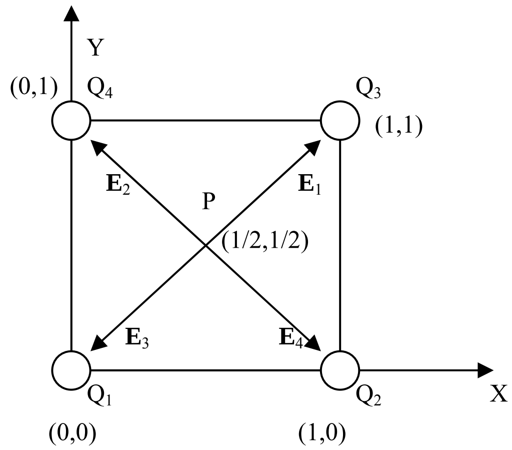
$$\vec{r}_2 = (1,0) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow r_2 = +\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow r_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r}_3 = (1,1) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow r_3 = +\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow r_3^2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{r}_4 = (0,1) - (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow r_4 = +\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow r_4^2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u}_{r_1} = \frac{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad \vec{u}_{r_2} = \frac{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{u}_{r_3} = \frac{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad \vec{u}_{r_4} = \frac{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Los campos eléctricos creados por cada carga son:

$$\vec{E}_{P_1} = k\cdot\frac{q_1}{r_1^2}\cdot\vec{u}_{r_1} = 9\cdot10^9\cdot\frac{5\cdot10^{-6}}{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9\cdot10^4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_{P_2} = k\cdot\frac{q_2}{r_2^2}\cdot\vec{u}_{r_2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{5\cdot10^{-6}}{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9\cdot10^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_{P_3} = k\cdot\frac{q_3}{r_3^2}\cdot\vec{u}_{r_3} = 9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-6}}{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 36\cdot10^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_{P_4} = k\cdot\frac{q_1}{r_4^2}\cdot\vec{u}_{r_4} = 9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-6}}{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 36\cdot10^3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \frac{N}{C}$$

El campo eléctrico total es:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P_1} + \vec{E}_{P_2} + \vec{E}_{P_3} + \vec{E}_{P_4} = 9\cdot10^4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 9\cdot10^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 36\cdot10^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+36\cdot10^3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0,\left(\frac{-2\cdot9\cdot10^4}{\sqrt{2}} + \frac{2\cdot36\cdot10^3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(0,\frac{108000}{\sqrt{2}}\right) = 7.6\cdot10^4\cdot\vec{j}\ \left(N/C\right)$$

El potencial en el centro del cuadrado lo crean las cuatro cargas puntuales de los vértices:

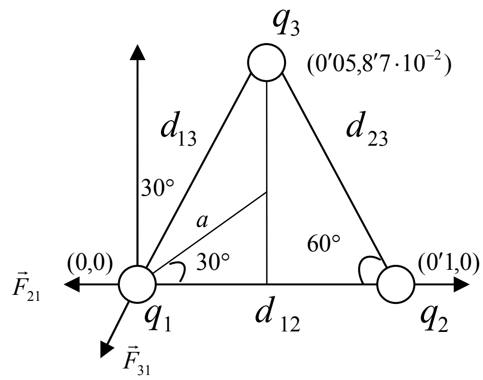
$$V_P = \sum_{i=1}^{4} V_i = \sum_{i=1}^{4} k \cdot \frac{q_i}{r_i} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{5 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right] = 9 \cdot 10^9 \cdot 14 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 178.2 \cdot 10^3 \quad (V)$$

1.1.7. Cargas iguales, cada una de ellas de *1μC*, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de *0.1m* de lado. Calcular:

a) La fuerza que se ejerce sobre cada carga como resultado de la interacción con las otras dos
b) La energía potencial de cada carga
c) El campo eléctrico resultante y el potencial en el centro del triángulo

RESOLUCIÓN:



$$\vec{F_1} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}; \quad \vec{F_2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}; \quad \vec{F_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F_1} = k \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{d_{21}^2} \cdot \vec{u}_{21} + k \cdot \frac{q_3 \cdot q_1}{d_{31}^2} \cdot \vec{u}_{31} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(10^{-6}\right)^2}{\left(10^{-1}\right)^2} \left((-1,0) + \left(-5 \cdot 10^{-1}, -8.7 \cdot 10^{-1}\right) \right) =$$

$$= 9 \cdot 10^{-1} \cdot \left(-15 \cdot 10^{-1}, -8.7 \cdot 10^{-1}\right) = \left(-135 \cdot 10^{-2}, -78.3 \cdot 10^{-2}\right) \quad N$$

$$d_{21} = d_{31} = 10^{-1} \ m$$

$$\overrightarrow{21} = (0,0) - (0.1,0) \qquad \vec{u}_{21} = (-1,0)$$

$$\overrightarrow{31} = (0,0) - \left(\frac{10^{-1}}{2}, \left(10^{-1} \cdot \cos 30^\circ\right) \right) = \left(-5 \cdot 10^{-2}, -8.7 \cdot 10^{-2}\right) \quad \vec{u}_{31} = \left(-5 \cdot 10^{-1}, -8.7 \cdot 10^{-1}\right)$$

$$\overrightarrow{F_2} = k\cdot\frac{q_2\cdot q_1}{d_{12}^2}\cdot\vec{u}_{12} + k\cdot\frac{q_3\cdot q_2}{d_{32}^2}\cdot\vec{u}_{32} = \frac{9\cdot10^9\cdot\left(10^{-6}\right)^2}{\left(10^{-1}\right)^2}\left((1,0)+\left(5\cdot10^{-1},-8.7\cdot10^{-1}\right)\right)=$$
$$=9\cdot10^{-1}\cdot\left(15\cdot10^{-1},-8.7\cdot10^{-1}\right)=\left(135\cdot10^{-2},-78.3\cdot10^{-2}\right)\quad N$$
$$d_{12}=d_{32}=10^{-1}\ m$$
$$\vec{u}_{12}=(1,0)\quad \overrightarrow{32}=(0.1,0)-\left(\frac{10^{-1}}{2},\left(10^{-1}\cdot\cos30^{o}\right)\right)=\left(5\cdot10^{-2},-8.7\cdot10^{-2}\right)\quad \vec{u}_{32}=\left(5\cdot10^{-1},-8.7\cdot10^{-1}\right)$$
$$\overrightarrow{F_3} = k\cdot\frac{q_3\cdot q_1}{d_{13}^2}\cdot\vec{u}_{13} + k\cdot\frac{q_3\cdot q_2}{d_{23}^2}\cdot\vec{u}_{23} = \frac{9\cdot10^9\cdot\left(10^{-6}\right)^2}{\left(10^{-1}\right)^2}\left(\left(5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)+\left(-5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)\right)=$$
$$=9\cdot10^{-1}\cdot\left(0,17.4\cdot10^{-1}\right)=\left(0,1.6\right)\quad N$$
$$d_{13}=d_{23}=10^{-1}\ m$$

$$\overrightarrow{13}=\left(5\cdot10^{-2},8.7\cdot10^{-2}\right)-(0,0)\quad \vec{u}_{13}=\left(5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)$$
$$\overrightarrow{23}=\left(\frac{10^{-1}}{2},\left(10^{-1}\cdot\cos30^{o}\right)\right)-(0.1,0)=\left(-5\cdot10^{-2},8.7\cdot10^{-2}\right)\quad \vec{u}_{23}=\left(-5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)$$

b) La energía potencial de cada carga es: $U_1 = q_1\cdot V_1$

$$V_1=\frac{K\cdot q_2}{d_{21}}+\frac{k\cdot q_3}{d_{31}}=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{10^{-1}}=18\cdot10^4(V)$$
$$U_1=10^{-6}\cdot18\cdot10^4=18\cdot10^{-2}(J)$$

Todas las cargas tienen la misma energía potencial:
$U_2=U_3=18\cdot10^{-2}(J)$

c) El campo en el centro del triángulo será:
$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=0$

Las componentes en el eje x de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se anulan. Las componentes en el eje y de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son la mitad de la componente en el eje y de $\vec{E}_3$, y como E_{1_y} y E_{2_y} llevan sentido contrario a E_{3_y}, la suma de las dos primeras anula la tercera.

El potencial en dicho punto es:

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{k\cdot Q_1}{a}+\frac{k\cdot Q_2}{a}+\frac{k\cdot Q_3}{a}=\frac{3\cdot9\cdot10^9\cdot10^{-6}\cdot2\cdot\sqrt{3}/2}{10^{-1}}=46'76\cdot10^4(V)$$

siendo $a=\dfrac{0'1}{2\cos(30°)}=0'0577m$

1.1.8. El potencial eléctrico a una distancia *d* de una carga puntual *q* es *V=600V* y el campo eléctrico es *E=200N/C*.

a) Calcular el valor de la carga
b) Calcular la distancia a la carga puntual

RESOLUCIÓN:

a) El potencial *V* y el módulo de campo eléctrico *E* que crea una carga puntual es:

$V = k \cdot \frac{q}{d} \Rightarrow$ despejando la distancia $d \Rightarrow d = k \cdot \frac{q}{V}$

$E = k \cdot \frac{q}{d^2}$

Sustituyendo *d* en la expresión del módulo del campo eléctrico y despejando *q*, podemos obtener el valor de ésta:

$$E = k \cdot \frac{q}{\left(k \cdot \frac{q}{V}\right)^2} = \frac{V^2}{k \cdot q} \Rightarrow q = \frac{V^2}{k \cdot E} = \frac{600^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 200} = 2 \cdot 10^{-7} (C)$$

b) Una vez que conocemos la carga *q*, podemos obtener el valor de la distancia *d*:

$$d = k \cdot \frac{q}{V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-7}}{600} = 3m$$

1.1.9. Calcular el gradiente de la función escalar *V=V(r)*, siendo $r=\left|\vec{r}\right|$ el módulo del vector de posición $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Aplicar a los casos:

a) V=1/r
b) V=ln r

RESOLUCIÓN:

El vector operador gradiente se define como:

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Como *V* depende de *r* y éste, a su vez, depende de las coordenadas *x*, *y*, *z*, entonces cada uno de los sumandos que hay a la derecha de la ecuación se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

El módulo de $\vec{r}$ es: $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Por tanto:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{2 \cdot y}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \frac{2 \cdot z}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

Sustituyendo estas expresiones en el gradiente:

$$\overrightarrow{gradV} = \frac{dV}{dr}\left(\frac{x}{r} \cdot \vec{i} + \frac{y}{r} \cdot \vec{j} + \frac{z}{r} \cdot \vec{k}\right) = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r$$

Aplicando esta última expresión a los casos *(a)* y *(b)*:

$$(a) \qquad V = \frac{1}{r} \Rightarrow \overrightarrow{gradV} = \frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r = \left(-\frac{1}{r^2}\right) \cdot \vec{u}_r$$

$$(b) \qquad V = \ln r \Rightarrow \overrightarrow{gradV} = \frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{u}_r$$

1.1.10. El potencial eléctrico en una cierta región del espacio viene dado por $V(x)=C_1+C_2 \cdot x^2$, en donde V se expresa en voltios, x en metros y C_1 y C_2 son constantes positivas. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ en esta región. ¿En qué dirección está $\vec{E}$?

RESOLUCIÓN:

$$V(x) = C_1 + C_2 \cdot x^2$$

Utilizando la relación que persiste entre campo eléctrico y potencial:

$$\vec{E} = -\left[\frac{dV}{dx}\vec{i} + \frac{dV}{dy}\vec{j} + \frac{dV}{dz}\vec{k}\right]$$

Como el potencial depende sólo de x, el campo eléctrico sólo tendrá componente en esta dirección:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = -2 \cdot x \cdot C_2\vec{i}$$

1.1.11. Un campo eléctrico viene determinado por $E_x=2x^3(kN/C)$. Determinar la diferencia de potencial entre los puntos del eje x situados en $x=1m$ y $x=2m$.

RESOLUCIÓN:

Utilizando la relación que existe entre campo eléctrico y potencial:

$$\vec{E}=-\left[\frac{dV}{dx}\vec{i}+\frac{dV}{dy}\vec{j}+\frac{dV}{dz}\vec{k}\right]$$

Sólo existe componente en x:

$$E_x=-\frac{dV}{dx}\vec{i}\Rightarrow dV=-E_x\cdot dx$$

$$\int_{x=1}^{x=2}dV=-\int_{x=1}^{x=2}E_x dx$$

$$V(2)-V(1)=-\int_{x=1}^{x=2}2\cdot x^3\cdot 10^3 dx=-2\cdot 10^3\left[\frac{x^4}{4}\right]=-2\cdot 10^3\left[\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right]=-2\cdot 10^3\frac{15}{4}=-7'5\cdot 10^3 V$$

1.1.12. El potencial eléctrico en una región del espacio viene dado por $V=2\cdot x^2+y\cdot z$ (V/m^2). Determinar el campo eléctrico en el punto $x=2m$, $y=1m$ y $z=2m$.

RESOLUCIÓN:

Utilizando la relación entre campo eléctrico y potencial:

$$\vec{E}=-\left[\frac{dV}{dx}\vec{i}+\frac{dV}{dy}\vec{j}+\frac{dV}{dz}\vec{k}\right]=-\left[4\cdot x\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k}\right]$$

$$\vec{E}(2,1,2)=-\left[8\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right]\left(V/m\right)$$

1.1.13. Dos cargas puntuales $q_1=2pC$ y $q_2=-2pC$ están separadas una distancia de $4\mu m$.

a) ¿Cuál es el momento dipolar de este par de cargas?
b) Hacer un dibujo del par e indicar la dirección y sentido del momento dipolar

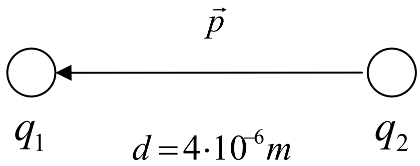
RESOLUCIÓN:

a)

$$\vec{p}=q\cdot\vec{d}$$

$$|\vec{p}|=q\cdot|\vec{d}|=2\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 10^{-6}=8\cdot 10^{-18}(C\cdot m)$$

b) $\vec{p} = 8 \cdot 10^{-18}\left(-\vec{i}\right)\ C \cdot m$



1.1.14. Un dipolo de momento *0.5e⁻·nm* se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de valor $4 \cdot 10^4$ *N/C*. ¿Cuál es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando?:

a) ¿El dipolo es paralelo al campo eléctrico?
b) ¿El dipolo es perpendicular al campo eléctrico?
c) ¿El dipolo forma un ángulo de 30^o con el campo eléctrico?
d) Determinar la energía potencial del dipolo en el campo eléctrico en cada caso.

RESOLUCIÓN:

$$\vec{p} = 0'5 \cdot 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-9} = 0'8 \cdot 10^{-28}\ (C \cdot m)$$
$$\left|\vec{E}\right| = 4 \cdot 10^4\ \left(N/C\right)$$

El momento ejercido sobre le dipolo es: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

La energía potencial del dipolo en el campo eléctrico es: $U = -\vec{p} \bullet \vec{E}$

a) Si el campo y el dipolo son paralelos, forman un ángulo de 0^o:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot sen(0°) = 0$$

Y la energía potencial será:

$$U = -|\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot \cos(0°) = -0'8 \cdot 10^{-28} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 1 = -3'2 \cdot 10^{-24}\, J$$

b) Si el campo eléctrico y el dipolo forman un ángulo de 90^o:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot sen(90°) = 0'8 \cdot 10^{-28} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 1 = 3'2 \cdot 10^{-24}(N \cdot m)$$

Y la energía potencial será:

$$U = -|\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot \cos(90°) = 0$$

c) Si ambos forman un ángulo de 30^o:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot sen(30°) = 0'8 \cdot 10^{-28} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2} = 1'6 \cdot 10^{-24}(N \cdot m)$$

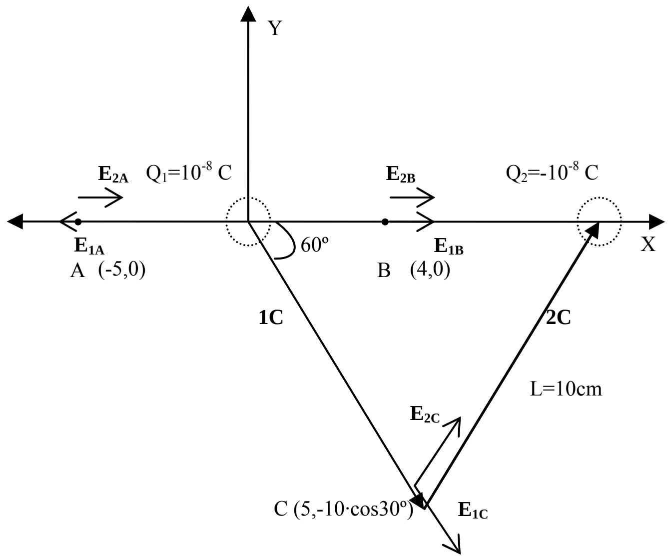
Y la energía potencial será:

$$U = -|\vec{p}| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot \cos(30°) = -0'8 \cdot 10^{-28} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2'77 \cdot 10^{-24}\, J$$

1.1.15. Dos cargas de signos contrarios y de $10^{-8}C$ están situadas a una distancia de *10cm* en el vacío formando un dipolo eléctrico. Determinar la intensidad del campo eléctrico que el dipolo produce en los siguientes puntos:

a) A una distancia de *5cm* de la carga positiva en la prolongación del segmento que une las cargas
b) En un punto de dicho segmento a *4cm* de la carga positiva
c) En un punto que equidiste *10cm* de ambas cargas

RESOLUCIÓN:



a) El campo eléctrico total en el punto *A* de coordenadas *(-5,0)cm* es la suma del campo eléctrico creado en *A* por la carga *1* y el campo eléctrico creado en *A* por la carga *2.*

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{1_A} + \vec{E}_{2_A} = k \cdot \frac{q_1}{d_1^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) + k \cdot \frac{q_2}{d_2^2} \cdot \left(\vec{i}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \left(\vec{i}\right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 10}{10^{-4} \cdot 25} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)\left(\vec{i}\right) = 3.2 \cdot 10^4 \cdot \left(-\vec{i}\right) \quad \frac{N}{C}$$

b) El campo eléctrico total en el punto *B* de coordenadas *(4,0)cm* es la suma del campo eléctrico creado en *B* por la carga *1* y el campo eléctrico creado en *B* por la carga *2*

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{1_B} + \vec{E}_{2_B} = k \cdot \frac{q_1}{d_{1B}^2} \cdot \left(\vec{i}\right) + k \cdot \frac{q_2}{d_{2B}^2} \cdot \left(\vec{i}\right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \left(\vec{i}\right) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{\left(6 \cdot 10^{-2}\right)^2} \cdot \left(\vec{i}\right) =$$

$$= 8.1 \cdot 10^4 \cdot \left(\vec{i}\right) \quad \frac{N}{C}$$

c) El campo eléctrico total en el punto *C* de coordenadas *(5,-10·cos30º)=(5,-8.7)cm* es la suma del campo eléctrico creado en *C* por la carga *1* y el campo eléctrico creado en *C* por la carga *2*

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{1c} + \vec{E}_{2c} = k\cdot\frac{q_1}{d_{1C}^2}\cdot\vec{u}_{1c} + k\cdot\frac{q_2}{d_{2C}^2}\cdot\vec{u}_{2c} = 9\cdot10^9\cdot\frac{10^{-8}}{\left(10\cdot10^{-2}\right)^2}\cdot\left(5\cdot10^{-1},-8.7\cdot10^{-1}\right)+$$

$$+9\cdot10^9\cdot\frac{10^{-8}}{\left(10\cdot10^{-2}\right)^2}\cdot\left(5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)=9\cdot10^3\cdot\left(\vec{i}\right)\ \frac{N}{C}$$

$$d_{1c} = d_{2c} = 10\,cm$$

$$\overrightarrow{1C} = (5,-8.7)-(0,0) = (5,-8.7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{1C}\right| = +\sqrt{(5)^2+(-8.7)^2} = 10 \Rightarrow \vec{u}_{1c} = \left(5\cdot10^{-1},-8.7\cdot10^{-1}\right)$$

$$\overrightarrow{2C} = (10,0)-(5,-8.7) = (5,8.7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{2C}\right| = +\sqrt{(5)^2+(8.7)^2} = 10 \Rightarrow \vec{u}_{2c} = \left(5\cdot10^{-1},8.7\cdot10^{-1}\right)$$

1.1.16. Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas opuestas de magnitud $q=10^{-6}C$ separadas una distancia de *2cm*. El dipolo está colocado en un campo eléctrico externo de módulo 10^5 *N/C*.

a) ¿Cuál es el momento máximo que ejerce el campo en el dipolo?

b) ¿Cuánto trabajo debe hacer un agente exterior para dar al dipolo media vuelta a partir de una posición paralela al campo?

RESOLUCIÓN:

a) El momento o giro $\vec{\tau}$ que produce sobre un dipolo eléctrico, un campo eléctrico externo uniforme es:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} \Rightarrow \left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot sen\alpha = q\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot sen\alpha$$

El momento es máximo si el valor del seno del ángulo que forman los vectores es 1. Esto ocurre cuando los vectores $\vec{p}$ y $\vec{E}$ forman un ángulo de *90º*.

$$\left|\vec{\tau}\right| = q\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot sen90º = 10^{-6}\cdot2\cdot10^{-2}\cdot10^5\cdot1 = 2\cdot10^{-3}\ N\cdot m$$

b) La energía que tiene un dipolo que está situado en un campo eléctrico externo uniforme es:

$$U = -\vec{p}\bullet\vec{E} = -\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot\cos\alpha$$

En el estado inicial si el campo $\vec{E}$ y el momento dipolar $\vec{p}$ son paralelos:

$$U = -\vec{p}\bullet\vec{E} = -\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|\cdot\cos0º = -\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{E}\right|$$

En el estado final cuando ha girado *180º* respecto a su posición inicial:

$$U = -\vec{p} \bullet \vec{E} = -\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot \cos 180º = \left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right|$$

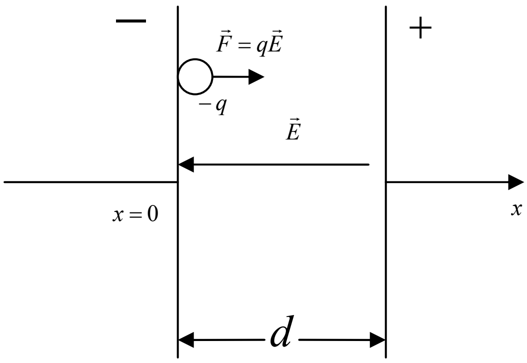
El trabajo que realiza un agente externo para dar la media vuelta al dipolo es:

$$W = -\Delta U = -\left(U_{final} - U_{inicial}\right) = \left(U_{inicial} - U_{final}\right) = \left[-\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| - \left(\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right|\right)\right] = -2 \cdot \left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| = -4 \cdot 10^{-3}\ J$$

1.1.17. Existe un campo eléctrico uniforme entre dos placas paralelas con cargas opuestas. Se libera un electrón desde el reposo sobre la superficie de la placa negativa y alcanza la superficie de la placa opuesta, colocada a una distancia $d=2\cdot 10^{-2} m$ de la otra, en un intervalo de tiempo $t=1.5\cdot 10^{-8} s$:

a) Calcular la intensidad del campo eléctrico
b) Calcular la velocidad del electrón cuando llega a la segunda placa
c) ¿Cuál es la diferencia de potencial que hay entre las placas?

RESOLUCIÓN:



a)

$$F = q \cdot E = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{q}{m} E$$

$$v = v_{0x} + a \cdot t = a \cdot t$$

$$x = d = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2}\frac{q}{m} \cdot E \cdot t^2$$

Despejando el campo de ésta última:

$$E = \frac{2 \cdot m \cdot d}{q \cdot t^2} = \frac{2 \cdot 9'1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1'6 \cdot 10^{-19} \cdot \left(1'5 \cdot 10^{-8}\right)^2} = 1011\ \left(V/m\right)$$

b) $v = a \cdot t = \frac{q}{m} \cdot E \cdot t = \frac{1'6 \cdot 10^{-19}}{9'1 \cdot 10^{-31}} \cdot 1011 \cdot 1'5 \cdot 10^{-8} = 2666374 \approx 2666\ \left(Km/s\right)$

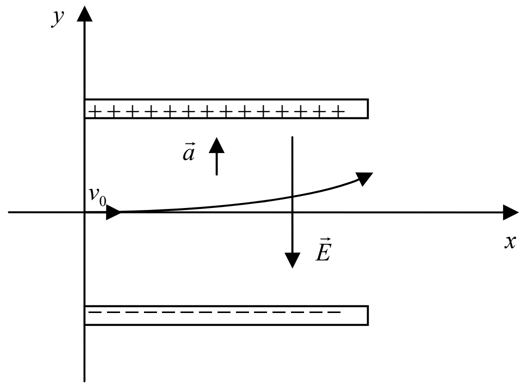
c) $V = E \cdot d = 1011 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2022 \cdot 10^{-2} = 22'22\ V$

1.1.18. Un electrón de masa $m=9.1\cdot 10^{-31}kg$ y carga eléctrica $q=-1.6\cdot 10^{-19}C$ se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniforme $E=2000N/C$ con una velocidad inicial $v_0=10^6 m/s$ perpendicular al campo.

a) Hallar las ecuaciones del movimiento del electrón

b) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido *1cm* sobre el eje *OX*? (*OX*: dirección de entrada del electrón)

RESOLUCIÓN:



a) Como la $\vec{F} = q\cdot\vec{E}$:

$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = q\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{-e}{m}\cdot\vec{E}$ siendo -*e*, la carga del electrón.

Eje x: $a_x = 0 \rightarrow v_x = cte = v_0;\; x = v_0\cdot t$

Eje y: $a_y = \dfrac{e}{m}\cdot E \rightarrow v_y = v_{0y} + a\cdot t = a\cdot t;\; y = y_0 + v_{0y} + \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$

b) Sustituimos la aceleración en *y*:

$$y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\cdot E\cdot t^2$$

Como necesitamos el tiempo, lo hallamos con *x*:

$$x = v_0\cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0} = \frac{10^{-2}}{10^6} = 10^{-8}s$$

Y lo llevamos a la *y*:

$$y = \frac{1}{2}\frac{1'6\cdot 10^{-19}}{9'1\cdot 10^{-31}}\cdot 2000\cdot\left(10^{-8}\right)^2 = 0'0176m = 1'8\;cm$$

El ángulo que se ha desviado será:

$$\alpha = arctg\frac{y}{x} \approx 60°$$

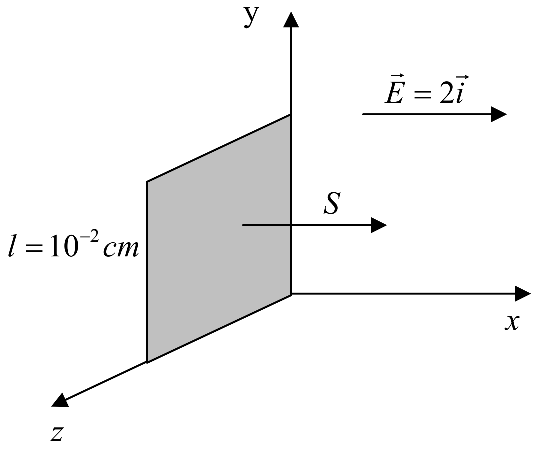
1.2 Distribuciones continuas de carga

1.2.1. Consideremos un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 2\vec{i}\ ^{kN}\!/_{C}$.

a) ¿Cuál es el flujo de este campo a través de un cuadrado de *10cm* de lado cuyo plano es paralelo al plano *YZ*?

b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa el mismo cuadrado si la normal a su plano forma un ángulo de *30º* con el eje *X*?

RESOLUCIÓN:



a) El flujo de campo eléctrico a través de la superficie abierta es:

$$\Phi = \int_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \int_s \left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{s}| \cos(0^o) = \left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{s}| = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 20\left(N \cdot m^2\!/_{C}\right)$$

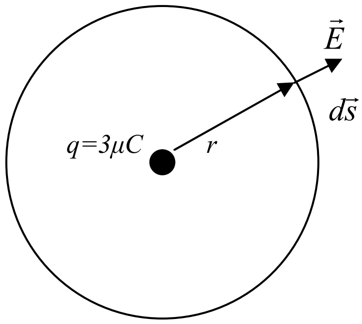
Con $|\vec{s}| = 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} m^2$

b) En este caso el ángulo que forman el vector superficie y el vector campo eléctrico es *30º*. Por tanto:

$$\Phi = \int_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \int_s \left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{s}| \cos(30^o) = \left|\vec{E}\right| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(30^o) = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 17'3\left(N \cdot m^2\!/_{C}\right)$$

1.2.2. Una carga puntual *q=3μC* está en el centro de una esfera de *0.6m* de radio.
a) Hallar el valor del campo eléctrico en los puntos situados en la superficie de la esfera
b) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de la esfera?
c) ¿Variaría la respuesta dada a la parte *b)* si se moviese la carga puntual de modo que estuviese dentro de la esfera pero no en el centro?
d) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa un cubo de *1m* de arista que circunscribe la esfera?

RESOLUCIÓN:



a) El campo eléctrico en un punto situado a una distancia *R* de una carga puntual es:

$$\vec{E} = K\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\cdot\vec{u}_r = 9\cdot 10^9\frac{3\cdot 10^{-6}}{\left(6\cdot 10^{-1}\right)^2}\vec{u}_r = \frac{27\cdot 10^3}{36\cdot 10^{-2}}\vec{u}_r = \frac{3}{4}10^5\vec{u}_r\left(N/C\right)$$

con $R = |\vec{r}| = 0'6m = 6\cdot 10^{-1}m$

b) El flujo de campo eléctrico a través de la superficie es:

$$\Phi = \int_s \vec{E}\bullet d\vec{s} = \int_s |\vec{E}|\cdot|d\vec{s}|\cdot\cos(0^{\circ}) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \frac{3\cdot 10^{-6}}{\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot 9\cdot 10^9}} = 339'3\cdot 10^3\left(\frac{N\cdot m^2}{C}\right)$$

c) No cambia la respuesta porque el flujo depende sólo de la carga encerrada en dicha superficie, siendo independiente de la posición que ocupe en el interior de la misma.

d) El flujo neto sería el mismo que el que atraviesa la esfera, ya que la carga encerrada es la misma en ambos casos.

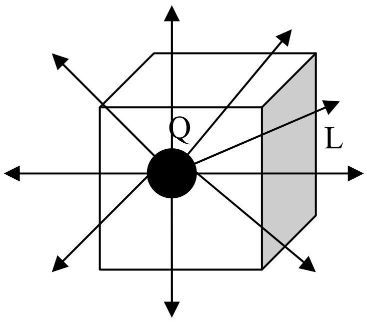
1.2.3. Una carga puntual Q está situada en el centro de un cubo cuya arista tiene una longitud L.

a) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico a través de una de las caras del cubo?

b) Si la carga Q se traslada a un vértice del cubo, ¿cuál es el flujo a través de cada una de las caras del cubo?

RESOLUCIÓN:

a) El flujo total del campo eléctrico a través del cubo es:

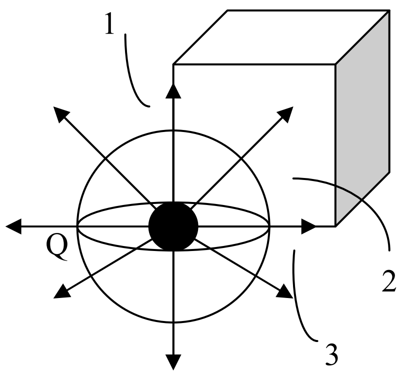


$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Por simetría, el flujo que atraviesa cada una de las caras del cubo es 1/6 del flujo total:

$$\Phi_{cara} = \frac{\Phi_{total}}{6} = \frac{Q}{6 \cdot \varepsilon_0}$$

b)



Dibujamos una esfera alrededor de la carga puntual Q que está situada en el vértice del cubo. Si dividimos la esfera en 8 partes, vemos que el flujo que entra en el cubo corresponde a 1/8 del flujo total que sale de la esfera.

$$\Phi_{total} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{cubo} = \frac{1}{8}\Phi_{total} = \frac{Q}{8\varepsilon_0}$$

Este flujo sólo atraviesa 3 caras del cubo, porque el vector superficie de las caras *1*, *2* y *3* forman un ángulo de *90º* con el vector $\vec{E}$, por tanto:

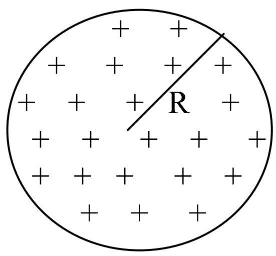
$$\Phi_{cara} = \frac{\Phi_{cubo}}{3} = \frac{Q}{8\cdot\varepsilon_0\cdot 3} = \frac{Q}{24\varepsilon_0}$$

1.2.4. Una corteza esférica de radio *6cm* posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 9nC/m^2$:

a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza?

b) Determinar el campo eléctrico en $r_1=2cm$, $r_2=5.9cm$, $r_3=6.1cm$ y $r_4=10cm$

RESOLUCIÓN:

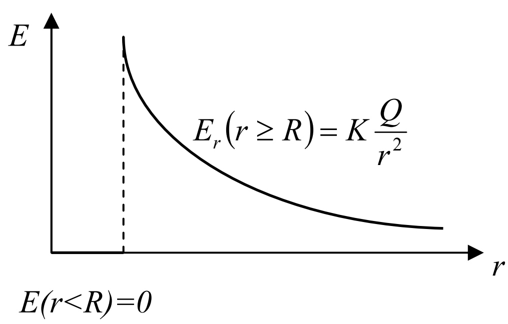


a) Como la densidad superficial de carga es constante:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma\cdot S = \sigma\cdot 4\pi R^2 = 9\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot\pi\cdot 36\cdot 10^{-4} = 407'1\cdot 10^{-12}C = 407'1pC$$

Siendo $R = 6\cdot 10^{-2}m$ y $\sigma = 9\cdot 10^{-9}\left(C/m^2\right)$

b) Aplicando el teorema de Gauss, se puede demostrar que le campo eléctrico en una corteza esférica de densidad superficial uniforme es:



Si el radio es *R=6cm*, r_1*=2cm* y r_2*=5.9cm* corresponden a puntos del interior de la corteza y *E=0*.
Para puntos fuera de la corteza:

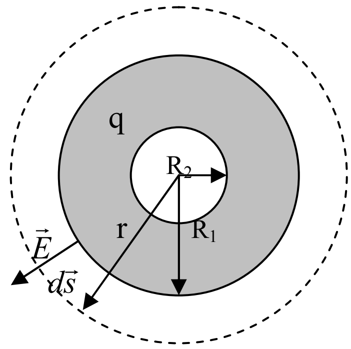
$$r_3 = 6'1cm \Rightarrow \left|\vec{E}_r\right| = K\frac{Q}{r_3^{\,2}} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 407'1\cdot 10^{-12}}{\left(6'1\cdot 10^{-2}\right)^2} = 98'5\cdot 10 = 985\left(N/C\right)$$

$$r_4 = 10cm \Rightarrow \left|\vec{E}_r\right| = K\frac{Q}{r_4^{\,2}} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 407'1\cdot 10^{-12}}{\left(10\cdot 10^{-2}\right)^2} = 3663'9\frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 366'4\left(N/C\right)$$

1.2.5. Una esfera de radio R_1 tiene una cavidad central de radio R_2. Una carga q está uniformemente distribuida en su volumen. Hallar el campo eléctrico y el potencial en:
a) puntos fuera de la esfera
b) su interior
c) en la cavidad central

RESOLUCIÓN:

a)



Como es una distribución simétrica de carga, utilizaremos el teorema de Gauss para hallar el campo eléctrico en $r>R_1$:

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_s \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{s}\right|\cos(0^o) = \left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S}\right| = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

El potencial eléctrico es $r\geq R_1$:

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E_r\cdot dr \Rightarrow \int_\infty^r dV = -\int_\infty^r E_r\cdot dr \Rightarrow$$

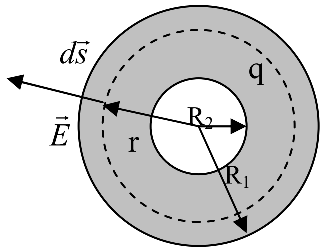
$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r K\frac{q}{r^2}dr = \left[K\frac{q}{r}\right]_\infty^r = K\cdot q\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right] = \frac{K\cdot q}{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{K\cdot q}{r} + V(\infty)$$

Como por definición $V(\infty) = 0$, para una carga puntual:

$$V(r) = \frac{K \cdot q}{r}$$

b)



La carga total es q, y está distribuida uniformemente en el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right) \Rightarrow \rho = \frac{q}{V} = \frac{3 \cdot q}{4\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right)}$$

siendo ρ la densidad de carga.
Aplicando de nuevo el teorema de Gauss, el campo eléctrico en $R_2<r<R_1$ es:

$$\Phi_E = \int_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos(0^\circ) = E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada por la superficie de Gauss, en este caso será:

$$q' = \rho \cdot V' = \rho \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right) = \frac{3 \cdot q}{4\pi\left(R_1^3 - R_2^3\right)} \cdot \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right) = \frac{q\left(r^3 - R_2^3\right)}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)}$$

Despejando el campo:

$$E = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{q\left(r^3 - R_2^3\right)}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)}$$

El potencial en $R_2 \leq r \leq R_1$:

$$dV = -E_r \cdot dr \Rightarrow \int_{R_1}^{r} dV = \int_{R_1}^{r} E_r \cdot dr$$

$$V(r) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) dr$$

$$V(r) - V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)} \int_{r}^{R_1} \left(r dr - \frac{R_2^3}{r^2} dr \right)$$

$$V(r) - V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[\left[\frac{r^2}{2} \right]_r^{R_1} + \left[\frac{R_2^3}{r} \right]_r^{R_1} \right]$$

$$V(r) - V(R_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[\left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] + \left[\frac{R_2^3}{R_1} - \frac{R_2^3}{r} \right] \right]$$

Del apartado *a)*, sabemos el potencial en R_1, y despejando $V(r)$:

$$V(R_1) = \frac{K \cdot q}{R_1}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{R_1} - \frac{R_2^3}{r} \right] + \frac{K \cdot q}{R_1}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{R_1} - \frac{R_2^3}{r} + \frac{\left(R_1^3 - R_2^3\right)}{R_1} \right]$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{R_2^3}{r} + \frac{3}{2} R_1^2 \right]$$

d) El campo eléctrico en $r<R_2$ es 0, porque la carga encerrada en dicha cavidad es 0. El potencial, por tanto, es un valor constante:

$$\int_{R_2}^{r} dV = V(r) - V(R_2) = -\int_{R_2}^{r} E_r \cdot dr = 0 \Rightarrow V(r) = V(R_2)$$

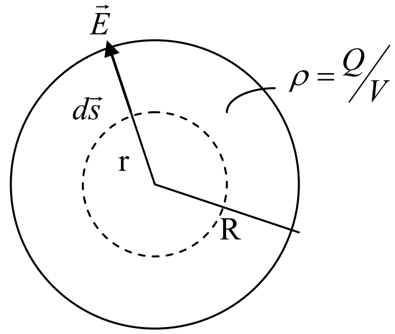
Del apartado anterior:

$$V(r) = V(R_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[-\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^3}{R_2} + \frac{3}{2} R_1^2 \right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[-\frac{3}{2} R_2^2 + \frac{3}{2} R_1^2 \right] = \frac{3 \cdot q}{8\pi\varepsilon_0 \left(R_1^3 - R_2^3\right)} \left[R_1^2 - R_2^2 \right]$$

1.2.6. Supongamos que una carga positiva está distribuida uniformemente en un volumen esférico de radio *R*, siendo ρ la densidad de carga por unidad de volumen. Calcúlese la fuerza de repulsión que sufriría una carga puntual *q*, situada a una distancia *r* del centro de la esfera, siendo $r \le R$.

RESOLUCIÓN:



La fuerza de repulsión que se ejerce sobre una carga puntual situada a una distancia $r \le R$ es $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, donde $\vec{E}$ se puede calcular usando el teorema de Gauss:

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oint_s \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{s}\right| \cdot \cos(0^{\circ}) = E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Despejando el campo:

$$E = \frac{q_{enc}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot V}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0}$$

El campo eléctrico resultante será:

$$\vec{E} = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{Q \cdot r}{3\varepsilon_0 \frac{4}{3}\pi R^3}\vec{u}_r = \frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u}_r$$

Por lo tanto la fuerza que actúa sobre la carga es:

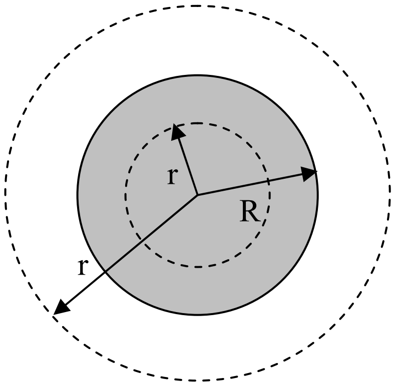
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q\frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u}_r$$

1.2.7. Una esfera de radio *R* posee una densidad volumétrica de carga proporcional a la distancia al centro $\rho = A \cdot r$ para $r \leq R$ y $\rho = 0$ para $r > R$, siendo *A* una constante. Hallar:

a) El valor de la constante *A* si la carga total de la esfera es *Q*

b) El campo eléctrico tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga

RESOLUCIÓN:



$$\begin{cases} Ar \text{ si } r \leq R \\ \rho = 0 \text{ si } r > R \end{cases}$$

a) Si la carga total de la esfera es *Q*, la densidad es constante en un elemento infinitesimal de volumen *dV*, el cual tiene un carga *dq*:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho \cdot dV$$

En una determinada superficie cerrada, la carga encerrada será la suma de las cargas *dq* de los infinitos elementos *dV* que forman esa región:

$$q_{enc} = \int dq = \int \rho \cdot dV$$

La carga total encerrada en la esfera de radio *R* es:

$$Q = q_{enc}(R) = \int_0^R \rho \cdot dV = \int_0^R Ar 4\pi r^2 dr = 4\pi A \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 4\pi A \frac{R^4}{4} \Rightarrow A = \frac{Q}{\pi R^4}$$

b) Para hallar el campo eléctrico en el interior y en el exterior de la esfera, utilizaremos el teorema de Gauss:

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para $r \leq R$:

$$\oint_s \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{s}\right| \cdot \cos(0^{\circ}) = E \cdot S = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

necesitamos hallar la carga encerrada hasta r

$$q_{enc} = \int_0^r \rho \cdot dV = \int_0^r A \cdot r \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \cdot A\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r = 4\pi \cdot A\frac{r^4}{4} = 4\pi\frac{Q}{\pi \cdot R^4}\frac{r^4}{4} = Q\frac{r^4}{R^4}$$

sustituyendo:

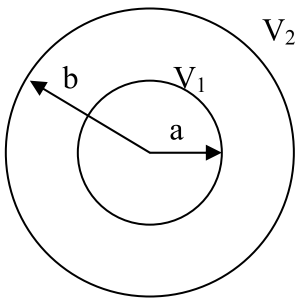
$$E = \frac{q_{enc}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\frac{r^4}{R^4} = \frac{Q \cdot r^2}{4\pi R^4 \varepsilon_0}$$

Para $r > R$ la carga encerrada es Q, por lo tanto:

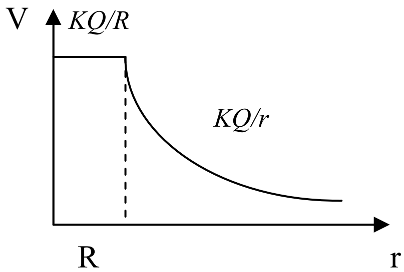
$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

1.2.8. Sean dos esferas conductoras concéntricas de radios $a<b$. La interior está a un potencial V_1 y la exterior a un potencial V_2. Determinar la carga sobre cada una de ellas.

RESOLUCIÓN:



El potencial de una corteza esférica de radio R es:



$$\begin{cases} V(r \le R) = \dfrac{K \cdot Q}{R} \\ V(r \ge R) = \dfrac{K \cdot Q}{r} \end{cases}$$

El potencial en un punto será la suma de los potenciales creados en ese punto, por las dos esferas conductoras.

En $r=a$:

$$V_1 = \frac{K \cdot Q_1}{a} + \frac{K \cdot Q_2}{b}$$

En $r=b$:

$$V_2 = \frac{K \cdot Q_1}{b} + \frac{K \cdot Q_2}{b}$$

Restando los valores de V_1 y V_2

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{KQ_1}{a} + \frac{KQ_2}{b}\right) - \left(\frac{KQ_1}{b} + \frac{KQ_2}{b}\right) = K \cdot Q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Si despejamos Q_1

$$Q_1 = \frac{(V_1 - V_2)}{K\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{(V_1 - V_2)}{K\left(\frac{b-a}{b \cdot a}\right)} = \frac{(V_1 - V_2)}{K(b-a)}(b \cdot a)$$

Para obtener Q_2 hacemos:

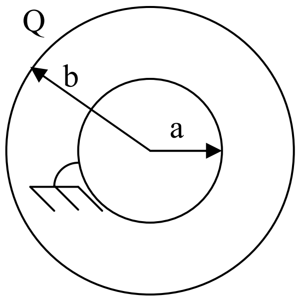
$$V_1 - \frac{b}{a}V_2 = \left[K\frac{Q_1}{a} + K\frac{Q_2}{b}\right] - \left[\frac{b}{a}\left(K\frac{Q_1}{b} + K\frac{Q_2}{b}\right)\right] = K\frac{Q_2}{b} - K\frac{Q_2}{a} = K \cdot Q_2\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

Si despejamos Q_2:

$$Q_2 = \frac{\left[V_1 - \frac{b}{a}V_2\right]}{K\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]}$$

1.2.9. Considérese dos esferas concéntricas y aisladas de radios a y b ($a < b$), estando la de radio a descargada y la de radio b con una carga total Q sobre su superficie. Se conecta la esfera interior a tierra sin tocar la exterior para nada. ¿Cuál será la carga que se induce en la esfera de radio a? ¿Cuál será el potencial en los puntos comprendidos entre las dos esferas?

RESOLUCIÓN:



a) Cuando conectamos a tierra la esfera interior, se induce una carga Q'. Siendo su potencial 0:

$$0 = K\frac{Q'}{a} + K\frac{Q}{b}$$

de donde podemos despejar *Q´*:

$$Q' = \left[-K\frac{Q}{b}\right]\frac{a}{K} = -\frac{Q\cdot a}{b}$$

b) El potencial en un punto comprendido entre las dos esferas, a una distancia *r* del centro es:

$$V(r) = K\frac{Q'}{r} + K\frac{Q}{b}$$

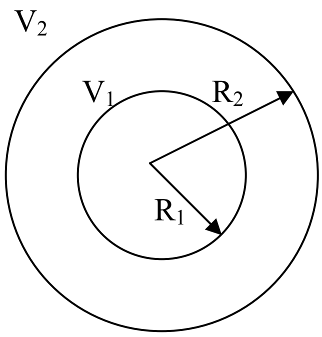
que sustituyendo *Q´*, será:

$$V(r) = \frac{K}{r}\left(-\frac{Q\cdot a}{b}\right) + K\frac{Q}{b} = K\frac{Q}{b}\left(-\frac{a}{r}+1\right) = \frac{KQ}{b}\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

siendo $a<r<b$.

1.2.10. Dos superficies esféricas concéntricas, de espesor despreciable y radios *5* y *10cm*, se colocan a *30000* y *18000V* respectivamente. A continuación se conecta la superficie interna a tierra. ¿A qué potencial queda la externa?

RESOLUCIÓN:



Vamos a calcular la carga inicial que hay en cada una de las esferas.
El potencial en la superficie de la esfera interna es:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{R_1} + K\frac{Q_2}{R_2} = K\left(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}\right) = 3\cdot 10^4 (V)$$

$$3\cdot 10^4 = 9\cdot 10^9\left[\frac{Q_1}{5\cdot 10^{-2}} + \frac{Q_2}{10\cdot 10^{-2}}\right] \Rightarrow 3\cdot 10^4 = \frac{9\cdot 10^9}{10^{-2}}\left[\frac{Q_1}{5}+\frac{Q_2}{10}\right]$$

$$\frac{1}{3}\cdot 10^{-7} = \frac{10\cdot Q_1 + 5\cdot Q_2}{50} \Rightarrow \frac{50}{3}\cdot 10^{-7} = 10\cdot Q_1 + 5\cdot Q_2 = 5(2\cdot Q_1 + Q_2)$$

$$\frac{10}{3}\cdot 10^{-7} = \frac{10^{-6}}{3} = 2\cdot Q_1 + Q_2 \Rightarrow 2\cdot Q_1 + Q_2 = \frac{10^{-6}}{3}$$

El potencial inicial en la esfera exterior es:

$$V_2 = K\frac{Q_1}{R_2} + K\frac{Q_2}{R_2} = \frac{K}{R_2}(Q_1 + Q_2)$$
$$\frac{18\cdot 10^3 \cdot 10\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^9} = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_1 + Q_2 = 2\cdot 10^{-7}$$

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenemos Q_1 y Q_2:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{10^{-6}}{3} = 2\cdot Q_1 + Q_2 \\ &Q_1 + Q_2 = 2\cdot 10^{-7} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{10^{-6}}{3} = 2\cdot Q_1 + \left(2\cdot 10^{-7} - Q_1\right) \Rightarrow \frac{10^{-6}}{3} - 2\cdot 10^{-7} = Q_1 \Rightarrow Q_1 = 0'13\cdot 10^{-6}(C)$$
$$Q_2 = 2\cdot 10^{-7} - 1'3\cdot 10^{-7} = 0'7\cdot 10^{-7}(C)$$

Cuando conectamos la esfera interior a tierra cambia Q_1, mientras Q_2 se mantiene. El potencial ahora es:

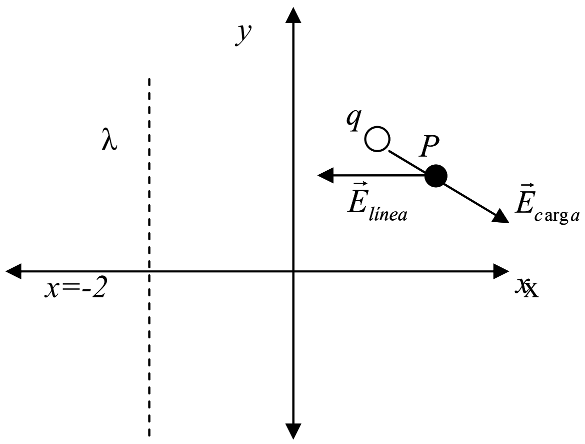
$$V_1' = 0 = K\frac{Q_1'}{R_1} + K\frac{Q_2}{R_2} = K\left[\frac{Q_1'}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right] \Rightarrow \frac{Q_1'}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} = 0 \Rightarrow Q_1' = -\frac{Q_2}{R_2}R_1 \Rightarrow$$
$$Q_1' = -0'7\cdot 10^{-7}\cdot \frac{5\cdot 10^{-2}}{10\cdot 10^{-2}} = -35\cdot 10^{-9}(C)$$

El potencial en la esfera exterior es:

$$V_2 = K\frac{Q_1'}{R_2} + K\frac{Q_2}{R_2} = \frac{K}{R_2}\left(Q_1'\right) + Q_2 = \frac{9\cdot 10^9}{10\cdot 10^{-2}}\left(-0'35\cdot 10^{-7} + 0'7\cdot 10^{-7}\right) \Rightarrow$$
$$V_2 = 9\cdot 10^{10}\left(0'35\cdot 10^{-7}\right) = 3'15\cdot 10^3(V)$$

1.2.11. Una carga lineal infinita de densidad lineal uniforme *λ=-1.5μC/m* es paralela al eje *y* en *x=-2m*. Una carga puntual de *1.3μC* está localizada en el punto *(1,2)*. Determinar el campo eléctrico en el punto *(2,1.5)*

RESOLUCIÓN:



El campo total es la suma del campo que crea la línea y el campo que crea la carga.
El campo que crea la línea en *P* es:

$$\left|\vec{E}\right|_{línea} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \frac{1'5\cdot 10^{-6}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}{2\pi\cdot 4} = 6'75\cdot 10^{3}\left(N/C\right)$$

$$\vec{E}_{línea} = -6'75\cdot 10^{3}\vec{i}\left(N/C\right)$$

$$\vec{E}_{carga\ puntual} = k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{r} = (2,1'5)-(1,2) = (1,-0'5) \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{1^2+(-0'5)^2} = 1'1$$

$$\vec{u}_r = \left(\frac{1}{1'1},\frac{-0'5}{1'1}\right) = (0'9,-0'5)$$

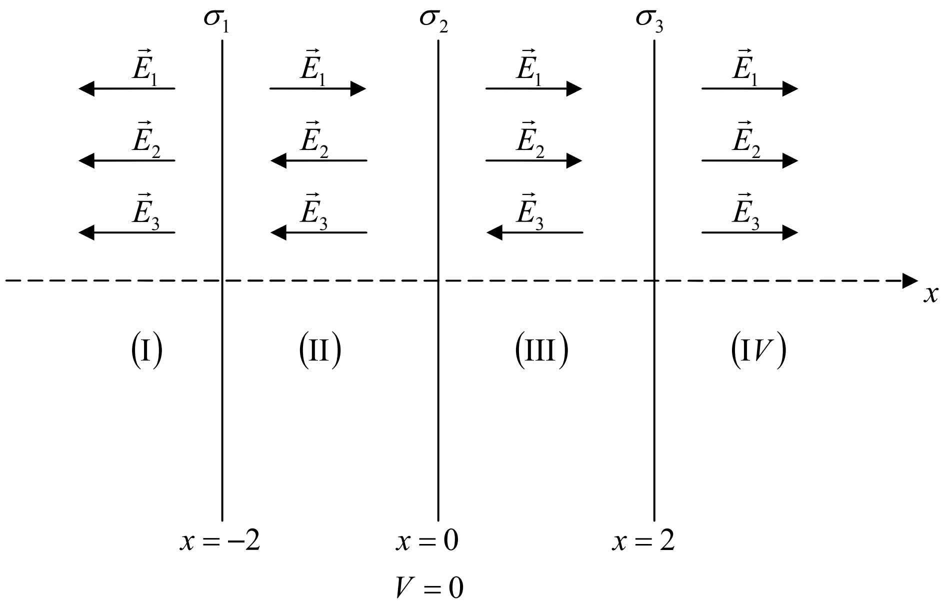
$$\vec{E}_{carga\ puntual} = 9\cdot 10^{9}\frac{1'3\cdot 10^{-6}}{1'1}(0'9,-0'5) = \left(9'57\cdot 10^{3},-5'32\cdot 10^{3}\right)N/C$$

El campo total en *P* es:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P_{carga}} + \vec{E}_{P_{línea}} = 9'57\cdot 10^{3}\vec{i} - 5'32\cdot 10^{3}\vec{j} - 6'75\cdot 10^{3}\vec{i} = \left(2'82\cdot 10^{3}\vec{i} - 5'32\cdot 10^{3}\vec{j}\right)N/C$$

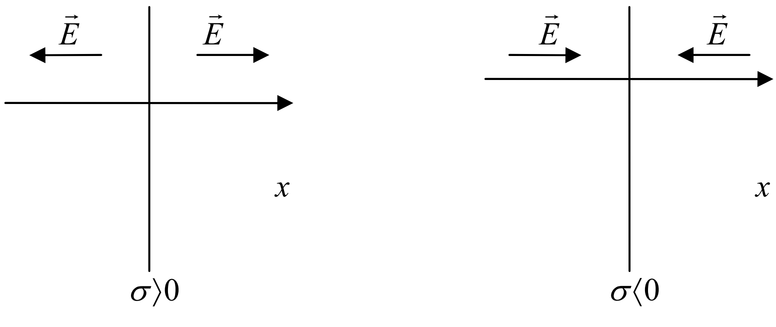
1.2.12. En cada uno de los tres planos indefinidos $x=-2$, $x=0$, $x=2$, existe una distribución de carga superficial $\sigma_1 = 2\ C/m^2$, $\sigma_2 = 4\ C/m^2$, $\sigma_3 = -3\ C/m^2$, respectivamente. Hallar el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio, tomando origen de potenciales $V=0$ en $x=0$.

RESOLUCIÓN:



Teniendo en cuenta el signo de la carga de cada plano, dibujamos el campo eléctrico que crea cada uno de ellos, en cada región.

El campo eléctrico que crea un plano indefinido en sus proximidades es:



$$\vec{E}(x\rangle 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \qquad \vec{E}(x\rangle 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right)$$

En una región el campo eléctrico total es la suma de los campos eléctricos que crea cada plano.

REGIÓN I:

$$\vec{E}_{\mathrm{I}} = \vec{E}_{\mathrm{I}_1} + \vec{E}_{\mathrm{I}_2} + \vec{E}_{\mathrm{I}_3} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{i} = \frac{2}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{4}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{3}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right)$$

$$\vec{E}_{\mathrm{I}} = -\frac{3}{2\varepsilon_0}\vec{i}\left(N/C\right)$$

REGIÓN II:

$$\vec{E}_{\mathrm{II}} = \vec{E}_{\mathrm{II}_1} + \vec{E}_{\mathrm{II}_2} + \vec{E}_{\mathrm{II}_3} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) = \frac{2}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{4}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) + \frac{3}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right)$$

$$\vec{E}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{i}\left(N/C\right)$$

REGIÓN III:

$$\vec{E}_{\mathrm{III}} = \vec{E}_{\mathrm{III}_1} + \vec{E}_{\mathrm{III}_2} + \vec{E}_{\mathrm{III}_3} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) = \frac{2}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{4}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{3}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right)$$

$$\vec{E}_{\mathrm{III}} = \frac{9}{2\varepsilon_0}\vec{i}\left(N/C\right)$$

REGIÓN IV:

$$\vec{E}_{IV} = \vec{E}_{IV_1} + \vec{E}_{IV_2} + \vec{E}_{IV_3} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right) = \frac{2}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{4}{2\varepsilon_0}\left(\vec{i}\right) + \frac{3}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{E}_{IV} = \frac{3}{2\varepsilon_0}\vec{i}\left(N/C\right)$$

Para obtener los potenciales, consideramos *V(x=0) = 0*:

REGIÓN II *(-2 ≤ x ≤ 0)*:

$$\int_0^x dV = V(x) - V(0) = -\int_0^x E \cdot dx = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\left[x\right]_0^x = -\frac{1}{2\varepsilon_0}x \Rightarrow V(x) = -\frac{1}{2\varepsilon_0}x$$

REGIÓN I *(x ≤ -2)*:

$$\int_{-2}^x dV = V(x) - V(-2) = -\int_{-2}^x E \cdot d = \frac{3}{2\varepsilon_0}\left[x\right]_{-2}^x = \frac{3}{2\varepsilon_0}\left[x+2\right] \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{3}{2\varepsilon_0}\left[x+2\right] + V(-2) = \frac{3}{2\varepsilon_0}x + \frac{3}{\varepsilon_0} + V(-2)$$

Utilizando el resultado de la región II:

$$V(-2)=\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$V(x)=\frac{3}{2\varepsilon_0}x+\frac{3}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_0}=\frac{3}{2\varepsilon_0}x+\frac{4}{\varepsilon_0}$$

REGIÓN III *(0 ≤ x ≤ 2)*:

$$\int_0^x dV=V(x)-V(0)=-\int_0^x E\cdot dx=-\int_0^x\frac{9}{2\varepsilon_0}dx=-\frac{9}{2\varepsilon_0}[x]_0^x=-\frac{9}{2\varepsilon_0}x\Rightarrow$$

$$V(x)=-\frac{9}{2\varepsilon_0}x$$

REGIÓN IV *(x ≥ 2)*:

$$\int_2^x dV=V(x)-V(2)=-\int_2^x E\cdot dx=-\int_2^x\frac{3}{2\varepsilon_0}dx=-\frac{3}{2\varepsilon_0}[x-2]\Rightarrow$$

$$V(x)=-\frac{3}{2\varepsilon_0}x+\frac{3}{\varepsilon_0}+V(2)$$

Utilizando el resultado de la región III:

$$V(2)=-\frac{9}{\varepsilon_0}$$

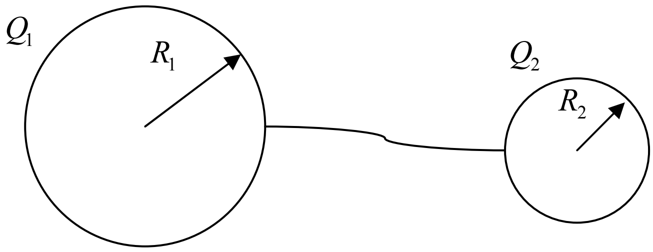
$$V(x)=-\frac{3}{2\varepsilon_0}x+\frac{3}{\varepsilon_0}-\frac{9}{\varepsilon_0}=-\frac{3}{2\varepsilon_0}x-\frac{6}{\varepsilon_0}$$

1.2.13. Una esfera conductora, de radio R_1 y carga Q se une mediante un hilo conductor, de capacidad despreciable, a otra esfera de radio R_2 ($R_2<R_1$), inicialmente descargada. Suponiendo que las esferas están lo suficientemente alejadas entre sí para que los fenómenos de influencia sean despreciables, calcular:

a) Las cargas Q_1 y Q_2 de cada una de las esferas
b) Potencial
c) Densidad superficial de carga en cada esfera

RESOLUCIÓN:

a) Al unir ambas esferas, parte de la carga Q de la primera, pasa a la segunda, de tal forma que entre ambas esferas suman la carga Q. También al unirlas, quedan ambas al mismo potencial V:



El potencial de la primera, V'_1, será:

$$V'_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1}$$

Y el de la segunda:

$$V'_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q-Q_1}{R_2}$$

Como $V=V'_1=V'_2$: $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q-Q_1}{R_2} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{Q\cdot R_1}{R_1+R_2} \\ Q_2 = Q - Q_1 = Q - Q\dfrac{R_1}{R_1+R_2} = \dfrac{Q\cdot R_2}{R_1+R_2} \end{cases}$$

Si comparamos las cargas, vemos que Q_1 es mayor que Q_2.

b) El potencial al que quedan ambas esferas es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\cdot R_1}{(R_1+R_2)R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1+R_2}$$

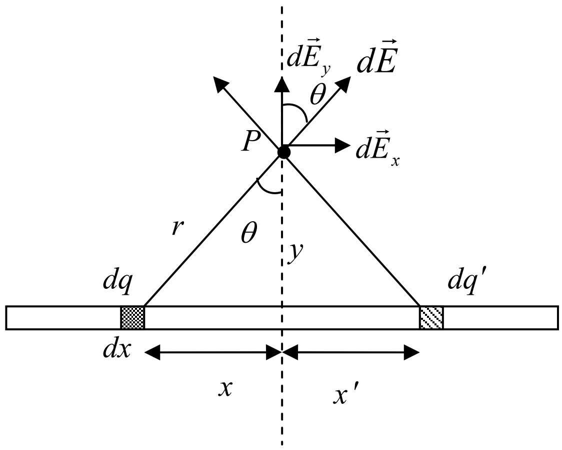
c) Las densidades superficiales de carga en cada esfera son:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R_1(R_1+R_2)} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R_2(R_1+R_2)}$$

Siendo en este caso σ_1 menor que σ_2.

APÉNDICE

1.2.14. Un trozo de varilla delgada no conductora de longitud L tiene una carga total q, distribuida uniformemente a lo largo de ella. Hallar el campo eléctrico $\vec{E}$ en:
a) Un punto P de la mediatriz de la varilla
b) En el mismo punto cuando L tiende a infinito.



Siendo λ la densidad lineal de carga, escribimos el valor de la carga de un trozo infinitesimal de barra:
$q = \lambda \cdot L \Rightarrow dq = \lambda \cdot dx$

Y el campo correspondiente a dicho trozo será:
$$\left|d\vec{E}\right| = K\frac{dq}{r^2} = K\frac{\lambda \cdot dx}{r^2}$$

cuyas componentes son:
$d\vec{E}_x = -d\vec{E}_{x'} \rightarrow \left|\vec{E}_x\right| = \int\left|d\vec{E}_x\right| = 0$ por haber simetría
$$\left|d\vec{E}_y\right| = \left|d\vec{E}\right| \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot dx}{r^2}\cos\theta$$
de modo que sólo habrá componente y

Tenemos que $dE = f(\theta, x, r)$ pero debemos ponerlo en función de una sóla variable, en este caso θ.
$$tg\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot tg\theta \Rightarrow dx = y\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\cos\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow r = \frac{y}{\cos\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2\theta}$$

Sustituimos en la componente y:

$$\left|d\vec{E}_y\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\frac{y\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{y}\cos\theta\cdot d\theta$$

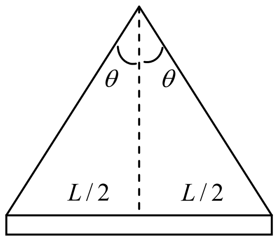
Integrando:

$$\left|\vec{E}_y\right| = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{y}\cos\theta\cdot d\theta = 2\int_0^{\theta_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{y}\cos\theta\cdot d\theta = 2\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{y}sen\theta\right]_0^{\theta_0} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}sen\theta_0 =$$

$$= \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{y}\frac{L/2}{\sqrt{\left(L/2\right)^2 + y^2}} = \frac{k\cdot q}{y\sqrt{\left(L/2\right)^2 + y^2}}$$

ya que

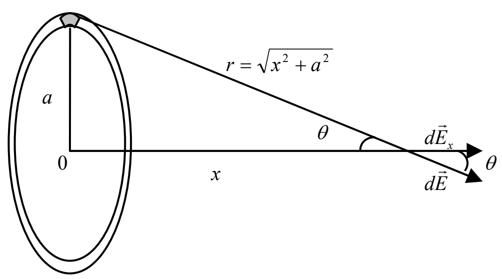
$$sen\theta_0 = \frac{L/2}{\sqrt{\left(L/2\right)^2 + y^2}}$$



Valoración:

Si $L \to \infty \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} \to sen\dfrac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow E_y = \dfrac{2\cdot k\cdot\lambda}{y}$

1.2.15. Un anillo de radio a tiene una carga q distribuida uniformemente a lo largo de su circunferencia. Calcular el campo eléctrico y el potencial eléctrico en puntos a lo largo del eje perpendicular que pasa por el centro del anillo, en función de la distancia a dicho centro.



La expresión para un diferencial del campo es:

$$\left|d\vec{E}\right| = K\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

Sólo existe componente en x, ya que por simetría las componentes en y se anulan.

$$\left|\vec{E}_x\right| = \int\left|d\vec{E}_x\right| = \int\left|d\vec{E}\right|\cdot\cos\theta = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}x$$

siendo $\cos\theta = \frac{x}{r}$ y $r = \sqrt{x^2+a^2}$

Por lo tanto el campo en cualquier punto del eje x es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$

Casos particulares:

$x \to 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

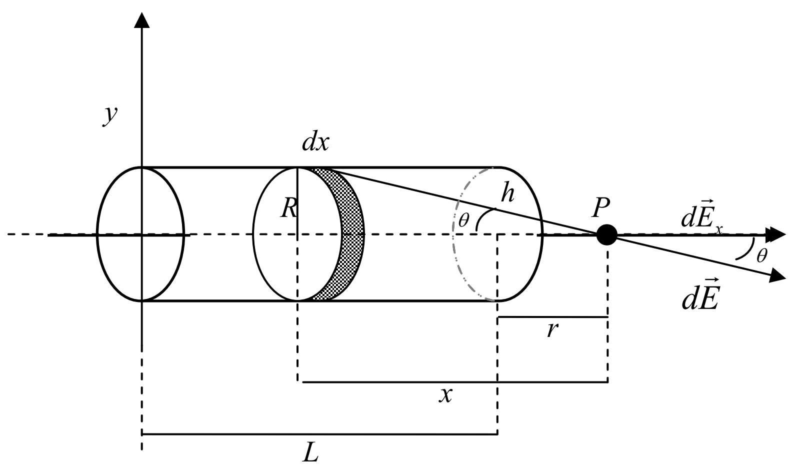
$x >> a \Rightarrow E \to K\frac{q}{x^2}$

Para x muy alejadas del origen, se aproxima al campo de una carga puntual.

Y el potencial será:

$$dV = K\frac{dq}{r} \Rightarrow V = \int_0^Q K\frac{dq}{r} = \frac{KQ}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

1.2.16. Un cilindro hueco de radio R y longitud L se encuentra cargado uniformemente con una densidad superficial de carga σ. Calcular el campo eléctrico y el potencial en los puntos que están sobre el eje del cilindro.



Considerando la expresión para un anillo de radio R y carga dq:

$$\left|d\vec{E}_x\right| = K\frac{x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}dq$$

donde el diferencial de carga es, $dq = 2\pi R\sigma \cdot dx$
sustituyendo:

$$dE_x = K\frac{2\pi R\sigma x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}dx$$

$$E_x = \int_{L+r}^{r} K\frac{2\pi R\sigma x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}dx = -K\frac{2\pi R\sigma}{\sqrt{R^2 + x^2}}\Bigg|_{L+r}^{r} = 2\pi KR\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (L+r)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right]$$

En cuanto al potencial creado en un punto P, por anillo de radio R y carga dq:

$$dV = K\frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}} = K\frac{2\pi R\sigma}{\sqrt{R^2 + x^2}}dx$$

Que considerando el origen en P, e integrando desde a todo el cilindro:

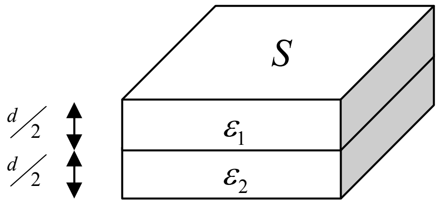
$$V = \int_{L+r}^{r} K\frac{2\pi R\sigma}{\sqrt{R^2 + x^2}}dx = K2\pi R\sigma\int_{L+r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{R^2 + x^2}} = K2\pi R\sigma\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + R^2}\right)\right]_{L+r}^{r} =$$

$$= K2\pi R\sigma\left[\ln\left(r + \sqrt{r^2 + R^2}\right)\right] - \ln\left[(L+r) + \sqrt{(L+r)^2 + R^2}\right]$$

1.3 Condensadores. Campo eléctrico en la materia y energía del campo

1.3.1. Un condensador de láminas plano paralelas tiene una capacidad C_0 y una separación entre las láminas d. Se insertan entre las placas dos láminas dieléctricas de constantes ε_1 y ε_2, cada una de ellas de espesor $d/2$ y de la misma área que las placas. Demostrar que la capacidad es: $C = \dfrac{2 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \cdot C_0$

RESOLUCIÓN:



La capacidad de un condensador de láminas plano-paralelas es C_0:

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

Si se insertan 2 dieléctricos entre las láminas, que ocupan cada uno la mitad del espacio que existe entre ellas, tenemos 2 condensadores en serie (misma carga y distinta d.d.p), cuyas capacidades son respectivamente:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d/2} \qquad\qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d/2}$$

La capacidad equivalente es:

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\left(\dfrac{\varepsilon_1 \cdot S}{d/2}\right) \cdot \left(\dfrac{\varepsilon_2 \cdot S}{d/2}\right)}{\dfrac{\varepsilon_1 \cdot S}{d/2} + \dfrac{\varepsilon_2 \cdot S}{d/2}} = \frac{\varepsilon_1 \cdot S \cdot \varepsilon_2 \cdot S \cdot \left(d/2\right)}{\left(d/2\right)^2 \left(\varepsilon_1 \cdot S + \varepsilon_2 \cdot S\right)} = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot S}{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\left(d/2\right)}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot S}{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\left(d/2\right)}$$

Teniendo en cuenta que:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{\left(\varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0 + \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0\right)\left(d/2\right)} = \frac{\varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0^2 \cdot S}{\varepsilon_0\left(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}\right)\left(d/2\right)} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{\left(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}\right) \cdot d} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}} \cdot C_0$$

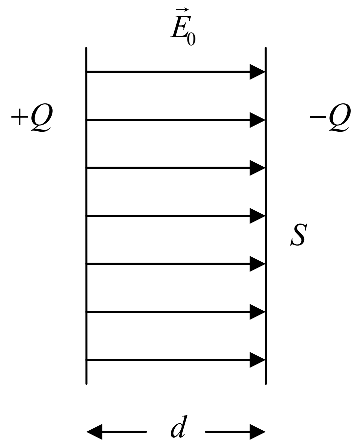
Otra forma de resolver el problema es usar la definición de capacidad y calcular la nueva diferencia de potencial:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{donde } V = V_1 + V_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 \quad \text{siendo} \quad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \quad \text{y} \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

1.3.2. Una lámina de cobre de espesor *b*, se introduce dentro de las láminas planas de un condensador. La lámina de cobre se encuentra situada exactamente a la mitad de la distancia *d* entre las placas. ¿Cuál es la capacidad del condensador antes y después de introducir la lámina?

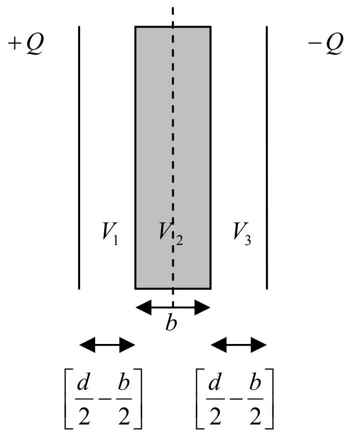
RESOLUCIÓN:

Antes de introducir la lámina conductora:



donde $C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

Al introducir la lámina conductora de cobre:



Utilizando la definición de capacidad:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot S}{V} \quad \text{donde} \quad V = V_1 + V_2 + V_3$$

En la lámina de cobre el campo es cero y el potencial constante, por lo que la d.d.p entre sus extremos, es 0.

$$V = V_1 + V_3 = E_1\left[\frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right] + E_3\left[\frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right]$$

siendo $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ y $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right] + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d - b\right]$$

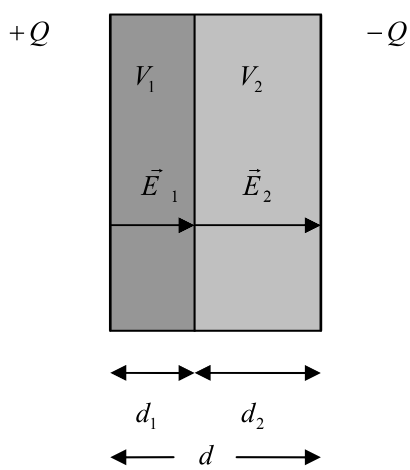
La capacidad por tanto es:

$$C = \frac{\sigma \cdot S}{V} = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[d - b\right]} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d\left[1 - \frac{b}{d}\right]} = C_0 \frac{1}{\left[1 - \frac{b}{d}\right]}$$

1.3.3. Las láminas de un condensador plano están separadas *5mm* y tienen *2m²* de área. Entre ellas se introducen dos dieléctricos, uno con espesor *2mm* y permitividad relativa *5*, el otro de *3mm* y permitividad relativa *2*. El condensador se carga a $3'54 \cdot 10^{-5} C$. Calcular:

a) El campo eléctrico en cada dieléctrico
b) La diferencia de potencial entre las láminas del condensador
c) La capacidad del condensador

RESOLUCIÓN:



a) El campo eléctrico entre láminas de un condensador plano-paralelo con un dieléctrico de permitividad ε es:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \quad \text{con} \quad \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

de donde:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{Q}{\varepsilon_1 \cdot S_1} = \frac{Q}{\varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0 \cdot S_1} = \frac{3'54 \cdot 10^{-5}}{\frac{5}{4\pi 9 \cdot 10^9} \cdot 2} = 400365 \left(V/m \right)$$

$$\left|\vec{E}_2\right| = \frac{Q}{\varepsilon_2 \cdot S_2} = \frac{Q}{\varepsilon_{r_2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S_2} = \frac{3'54 \cdot 10^{-5}}{\frac{2}{4\pi 9 \cdot 10^9} \cdot 2} = 1000911 \left(V/m \right)$$

b) La d.d.p entre las placas del condensador es:

$$V = V_1 + V_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2 = 400365 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 1000911 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3803 (V)$$

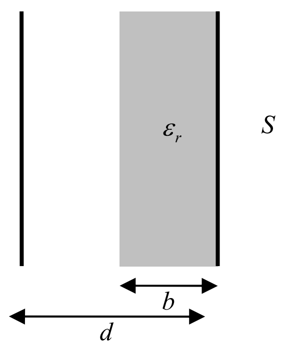
c) La capacidad es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{3'54 \cdot 10^{-5}}{3803} = 9'3 \cdot 10^{-9} = 9'3 (nF)$$

1.3.4. Una placa de dieléctrico de espesor b y constante dieléctrica relativa ε_r, se coloca entre dos placas planas y paralelas de área A y separación d. La diferencia de potencial antes de introducir el dieléctrico es V. Supóngase que $A=100cm^2$, $d=1cm$, $\varepsilon_r=7$, $V=100V$ y $b=0'5cm$. Calcular:

a) La capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico
b) La carga libre depositada en las placas del condensador
c) La intensidad del campo eléctrico en el hueco
d) La intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico
e) La diferencia de potencial que existe entre las placas
f) La capacidad del condensador después de introducir el dieléctrico

RESOLUCIÓN:



a) $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 8'84 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9} = 8'84 \cdot 10^{-12} = 8'84(pF)$

b) $C_0 = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow Q = C \cdot V = 8'84 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 8'84 \cdot 10^{-10}(C)$

c) $V_0 = E_0 \cdot d \Rightarrow E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4 \left(V/m\right)$

d) $E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{10^4}{7} = 1428'6 \left(V/m\right)$

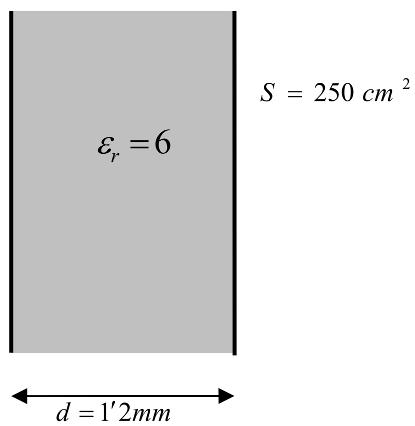
e) $V = E_0 \cdot (d-b) + \frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot b = 10^4 \cdot 0'5 \cdot 10^{-2} + 1428'6 \cdot 0'5 \cdot 10^{-2} = 57'14 \ (V)$

f) $C = \frac{Q}{V} = \frac{8'84 \cdot 10^{-10}}{57'14} = 15'5 \cdot 10^{-12}(F)$

1.3.5. Las armaduras de un condensador plano tienen una superficie de *250 cm²*. El dieléctrico situado entre las armaduras es mica de *1.2mm* de espesor y ε_r=6. Determinar:

a) La capacidad del condensador
b) La carga cuando la diferencia de potencial entre las armaduras es de *500V*
c) El campo eléctrico entre las armaduras
d) La fuerza atractiva entre las mismas
e) La energía almacenada en el condensador

RESOLUCIÓN:

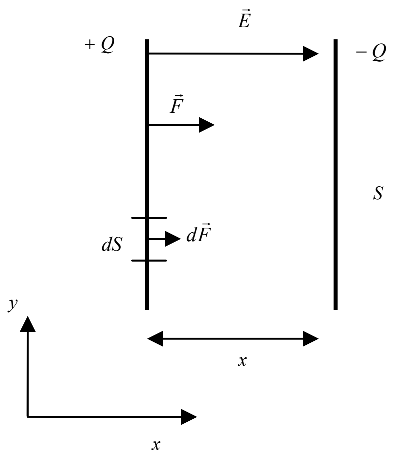


a) $C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \dfrac{S}{d} = 6 \cdot \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \dfrac{250 \cdot 10^{-4}}{1'2 \cdot 10^{-3}} = 1'1 \cdot 10^{-9}(F)$

b) $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V = 1'1 \cdot 10^{-9} \cdot 500 = 0'55 \cdot 10^{-6}(C)$

c) $V = E \cdot d \Rightarrow E = \dfrac{V}{d} = \dfrac{500}{1'2 \cdot 10^{-3}} = 416667\left(V/m\right)$

d)



El trabajo está relacionado con la energía almacenada:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} C \cdot (E \cdot x)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \cdot S}{x} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 x^2 = \frac{1}{2} \frac{S \cdot \sigma^2 \cdot x}{\varepsilon}$$

Si manteniendo la carga constante, se aproximan las armaduras una distancia *dx*, la energía almacenada disminuye en una cantidad:

$$dW = \frac{1}{2} \frac{S \cdot \sigma^2}{\varepsilon} dx$$

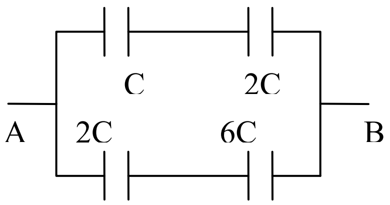
Esta variación de energía equivale al trabajo de la fuerza que actúa sobre una de las armaduras:

$$dW = F \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{S \cdot \sigma^2}{\varepsilon} \Rightarrow F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\varepsilon} \sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\varepsilon} \cdot \frac{Q^2}{S^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q^2}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{Q^2}{S} =$$

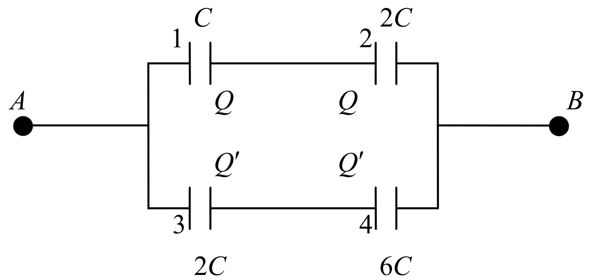
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{6} \cdot \frac{\left(0'55 \cdot 10^{-6}\right)^2}{250 \cdot 10^{-4}} = 0'114(N)$$

e) $U = \dfrac{1}{2} C \cdot V^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 1'1 \cdot 10^{-9} (500)^2 = 1'38 \cdot 10^{-4}(J)$

1.3.6. Dado el sistema de la figura, calcular la energía almacenada por cada condensador si la diferencia de potencial entre *A* y *B* es *V=20 V*, siendo *C=4 μF*.



RESOLUCIÓN:



$V_{AB} = 20V$
$C = 4\mu F$

La energía almacenada en un condensador es:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Consideramos los condensadores *1* y *2* que están en serie para calcular V_1 y V_2. Estos tienen la misma carga *Q*:

$$C_1 = C = \frac{Q}{V_1} \Rightarrow Q = C \cdot V_1$$

$$C_2 = 2C = \frac{Q}{V_2} \Rightarrow Q = 2C \cdot V_2$$

Igualando las *Q*:

$$C \cdot V_1 = 2C \cdot V_2 \Rightarrow V_1 = 2V_2$$

Teniendo en cuenta que V_{AB} es la suma de V_1 y V_2:

$$V_{AB} = V_1 + V_2 = 2V_2 + V_2 = 3V_2 = 20(V) \Rightarrow V_2 = \frac{20}{3}(V) \Rightarrow V_1 = \frac{40}{3}(V)$$

La energía almacenada en los condensadores *1* y *2* es:

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}CV_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-6}\left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 1600}{18} = 3'55\cdot 10^{-4}(J)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}2CV_2^2 = 4\cdot 10^{-6}\left(\frac{20}{3}\right)^2 = 1'77\cdot 10^{-4}(J)$$

Consideramos los condensadores *3* y *4* que están en serie para calcular V_3 y V_4. Estos tienen la misma carga *Q'*:

$$C_3 = 2C = \frac{Q'}{V_3} \Rightarrow Q' = 2C\cdot V_3$$

$$C_4 = 6C = \frac{Q'}{V_4} \Rightarrow Q' = 6C\cdot V_4$$

Igualando las *Q'*:

$$2C\cdot V_3 = 6C\cdot V_4 \Rightarrow V_3 = 3V_4$$

Teniendo en cuenta que V_{AB} es la suma de V_3 y V_4:

$$V_{AB} = V_3 + V_4 = 3V_4 + V_4 = 4V_4 = 20(V) \Rightarrow V_4 = \frac{20}{4} = 5(V) \Rightarrow V_3 = 15(V)$$

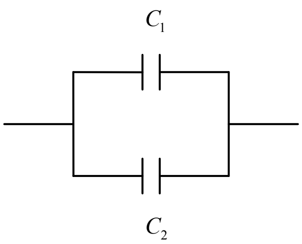
Por tanto, la energía almacenada en cada uno de ellos es:

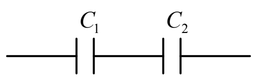
$$U_3 = \frac{1}{2}C_3V_3^2 = \frac{1}{2}\cdot 2C\cdot V_3^2 = 4\cdot 10^{-6}\cdot 15^2 = 9\cdot 10^{-4}(J)$$

$$U_4 = \frac{1}{2}C_4V_4^2 = \frac{1}{2}\cdot 6C\cdot V_4^2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot 5^2 = 3\cdot 10^{-4}(J)$$

1.3.7. Dos condensadores en paralelo tienen una energía de $9\cdot 10^{-4}J$ cuando entre sus armaduras se establece una diferencia de potencial de *5000V*. Cuando los mismos condensadores se conectan en serie y se establece la misma diferencia de potencial entre las armaduras extremas, la energía es de $2\cdot 10^{-4}J$. Hallar sus capacidades.

RESOLUCIÓN:





$V = 5000(V)$ $\quad$ $V = 5000(V)$

$U_{paralelo} = 9\cdot 10^{-4}(J)$ $\quad$ $U_{serie} = 2\cdot 10^{-4}(J)$

Para la conexión en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$U_{paralelo} = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right) \cdot V^2 = 9 \cdot 10^{-4} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{18 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^6} = 0'72 \cdot 10^{-10}$$

Para la conexión en serie:

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_{serie} = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot V^2 = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^6} = 0'16 \cdot 10^{-10}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0'72 \cdot 10^{-10} \\ \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{4 \cdot 10^{-4}}{25 \cdot 10^6} = 0'16 \cdot 10^{-10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0'72 \cdot 10^{-10} - C_2 \\ \dfrac{\left(0'72 \cdot 10^{-10} - C_2\right) \cdot C_2}{0'72 \cdot 10^{-10} - C_2 + C_2} = 0'16 \cdot 10^{-10} \Rightarrow \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 0'72 \cdot 10^{-10} \cdot C_2 - {C_2}^2 = 0'16 \cdot 10^{-10} \cdot 0'72 \cdot 10^{-10} = 0'1152 \cdot 10^{-20}$$

$$\Rightarrow {C_2}^2 - 0'72 \cdot 10^{-10} C_2 + 0'1152 \cdot 10^{-20} = 0$$

Se resuelve esta ecuación de segundo grado:

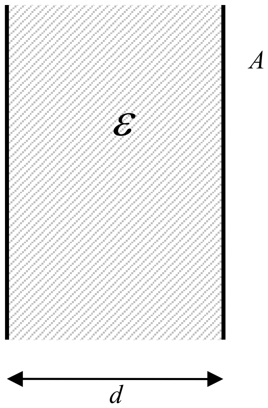
$$C_2 = \frac{0'72 \cdot 10^{-10} \pm \sqrt{0'5184 \cdot 10^{-20} - 0'4608 \cdot 10^{-20}}}{2} = \frac{0'72 \cdot 10^{-10} \pm 0'24 \cdot 10^{-10}}{2} \Rightarrow$$

$$C_2 = \begin{cases} 0'48 \cdot 10^{-10} \left(F\right) \Rightarrow C_1 = 0'24 \cdot 10^{-10} \left(J\right) \\ 0'24 \cdot 10^{-10} \left(F\right) \Rightarrow C_1 = 0'48 \cdot 10^{-10} \left(J\right) \end{cases}$$

Uno de los condensadores tiene una capacidad de $0'48 \cdot 10^{-10}\left(J\right)$ y el otro de $0'24 \cdot 10^{-10}\left(J\right)$.

1.3.8. En un condensador de placas paralelas de área *A* y separación *d*, una batería carga las placas comunicándoles una diferencia de potencial V_0. Entonces se desconecta la batería y se introduce una placa de dieléctrico con espesor *d*. Calcúlese la energía almacenada antes y después de introducir el dieléctrico.

RESOLUCIÓN:



La energía almacenada antes de introducir el dieléctrico es:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

donde $C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$

por tanto:

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \cdot V_0^2 (J)$$

La energía almacenada después de introducir el dieléctrico es:

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

donde $C = \varepsilon_r . C_0 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \dfrac{A}{d}$ y $V = \dfrac{V_0}{\varepsilon_r}$

por tanto:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{V_0^2}{\varepsilon_r^2} = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

1.3.9. a) Calcular la energía almacenada en una esfera conductora de radio R y carga Q.
b) ¿Cuál sería la energía almacenada si se tratara de una esfera de radio R y carga Q uniformemente distribuida en todo el volumen?

RESOLUCIÓN:

a) Para cargar un conductor es necesario gastar energía porque, para suministrarle más carga, debe realizarse trabajo para vencer la repulsión de las cargas ya presentes. Este trabajo ocasiona un aumento en la energía del conductor.
Para un conductor de capacidad C con carga q, se tiene:

$$V = \frac{q}{C}$$

Si añadimos una carga dq al conductor, trayéndola desde el infinito, el trabajo realizado es:

$$dW = V \cdot dq$$

Y este trabajo es igual al incremento en la energía del conductor.

$$dW = V \cdot dq = \frac{q}{C} dq \rightarrow W = \frac{1}{C}\int_0^Q q \cdot dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Como para un conductor esférico de radio R, la capacidad es: $C = 4\pi\varepsilon R$

La energía almacenada será:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R}$$

Por otro lado, tenemos que el campo eléctrico para un conductor esférico es:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & r \geq R \end{cases}$$

Si calculamos la integral de E^2 extendida a todo el espacio,

$$\int_0^\infty E^2 \cdot dV = \int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr = 0 + \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon^2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon^2 R}$$

y comparamos con la energía almacenada, podremos escribirla como:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\int_V E^2 \cdot dV$$

de donde la energía almacenada por unidad de volumen o densidad de energía será:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

b) Para formar una esfera cargada uniformemente en todo su volumen, tenemos en cuenta que su campo eléctrico es:

$$E = \begin{cases} \dfrac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

Por lo que la energía almacenada es:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 \cdot dV = \frac{1}{2}\int_V E^2 4\pi r^2 dr$$

de donde:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R \left(\frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0{}^2 R^6}\int_0^R r^4 dr + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0{}^2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0{}^2 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0{}^2 R} = \frac{6Q^2}{40\pi\varepsilon_0{}^2 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0{}^2 R}$$

La energía almacenada será:

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0{}^2 R}$$