1 En una etapa de producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa, así como la proporción de artículos procesados varía para cada robot de acuerdo a la tabla siguiente

Robot	Prob. Defectos	% artículos proc.
A	$0'002$	18
B	$0'005$	42
C	$0'001$	40

Calcúlese

(a) La proporción global de defectos producidos por los tres robots.

(b) La probabilidad de que un artículo con defectos haya sido soldado por el robot C.

Solución: Sea el suceso $D = \{$ La soldadura de un artículo es defectuosa$\}$ y sean A, B, C los sucesos $\{$ la soldadura la efectúa $\}$ el robot A,B,C respectivamente.

(a) Hay que hallar $\mathrm{P}(D)$ para lo que contamos con los datos

$$\mathrm{P}(D \mid A) = 0'002 \quad \mathrm{P}(D \mid B) = 0'005 \quad \mathrm{P}(D \mid C) = 0'001$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(D \mid A) + \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(D \mid B) + \mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C) \\ &= 0'18 \cdot 0'002 + 0'42 \cdot 0'005 + 0'40 \cdot 0'001 = 0'00286. \end{aligned}$$

Así que globalmente, el 3 por mil (aproximadamente) de las piezas son defectuosas.

(b)

$$\mathrm{P}(C \mid D) = \frac{\mathrm{P}(C) \cdot \mathrm{P}(D \mid C)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0'40 \cdot 0'001}{0'00286} = 0'1399.$$

2 Se elige al azar un comité de 2 alumnos de entre 3 delegados de 3^{o}, 2 de 2^{o} y 1 de 1^{o}. Sean $X = \{$ número de alumnos de 2^{o} en el comité $\}$ e $Y = \{$ número de alumnos de 1^{o} en el comité $\}$. Hállese $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Solución: La función de cuantía conjunta viene dada por la tabla

$$\begin{array}{c|cccc} Y & & & & \\ 1 & \frac{3}{15} & \frac{2}{15} & 0 & \\ 0 & \frac{3}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} & \\ \hline & 0 & 1 & 2 & \mathrm{X} \end{array}$$

y las marginales

X	0	1	2
f_1	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Y	0	1
f_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

De las tablas se obtiene

$$\mathrm{E}\left(XY\right) = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{E}\left(X\right) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = \mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X\right)\mathrm{E}\left(Y\right) = -\frac{4}{45}.$$

3 Los artículos que produce una máquina se empaquetan en lotes de 4. La máquina produce el 10 % de defectuosos y el comprador devuelve los defectuosos para su reparación, lo que le supone a la empresa un coste de $3X^2 + X + 2$, siendo X el número de artículos defectuosos por lote. Hállese el coste medio de reparación.

Solución: Dado que X sigue una distribución binomial $B(4, 0'1)$, su función de cuantía viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4
f	$0'6561$	$0'2916$	$0'0486$	$0'0036$	$0'0001$

De la tabla

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) &= (3 \cdot 0^2 + 0 + 2) \cdot 0'6561 + (3 \cdot 1^2 + 1 + 2) \cdot 0'2916 \\ &+ (3 \cdot 2^2 + 2 + 2) \cdot 0'0486 + (3 \cdot 3^2 + 3 + 2) \cdot 0'0036 \\ &+ (3 \cdot 4^2 + 4 + 2) \cdot 0'0001 = 3'96. \end{aligned}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente: dado que $X \sim B(4, 0'1)$ es sabido que $\mathrm{E}\left(X\right) = n \cdot p = 4 \cdot 0'1 = 0'4$ y $\mathrm{Var}\left(X\right) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0'1 \cdot 0'9 = 0'36$. Entonces $\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}\left(X\right) + \left(\mathrm{E}\left(X\right)\right)^2 = 0'36 + 0'16 = 0'52$ por lo que

$$\mathrm{E}\left(3X^2 + X + 2\right) = 3\mathrm{E}\left(X^2\right) + \mathrm{E}\left(X\right) + 2 = 3 \cdot 0'52 + 0'4 + 2 = 3'96.$$

4 Se quiere repoblar un río con un tipo de pez autóctono para evitar su extinción. Para ello se ha realizado un estudio previo de la concentración de oxígeno en el río. Este estudio proporciona los siguientes resultados: la concentración de oxígeno en el agua sigue una distribución normal de media 9 y desviación típica $0'8$; así mismo, el oxígeno consumido por la fauna del río sigue, también, una distribución normal de media 4 y desviación típica $0'2$ y, por último, el oxígeno producido por las bacterias y algas del río sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica $1'2$. Se considera que las tres distribuciones son independientes y que la concentración de oxígeno en el agua para la existencia de vida ha de ser mayor o igual a 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al repoblar el río, multiplicándose por 2 la fauna del mismo, el agua del río siga siendo apto para la vida?

Solución: Sean las variables

$$\begin{array}{l} X_1 = \text{concentración de oxígeno en el río}, \quad X_1 \sim N(9, 0'8) \\ X_2 = \text{cantidad de oxígeno consumido por la fauna}, \quad X_2 \sim N(4, 0'2) \\ X_3 = \text{cantidad de oxígeno producido por bacterias}, \quad X_3 \sim N(5, 1'2) \end{array}$$

La concentración de oxígeno total es $X_1 - X_2 + X_3$, pero si se dobla la fauna, el oxígeno consumido es doble y la concentración total es $X_1 - 2X_2 + X_3$. Hay que hallar $\mathrm{P}\left(X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 5\right)$. Sea $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, que tiene una distribución normal de parámetros

$$\mathrm{E}\left(Y\right) = 9 - 2 \cdot 4 + 5 = 6, \quad \mathrm{Var}\left(Y\right) = 0'8^2 + 4 \cdot 0'2^2 + 1'2^2 = 2'24.$$

Tipificando

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(Y \geq 5\right) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5-6}{\sqrt{2'24}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq -0'67\right) = \Phi(0'67) = 0'7486. \end{aligned}$$