ESTADÍSTICA

Tema 5: Distribuciones Especiales.

5.3. Distribución Normal.
5.4. Teorema Central del Límite.

ESTADÍSTICA

Distribución Normal Tipificada (I).

Una v.a. X continua con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Se dice que tiene una distribución ***Normal tipificada***
X~N(0,1)

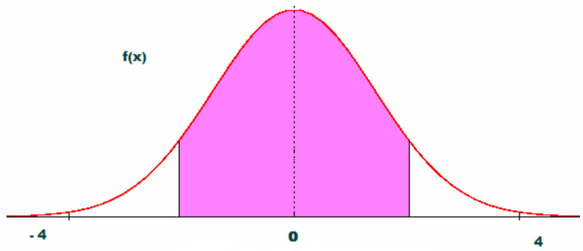
Parámetros:

$$E(X) = 0$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1$$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal Tipificada (II).



La función de distribución:

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad -\infty < x < \infty$$

Cumple la propiedad $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
Para valores $x>4$ $\quad \Phi(x)=1$
Para valores $x<-4$ $\quad \Phi(x)=0$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal Tipificada (III).

$$\text{Normal } N(0,1): \quad \Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141

Sea X una v.a. N(0, 1), calcular $P(X \le 0.22)$

$P(X \le 0.22) = \Phi(0.22) = 0.5871$

Distribución Normal General (I).

Una v.a. Y continua con función de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < y < \infty$$

*Se dice que tiene una distribución de **Normal** de parámetros μ y σ. $Y \sim N(\mu,\sigma)$*

Parámetros de la N(μ,σ):

$$E(X) = \mu$$
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$$

ESTADÍSTICA

Distribución Normal General (II).

Relación entre la N(μ,σ) y la N(0,1)

Sea X~N(0, 1)
Sea $Y \sim N(\mu,\sigma)$, con $Y = \sigma X + \mu$

$$F(y) = P(Y \le y) = P(\sigma X + \mu \le y) = P(X \le \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

Al valor $\boxed{\frac{Y-\mu}{\sigma}}$ *se le llama **valor tipificado** de la variable Y*

$$P(a < Y \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

ESTADÍSTICA

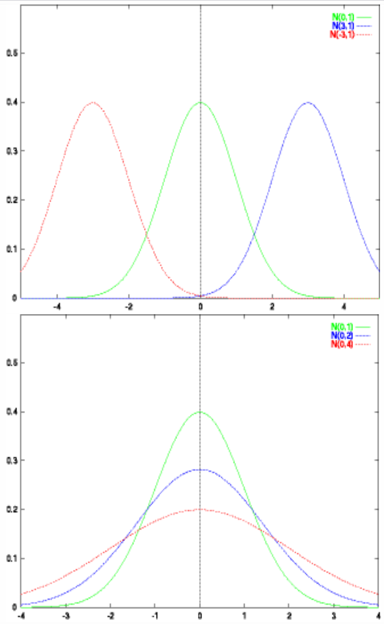
ESTADÍSTICA

Distribución Normal General (III).

N(μ, σ): Interpretación geométrica

Podéis interpretar la media como un factor de traslación.

Y la desviación típica como un factor de escala, grado de dispersión,…

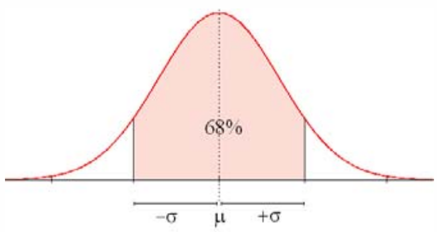


ESTADÍSTICA

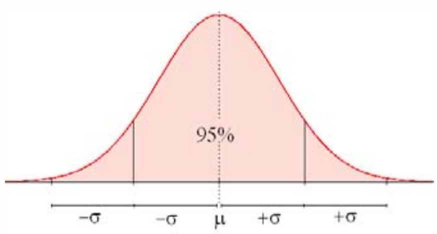
Distribución Normal General (IV).

N(μ, σ): Interpretación probabilista

Entre la media y una desviación típica tenemos siempre la misma probabilidad: aprox. 68%



Entre la media y dos desviaciones típicas aprox. 95%



Distribución Normal General (V).

Teorema: *Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son v.a. independientes con una distribución Normal con media μ_i y varianza σ_i^2, entonces $X=X_1+X_2+\ldots+X_k$ tiene una distribución Normal con media $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$ y varianza $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_k^2$.*

Ejemplo: *Si $X_1 \sim N(1,1)$ y $X_2 \sim N(1,2)$*

$Y=X_1+X_2$
tiene una distribución Normal con media $1+1=2$
y varianza $1 + 2^2 = 5$

$$Y \sim N(2,\sqrt{5})$$

ESTADÍSTICA

Teorema Central del Límite (I).

Teorema: *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes de esperanzas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, entonces la suma tipificada*

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-\sum_i \mu_i}{\sqrt{\sum_i \sigma_i^2}}$$

Converge en distribución a una $N(0.1)$

ESTADÍSTICA

Teorema Central del Límite (II).

Teorema: *Sea X una B(n,p) con E(X)= np y Var(X)= npq.*
La distribución Binomial tipificada se puede aproximar por la N(0,1) cuando n es suficientemente grande

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1)$$

Teorema: *Si X es P(λ), E(X) = λ, Var(Y) =λ*
La distribución de Poisson tipificada se puede aproximar por la N(0,1) cuando n es suficientemente grande

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$$

ESTADÍSTICA

Problema 5.26

Si X es N(0, 1), calcular:

a) $P(X > 0.37)$
b) $P(X < -1.12)$
c) $P(0.21 < X < 0.82)$
d) $P(X < 0.123)$

a) $P(X > 0.37) = 1 - P(X \leq 0.37) = 1 - 0.6443 = 0.3557$

b) $P(X < -1.12) = \Phi(-1.12) = 1 - \Phi(1.12) = 1 - 0.8686 = 0.1314$

c) $P(0.21 < X < 0.82) = \Phi(0.82) - \Phi(0.21) = 0.7939 - 0.5832 = 0.2107$

d) $P(X < 0.123) = \Phi(0.123) = \Phi(0.12) = 0.5478$

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA

Problema 5.27

Si X es N(55, 12), calcular:

a) $P(X \le 58)$

b) $P(X > 50.8)$

c) $P(49 < X < 61)$

a) $P(X \le 58) =$

$$P\left(\frac{X-55}{12} \le \frac{58-55}{12}\right) = P\left(Z \le \frac{3}{12}\right) = \Phi(0.25) = 0.5987$$

b) $P(X > 50.8) = 1 - P(X \le 50.8) =$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{50.8-55}{12}\right) = 1 - \Phi(-0.35) = 1 - (1 - \Phi(0.35)) = \Phi(0.35) = 0.6368$$

c) $P(49 < X < 61) =$

$$P\left(\frac{49-55}{12} \le Z \le \frac{61-55}{12}\right) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 = 2(0.6915) - 1 = 0.383$$