**1** Un cofre $A$ contiene 4 monedas de plata y 1 de oro. Otro cofre $B$ contiene 5 monedas de plata. Se pasan, al azar, 4 monedas del cofre $A$ al $B$ y, a continuación, se pasan, tambien aleatoriamente, cuatro monedas de $B$ a $A$. ¿En qué cofre es mas probable que se encuentre la única moneda de oro?

**Solución:** Sean los sucesos $A = \{$ la moneda se encuentra en A $\}$ y $B = \{$ la moneda se encuentra en B$\}$. Obviamente son sucesos contrarios; calculemos la probabilidad de $B$. Para que la moneda se encuentre en B, debe pasar de A a B en el primer traspaso, y no pasar a A en el segundo. Por tanto

$$\mathrm{P}\left(B\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{4}} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

La probabilidad de $A$ es por tanto $\dfrac{5}{9}$ mayor que la de $B$. Así, que es mas probable que la moneda de oro se encuentre en la caja A que en la B.

**2** Supongamos que la duración en horas de un determinado tipo de lámparas es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{100}{x^2}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 3 de estas lámparas, ninguna falle durante las 150 primeras horas de uso?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 lámparas fallen durante las 150 primeras horas de uso?

**Solución:** La probabilidad de una lámpara falle en las 150 primeras horas de uso es

$$\mathrm{P}\left(F\right) = \int_{100}^{150} \frac{100}{x^2}\, dx = \left[\frac{-100}{x}\right]_{100}^{150} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que una lámpara no falle en las 150 primeras horas de uso es $\frac{2}{3}$.

$$\mathrm{P}\left(\{\text{No falle ninguna de 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\mathrm{P}\left(\{\text{Fallen las 3 lámparas}\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

**3** Una urna contiene 5 bolas numeradas de 1 a 5. Se extraen 3 al azar. Calcúlese la función de cuantía y esperanza de la variable

$$X = \{\text{número mas pequeño de las tres bolas extraidas}\}$$

**Solución:** La función de cuantía es

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

La media es $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$.

**4** Una empresa fabrica cierto tipo de chips con un promedio del 1 % de defectuosos. Si tomamos una muestra de 500 chips.

(a) Identifíquese la variable $X = \{$ número de chips defectuosos de la muestra $\}$.

(b) ¿Cuál es el valor esperado (media) de $X$?

(c) Probabilidad de que haya dos o más defectuosos.

**Solución:**

(a) Es una binomial: $X \sim B(500, 0'01)$

(b) $\mathrm{E}(X) = np = 500 \cdot 0'01 = 5$

(c) $\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 1) = 1 - F(1)$. Como $n$ es grande no podemos usar las tablas de la binomial. El valor exacto es

$$1 - f(0) - f(1) = 1 - 0'99^{500} - 500 \cdot 0'01 \cdot 0'99^{499} = 0'9537$$

Aproximando por la de Poisson se obtiene $0'9596$