1 Una empresa de software que diseña juegos para ordenador somete los diseños preliminares de sus productos a la evaluación previa de un grupo seleccionado de clientes. Según muestra la experiencia, el 95 % de los productos que tuvieron un gran éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y sólo el 10 % de los que tuvieron escaso éxito fueron valorados favorablemente. Además, globalmente el 40 % de los productos de la empresa han tenido mucho éxito, el 35 % un éxito moderado y el 25 % una baja aceptación.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto, elegido al azar entre la producción de la fábrica, obtenga una buena evaluación previa?

(b) Si un nuevo producto obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

(c) Si un producto no obtiene una buena evaluación ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Solución: Sean los sucesos

$$\begin{array}{ll} G = \{\text{el producto tiene mucho éxito}\} & M = \{\text{el producto tiene éxito moderado}\} \\ E = \{\text{el producto tiene escaso éxito}\} & B = \{\text{el producto tiene buena evaluación}\} \end{array}$$

Se tienen las probabilidades

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(G) = 0'4 & \mathrm{P}(M) = 0'35 & \mathrm{P}(E) = 0'25 \\ \mathrm{P}(B \mid G) = 0'95 & \mathrm{P}(B \mid M) = 0'4 & \mathrm{P}(B \mid E) = 0'1. \end{array}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G) + \mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(B \mid M) + \mathrm{P}(E)\cdot\mathrm{P}(B \mid E) \\ &= 0'95\cdot 0'4 + 0'6\cdot 0'35 + 0'1\cdot 0'25 \\ &= 0'615. \end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{P}(G \mid B) = \frac{\mathrm{P}(G)\cdot\mathrm{P}(B \mid G)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0'4\cdot 0'95}{0'615} = 0'6179.$$

(c) Puesto que $\mathrm{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0'615 = 0'385$ y $\mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right) = 1 - 0'95 = 0'05$, se tiene

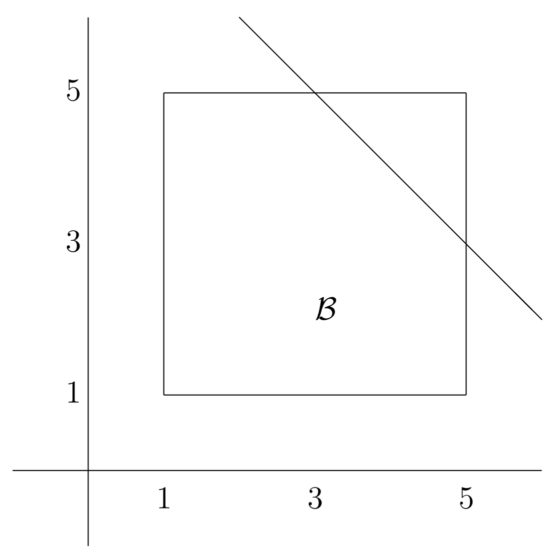
$$\mathrm{P}\left(G \mid \overline{B}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B} \mid G\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0'4 \cdot 0'05}{0'385} = 0'0519.$$

2 Se eligen dos números aleatorios en el intervalo [1, 5]. Calcular la probabilidad de que la suma sea menor que 8.

Solución: Llamando (X, Y) al par de números, tenemos una v.a. bidimensional uniforme en $[1,5] \times [1,5]$. La función de densidad (aunque no es necesaria) es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16, & (x,y) \in [1,5] \times [1,5] \\ 0, & (x,y) \notin [1,5] \times [1,5] \end{cases}$$

La figura siguiente representa la región posible y la favorable $\mathcal{B}$



La probabilidad es el cociente entre áreas

$$\mathrm{P}\left(X + Y < 8\right) = \frac{\text{área}(\mathcal{B})}{\text{área}(\mathcal{A})} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

3 Un juego de azar consiste en lanzar tres dados, de manera que el jugador elige un número entre 1 y 6 y recibe una cantidad K, si su número aparece una vez, el doble si aparece dos veces y el triple si aparece tres veces. Si el número elegido no figura entre los resultados, el jugador paga K. Calcula el beneficio medio del jugador.

Solución: La probabilidad de que el número elegido aparezca una sóla vez es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{216}$. De que aparezca dos veces es $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$. De que aparezca tres veces es $\cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. De que no aparezca es $\cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$. Luego la variable $B =$ beneficio tiene la cuantía

X	$-K$	K	$2K$	$3K$
f	125/216	75/216	15/216	1/216

La media es

$$\mathrm{E}\,(B) = (-K)\frac{125}{216} + K\frac{75}{216} + 2K\frac{15}{216} + 3K\frac{1}{216} = -\frac{17K}{216}$$

4 El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se empaquetan en lotes de 2000 tornillos,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que en un determinado lote no haya más de 50 defectuosos?

(b) Si se inspecciona un lote en busca de tornillos defectuosos y se han encontrado ya más de 40 ¿cuál es la probabilidad de que este número no supere los 50?

(c) ¿Cuál es el mínimo número k parea que se pueda asegurar que la probabilidad de que no haya más de k tornillos defectuosos sea superior a $0'9$?

Solución: La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es $0'02$. El número X de tornillos defectuosos en una muestra de 2000 sigue la distribución binomial $B(2000, 0'02)$ que podemos considerar como normal de parámetros $\mu = 40$ y desviación $\sigma = \sqrt{39'20} = 6'26$.

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq 50\right) &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{50-40}{6'26}\right) \\ &= \Phi(1'60) = 0'9452. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq 50 \mid X > 40\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(40 < X \leq 50\right)}{\mathrm{P}\left(X > 40\right)} \\ &= \frac{\mathrm{P}\left(0 < Z \leq 1'60\right)}{1-\Phi(0)} \\ &= \frac{0'9452-0'5}{0'5} \\ &= 0'8904. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X \leq k\right) > 0'9 &\rightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \\ &\rightarrow \Phi\left(\frac{k-40}{6'26}\right) > 0'9 \end{aligned}$$

Llamando $a = \dfrac{k-40}{6'26}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\Phi\left(a\right) > 0'9 \\ &\qquad \rightarrow a > 1'29 \\ &\qquad \rightarrow \frac{k-40}{6'26} > 1'29 \rightarrow k > 40 - 6'26 \cdot 1'29 = 31'93 \end{aligned}$$

Luego la solución es 32 tornillos.