1. Subespacios: Teorema de caracterización: Han de contener al $\bar{0}$, y el teorema de caracterización: $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall\vec{x},\vec{y}\in V\implies\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\in V$. $Dim(E)=Dim(V)+$ nº ecs.implicitas independientes de V. Suma de subespacios: unión de sus bases, se retiran los generadores dependientes. Intersección: $V_1\cap V_2$ si esta es $\vec{0}$ entonces se dice que son subespacios disjuntos; para hallarla se juntan las implícitas o se igualan paramétricas. Dimensiones: $dim(V_1)+dim(V_2)=dim(V_1+V_2)+dim(V_1\cap V_2)$; si V_1 y V_2 son disjuntos su suma es directa y se denota como $V_1\oplus V_2$; si su suma es directa e igual al espacio E entonces se llamas complementarios o suplementarios. **Cambio de base:** matriz cuyas columnas son la base de $\bar{X}$ en $\bar{Y}$, quedando el sistema $\bar{Y}=B\bar{X}$.

2. Aplicaciones lineales: Propiedades: $f(\bar{x}+\bar{y})=f(\bar{x})+f(\bar{y})$ y $f(\lambda\bar{x})=\lambda f(\bar{x})$; $f(\bar{0})=\bar{0}$. Sea $f:E\mapsto F$ una aplicación lineal, entonces si $E=F$ se denomina **endomorfismo**; si f es **inyectiva o "monomorfismo"** entonces $x_1\neq x_2\Rightarrow f(\bar{x_1})\neq f(\bar{x_2})$; si f es **sobreyectiva o "epimorfismo"** entonces $\forall\bar{y}\in F,\exists\bar{x}\in E/f(\bar{x})=\bar{y}$; si f es **inyectiva y sobreyectiva**, es biyectiva y se llama isomorfismo y entonces $\exists f^{-1}$; un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo. **Kernel:** $kerf=f(\bar{x})=0$; propiedades: si $kerf=\bar{0}$ entonces f es un homomorfismo inyectivo. **Rango de la aplicación:** $dim\ E=dim\ ker\ f+rang\ f=dim\ ker\ f+dim\ Im\ f$. **Matriz:** la matriz de la aplicación se crea poniendo los transformados de la base por columnas de manera que $\bar{Y}=A\bar{X}$, siendo $\bar{x}$ las coordenadas del vector a transformar. Notación M(f, B_e, B_f), M es la aplicación f que va de la base B_e a B_f. Composición: $g\circ f(\bar{x})=g(f(\bar{x}))$.

3. Jordan: Matriz semejante: $B=P^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso (la de cambio de base). **Propiedades:** 1. $|A|=|B|$; 2. $A^n=PB^nP^{-1}$. **Autovalores y autovectores:** si $f(\bar{x})=\lambda\bar{x}$ se dice que λ es un autovalor y $\bar{x}$ es un autovector. **Polinomio característico:** $P(\lambda)=|A-\lambda I|$, sus soluciones de λ cuando se iguala a 0 son los autovalores, si λ es raíz de multiplicidad n se indica como $\dot{\Gamma}_{\lambda=x_1}=n$. Si se tiene una matriz con una fila o columna de un mismo valor ese valor es autovalor. **Taza y determinante:** $|J|=|A|$; $traza(J)=traza(A)=suma(\lambda)$. **Subespacios invariantes:** dado un λ su subespacio invariante (familia de autovectores) $N_{1,\lambda}=ker(A-\lambda I)=\bar{u}\ /\ A\bar{u}=\lambda\bar{u}$; A^t tiene los mismos autovalores que A, $kA\bar{u}=k\lambda\bar{u}$, λ autovalor de A, entonces $\lambda^n\ es\ de\ A^n$. **Cayley-Hamilton:** toda matriz A es solución de su polinomio característico. **Jordan:** $A=PJP^{-1}$. **Exponencial de una matriz:** $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$ suponiendo que estamos en una caja diagonal: $e^{J_it}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_it}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_it}\end{pmatrix}$. Si no es diagonal: $e^{J_it}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_it}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_it}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{t}{1!}&\ddots&0\\\frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!}&\frac{t}{1!}&1\end{pmatrix}$. **Potencia de una matriz:** $A^n=PJ^nP^{-1}$, si la caja es diagonal $J_i^n=\begin{pmatrix}\lambda_i^n&&\\&\ddots&\\&&\lambda_i^n\end{pmatrix}$ si no $J_i^k=\begin{pmatrix}\lambda_i^k&0&0&\cdots&0\\\binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}&\lambda_i^k&0&\cdots&0\\\binom{k}{2}\lambda_i^{k-2}&\binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\lambda_i^k&0\\\binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1}&\binom{k}{m_i-2}\lambda_i^{k-m_i+2}&\cdots&\binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}&\lambda_i^k\end{pmatrix}$. **Encadenados:** si $\dot{\Gamma}_\lambda>$ vectores en $N_{1,\lambda}=ker(A-\lambda I)$ entonces tenemos que ampliar $ker(A-\lambda I)$, así que hacemos tantas potencias como sean necesarias para llegar a la multiplicidad $(ker(A-\lambda I)^h)$. Se calcula un vector $\bar{u_1}\in ker(A-\lambda I)^h$ no existente en las anteriores potencias, y a partir de ahí, se sacan los encadenados: con u_1 el inicial: $\bar{u_2}=(A-\lambda I)\bar{u_1}$, $\bar{u_3}=(A-\lambda I)\bar{u_2}\ldots$ **Trucos:** siempre se puede sacar A si se tienen suficientes transformados. Si se tiene el transformado de un vector, comprobar que si es un encadenado descomponiendo su imagen: $f(\vec{u})=\vec{x}\rightarrow A\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\vec{w}:(A-\lambda I)\vec{u}=\vec{w}$. Si $\vec{w}$ es autovector, $\vec{u}$ sería su encadenado. Aunque cambien los autovectores de una misma aplicación, sus subespacios no varían. !Si hay parámetros hay que mirar si nos varían el número de implícitas!

4. Euclídeo: propiedades, simetría, positividad y bilinelidad. **Matriz:** $G=\begin{pmatrix}\bar{e_1}\circ\bar{e_1}&\bar{e_1}\circ\bar{e_2}&\cdots\\\bar{e_2}\circ\bar{e_1}&\bar{e_2}\circ\bar{e_2}&\cdots\\\bar{e_3}\circ\bar{e_1}&\bar{e_3}\circ\bar{e_2}&\ddots\end{pmatrix}$, por lo tanto la matriz tiene que ser simétrica y definida positiva. Si la base es ortonormal entonces la matriz es la identidad. **Matriz congruente:** si el producto es $\bar{x}\circ\bar{y}=\bar{X}^tG\bar{Y}$, en un cambio de base $\bar{X}=P\bar{X}^*,\bar{Y}=P\bar{Y}^*$ es $\bar{X^*}^tP^tGP\bar{Y}^*$. **Vectores ortogonales:** $\bar{u}\circ\bar{u}=0$. **Módulo:** $|\bar{u}|=\sqrt{\bar{u}\circ\bar{u}}$; vector unitario: $\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$. **Ángulo entre vectores:** $cos(\alpha)=\dfrac{\bar{u}\circ\bar{u}}{|\bar{u}||\bar{u}|}$. **Bases ortonormales:** la matriz en estas bases es la identidad. **Gram-Schmidt:** $\bar{e_1}'=\bar{e_1}$; $\bar{e_2}'=\bar{e_2}-\dfrac{\bar{e_1}\circ\bar{e_2}}{\bar{e_1}\circ\bar{e_1}}\bar{e_1}'$; $\bar{e_3}'=\bar{e_3}-\dfrac{\bar{e_1}\circ\bar{e_3}}{\bar{e_1}\circ\bar{e_1}}\bar{e_1}'-\dfrac{\bar{e_2}\circ\bar{e_3}}{\bar{e_2}\circ\bar{e_2}}\bar{e_2}'$. Lo que nos daría una base ortogonal, se divide por su módulo, haciendo normal. Alternativa, coges un vector, hallas su genérico $\perp$ coges el que quieras, repites el proceso con este, y para sacar el tercero se unen las condiciones del primero y segundo. **Proyecciones:** la proyección de $\bar{u}$ sobre $\bar{v} \Rightarrow \bar{u} = a\bar{v} + \bar{w}$, siendo $\bar{w} \perp \bar{v}$ y $a\bar{v}$ la proyección; siendo $a = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}}{\bar{v} \circ \bar{v}}$. Proyección de $\bar{u}$ sobre un subspacio: siguiendo lo anterior $\bar{w} \perp L(S)$ y la proyección es combinación de los generadores de S. Expresión matricial: sea $A\bar{X}$ la proyección y A la matriz generada con los generadores de S por columnas dando $A\bar{X} = A(A^tA)^{-1}A^t\bar{u}$. Propiedades de la matriz proyección: $P^2 = P$, es idempotente; $P^t = P$ es simétrica. **En bases ortonormales:** $AA^t = I \rightarrow A^{-1} = A^t$.

5. Afín: referencia: $R = \{O; \bar{e_1}, \bar{e_2}, \cdots, \bar{e_n}\}$, siendo O el origen afín. **Cambio de base afín:** $B' = PB$ siendo $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \ddots \end{array}\right)$; con a y b los transformados de la base. **Bachiller:** Interseción de rectas y planos, se sustituyen las rectas en las implícitas y se despeja el parámetro. **Perpendicular común:** se hace una recta general (punto general de una menos la otra) y se condiciona que sea $\perp$ a ambas. **Haz de planos:** la suma de dos planos que generen la recta, uno de ellos por un parámetro. **Simetría:** (Punto P + su simétrico) entre dos = punto medio. **Hiperplano:** subespacio con dimensión R^{n-1}. **Áreas y volumenes:** Área: $|\bar{AB} \times \bar{AC}|$, de un triángulo entre dos; Volumen: $|\bar{AB} \times \bar{AC} \times \bar{AD}|$, la de un tetraedro entre 6.

Transformaciones afines: una transformación ortogonal si $f(\bar{x}) \circ f(\bar{y}) = \bar{x} \circ \bar{y}$ y su matriz en una base ortonormal es ortogonal, además de mantener los módulos. **Clasificación, transformaciones vectoriales: 2 dimensiones:** $|A| = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} cos\gamma & -sen\gamma \\ sen\gamma & cos\gamma \end{pmatrix}$ giro respecto al origen. $|A| = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} cos\gamma & sen\gamma \\ sen\gamma & -cos\gamma \end{pmatrix}$ simetría respecto a $N_{1,1}$. **Dimensión 3:** $|A| = 1$. Si $\lambda = 1$ triple, entonces es la identidad e indica desplazamiento. Si $\lambda = 1$ simple y -1 doble, se tiene una simetría axial respecto de $\lambda = 1$. Si se tiene dos complejos conjugados entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sen\gamma \\ 0 & sen\gamma & cos\gamma \end{pmatrix}$ y es un giro de ángulo γ respecto a $\lambda = 1$. $|A| = -1$. Si $\lambda = -1$ triple, entonces es una simetría central. Con $\lambda = -1$ simple y 1 doble es una simetría planar con vector normal $\lambda = -1$. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\gamma & -sen\gamma \\ 0 & sen\gamma & cos\gamma \end{pmatrix}$ es un giro respecto la recta $\lambda = -1$ y simetría respecto al plano con el vector normal = director de la recta. **Matriz de transformaciones afines:** $f = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$, quedando $f(x) = y$. **Homotecia:** $f = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1-k)P_1 & k & 0 & 0 \\ (1-k)P_2 & 0 & k & 0 \\ (1-k)P_3 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$, siendo P el centro, si $k = 1$ se tiene la identidad, si $k = -1$ es una simetría respecto de P. **Movimientos:** f es un movimiento si M (matriz transformadora de vectores) es ortogonal; **habrá que estudiar si hay puntos fijos.** Si $|M - I| \neq 0$ es determinado y habrá un punto fijo. Sino hay puntos fijos hay que añadir una traslación. La traslación se hallará transformando un punto $\in N_{1,1}$, y la resta entre él y su transformado será la traslación. Para hallar el $N_{1,1}$ en una simetría se puede hacer el punto medio entre un punto y su transformado. **Trucos:** un vector y su transformado "afín" mantienen el módulo. Si solo se tienen transformados de puntos, sus restas darán vectores. Cuando se halla el $N_{1,1}$ en simetría de plano, quedará una implícita, el $\vec{v}^{\perp}$ de esa implícita es el $N_{1,-1}$. Si la matriz es simétrica, entonces es estrictamente diagonalizable con autovalores reales. $\vec{e_1} \circ \vec{e_2} = f(\vec{e_1}) \circ f(\vec{e_2})$. Si nos piden un giro en una recta y no podemos encontrarlo fácil (comparando con la matriz) podemos coger $\vec{v} \perp N_{1,1}$, hallar su transformado y calcular el ángulo entre ellos. Conmutar: $A \cdot B = B \cdot A$.