1 Supóngase que el 30 % de las botellas fabricadas en una planta son defectuosas. Si una botella es defectuosa, la probabilidad de que un controlador la detecte y la saque de la cadena de producción es $0'9$. Si una botella no es defectuosa, la probabilidad de que el controlador piense que es defectuosa y la saque de la cadena de producción es $0'2$.

(a) Si una botella se saca de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

(b) Si un cliente compra una botella que no ha sido sacada de la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

Solución: Sean los sucesos $D = \{$ la botella es defectuosa $\}$ y $S = \{$ el controlador la saca de la cadena de producción $\}$; se tienen las probabilidades $\mathrm{P}(D) = 0'3$, $\mathrm{P}(S \mid D) = 0'9$ y $\mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right) = 0'2$

(a) aplicando el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(D \mid S) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}(S \mid D) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(S \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'9 + 0'7 \cdot 0'2} = \frac{27}{41}$$

(b) de la misma forma

$$\mathrm{P}\left(D \mid \overline{S}\right) = \frac{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right)}{\mathrm{P}(D) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid D\right) + \mathrm{P}\left(\overline{D}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{S} \mid \overline{D}\right)} = \frac{0'3 \cdot 0'1}{0'3 \cdot 0'1 + 0'7 \cdot 0'8} = \frac{3}{59}$$

2 Se lanza una moneda tres (3) veces y, se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 0 & \text{Si sale cara en la primera tirada} \\ 1 & \text{Si sale cruz en la primera tirada} \end{cases} \\ Y &= \text{número de caras en las tres tiradas} \end{aligned}$$

Determínese:

(a) Las funciones de cuantía (probabilidad) de X e Y.

(b) La función de cuantía (probabilidad) conjunta de (X, Y).

(c) ¿Son independientes?

(d) $\operatorname{Cov}(X, Y)$

Solución:

X	0	1
f_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2	3
f_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y			
3	$\frac{1}{8}$	0	
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	
0	0	$\frac{1}{8}$	
	0	1	X

No son independientes pues, por ejemplo $f(0,0) = 0$ mientras que $f_1(0) \cdot f_2(0) = \frac{1}{16}$. De las tablas se calcula la covarianza

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

3 Se observó durante un largo periodo que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución *normal* con una media de 400 euros y una desviación de 20 euros.

(a) Si el presupuesto para la próxima semana es de 450 euros, ¿cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

(b) ¿Cuál tendría que ser el presupuesto semanal para que esta cantidad solamente se rebasara con probabilidad de $0'1$?

Solución: Llamando X a la cantidad gastada y tipificando $Z = \frac{X - 400}{20}$

(a)

$$\mathrm{P}\left(X > 450\right) = \mathrm{P}\left(Z > 2'5\right) = 1 - 0'993790 = 0'006210$$

(b) Sea a la cantidad por lo que $\mathrm{P}\left(X > a\right) = 0'1 \rightarrow \mathrm{P}\left(Z > \dfrac{a-400}{20}\right) = 0'1$ de donde

$$\Phi\left(\frac{a-400}{20}\right) = 0'9 \rightarrow \frac{a-400}{20} = 1'28 \rightarrow a = 425'6$$