1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M) \cdot \mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E) \cdot \mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'35 + 0'1 \cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4 \cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \,|\, G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

$$\mathrm{P}\left(G \,|\, \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \,|\, G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4 \cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 De una urna que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se extraen las bolas una a una sin reemplazamiento, hasta que hayan salido 2 bolas blancas. Si X es la variable que mide el número total de bolas extraidas e Y el número de bolas negras extraidas, hállese la función de cuantía conjunta de (X, Y). ¿Son independientes?

Solución: La siguiente tabla muestra los casos posibles con los valores de X e Y, y las probabilidades

	X	Y	p
bb	2	0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
bnb	3	1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nbb	3	1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$
nnbb	4	2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
nbnb	4	2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$
bnnb	4	2	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}$

Como, obviamente, es $Y = X - 2$, hay dependencia funcional entre ambas. Las funciones de cuantía son

X	2	3	4
f_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Y	0	1	2
f_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

La función de cuantía conjunta aparece en la siguiente tabla

Y			
2	0	0	$\frac{3}{10}$
1	0	$\frac{2}{5}$	0
0	$\frac{3}{10}$	0	0
	2	3	4 X

La tabla confirma la dependencia entre las variable; por ejemplo:

$$f(2,0) = \frac{3}{10} \neq f_1(2) \cdot f_2(0) = \frac{9}{100}.$$

3 La duración en minutos de una llamada telefónica de larga distancia, se asocia a una variableleatoria X cuya función de distribución es

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \quad \text{para } x \geq 0.$$

Calcúlese:

(a) La función de densidad

(b) La duración media de una llamada.

(c) La probabilidad de que la duración de una llamada esté comprendida entre 2 y 5 minutos.

Solución:

(a) Derivando la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} \quad \text{para } x \geq 0.$$

(b)

$$\mathrm{E}\,(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}x\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\, dx = 3.$$

Luego las llamadas tienen una duración media de 3 minutos.

(c)

$$\mathrm{P}\,(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} = 0'3245.$$

4 Un juego consiste en lanzar dos dados; el jugador gana 3 euros si la suma de los dos dados es 7 ó 9, y paga uno en otro caso. Tras 200 lanzamientos ¿cuál es la probabilidad de que el saldo de ganancias sea positivo?

Solución: La probabilidad de sacar 7 ó 9 al lanzar dos dados es $\dfrac{5}{18}$ (hágase!). El número X de éxitos en 200 lanzamientos tiene una distribución binomial $X \sim B\left(200, \dfrac{5}{18}\right)$; el número de fracasos es $200 - X$ y la ganancia es

$G = 3X - (200 - X) = 4X - 200$. Para que $G > 0$ ha de ser $X > 50$; por tanto hemos de calcular $\mathrm{P}\,(X > 50)$. Aproximamos por la normal

$$Z \approx \frac{X - 200 \cdot \dfrac{5}{18}}{\sqrt{200 \cdot \dfrac{5}{18}\dfrac{13}{18}}} = \frac{X - 55'56}{6'33}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(X > 50) = 1 - \mathrm{P}\,(X < 50) &= 1 - \mathrm{P}\left(Z < \frac{50 - 55'56}{6'33}\right) \\
&= 1 - \Phi(-0'88) \\
&= \Phi(0'88) \\
&= 0'8106.
\end{aligned}$$