ESTADÍSTICA

Tema 5: Distribuciones Especiales.

5.1. Distribución Binomial.
5.2. Distribución de Poisson.
5.3. Distribución Normal.
5.4. Teorema Central del Límite.

ESTADÍSTICA

Distribución Bernoulli (I).

Sea una v.a. X discreta con solo dos valores posibles:

$$X = \begin{cases} 1 \ \text{(éxito)} & \text{con probabilidad } p \\ 0 \ \text{(fracaso)} & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{cases}$$

A la distribución de probabilidad de esta variable se le llama distribución de **Bernoulli.**

Parámetros:

$E(X) = 1\,p + 0\,q = p$

$E(X^2) = 1^2\,p + 0^2\,q = p$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p\,(1-p) = pq$

Distribución Bernoulli (II).

Supongamos que lanzamos una moneda, y que consideramos un éxito que salga cara. La v.a. X con valores :

$$X = \begin{cases} 1 \ \text{(cara)} \quad \text{con probabilidad } p = \dfrac{1}{2} \\ 0 \ \text{(cruz) con probabilidad } q = 1 - p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

tiene una distribución Bernoulli.

Si lanzamos diez veces una moneda, cada uno de los lanzamientos se puede considerar una prueba de Bernoulli independiente, tendremos diez pruebas de Bernoulli independientes $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ todas con la misma probabilidad de éxito p = ½.

ESTADÍSTICA

Distribución Binomial (I).

***Definición**: Sean n pruebas de Bernoulli independientes X_1, $X_2, \ldots, X_n$ con la misma probabilidad de éxito p.*
$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ **=** *nº de éxitos en las n pruebas de Bernoulli, tiene una distribución de probabilidad* ***Binomial*** *B(n, p).*
La función de probabilidad es:

$$\boxed{f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \ 0 \le x \le n}$$

Parámetros:

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p + \overset{n}{\ldots} + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = pq + \overset{n}{\ldots} + pq = npq$$

ESTADÍSTICA

Distribución Binomial (II).

ESTADÍSTICA

***Teorema**: Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son v.a. independientes con una distribución binomial $B(n_i, p)$, entonces $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ tiene una distribución binomial $B(n_1 + n_2 + \ldots + n_k, p)$*

Tablas de la Binomial

Las tablas dan el valor de la función de distribución

$$F(k) = P(X \le k) = \sum_{x=0}^{k} P(X = x) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Distribución Binomial (III).

ESTADÍSTICA

$$\text{Binomial } B(n, p): \quad F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

n	k	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	1/3	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	0.9990	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6667	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2500
2	1	.9999	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8889	.8775	.8400	.7975	.7500
	2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.9997	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7407	.7183	.6480	.5748	.5000
3	2	1	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9630	.9571	.9360	.9089	.8750
	3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Sea X una v.a. B(13, 0.4), calcular $P(X \le 7)$ y $P(X = 10)$

$P(X \le 7) = F(7) = 0.9023$

$P(X = 10) = P(X \le 10) - P(X \le 9) = F(10) - F(9) = 0.9987 - 0.9922 = 0.0065$

Distribución Poisson (I).

*Sea X una **Binomial** B(n, p), calculamos el límite de su función de probabilidad cuando n tiende a infinito y p a cero:*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} f(k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P(X=k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

*A la distribución de probabilidad límite resultante se le llama distribución de **Poisson**.*

***Definición:** X tiene una distribución de **Poisson** de media λ P(λ) si su función de probabilidad es:*

$$f(k) = P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k = 0,1,2,\ldots$$

ESTADÍSTICA

Distribución Poisson (II).

Parámetros:

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

ESTADÍSTICA

Distribución Poisson (III).

***Teorema**: Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son v.a. independientes con una distribución de Poisson $P(\lambda_i)$, entonces $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ tiene una distribución de Poisson $P(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$*

Tablas de Poisson

Las tablas dan el valor de la función de distribución

$$F(k) = P(X \le k) = \sum_{x=0}^{k} P(X = x) = \sum_{x=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ESTADÍSTICA

Distribución Poisson (IV).

$$\text{Poisson } P(\lambda) : F(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

k / λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4		1	1	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5				1	1	1	.9999	.9998	.9997	.9994
6							1	1	1	.9999
7										1
k / λ	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2**
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571

Si X tiene una distribución P(6), calcular $P(X \le 9)$ y $P(X = 15)$

$P(X \le 9) = F(9) = 0.9161$

$P(X = 15) = P(X \le 15) - P(X \le 14) = F(15) - F(14) = 0.9995 - 0.9986 = 0.0009$

ESTADÍSTICA

Distribución Poisson (V).

Aproximación de la Binomial por la de Poisson

•Las tablas de la Binomial solo son del orden n=25 ó 30
•La distribución Binomial se puede aproximar por la de Poisson cuando n es grande (n > 25 ó 30), llamando λ=np
•Si X es B(n,p), podemos considerar que para valores de n mayores de 25, X es P(λ= np)

Si X es B(100, 0.04), calcular la $P(X \leq 3)$

$\lambda = np = 100 \times 0.04 = 4$

Podemos considerar que X es P(4) y calcular $P(X \leq 3)$

ESTADÍSTICA

Problema 5.1

Si X es B(8, 0.35), calcular:

a) $P(X = 3)$
b) $P(X \leq 5)$
c) $P(X \geq 5)$

a) $P(X= 3)= P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0.7064 - 0.4278 = 0.2786$

b) $P(X \leq 5) = 0.9747$

c) $P(X \geq 5) = 1- P(X < 5) = 1- P(X \leq 4)= 1- 0.8939 = 0.1061$

ESTADÍSTICA

Problema 5.16

Si X es P(2.9), calcular:

a) $P(X \leq 5)$
b) $P(X = 7)$
c) $P(X \geq 4)$

a) $P(X \leq 5) = 0.9258$

b) $P(X = 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 6) = 0.9901 - 0.9713 = 0.0188$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.6696 = 0.3304$

ESTADÍSTICA