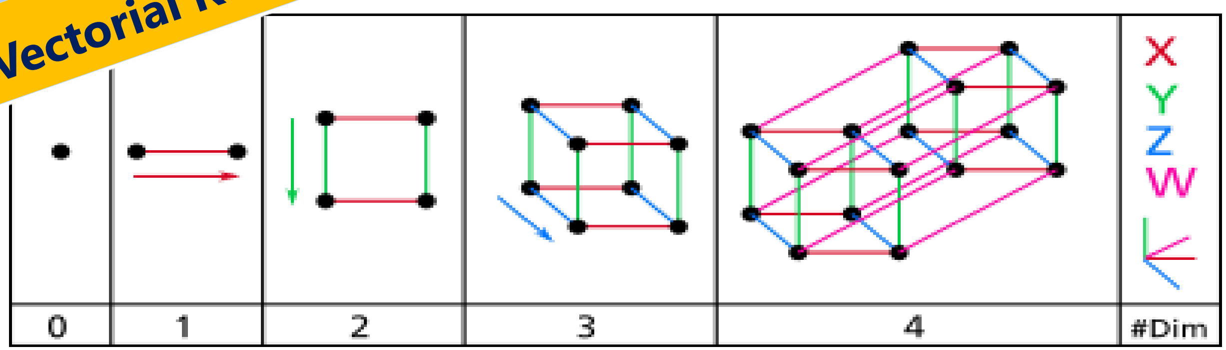
Álgebra Lineal

Rama de las matemáticas que estudia matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y sus transformaciones lineales.

Espacio Vectorial Real de dimensión n



Sistemas de ecuaciones Lineales

Métodos Directos:

Gauss.

Gauss-Jordan

Matriz inversa

Factorización LU

Métodos Iterativos.

Jacobi

Gauss-Seidel.

Convergencia de los métodos iterativos.

Problema

Resolver sistemas de **m** ecuaciones lineales con **n**-incógnitas

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Dados los escalares $\mathbf{a_{ij}}$ y $\mathbf{b_j}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ se trata de encontrar los números $(s_1, s_2,\dots, s_n)$ / al hacer $(x_1, x_2,\dots, x_n) = (s_1, s_2,\dots, s_n)$ se verifiquen las m- ecuaciones

Clasificación de SL

> Si no existe solución → **Incompatible**

> Si tiene única solución → **Compatible Determinado**

> Si tiene infinitas soluciones → **Compatible Indeterminado**

> SL con alguna solución: **consistentes**

Notación matricial de un SL

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \longrightarrow \mathbf{Ax = b}$$

Definimos para **$1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$** :

Matriz de coeficientes: **A = (aij),** Tamaño de A: mxn

Matriz términos independientes: **b = (b_i).** Tamaño de b: mx1

Vector de incógnitas : **x = (x_j).** Tamaño de x: nx1

OK

Automatizar métodos

Resolver SL más rápida / eficiente

Matriz

nº reales/ complejos, dispuestos en de **m** filas y **n** columnas

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$i = 1,\dots m$

$j = 1,\dots n$

>> **Dimensión (A): mxn**

Permiten operaciones: suma y producto

1850 → Aparecen por J.J. **Sylvester,** W.R. **Hamilton**

1858 → A. **Cayley** las aplica en **SL.**

Uso: I**nternet,…. economía**, **informática**, física…

Búsqueda de soluciones

Métodos directos

Calculan la solución exacta en un número finito de pasos conocidos a priori.

Están sujetos a errores de redondeo.

Adecuados para resolver sistemas pequeños.

→ Gauss, Gauss-Jordan, método de la Inversa y Descomposición LU

Métodos iterativos

Construyen una sucesión que converge a la solución del sistema.

→ Jacobi y Gauss-Seidel

Procedimiento para resolver Ax = b con Gauss, Gauss-Jordan

- Dado **Ax = b**, considerar la **matriz ampliada [A|b]**.

- Obtener una forma **escalonada / reducida [C|d]** de la matriz [A|b].

- Estudiar si el sistema **Cx = d** asociado a la matriz [C|d] es **consistente.**

- Obtener el **conjunto de soluciones S** de Cx = d.

  Si **[C|d] está escalonada**, aplicar método de **Gauss**.

  Si **[C|d] está reducida**, aplicar método **Gauss-Jordan**

  En ambos casos ignorar las filas completas de ceros.

- **S** será el conjunto de **soluciones de Ax = b.**

Matriz ampliada de Ax = b

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

[A | b] = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Matriz ampliada
(m, n+1)

Matriz escalonada / reducida

conceptos previos

Fila / columna no nula:

tiene, **al menos**, un elemento $\neq 0$

Entrada principal en **fila :**

entrada $\neq 0$ más a la **izquierda** .

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

Características

FILA: su entrada principal es **1**.

Si la entrada con valor 1 se encuentra:
derecha y debajo de la entrada con valor 1 de filas precedentes→ la fila tiene **1 principal**

Las entradas de la columna debajo del 1 principal son ceros.

Filas sólo de ceros → parte inferior de la matriz

Ejercicio 5 (hoja1Alg)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Característica: las de escalonada más

Todas las entradas de la columna con **1** principal tienen que ser **cero**

Ejercicio 5 (hoja1Alg)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices equivalentes

A y B (mxn) son equivalentes si se han modificado con operaciones a las filas

opT1: **Intercambiar f**ilas: $F_i \leftrightarrow F_j$

opT2: **Multiplicar** la fila i por $\alpha \neq 0$: $F_i \leftrightarrow \alpha * F_i$

opT3: **Sumar** a la fila i, la fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$,

$$F_i \leftrightarrow F_i + \alpha * F_j = F_{ij}(\alpha).$$

La matriz escalonada / reducida de una matriz A
es equivalente por filas a dicha matriz

Ejercicio 2 (hoja1Alg)

Procedimiento para escalonar una matriz

1º.- Determinar 1ª columna (de izquierda a derecha) con alguna entrada no cero → columna pivote.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

2º.- Si $a_{11} = 0$, intercambiar con fila / $a_{i1} \neq 0$

op. T1 **F1 ↔ F3**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

3º.- Dividir la fila 1 por a_{11} (op. T-2). **F1 ↔ ½*F1**

Obtener ceros por debajo de a_{11} (op. T-3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

4º.- Buscar siguiente 1 principal hasta agotar filas.

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 3: Obtener escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \boxed{F2 \leftrightarrow F3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F2 \leftrightarrow ½ \, {}^*F2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F3 \leftrightarrow ½ \, {}^*F3} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

de la matriz A

Matrices equivalentes

$$\begin{bmatrix} 0 & & & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 4: Obtener **reducida**

*En columna con 1 principal hacer **cero** el resto de las entradas*

Sigue escalonando hasta obtener reducida

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-5/2} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3/2 \end{bmatrix} \quad \boxed{F2 \leftrightarrow F2 + (-3/2)*F3} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-5/2} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F1 \leftrightarrow F1 + (5/2)*F3} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{19/4} \\ 0 & 1 & 0 & -17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F1 \leftrightarrow F1 + (-1)*F2} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{36/4} \\ 0 & 1 & 0 & -17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Matrices equivalentes por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-5/2} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{36/4} \\ 0 & 1 & 0 & -17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

A

*Matriz **escalonada** de A*

No es única

*Matriz escalonada **reducida** de A*

Es única

Sistemas equivalentes

Tienen el mismo conjunto de soluciones

Sea $Ax = b$ y $[A|b]$ su matriz ampliada.

Si $[C|d]$ es una matriz escalonada de $[A|b]$

$$\mathbf{Cx = d}$$

es **equivalente** a

$$\mathbf{Ax = b}$$

Las **soluciones** de $Ax = b$ serán las que se obtengan de $Cx = d$

Ejercicios de Álgebra – Hoja1
Ejercicio 1

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & x & 3y & + & 3z & = & 9 \end{array}$$

Sistemas equivalentes / misma solución

Modificar 3ª ec

a) ¿ v = [1,1,1] es **solución** ?

b) Multiplica la 1ª ecuación por 4

c) ¿ sigue siendo v = [1,1,1] **solución** ?

DISCUSIÓN / RESOLUCIÓN de Sistemas Lineales en la Matriz Ampliada Escalonada

Resolución de SL con matrices escalonadas

Ax= b

[A|b]

- escalonada / reducida **[C|d]**
- Estudiar si **[C|d]** es consistente
- **Resolver**, si es el caso, **Cx = d**

- Escalonada: **GAUSS**
- Reducida: **GAUSS-JORDAN**

DISCUTIR $[C|d]$ → CLASIFICAR $Cx = d$

Ax = b
[A|b] matriz ampliada
[C|d] escalonada / reducida

SL Incompatible

→ En [C|d] aparece a<u>lguna fila</u> → **[0,0,…0 | b],** b ≠ 0.

Ejercicio 6 (hoja1Alg)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

a) [C|d] escalonada
Cx=d **no es incompatible**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) c)
[C|d] escalonada
Cx=d **incompatible**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escribir ecuaciones de Cx=d y verificar

Ax = b
[A|b] matriz ampliada
[C|d] escalonada / reducida

SL Compatible Indeterminado

En [C|d] **no** hay filas **[0,0,…0 | b],** b ≠ 0 y

nº de 1 principales < nº de incógnitas.

Ejercicio 7 (hoja1Alg)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[C|d] escalonada
SL: Cx=d
Nº1p = 2
NºInc = 4
Comp. Indeterminado

Ax = b
[A|b] matriz ampliada
[C|d] escalonada / reducida

SL Compatible Determinado

> En [C|d] **no** hay filas **[0,0,...0 | b],** b ≠ 0 y
> **nº de 1 principales = nº de incógnitas.**

Ejercicio 7 (hoja1Alg)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-5/2} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

[C|d] escalonada
SL: Cx=d
Nº1p = 3
NºInc = 3
Comp. Determinado

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 8. discutir SL

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RESOLVER $Cx = d$

Método de Gauss aplicado a Cx = d, C (mxn)

1 [C|d] escalonada,

2 Cx = d compatible

2.1 Determinado: en la fila **m** se despeja la variable **n** y su valor se sustituye en la variable n-1 de la fila m-1. Se repite proceso hasta llegar a la fila 1.

2.2 Indeterminado:

Las incógnitas sin 1 principal se consideran **parámetros**.

Se **despejan** las incógnitas con uno principal en función de los parámetros.

Antes de seguir…

Plantea SL asociado a cada matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 10. GAUSS

$$x_2 - 4x_3 = 8$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1$$

1º M. ampliada [A|b]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

2º M. escalonada [C|d]

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de Álgebra – Hoja1
Ejercicio 10. GAUSS

$$[C|d] = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3/2x_2 + x_3 &= 1/2 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

3º Clasificar Cx=d

Incompatible.

Hay una fila [0,0,0|b], b=1

Cx = d incompatible → Ax = b incompatible

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 11. GAUSS

$$[C|d] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nº 1 principales < nº incógnitas. → **SCI**

Procedimiento para resolver Ax = b con Gauss, Gauss-Jordan

- **matriz ampliada [A|b]**.

- **escalonada / reducida [C|d]**

- Estudiar si **Cx = d consistente**

- Obtener el **conjunto de soluciones Cx = d ↔ Ax = b**

  - **[C|d] escalonada → Gauss.**

  - **[C|d] reducida → Gauss-Jordan**

  Ignorar las filas completas de ceros.

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 11 . GAUSS

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Variables básicas (con 1 principal) : x_1 , x_2

Variables parámetros : x_3 , x_4

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 4 \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \beta \end{aligned}$$

(cont)

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 11. GAUSS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 4 \\ x_3 \quad &= \alpha \\ x_4 &= \beta \end{aligned}$$

Solución Cx = d
Forma vectorial:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2\alpha - 3\beta \\ 4 + 3\alpha + 5\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución Cx = d → Solución Ax = b

Método de Gauss-Jordan aplicado a Cx = d, C (mxn)

1 [C|d] **escalonada reducida**

2 Cx = d **compatible**

2.1 Determinado: Cada fila no cero con 1 principal tiene la solución en la última columna.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix}$$

2.2 Indeterminado:

Las incógnitas sin 1 principal se consideran parámetros.

Se despejan las incógnitas con uno principal en función de los parámetros

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Las filas completas de ceros se ignoran

Ejercicios de Álgebra – Hoja1
Ejercicio 12 a) . GAUSS-JORDAN

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 9 \\
2x - y + z &= 8 \\
3x \quad\quad - z &= 3
\end{aligned}
$$

1º Matriz ampliada [A|b]

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 2 & 3 & 9 \\
2 & \mathbf{-1} & 1 & 8 \\
3 & 0 & \mathbf{-1} & 3
\end{array}\right]
$$

2º Matriz escalonada reducida [C|d]

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 3
\end{array}\right]
$$

nº 1 principales = nº incógnitas
→ SCD

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Ejercicios de Álgebra – Hoja1

Ejercicio 12 b) . GAUSS-JORDAN

$$[C|d] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

SCI

Parámetros: **x_2, x_4**;
Variables básicas: **x_1, x_3**

Solución escrita en forma vectorial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\alpha-\beta \\ \alpha \\ 1+\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sistemas Homogéneos

$$Ax = 0$$

- Son consistentes
- **Solución trivial: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.**

> <u>Pueden</u> ser compatibles indeterminados.

> Se <u>resuelven</u> por Gauss y Gauss-Jordan.

> *Un SH con más incógnitas que ecuaciones tiene **infinitas** soluciones.*

Resolución de SL con la matriz inversa de A

- A matriz cuadrada (**nxn)**

- Si la matriz A es **invertible**, es decir, si verifica:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- El sistema $Ax = b$

se puede resolver haciendo : $x = A^{-1}b$

ya que al ser A invertible se cumple:

$$A^{-1}A\,x = A^{-1}b$$

Cálculo de la matriz inversa con Gauss-Jordan

- Dada A (nxn).
- Construir una matriz **(n x 2n)** de la siguiente forma:

$$[\,A \mid I\,]$$

[A]

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

[A | I]

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Cálculo de la matriz inversa con Gauss-Jordan

❖ Si en **[A | I]** se **transforma A en la matriz I** (Operaciones/filas)

$$[\,\mathbf{I}\,|\,B\,]$$

[I | B]					
1	0	0	b_{11}	b_{12}	b_{13}
0	1	0	b_{21}	b_{22}	b_{23}
0	0	1	b_{31}	b_{32}	b_{33}

❖ La inversa de A, será la matriz B,

$$B = A^{-1}$$

❖ Se comprueba que $\mathbf{A\,A^{-1} = I = A^{-1}A}$.

Multiplicación de matrices

Si **A = [a_{ij}]** **(mxp)** y **B = [b_{ij}]** **(pxn)** el **producto de A y B**, que se denota **AB**, es la matriz **C = (c_{ij})** (mxn) definida como:

$$\mathbf{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\, a_{ip}b_{pj}} \qquad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n).$$

AB sólo si el número de filas de B coincide

con el número de columnas de A.

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 1 . Inversa por Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se escribe: [A | I] (3x6)

Se reduce la matriz

Hasta conseguir [I | B]

$$[A \mid I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 1 . Inversa por Gauss-Jordan

(cont)

$$[A \mid I] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$[A \mid I] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1 principal: $F1 \leftrightarrow (1/3)F1$

Ceros debajo del 1 principal:

$F2 \leftrightarrow F2 + (-2)F1$

$F3 \leftrightarrow F3 - 3F1$

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 1 . Inversa por Gauss-Jordan

(cont)

[A | I]

1	2/3	1	1/3	0	0
0	-1/3	-1	-2/3	1	0
0	-1	-2	-1	0	1

[A | I]

1	0	-1	-1	2	0
0	1	3	2	-3	0
0	0	1	1	-3	1

1 principal/2ªcolumna: F2 $\leftrightarrow$ (-3)F2

Ceros debajo/encima del 1 principal:

F1 $\leftrightarrow$ F1 +(-2/3)F2

F3 $\leftrightarrow$ F3 + F2

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 1 . Inversa por Gauss-Jordan

(cont)

[A | I]

1	0	-1	-1	2	0
0	1	3	2	-3	0
0	0	1	1	-3	1

[A | I]

1	0	0	0	-1	1
0	1	0	-1	6	-3
0	0	1	1	-3	1

1 principal/3ªcolumna: F3 $\leftrightarrow$ F3

Ceros debajo/encima del 1 principal:

F1 $\leftrightarrow$ F1 + F3

F2 $\leftrightarrow$ F2 + (-3)F3

Ejercicios de Álgebra – Hoja2

Ejercicio 1 . Inversa por Gauss-Jordan

(cont)

$$[A \mid I] \longrightarrow [\, I \mid B \,]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$I_{(3x3)}$ $\qquad$ $B = A^{-1}$

$[A^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$A\,A^{-1} = I$?