ESTADÍSTICA

Tema 2: Sucesos Aleatorios.

2.3. Probabilidad condicional.
2.4. Independencia de sucesos.

ESTADÍSTICA

Probabilidad Condicional (I).

Definición: *Sean A y B dos sucesos tales que P(B) > 0, llamaremos probabilidad del suceso A condicionado al suceso B (o probabilidad del suceso B condicionado al A):*

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

De la definición se deduce que
$P(A \cap B)= P(B)\,P(A/B)= P(A)\,P(B/A)$

Teorema: *Dados n sucesos cualesquiera*
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\,P(A_3/(A_1 \cap A_2))\ldots$
$\ldots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}))$

Probabilidad Condicional (II).

***Ejemplo**: Se lanzan dos monedas, y se sabe que ha salido alguna cara. Calcular la probabilidad de que salgan dos caras.*

Ω ={CC, CX, XC, XX}
A={salen dos caras}={CC}
B={sale alguna cara}={CC, CX, XC}

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$A\cap B$= {CC}
P(B)= 3/4
$P(A\cap B)$=1/4

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ESTADÍSTICA

Probabilidad Condicional (III).

***Ejemplo**: De una baraja española se extraen sucesivamente tres cartas (sin reemplazamiento). Calcular la probabilidad de obtener tres oros.*

Sea A={La primera carta es oros}, B={La segunda carta es oros}, y C={La tercera carta es oros}

$$P(A\cap B\cap C)= P(A)\,P(B/A)\,P(C/(A\cap B))=\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}=\frac{3}{247}$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{n^{o}\text{ de casos favorables}}{n^{o}\text{ de casos posibles}}=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}}=\frac{3}{247}$$

ESTADÍSTICA

Independencia de Sucesos (I).

***Definición**: Dos sucesos A y B son independientes si y sólo si* $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

***Teorema:** Dados dos sucesos A y B con probabilidad no nula, las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) A y B son independientes

(b) $P(A / B) = P(A)$

(c) $P(B / A) = P(B)$

***Definición:** Una colección de n sucesos se dicen independientes si para cualquier subconjunto* $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{ij}\}$ *para j=2, 3,…, n se cumple*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{ij}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{ij})$$

ESTADÍSTICA

Independencia de Sucesos (II).

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sea el suceso $A = \{1, 2, 3\}$

Sea el suceso $B = \{3, 4, 5\}$

$P(A) = ½$

$P(B) = ½$

$P(A)\,P(B) = ½ \, ½ = ¼$

$A \cap B = \{3\}$

$P(A \cap B) = 1/6$

Entonces

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Luego los sucesos A y B no son independientes

ESTADÍSTICA

Independencia de Sucesos (III).

Ejemplo: *Se lanza una moneda 9 veces. Calcular la probabilidad de obtener la primera cara en la novena tirada.*

El suceso consiste en obtener 8 cruces en las 8 primeras tiradas, y después una cara.

$P(C)=1/2$

$P(X)= 1/2$

$\{X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap C\}$

$P(X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap X \cap C)=$

$= P(X)P(X)P(X)P(X)P(X)P(X)P(X)P(X)P(C)= (½)^9$

ESTADÍSTICA

Independencia de Sucesos (IV).

Teorema: *Si los sucesos A y B son independientes, también lo son los pares de sucesos* $\{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}, \{\overline{A}, B\}$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Problema 2.17

En el lanzamiento de un dado, se consideran los sucesos:

A = {Obtener una puntuación mayor o igual a 4}

B = {Obtener 3 ó 6}

¿Son independientes los sucesos A y B?

Solución:

Los sucesos definidos son:

$A = \{4, 5, 6\}$

$B = \{3, 6\}$

$A \cap B = \{6\}$

Para que A y B sean independientes debe cumplirse la condición $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ESTADÍSTICA

P(A) = nº casos favorables/nº casos posibles = 3/6 = 1/2

P(B) = nº casos favorables/nº casos posibles = 2/6 = 1/3

$P(A)P(B) = 1/2\ 1/3 = 1/6$

$P(A \cap B)$ = nº casos favorables/nº casos posibles = 1/6

Luego, efectivamente se cumple la condición $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y podemos asegurar que los sucesos A y B son independientes.

ESTADÍSTICA

Problema 1

Una urna contiene 2 bolas blancas, 3 negras y 4 rojas. Se extrae una bola y, sin devolverla, se extrae otra.
a) Si la primera bola ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.
b) Si la primera bola ha sido negra, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.
c) Si la primera bola ha sido roja, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

Solución:
Los sucesos definidos son:
B_1 = {la primera bola ha sido blanca}
N_1 = {la primera bola ha sido negra}
R_1 = {la primera bola ha sido roja}
B_2 = {la segunda bola es blanca}

ESTADÍSTICA

a)Si la primera bola ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

$P(B_2/B_1)$= nº casos favorables/nº casos posibles =1/8

b)Si la primera bola ha sido negra, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

$P(B_2/N_1)$= nº casos favorables/nº casos posibles =2/8

c)Si la primera bola ha sido roja, calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

$P(B_2/R_1)$= nº casos favorables/nº casos posibles =2/8

Problema 2

Se lanza una moneda dos veces; sean los sucesos:
A = {Obtener cara en el primer lanzamiento}
B = {Obtener cara en el segundo lanzamiento}
C = {Obtener el mismo resultado en los dos lanzamientos}
Averiguar si son independientes los sucesos A, B y C.

Solución:
El espacio muestral será Ω = {CC, CX, XC, XX}
Los sucesos definidos son:
A = {CC, CX}
B = {CC, XC}
C = {CC, XX}
$A \cap B$ = {CC}
$A \cap C$ = {CC}
$B \cap C$ = {CC}
$A \cap B \cap C$ = {CC}

ESTADÍSTICA

Calculamos las probabilidades:

P(A)=nº casos favorables/nº casos posibles=2/4=1/2

P(B)=nº casos favorables/nº casos posibles=2/4=1/2

P(C)=nº casos favorables/nº casos posibles=2/4=1/2

$P(A \cap B)$=nº casos favorables/nº casos posibles=1/4

$P(A \cap C)$=nº casos favorables/nº casos posibles=1/4

$P(B \cap C)$=nº casos favorables/nº casos posibles=1/4

$P(A \cap B \cap C)$=nº casos favorables/nº casos posibles=1/4

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Hay que comprobar que para cualquier subconjunto formado por *r* elementos se cumple la condición:

$P(A_i \cap A_j \cap .... \cap A_r) = P(A_i)xP(A_j)x...xP(A_r)$

Comprobamos primero:

$P(A \cap B) = 1/4$

$P(A) \times P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

A y B son independientes entre sí.

$P(A \cap C) = 1/4$

$P(A) \times P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

A y C son independientes entre sí.

$P(B \cap C) = 1/4$

$P(B) \times P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

B y C son independientes entre sí.

$P(A \cap B \cap C) = 1/4$

$P(A) \times P(B) \times P(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$

A, B y C no son independientes entre sí.

ESTADÍSTICA

Problema 2.2

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan tres tipos de transportes: metro (M), autobús (A) y coche particular (C). La probabilidad de que una persona haya utilizado un medio u otro durante este año es:

$P(M)=0{,}30$ $P(A)=0{,}20$ $P(C)=0{,}15$ $P(M \cap A)=0{,}10$

$P(M \cap C)=0{,}05$ $P(A \cap C)=0{,}06$ $P(M \cap A \cap C)=0{,}01$

Calcular las siguientes probabilidades:

a) Que una persona tome al menos dos medios de transporte.

b) Que una persona viaje en metro y no en autobús.

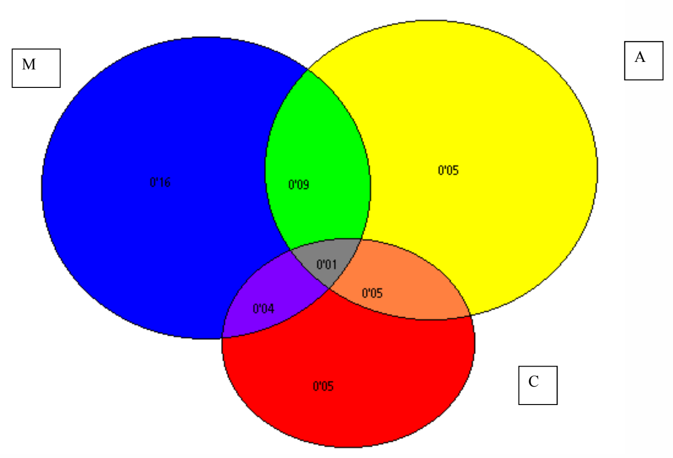
c) Que una persona viaje en metro o en coche pero no en autobús.

d) Que una persona viaje en metro y en autobús pero no en coche

e) Que vaya a pie.

ESTADÍSTICA

Dibujamos primero el Diagrama de Venn de los tres sucesos M, A y C.



ESTADÍSTICA

a) Que una persona tome al menos dos medios de transporte.

0,09+0,01+0,04+0,05 = 0,19

b) Que una persona viaje en metro y no en autobús.

0,16+0,04 = 0,20

c) Que una persona viaje en metro o en coche pero no en autobús.

0,16 + 0,04 + 0,05 = 0,25

d) Que una persona viaje en metro y en autobús pero no en coche.

0,09

e) Que vaya a pie. Es la misma que 1 – P (suceso complementario), es decir, 1 menos la probabilidad de que utilice algún medio de transporte.

1-(0,16+0,04+0,05+0,05+0,05+0,01+0,09) = 0,55

ESTADÍSTICA

Problema 2.23

Una máquina A produce piezas de buena calidad con una probabilidad de 0'8. Otra máquina B (independiente de A) lo hace con probabilidad 0'9. Se separa una pieza de cada máquina. Hallar

a)Probabilidad de que ambas sean defectuosas.

b)Probabilidad de que solo una sea defectuosa.

Solución:

Los sucesos definidos son:

A={pieza de buena calidad en A}	$P(A)=0'8$
D_a={pieza defectuosa en A}	$P(D_a)=0'2$
B={pieza de buena calidad en B}	$P(B)=0'9$
D_b={pieza defectuosa en B}	$P(D_b)=0'1$

ESTADÍSTICA

a)Probabilidad de que ambas sean defectuosas.

$P(D_a \cap D_b) = P(D_a)\ P(D_b) = 0'2 x 0'1 = 0'02$

(son independientes, multiplicamos las probabilidades)

b)Probabilidad de que solo una sea defectuosa.

$P((A \cap D_b) \cup (D_a \cap B)) = P(A \cap D_b) + P(D_a \cap B) = P(A)\ P(D_b) + P(D_a) P(B) = 0'8 x 0'1 + 0'2 x 0'9 = 0'26$

(los sucesos son independientes y con intersección vacía, por tanto, multiplicamos y sumamos las probabilidades)