1 Supóngase que el 5 % de los microprocesadores fabricados en una planta son defectuosas. Si uno de ellos es defectuoso, la probabilidad de que un controlador lo detecte y lo saque de la cadena de producción es $0'9$. Si un microprocesador no es defectuoso, la probabilidad de que el controlador piense que lo es y lo saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) (1 punto) Si un microprocesador se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

(b) (1 punto) ¿Cuál es el porcentaje de defectuosos que se ponen a la venta?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ el microprocesador es defectuoso $\}$ y $S = \{$ el controlador lo saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'05$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D \mid S) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'9}{0'05 \cdot 0'9 + 0'95 \cdot 0'2} = \frac{9}{47}. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que un microprocesador en venta sea defectuoso es

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) &= \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} \\ &= \frac{0'05 \cdot 0'1}{0'05 \cdot 0'1 + 0'95 \cdot 0'8} = 0'0065. \end{aligned}$$

Por tanto el $0'65$ % son defectuosos.

2 Se lanza un dado y se consideran las variables:

$$X = \{\text{número de puntos}\}, \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{si en el dado sale } 1, 2, 3 \\ 1, & \text{si en el dado sale } 4, 5, 6. \end{cases}$$

(a) (0'75 puntos) Calcular la función (tabla) de cuantía conjunta.

(b) (0'25 puntos) ¿son independientes?

(c) (1 punto) Calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Solución: La tabla es

Y							
1	0	0	0	1/6	1/6	1/6	
0	1/6	1/6	1/6	0	0	0	
	1	2	3	4	5	6	X

Las marginales son

X	1	2	3	4	5	6
f_1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

De las tablas se deduce que NO son independientes y además

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{7}{2} \\
\mathrm{E}(Y) &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}(X \cdot Y) &= \frac{1}{6}(4+5+6) = \frac{5}{2} \\
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

3 Se lanza un dado n veces y se considera la variable $X=$ "suma de puntos".

(a) (1 punto) Hállese n para que X tenga una media de 35 puntos.

(b) (1 punto) Hállese $\operatorname{Var}(X)$ en el apartado anterior.

Solución: Llamando X_i a la puntuación del dado en el lanzamiento $-i-$ésimo, la suma total es $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Las variables X_i tienen la función de cuantía de la variable X del problema **(2)**, cuya media es $\frac{7}{2}$ y la varianza es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X_i^2\right) &= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6} \\ \mathrm{Var}\left(X_i\right) &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n$ y $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot n$

(a) Si $\mathrm{E}\left(X\right) = \frac{7}{2} \cdot n = 35 \to n = 10$.

(b) $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{35}{12} \cdot 10 = \frac{175}{6}$

4 (2 puntos) El número de visitas que realiza un comercial de cierta empresa por semana tiene una distribución normal de media 45 y desviación 3. Las visitas fallidas (no hay nadie en casa) sigue una distribución normal de media 10 y desviación 2. Considerando independientes las visitas realizadas de las fallidas ¿cuál es la probabilidad de que en una semana realice más de 40 visitas efectivas?

Solución: Si X_1 es el número de visitas y X_2 el de fallidas, el número de visitas efectivas es $X_1 - X_2$ que es normal de media $45-10=35$ y desviación $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X > 40\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 40\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{40-35}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1{,}39) = 1 - 0'9177 = 0'0823. \end{aligned}$$