ESTADÍSTICA

Tema 2: Sucesos Aleatorios.

ESTADÍSTICA

Experimentos y Sucesos (I).

•*Existen experimentos que realizados en las mismas condiciones proporcionan siempre los mismos resultados (**Fenómenos deterministas**).*

•*Sin embargo, hay otros experimentos en los que no se puede predecir el resultado (**Fenómenos aleatorios**).*

•*La teoría de la probabilidad estudia los fenómenos aleatorios.*

- •*Se inicia en el siglo XVII (Pascal, Fermat) relacionada con el estudio de los juegos de azar.*
- •*Posteriormente fue desarrollada por Bernoulli, De Moivre, Laplace, Bayes, etc. hasta la definición axiomática de Kolmogorov*

Experimentos y Sucesos (II).

***Definición**: Llamaremos **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

- *Si el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado, el espacio muestral sería:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- *Si el experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda, el espacio muestral sería:* $\Omega = \{\text{cara, cruz}\}$

***Definición**: Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto* $A \subseteq \Omega$ *incluido el* Φ *y todo el espacio muestral* Ω

- *Si el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *Un suceso* $A = \{\text{sale un cara par}\} = \{2, 4, 6\}$
  - *Un suceso* $B = \{3\}$

ESTADÍSTICA

Mar Pujol 3

Experimentos y Sucesos (III).

Los espacios muestrales pueden ser:

- ***Discretos***
  - *Finitos*
  - *Infinito numerables (se puede establecer una relación de orden entre los elementos del conjunto)*
- ***Continuos***
  - *Infinito no numerables (no se puede establecer una relación de orden entre los elementos del conjunto)*

Ω *={1, 2, 3, 4, 5, 6}*
Ω *={cara, cruz}*
Ω*={números naturales} ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}*
Ω*={altura de las personas} = { 1.50, 1.78, 0.55, 0.5559, 0.55599, 0.555999, ...}*

ESTADÍSTICA

Mar Pujol 4

ESTADÍSTICA

Experimentos y Sucesos (IV).

***Definición**: Diremos que un suceso A se **ha verificado** si el resultado de la experiencia aleatoria es un elemento de A*

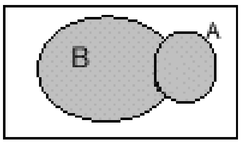
•*Si el experimento aleatorio consiste en lanzar un dado:*
Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6}
Sea el suceso A= {sale un cara par}= {2, 4, 6}
Sea el suceso B = {3}
Si lanzamos el dado y sale un 3, entonces el suceso B se ha verificado, mientras que A no se ha verificado.

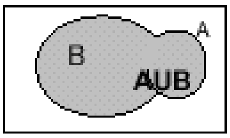
***Definición**: Llamaremos **suceso elemental** a aquel que consta de un único elemento y **suceso compuesto** a aquel que consta de varios sucesos simples. Al Φ se le llama **suceso imposible** y al espacio muestral Ω se le llama **suceso seguro**.*

ESTADÍSTICA

Operaciones con sucesos (I).

***Definición**: Diremos que el suceso C = A ⋃ B si C se verifica si y solo si se verifica el suceso A o el B o ambos a la vez. El subconjunto de Ω correspondiente a C es la unión de los subconjunto de Ω correspondientes a A y a B.*



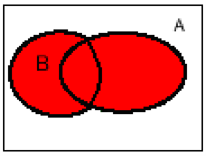


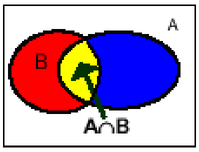
Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado:
Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6}
Sea el suceso A= {sale una cara par}= {2, 4, 6}
Sea el suceso B = {3}
Entonces el suceso unión C = A ⋃ B = {2, 3, 4, 6}

ESTADÍSTICA

Operaciones con sucesos (II).

***Definición**: Diremos que el suceso $C = A \cap B$ si C se verifica si y solo si se verifica el suceso A y el B. El subconjunto de Ω correspondiente a C es la intersección de los subconjuntos de Ω correspondientes a A y a B.*





Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sea el suceso A= {sale una cara par}= $\{2, 4, 6\}$

Sea el suceso $B = \{3\}$

Entonces el suceso intersección $C = A \cap B = \{\Phi\}$

ESTADÍSTICA

Operaciones con sucesos (III).

***Teorema:** Dados dos sucesos A y B se tiene:*

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup \Phi = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$

***Teorema**: Dados dos sucesos A y B se tiene:*

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cap \Phi = \Phi$$
$$A \cap \Omega = A$$

ESTADÍSTICA

Operaciones con sucesos (IV).

Definición: *Se llama suceso complementario de un suceso A, y se le representa por* $\bar{A}$ *, a aquel que se verifica si y solo si no se verifica A.*

Teorema: *Dado un suceso A se tiene:*

$A \subset B \rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

$(\bar{\bar{A}}) = A$

$A \cup \bar{A} = \Omega$

$A \cap \bar{A} = \Phi$

El complementario de Ω *es el* Φ

El complementario de Φ *es el* Ω

Definición: *Dos sucesos A y B son incompatibles si* $A \cap B = \Phi$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son incompatibles si* $A_i \cap A_j = \Phi$*, para* $i \neq j$

ESTADÍSTICA

Operaciones con sucesos (V).

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado:
$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sea el suceso $A = \{$*sale una cara par*$\} = \{2, 4, 6\}$
Su complementario será $\bar{A} = \{$*sale una cara impar*$\}$
$= \{1, 3, 5\}$

$A \cap \bar{A} = \{\Phi\}$
$A \cup \bar{A} = \{\Omega\}$

Definición de Probabilidad (I).

Definición: *Llamaremos función de probabilidad y la representaremos por P, a toda aplicación*

$$P: \Omega \rightarrow R$$
$$A \rightarrow n^o \text{ real}$$
$$B \rightarrow n^o \text{ real}$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. *Para cualquier suceso A,* $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. *Para cualquier par de sucesos A y B /* $A \cap B = \Phi$ *se cumple que* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   Si tenemos n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *incompatibles dos a dos,* $A_i \cap A_j = \Phi$*, para* $i \neq j$
   entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

ESTADÍSTICA

Definición de Probabilidad (II).

Teorema: *Dada una función de probabilidad se cumple que:*

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\Phi) = 0$
3. *Para cualquier suceso A,* $0 \leq P(A) \leq 1$
4. *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $P(A) \leq P(B)$
5. *Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Definición de Probabilidad (III).

Probabilidad de la unión de sucesos

- *Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- *Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera, entonces* $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- *Sean* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *n sucesos cualesquiera, entonces*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

ESTADÍSTICA

Definición de Probabilidad (IV).

•*Supongamos un espacio muestral finito compuesto por n sucesos elementales* e_i *todos con la misma probabilidad* $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

•*Para cada suceso elemental* e_i *la probabilidad de que ocurra*

$$P(e_i) = \frac{1}{n}$$

•*Sea A un suceso compuesto por m sucesos elementales (incompatibles dos a dos), la probabilidad de que ocurra será:*

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} P(e_i) = P(e_j) + P(e_k) + \overset{m}{\ldots} + P(e_l) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{m}{\ldots} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{m}{n} = \frac{n^o \text{ de elementos de } A}{n^o \text{ de elementos de } \Omega} = \frac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}$$

Definición de Probabilidad (V).

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado:
Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Sea el suceso A = {*sale una cara par*}= {2, 4, 6}
Sea el suceso B = {3}

$$P(B)=\frac{1}{n}=\frac{1}{6}$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n^{o}\ de\ elementos\ \ de\ A}{n^{o}\ de\ elementos\ \ de\ \Omega}=$$
$$\frac{n^{o}\ de\ casos\ \ favorables}{n^{o}\ de\ casos\ \ posibles}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ESTADÍSTICA

Problema 1
De una baraja española de 48 cartas, se extraen dos cartas a la vez. Hallar la probabilidad de que :
a) Ambas sean copas.
b) Al menos una sea copas.
c) Una sea copa y la otra espada.

Solución:
a)Definimos el suceso A={ambas cartas son copas}

$$P(A)=\frac{n^{o}\,de\,casos\ favorables}{n^{o}\,de\,casos\ posibles}=\frac{\binom{12}{2}}{\binom{48}{2}}=0.0585$$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

b) Al menos una sea copas.

Definimos los sucesos:
B = {al menos una carta sea copas}
B_1 = { 1 carta sea copas}
B_2 = {las 2 cartas sean copas}

B = {al menos una sea copas} = { 1 sea copas} $\cup$ {2 sean copas} = $B_1 \cup B_2$
Comprobamos que son sucesos incompatibles:
$B_1 \cap B_2 = \emptyset$
por lo tanto $P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

ESTADÍSTICA

$$P(B_1) = \frac{n^o\ de\ casos\ favorables}{n^o\ de\ casos\ posibles} = \frac{\binom{12}{1}\binom{36}{1}}{\binom{48}{2}} = 0.383$$

$P(B_2)$ la hemos calculado en el apartado a)

P(B) = P(B1$\cup$B2)=P(B1)+P(B2)= 0.383 + 0.0585

ESTADÍSTICA

c) Definimos el suceso

C = {1 carta sea copas y la otra espadas}

$$P(C) = \frac{n^{o}\, de\, casos\;\, favorables}{n^{o}\, de\, casos\;\, posibles} = \frac{\binom{12}{1}\binom{12}{1}}{\binom{48}{2}} = 0.1277$$