1 Una tienda vende CDs de dos marcas: A y B. Un CD de la marca A sale defectuoso el 10 % de las veces, mientras que uno de la marca B sale defectuoso el 6 % de las veces. El 35 % de las veces la tienda tiene CDs de las dos marcas, por lo tanto compro de la marca B, y el resto de las veces sólo tiene de la marca A. Si compro una caja y el CD que grabo sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que comprara una caja de la marca B?

Solución: Sean los sucesos $A = \{$ el CD comprado es de la marca A $\}$, $B = \{$ el CD comprado es de la marca B $\}$ y $D = \{$ el CD es defectuoso $\}$. Del enunciado se deduce

$$\mathrm{P}\,(A) = 0'65 \quad \mathrm{P}\,(B) = 0'35 \quad \mathrm{P}\,(D \,|\, A) = 0'1 \quad \mathrm{P}\,(D \,|\, B) = 0'06$$

Nos preguntan sobre el suceso $(B \,|\, D)$; aplicamos el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}\,(B \,|\, D) = \frac{\mathrm{P}\,(B) \cdot \mathrm{P}\,(D \,|\, B)}{\mathrm{P}\,(B) \cdot \mathrm{P}\,(D \,|\, B) + \mathrm{P}\,(A) \cdot \mathrm{P}\,(D \,|\, A)} = \frac{0'35 \cdot 0'06}{0'35 \cdot 0'06 + 0'65 \cdot 0'1} = 0'2442$$

2 La función de cuantía de una variable bidimensional (X, Y) aparece en la siguiente tabla, donde las probabilidades están multiplicadas por 100:

Y				
2	10	7	12	
1	9	15	10	
0	11	18	8	
	0	1	2	X

Calcúlense:

(a) $\mathrm{P}\,(X + Y \leq 2)$

(b) $\mathrm{P}\,(X = 2 \,|\, Y = 2)$

(c) $\mathrm{E}\,(X)\,, \mathrm{E}\,(Y)$

(d) ¿Son independientes? (justifíquese la respuesta)

(e) $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$

Solución: Las funciones de cuantia de las distribuciones marginales son

X	0	1	2
f_1	0'3	0'4	0'3

Y	0	1	2
f_2	0'37	0'34	0'29

(a) $\mathrm{P}\,(X+Y \leq 2) = 0'11 + 0'09 + 0'18 + 0'10 + 0'15 + 0'08 = 0'71$

(b) $\mathrm{P}\,(X=2\,|\,Y=2) = \dfrac{\mathrm{P}\,(X=2; Y=2)}{\mathrm{P}\,(Y=2)} = \dfrac{0'12}{0'29} = 0'4138$

(c) $\mathrm{E}\,(X) = 0\cdot 0'3 + 1\cdot 0'4 + 2\cdot 0'3 = 1$ $\quad$ $\mathrm{E}\,(Y) = 0\cdot 0'37 + 1\cdot 0'34 + 2\cdot 0'29 = 0'92$.

(d) No son independientes; por ejemplo $f(0,0) \neq f_1(0)\cdot f_2(0)$.

(e)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) \\
&= 1\cdot 1\cdot 0'15 + 1\cdot 2\cdot 0'07 + 2\cdot 1\cdot 0'10 + 2\cdot 2\cdot 0'12 - 1\cdot 0'92 \\
&= 0'05.
\end{aligned}$$

3 La cantidad producida de un cierto artículo es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1000}x^2, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x \notin [0,10] \end{cases}$$

El precio Y del artículo está en función de la cantidad producida según la relación

$$Y = 40 - 2X.$$

Calcúlese

(a) Cantidad producida media.

(b) Precio medio.

Solución:

(a)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{10} x\frac{3}{1000}x^2\,dx = \frac{3}{1000}\int_0^{10} x^3\,dx = \frac{3}{1000}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 7'5.$$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 40 - 2\mathrm{E}(X) = 40 - 15 = 25.$

4 La presencia de un cierto antibiótico en un fármaco viene determinado por una variable X. Este fármaco se consigue mediante la unión de otros tres compuestos que también contienen antibiótico y que se distribuyen independientemente de la siguiente manera: $X_1 \sim N(80, 12)$, $X_2 \sim N(120, 15)$ y $X_3 \sim N(96, 9)$. La fórmula del fármaco, unión de los tres compuestos es la siguiente:

$$X = \frac{3X_1 + X_2 + 2X_3}{6}$$

Calcular la probabilidad de que la concentración de antibiótico en el fármaco esté entre 70 y 90

Solución: La variable X es una combinación lineal de normales, luego es normal con parámetros:

(a) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3 \cdot 80 + 120 + 2 \cdot 96}{6} = 92$

(b) $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{9 \cdot 144 + 225 + 4 \cdot 81}{36} = 51'25.$

Por tanto $X \sim N(92, 7'16)$. Luego

$$\mathrm{P}(70 \leq X \leq 90) = \mathrm{P}\left(-\frac{22}{7'16} \leq Z \leq -\frac{2}{7'16}\right) = \Phi(3'07) - \Phi(0'28) = 0'3886.$$