

ESTADÍSTICA

## Tema 3: Variables Aleatorias.

### 3.2. Variables bidimensionales.

⏮ ⏪ ⏩ ⏭

ESTADÍSTICA

## Variables Aleatorias Bidimensionales.

**Definición:** Llamaremos variable aleatoria bidimensional a toda aplicación

$$\begin{aligned}
 (X, Y): \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 A &\longrightarrow (x_1, y_1) \\
 B &\longrightarrow (x_2, y_2)
 \end{aligned}$$

$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$

Supongamos el experimento aleatorio de medir en las personas la altura y el peso.

Una variable aleatoria  $X$  sería la que nos da la altura en cm.

Una variable aleatoria  $Y$  sería la que nos da el peso en kg.

La variable bidimensional  $(X, Y)$  nos daría para cada persona su altura y su peso.

$(X, Y) = \{(1.70, 60), (1.50, 50), \dots\}$

⏮ ⏪ ⏩ ⏭



## Función de Distribución (I).

**Definición:** Dada una v. a. bidimensional  $(X, Y)$  llamaremos función de distribución

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad \forall (x, y)$$

cumpliendo

$$1) 0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y)$$

$$2) F(+\infty, +\infty) = 1 \quad (P(X \leq +\infty, Y \leq +\infty) = P(\Omega) = 1)$$

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$$

$$3) P(a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2) = P(X \leq a_2, Y \leq b_2) - P(X \leq a_1, Y \leq b_2)$$

$$- P(X \leq a_2, Y \leq b_1) + P(X \leq a_1, Y \leq b_1) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2)$$

$$- F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$$

$$4) F(x, y) \text{ es continua por la derecha}$$

## Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (I).

**Definición:** Diremos que  $X$  es una v. a. discreta si el conjunto imagen de  $\Omega$  mediante  $(X, Y)$  es un conjunto discreto (finito o infinito numerable) de valores.

$$\begin{aligned} (X, Y): \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ A &\longrightarrow (x_1, y_1) \\ B &\longrightarrow (x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\} \text{ conjunto discreto de valores}$$

**Definición:** Llamaremos función de probabilidad conjunta (función de cuantía conjunta) de una v.a. discreta  $(X, Y)$

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall (x, y)$$

$$1) 0 \leq f(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y)$$

$$2) \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$$



## Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (II).

La **relación** entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. discreta

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Y					
4	0'07	0'04	0'06	0'01	0'08
3	0'03	0'05	0'03	0'10	0'09
2	0'08	0'05	0'03	0'05	0'08
1	0'01	0'02	0'04	0'05	0'03
	1	2	3	4	5
	X				

Valores de la variable (X, Y)

Función de probabilidad  $f(x, y)$   
 $P(X=x_i, Y=y_j)$

$$\begin{aligned} F(2, 3) &= f(1, 1) + f(1, 2) \\ &+ f(1, 3) + f(2, 1) + f(2, 2) \\ &+ f(2, 3) = 0.01 + 0.08 + 0.03 + \\ &0.02 + 0.05 + 0.05 = 0.24 \end{aligned}$$

## Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas (III).

**Ejemplo:** Supongamos un espacio muestral que es el resultado de lanzar dos monedas que en una cara tienen un 1 y en la otra un 2.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Sea  $X$  = suma de las dos caras.

Sea  $Y$  = máximo de las dos caras

$$(X, Y) = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$$

La función de probabilidad  $f(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \forall (x, y)$

$$f(2, 1) = P(X = 2, Y = 1) = 1/4$$

$$f(3, 2) = P(X = 3, Y = 2) = 2/4$$

$$f(4, 2) = P(X = 4, Y = 2) = 1/4$$

Y			
2	0	2/4	1/4
1	1/4	0	0
	2	3	4
	X		

## Variables Aleatorias Bidimensionales Continuas (I).

**Definición:** Diremos que  $(X, Y)$  es una v. a. bidimensional continua si su función de distribución  $F(x, y)$  es continua, derivable y con derivada continua.

Si existe la derivada segunda

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

a  $f(x, y)$  se le llama **función de densidad** de la variable  $(X, Y)$

$$1) \quad f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y)$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$



Mar Duñal

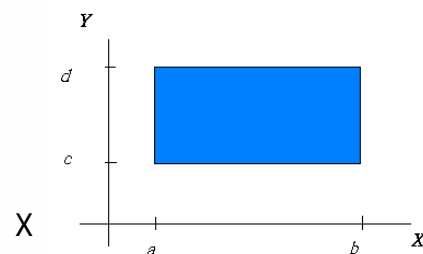
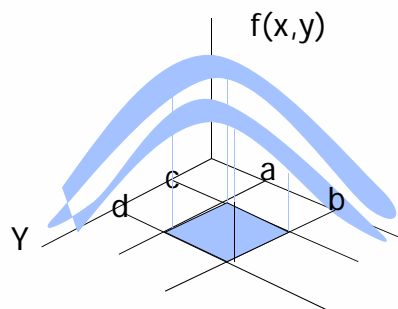


7

## Variables Aleatorias Bidimensionales Continuas (II).

La v.a. bivalente formada por  $(X, Y)$  es continua si existe una función  $f(x, y)$  tal que la probabilidad de que  $X$  pertenezca al intervalo  $(a, b)$  e  $Y$  al intervalo  $(c, d)$  se puede calcular como el volumen que queda por debajo de dicha función.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$$



Mar Duñal



8



## Variables Aleatorias Continuas (III).

La **relación** entre la función de distribución y la función de probabilidad de una v. a. continua

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$$

