1 Supóngase que 5 terminales están conectados mediante una línea compartida a un computador central. El computador central va preguntando por turno a los diversos terminales si tienen algo que transmitir. Si la respuesta es afirmativa, el terminal accede a la línea. Entonces, si hay 3 terminales que quieren enviar un mensaje, calcular la probabilidad de que el computador haga 2 preguntas hasta encontrar un terminal que quiera transmitir.

Solución: Para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sean los sucesos $\{T_i =$ el terminal $-i-$ solicita transmitir $\}$. Si el computador central hace 2 preguntas es que el segundo terminal solicita transmitir; entonces, la probabilidad de que el primer terminal preguntado no quiera transmitir pero el segundo sí es

$$\mathrm{P}\left(\overline{T}_1 \cap T_2\right) = \mathrm{P}\left(\overline{T}_1\right) \mathrm{P}\left(T_2 \mid \overline{T}_1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

2 De un grupo de 3 españoles, 2 franceses y 1 alemán se elige un grupo de 3. LLamando X al número de españoles e Y al de alemanes, hállese

(a) (1 punto) La función de cuantía conjunta.

(b) (0'3 puntos) Media de X y de Y.

(c) (0'4 puntos) Covarianza.

(d) (0'3 puntos) $\mathrm{E}(X \mid Y = 1)$.

Solución:

(a) Los casos posibles son $\binom{6}{3} = 20$. La tabla es la siguiente

Y					
1	1/20	6/20	3/20	0	
0	0	3/20	6/20	1/20	
	0	1	2	3	X

(b) Las funciones de cuantía marginales son

X	0	1	2	3
f_1	1/20	9/20	9/20	1/20

Y	0	1
f_2	1/2	1/2

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{2}.$
$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{2}.$

(c) Como $\mathrm{E}(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{6}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{5}$, la covarianza es

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{3}{5} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{20}.$$

(d) La distribución condicional es

$X \mid Y = 1$	0	1	2	3
g_1	1/10	6/10	3/10	0

La esperanza es

$$\mathrm{E}(X \mid Y = 1) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 1'2.$$

3 Un vendedor puede visitar cada día a un cliente con probabilidad 0'7 ó a ninguno. En cada visita puede vender y ganar 100€ con probabilidad 0'6 ó no vender (y no ganar). Calcular

(a) (1 punto) La función de cuantía del número de ventas diarios.

(b) (1 punto) La media y desviación de las ganancias diarias.

Solución: Llamemos X al número de visitas, Y al de ventas y G a las ganancias. La tabla de la cuantía de X es

X	0	1
f	0'3	0'7

(a) El número de ventas puede ser 1, con probabilidad $0'7 \cdot 0'6 = 0'42$ (ha de visitar y tener éxito en la visita) ó 0 con probabilidad $0'58$; por tanto

Y	0	1
f	0'58	0'42

Se deduce que

- $\mathrm{E}(Y) = 0'42$.
- $\mathrm{E}\left(Y^2\right) = 0'42$.
- $\mathrm{Var}(Y) = 0'42 - 0'42^2 = 0'2436$

(b) Como $G = 100Y$, se tiene

- $\mathrm{E}(G) = 100 \cdot 0'42 = 42$€
- $\mathrm{Var}(G) = 100^2 \cdot 0'2436 = 2436$
- $\sigma_G = \sqrt{2436} = 49'36$€

4 (2 puntos) Se sabe que la talla media de una población en edad escolar sigue una distribución normal con media 165 cm y desviación típica de 12 cm. Si un centro tiene 1400 alumnos matriculados, se pide:

(a) ¿Cuál es el número de alumnos que miden más de 155 cm?

(b) ¿Qué proporción (%) de alumnos miden entre 150 y 178 cm?

(c) ¿Qué talla permite asegurar que el 67 % de la población está por debajo de ella?

Solución:

(a) Hay que calcular la probabilidad de que un alumno mida más de 155 cm y aplicarlo a los 1400 alumnos. Como la variable no es una $N(0,1)$, hay que tipificar:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X > 155) &= 1 - \mathrm{P}(X \leq 155) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{155-165}{12}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'83) = \Phi(0'83) = 0'7967.
\end{aligned}$$

Luego, la cantidad de alumnos es $1400 \cdot 0'7967 = 1115,38 \approx 1116$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(150 \leq X \leq 178) &= \mathrm{P}\left(\frac{150-165}{12} \leq Z \leq \frac{178-165}{12}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{-15}{12} \leq Z \leq \frac{13}{12}\right) \\
&= \Phi(1'08) - \Phi(-1'25) = 0'8599 - 1 + 0'8944 = 0'7543.
\end{aligned}$$

Luego el $75'43$ % miden entre 150 y 165 cm.

(c) Se pide una talla k tal que $\mathrm{P}\left(X<k\right)=0'67$. Así pues:

$$\mathrm{P}\left(X<k\right)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{k-165}{12}\right)=\Phi\left(\frac{k-165}{12}\right)=0'67.$$

Buscando en las tablas, para $z=0'44\Rightarrow\Phi=0'6700$, luego $\dfrac{k-165}{12}=0'44\Rightarrow k=165+12\cdot 0'44=170'28$. Solución: $k=170'28$ cm.