1. Una cantidad de carga desconocida q_1 está almacenada dentro de una caja en forma de cubo. Abrimos la caja e introducimos una carga q_2 = 2.85 nC, tras lo cual la cerramos. Observamos entonces que el flujo de líneas de campo eléctrico que atraviesa las paredes de la caja vale 10^3 Vm. ¿Cuánto vale q_1? ¿Qué signo tiene? ¿Cuánto valdría el flujo si la caja tuviera forma de cilindro? [1 punto]. Dato: ε_0=8.85·10^{-12} u.s.i.

RESOLUCIÓN:

La Ley de Gauss especifica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada de forma arbitraria vale $\phi = \frac{q_{total}}{\varepsilon_0}$, donde q_{total} es la carga neta encerrada dentro de la superficie.

En nuestro caso: $\phi = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + 2.85 \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_1 = 6 \cdot 10^{-9} = 6 \text{ nC}}$

El flujo es el mismo independientemente de la forma de la superficie.

---

2. Se dispone de una corteza esférica, conductora, de 20 cm de diámetro y carga 10 nC. En el centro de la esfera se coloca una carga puntual q_i. Calcula su valor para que el campo creado por ambas cargas a 1 m de distancia de q_i sea de 9 V/m ¿A qué distancia del centro de la esfera el potencial es cero? [1 punto]. Dato: K=9·10^9 u.s.i.

RESOLUCIÓN:

Para que a un metro haya dicho campo:

$$E = K\frac{(q_i + 10nC)}{d^2} = 9 \quad \rightarrow \quad 9 \cdot 10^9 \frac{(q_i + 10) \cdot 10^{-9}}{1} = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_i = -9 \text{ nC}}$$

El punto donde el potencial es cero sólo puede estar en el interior, ya que en puntos exteriores de la esfera la carga total encerrada es 1 nC y por tanto el potencial nunca será cero.

Para puntos interiores: $V_r = K\frac{q_i}{r} + K\frac{Q}{R} = 0$; siendo Q la carga de la corteza esférica (que crea un potencial constante en su interior) y R su radio

$$\Rightarrow \quad \frac{-9}{r} + \frac{10}{0.1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{9}{r} = \frac{10}{0.1} \quad \rightarrow \quad \boxed{r = \frac{9}{10} \cdot 0.1 = 9 \text{ cm}}$$

---

3. Dos condensadores C_1 = 3 nF y C_2 = 6 nF se conectan en serie a una f.e.m. de 15 V. Una vez cargados se desconectan de la fuente y se conectan en paralelo entre sí. Calcula la carga final almacenada en cada condensador [1 punto].

RESOLUCIÓN:

Si se conectan en serie ambos almacenarán la misma carga, que será la misma que la de su condensador equivalente.

$$Ce = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ nF} \quad \Rightarrow \quad qe = q_1 = q_2 = Ce \cdot V = 30 \text{ nC}$$

Si ahora se desconectan de la f.e.m. y se conectan en paralelo la carga se redistribuye para que sus potenciales se igualen. Y la carga total se mantiene

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2}; \quad \frac{q'_1}{3} = \frac{q'_2}{6} \quad \rightarrow \quad 2q'_1 = q'_2 \quad \text{y} \quad q'_1 + q'_2 = Q_T = 60 \text{ nC}$$

Por tanto: $\boxed{q'_1 = 20 \text{ nC} \quad \text{y} \quad q'_2 = 40 \text{ nC}}$

---

4. Se desea hacer girar electrones en sentido horario en el acelerador circular del CERN (27 km de diámetro) a velocidades 100 veces menores que las de la luz. Describir el campo magnético necesario (modulo, dirección y sentido) [1 punto]. Datos. m_e=9.1·10^{-31}kg; q_e=-1.6·10^{-19}C; c=3. 10^{8}m/s.

RESOLUCIÓN:

Dirección: Se trata de electrones en una órbita circular por lo tanto la componente del campo magnético **perpendicular** al movimiento de dichos electrones será la responsable de la aceleración centrípeta:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

Modulo: A partir de esta expresión podemos despejar el módulo de B:

$$B = m\frac{v}{qR} = 9.1\cdot 10^{-31}\frac{3\cdot 10^6\cdot 2}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 27\cdot 10^3} = 1.26\cdot 10^{-9}\ \text{T}$$

Sería el valor que debe tener la componente de B perpendicular al movimiento de los electrones. Cualquier componente de B paralela a la velocidad de los electrones no ejercería ninguna influencia en su movimiento

Sentido: Como son electrones, carga negativa, y se quieren hacer girar en sentido horario, aplicando $\vec{F} = q\cdot\vec{v}\otimes\vec{B} \quad \Rightarrow$ el campo magnético debe ser perpendicular al plano y hacia dentro

---

5. Dos cables rectilíneos muy largos se sitúan en el plano ZY, en la dirección del eje Z, paralelos el uno al otro y separados una distancia de 1 mm. Los cables transportan sendas corrientes de 6 A y 2 A en sentidos contrarios. Calcular el campo magnético (módulo, dirección y sentido) producido por estas corrientes en un punto situado en el plano ZY a 4m de distancia del punto medio entre los dos cables [1 punto]. Dato: $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$ u.s.i.

RESOLUCIÓN:

Un observador situado en el punto en cuestión, podría considerar las dos corrientes anteriores como una única corriente neta de 6 - 2 = 4 A, puesto que la distancia a los cables (4m) es mucho mayor que la separación entre ellos (1mm). Por tanto, el módulo del campo magnético vendría dado por:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2 - I_1}{r} = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{2\pi}\frac{6-2}{4} = 2\times 10^{-7}T$$

La dirección sería perpendicular al plano ZY, es decir la del eje X.

El sentido de B dependerá del sentido de la corriente neta y de si el punto está la derecha o izquierda de los cables. Por ejemplo, si I neta tiene sentido $+\vec{k}$ y el punto está 4 m a la derecha de los cables el sentido de B sería: $\vec{B} = B\cdot(-\vec{i})$

---

6. Tenemos una bobina de 2000 espiras en el interior de un campo magnético uniforme B=1 T. Cada espira tiene una sección de 1 dm^2. ¿A qué velocidad debemos hacer girar la bobina para generar un voltaje con una amplitud de 200 V? [1 punto].

RESOLUCIÓN:

En estas condiciones, se puede escribir el flujo magnético que atraviesa la bobina en función de la velocidad angular en la forma:

$$\phi = N\cdot\phi_{1espira} = N\cdot\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\cdot B\cdot S\cdot\cos\alpha = N\cdot B\cdot S\cdot\cos wt$$

Aplicando la ley de Lenz: $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} = NBS\omega \; sen \; wt$

Siendo la amplitud: $\varepsilon_0 = NBSw$

Por lo tanto la bobina debe girar a: $w = \dfrac{\varepsilon_0}{NBS} = \dfrac{200}{2000 \cdot 1 \cdot 0.01} = 10 \text{ rad/s}$

Es decir, con una frecuencia de: $f = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{5}{\pi} \quad \text{rev/s}$

---

7. Una onda electromagnética se propaga en la dirección positiva del eje Y, dentro de un material de índice de refracción n=1.5. Su campo eléctrico, que tiene un valor máximo de 2 V/m, vibra en la dirección del eje Z. Si la longitud de onda es de 400 nm, calcula: (a) Los valores de la velocidad angular *w* y el número de onda *k* [0.25 puntos] (b) La expresión de los campos eléctrico y magnético que describen la onda [0.75 puntos]

RESOLUCIÓN:

(a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{1.5} = 2 \cdot 10^8 \; m/s$ y $k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{2 \cdot \pi}{400 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot \pi \cdot 10^6 \; m^{-1}$

Ahora la velocidad angular es: $w = v \cdot k = 2 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 10^6 = \pi \cdot 10^{15} \; rad/s$

(b) Las expresiones de los módulos de los campos eléctrico y magnético que describen una onda plana armónica son:

$$E = E_0 sen(kr - wt); \quad B = B_0 sen(kr - wt)$$

Como: E_0=2 V/m , dirección propagación (eje Y) y sentido ($+\vec{j}$), dirección en que vibra E (eje Z); junto con los datos calculados en (a) podemos escribir la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E} = 2 \; sen\left(5 \cdot \pi \cdot 10^6 y - \pi \cdot 10^{15} t\right)\vec{k} \quad V/m$$

El valor máximo del campo magnético es: $B_0 = \dfrac{E_0}{v} = \dfrac{2}{2 \cdot 10^8} = 10^{-8} \; T$

La dirección y sentido de $\vec{B}$ debe de ser tal que se cumpla: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$, siendo el sentido del vector $\vec{S}$ el sentido en el que se propaga la onda ($+\vec{j}$),

es decir, tomando $\vec{E} = E\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$

Por tanto, la expresión del campo magnético es: $\vec{B} = 10^{-8} \; sen\left(5 \cdot \pi \cdot 10^6 y - \pi \cdot 10^5 t\right)\vec{i} \quad T$

También son válidas las soluciones: $\vec{E} = E(-\vec{k})$ conjuntamente con $\vec{B} = B(-\vec{i})$,

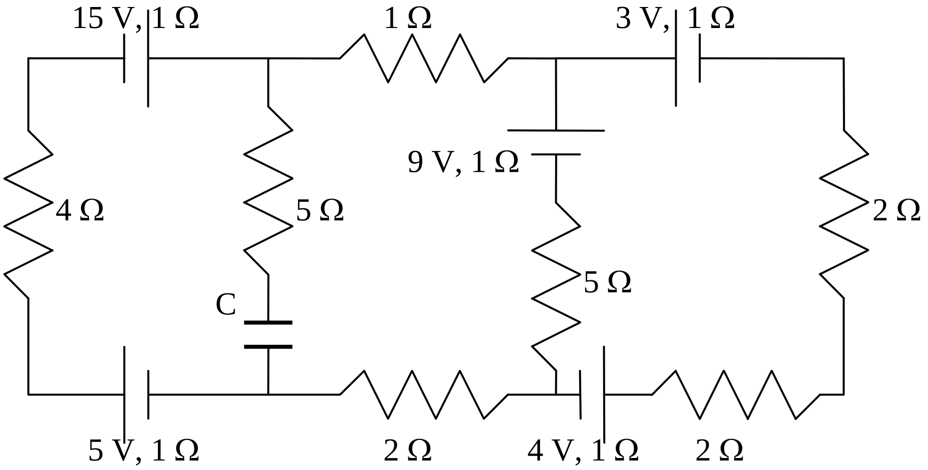
ya que: $\vec{j} = (-\vec{k}) \times (-\vec{i})$

---

8. El circuito de la figura se encuentra en equilibrio ($I_i = cte$), siendo C= 40nF. Calcula:

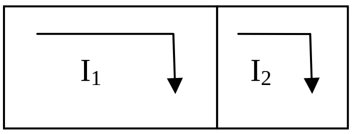
(a) Las corrientes que circulan por cada rama [1 punto]

(b) La potencia aportada o consumida por cada una de las baterías [0.50 puntos]



RESOLUCIÓN:

(a) En la situación de equilibrio el condensador está completamente cargado y, por tanto, no circula corriente por la rama donde está el mismo. En este caso, tenemos un circuito de 2 mallas:



Calculamos I_1 e I_2: $0 = \sum_i I_i \cdot R_i - \sum_i \varepsilon_i$

$$0 = 15I_1 - 6I_2 - 11 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 30I_1 - 12I_2 - 22$$

$$0 = -6I_1 + 12I_2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -6I_1 + 12I_2 - 2$$

$\Rightarrow \quad 24I_1 = 24 \quad \Rightarrow I_1 = 1\,A; \quad I_2 = \frac{2}{3}\,A; \quad i_{12} = I_1 - I_2 = \frac{1}{3}\,A$ En el sentido de I_1

(b) Las baterías que aportan potencia son:

[15 V] $P = \varepsilon \cdot I_1 - I_1^2 \cdot r = 15 \cdot 1 - 1^2 \cdot 1 = 14\,W$

[5 V] $P = \varepsilon \cdot I_1 - I_1^2 \cdot r = 5 \cdot 1 - 1^2 \cdot 1 = 4\,W$

Las baterías que consumen potencia son:

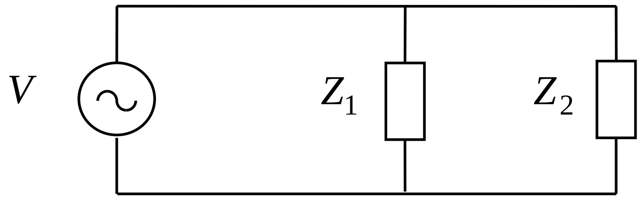
[9 V] $P = \varepsilon \cdot i_{12} + i_{12}^2 \cdot r = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 1 = \frac{28}{9}\,W$

[3 V] $P = \varepsilon \cdot I_2 + I_2^2 \cdot r = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1 = \frac{22}{9}\,W$

[4 V] $P = \varepsilon \cdot I_2 + I_2^2 \cdot r = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1 = \frac{28}{9}\,W$

9. En el circuito de la figura, calcula: (a) La impedancia equivalente [0.75 puntos]. (b) La potencia disipada en las impedancias Z_1 y Z_2 [0.75 puntos].

Datos: $\overline{V} = 200\angle 0^{\circ}$ V; $\overline{Z}_1 = 200\sqrt{2}\angle 45^{\circ}$ Ω; $\overline{Z}_2 = -j\,300\,\Omega$



RESOLUCIÓN:

(a) $\overline{Z}_1 = 200\sqrt{2}\angle 45^{\circ} = 200 + j200$ y $\overline{Z}_2 = -j\,300 = 300\angle -90^{\circ}$

Las impedancias Z_1 y Z_2 están en paralelo:

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = \frac{300\angle -90^{\circ} \cdot 200\sqrt{2}\angle 45^{\circ}}{200 + j200 - j300} = \frac{60000\sqrt{2}\angle -45^{\circ}}{200 - j100} = \frac{60000\sqrt{2}\angle -45^{\circ}}{223.6\angle -26.57^{\circ}}$$

$$\boxed{\overline{Z}_e = 379.48\angle -18.43^{\circ}\quad \Omega}$$

(b) En Z_2 no se disipa potencia ya que al ser un número imaginario puro y negativo se trata de un condensador. Almacena y devuelve energía al circuito pero no disipa energía.

Podemos obtener la potencia disipada en Z_1 de tres formas (cualquiera de ellas es válida):

(b.1) Puesto que la única resistencia del circuito está en Z_1 la potencia disipada será igual a la potencia activa del generador:

$$P_{z_2} = P_{AC} = V_{ef} \cdot I_{Tef} \cos\varphi$$

Siendo: $\overline{I}_{Tef} = \dfrac{V_{ef}}{\overline{Z}_e} = \dfrac{200}{379.48} = 0.527\ A$ *y* $\varphi = -18.43^{\circ}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{Z1} = P_{AC} = 200 \cdot 0.527 \cdot \cos(-18.43^{\circ}) = 100 \quad W}$$

(b.2) Calculando la intensidad eficaz que pasa por Z_1 y teniendo en cuenta la resistencia de Z_1:

$$P_{Z1} = I_{1ef}^2 \cdot R_1$$

Siendo: $I_{1ef} = \dfrac{V_{ef}}{Z_1} = \dfrac{200}{200\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ A *y* $R_1 = Z_1\cos(45^{\circ}) = 200\ \Omega$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_{Z1} = I_{1ef}^2 \cdot R_1 = \left(1/\sqrt{2}\right)^2 \cdot 200 = 100 \quad W}$$

(b.3) Calculando la potencia activa de la rama 1: $P_{Z1} = P_{1AC} = V_{ef} \cdot I_{1ef} \cos\varphi_1$

$$\boxed{P_{Z1} = P_{1AC} = 200 \cdot \left(1/\sqrt{2}\right) \cdot \cos(45^{\circ}) = 100 \quad W}$$