1 Pepe y Manolo son dos viejos amigos que han decidido darle un giro a su vida y están dudando entre dedicar sus ahorros a montar una empresa de desarrollo de software o invertir en renta variable. Su asesor fiscal les ofrece dos alternativas atrayentes, pero ante su falta de formación bursátil, confían al azar su decisión. Invertirán en el sector eléctrico si sacan una bola roja de una urna que contiene 20 bolas, de las cuales 8 son rojas, 3 verdes y 9 negras. Si la bola no es roja lanzarán dos dados y si obtienen una suma de 6 entre ambos dados invertirán en el sector inmobiliario; en caso contrario se decidirán por la empresa de desarrollo de software. ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente monten una empresa de desarrollo de software?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{aligned}
E &= \{\text{Invertir en el sector eléctrico.}\}\\
I &= \{\text{Invertir en el sector inmobiliario.}\}\\
S &= \{\text{Invertir en la empresa de desarrollo de software.}\}\\
R &= \{\text{La bola es roja.}\}\\
D &= \{\text{La suma de los dados es 6.}\}
\end{aligned}$$

El suceso pedido es $S = \overline{R} \cap \overline{D}$ que son independientes, por lo que

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}\left(\overline{R}\right)\mathrm{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{12}{20}\frac{31}{36} = \frac{31}{60}.$$

2 Sean las variables X e Y con f.d.d

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Se obtienen 3 valores de X. Hállese la función de cuantía del número de valores mayores que 1.

(b) Se obtienen 3 valores de Y. Hállese el máximo valor $a \in [0,1]$ para que al menos uno de ellos exceda el valor a con probabilidad mínima de 0'999.

Solución:

(a) La probabilidad del suceso $A_i = \{$ el valor $-i$ es mayor que $1\}$

$$\mathrm{P}\left(A_i\right) = \mathrm{P}\left(X > 1\right) = \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{3}{4}.$$

La variable $N =$ número de valores mayores que 1 toma los valores $0, 1, 2, 3$ con función de cuantía

X	0	1	2	3
f	1/64	9/64	27/64	27/64

(b) $\mathrm{P}\left(Y > a\right) = 1 - a$ y $\mathrm{P}\left(Y < a\right) = a$. Para tres valores, la probabilidad de que ninguno exceda a es a^3 y la de que al menos uno exceda a es $1 - a^3$. Por tanto $1 - a^3 \geq 0'999 \rightarrow a^3 \leq 0'001 \rightarrow a \leq 0'1$. El valor máximo es 0'1.

3

(a) Si la variable X tiene media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, hállense los valores de a y b para que la variable $Y = aX + b$ cumpla $\mathrm{E}\left(Y\right) = 0$, $\mathrm{Var}\left(Y\right) = 1$.

(b) Demuéstrese que no pueden existir dos variables X e Y tales que

$$\mathrm{E}\left(X\right) = 3, \quad \mathrm{E}\left(Y\right) = 2, \quad \mathrm{E}\left(X^2\right) = 10, \quad \mathrm{E}\left(Y^2\right) = 29, \quad \mathrm{E}\left(XY\right) = 0$$

(*Sugerencia: hállese la correlación*)

Solución:

(a) $\mathrm{Var}\left(Y\right) = a^2 \mathrm{Var}\left(X\right) = a^2\sigma^2 = 1$ por lo que $a = \dfrac{\pm 1}{\sigma}$. Como $\mathrm{E}\left(Y\right) = a\mu + b = 0$ debe ser $b = -a\mu = \dfrac{\mp\mu}{\sigma}$. La variable Y puede ser

$$Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}, \quad \text{o bién } Y = -\frac{1}{\sigma}X + \frac{\mu}{\sigma}$$

(b)

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0 - 6}{1 \cdot 5} = -1'2$$

Los datos no son posibles pues se obtiene $\rho < -1$.

4 En una carrera de Fórmula 1, el consumo de combustible de un determinado coche sigue un distribución normal de media $3'5$ litros y desviación típica de $0'5$, por vuelta. Cuando quedan 12 vueltas para el final de la carrera entra en boxes a repostar ¿Cuál es la cantidad mínima de combustible que tiene que repostar, para que la probabilidad de que acabe la carrera (en ausencia de accidente) sea mayor que 0'95?

Solución: El consumo por vuelta tiene una distribución $N(3'5, 0'5)$. Luego el consumo para cada una de las 12 vueltas que quedan vendrá determinado por una distribución normal: $X_i \sim N(3'5, 0'5)$, con $i \in \{1, \ldots, 12\}$. Así pues, la cantidad total de combustible consumido en las 12 vueltas será una suma de distribuciones normales independientes: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} \sim N(42, \sqrt{3})$. Nos piden la cantidad mínima k de combustible a repostar, para que la probabilidad de cubrir el consumo en las 12 vueltas sea mayor que 0'95, es decir, para que se cumpla $\mathrm{P}(X < k) > 0'95$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X < k) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-42}{\sqrt{3}} < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\rightarrow \mathrm{P}\left(Z < \frac{k-42}{\sqrt{3}}\right) > 0'95 \\
&\rightarrow \Phi(\frac{k-42}{\sqrt{3}}) > 0'95 \\
&\rightarrow \frac{k-42}{\sqrt{3}} = 1'65 \\
&\rightarrow k = 42 + 1'65 \cdot \sqrt{3} = 44'8545
\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad mínima sería de aproximadamente 45 litros.