1. Continuidad: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$; subconjuntos: $\lim_{\substack{y=mx^\alpha \\ x\to a}} = L$; polares cuando el denominador tenga grado menor que el numerador. **Infinitésimos equivalentes:** $A(x-x_0)^p$ o $\frac{A}{x^p}$, el orden es p. Si $f(x,y)\to 0$ entonces: $sen(f)\approx tg(f)\approx arcsen(f)\approx arctg(f)\approx f(x,y)$; $1-cos(f)\approx\frac{[f]^2}{2}$; $log(f-1)\approx f(x,y)$, $a^f-1\approx f\cdot log(a)$; si $f(x,y)\to 1\Rightarrow log(f)\approx f-1$, también pueden completarse cuadrados. **Asíndotas:** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$; $\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=n$. **Indeterminaciones:** $\infty-\infty$ logaritmo o conjugado; $\infty^0, 1^\infty, 0^0$, logaritmo; $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty$ L'Hôpital. **Órdenes infinitos:** $(log_b x)^m << x^p << a^x << n! << x^{kx}$. **Teoremas:** Bolzano: f corta a x si es continua y hay cambio de signo (Darboux es para cualquier valor intermedio). Weiestrass: máximo y mínimo en acotado. **Rolle:** $f(a)=f(c)$ entonces $\exists f'(b)=0, a<b<c$ si f continua, se usa en escalera (max. raíces de f).

2. Derivadas: Parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$. **Taylor:** $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. McLaurin: $sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$; $cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$; $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots$; $log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-\cdots$; $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$; $arctg(x)$ como sen pero sin factoriales, los hiperbólicos como sus gemelos pero sin cambio de signo. **Direccional:** $D_{\vec{v}}f(a,b)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a+\lambda v_1,b+\lambda v_2)-f(a,b)}{\lambda}$, siendo v un vector unitario, generalmente $\vec{v}=(cos\theta, sen\theta)$; si es diferenciable, entonces se puede hacer como $\nabla f(a,b)\circ\vec{v}$. **Diferenciabilidad:** 1.$\exists f_x, f_y$ 2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\dfrac{f(x,y)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)-f_y(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$. **Plano tangente:** $z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$. Aproximación: se halla el plano tangente al punto cercano y se sustituye lo dado. **Gradiente:** $\nabla f=(f_x,f_y)$; nota si $D_{\vartheta}f(a,b)\neq\nabla f(a,v)\circ\vec{v}$, f no es diferenciable. **Jacobiana:** Matriz: $\begin{pmatrix}\nabla f_1\\ \nabla f_2\\ \vdots\end{pmatrix}_{(a,b)}$, el jacobiano es el determinante. **Derivadas útiles:** $tan(f(x))\to f'(x)(1+tg^2(f(x)))$, $arctg(f(x))\to\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$, $arcsen(f(x))\to\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$, $arccos(f(x))\sim -arcsen(f(x))$, $sh(f(X))\to ch(f(x))f'(x)$, $ch(f(x))\to sh(f(x))f'(x)$. **Matriz hessiana:** es la jacobiana de la jacobiana. Extremos relativos: Sean H_n los menores de la hessiana en x_0: si $H_p>0\forall p\in N$ entonces existe un mínimo en x_0. Si $H_p>0$ con p par y $H_p<0$ con p impar, existe un máximo en x_0. **Lagrange:** generamos una nueva función con λ veces la restricción, siendo λ un nuevo parámetro. Se crea un sistema derivando todas las variables, se igualan a 0 y se ven los puntos críticos.

3. Integrales: $F(x)=\displaystyle\int_{g(x)}^{t(x)}u(t)dt\to F'(x)=u(g(x))g'(x)-u(t(x))t'(x)$ **Euler:** Gamma $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$; $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{sen(\pi p)}0<p<1$. Beta: $\beta(p.q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen(x)^{2p-1}cos(x)^{2q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. **Otras integrales:** Áreas: paramétricas $A=\int_{t_1}^{t_2}\mid y(t)x'(t)\mid dt$; polares $A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[r(\theta)]^2d\theta$. Longitud de arco: paramétrica: $l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$; explícita: $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$; polar: $l=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$. Volúmenes: OX: $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$, su área lateral: $A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. **Partes:** $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$. **Dobles y triples:** fijarse siempre en simetrías. **Cambio de variable:** se sustituyen y se añade el jacobiano. Polares: $\begin{cases}x=a\cdot r\cdot cos(\theta)\\ y=b\cdot r\cdot sin(\theta)\end{cases}$ $J=a\cdot b\cdot r$. Cilíndricas: $\begin{cases}x=a\cdot r\cdot cos(\theta)\\ y=b\cdot r\cdot sin(\theta)\\ z=z\end{cases}$ $J=a\cdot b\cdot r$. Esféricas: $\begin{cases}x=a\cdot r\cdot cos(\theta)\cdot cos(\varphi)\\ y=b\cdot r\cdot sen(\theta)\cdot cos(\varphi)\\ z=r\cdot sen(\varphi)\end{cases}$ $J=a\cdot b\cdot r^2\cdot cos(\varphi)$. **Astroides:** $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^\beta+\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\leq 1$; $u=\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha, v=\left(\frac{y}{b}\right)^\beta, w=\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\Rightarrow J(u,v,w)=\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\cdot v^{\frac{1-\beta}{\beta}}\cdot w^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ quedando $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v}Jdudvdw$ parecida a $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}$. **Cambios de variable típicos:** $x=sen(t)$, $x=k\cdot t$, $x^k=t$, $x=tg(t)$, $x=(t-a)$, $x=e^{\pm z}$, multiplicar y dividir por lo mismo, ídem con suma y resta; fijarse en los límites de integración, pueden dar pistas. Si no se ven los límites de integración, se meten las coordenadas en el dominio y se ven las condiciones que aparecen.

4. Compuestas e implícitas: Si $h = g \circ f$, entonces $Dh(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$; con jacobianos: $Jh_{(a,b)} = Jg_{f(a,b)} \cdot Jf_{(a,b)}$. **Implícitas:** si se cumple la condición en el punto, si las derivadas son continuas y $F_u \neq 0$ (con u siendo la implícita) entonces u está definida implícitamente. Si son un sistema de ecuaciones se hace $\left\| \frac{d(F,G,...)}{d(u,v,...)} \right\| \neq 0$. Se puede derivar teniendo en cuenta ahora que $u = u(x, ...)$. **Recta tangente:** $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$.

5. Integral de línea: $\int_\gamma \vec{F} \circ d\vec{l} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \circ \vec{\gamma}'(t)$, siendo $\vec{F}$ un campo vectorial y γ la curva, con γ_1 y γ_2 los límites del parámetro t. Cuidado con la orientación de la curva, es positiva si es antihoraria, si se invierte el recorrido, se cambia el signo del resultado. Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}$ entonces: $\vec{F}$ es conservativo si su rotacional $Rot(\vec{F}) = \overline{\nabla F} \times \vec{F}$ es nulo (en $\mathbb{R}^2 \to \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$). Si es conservativo y no hay polos (zona de no dominio), entonces toda curva cerrada da 0; la curva no importa mientras el punto inicial y final sean el mismo y/o se puede usar la **función potencial:** $\phi(x, y, z) \mid \nabla\phi = \vec{F}$; al integrar hay que tener en cuenta lo que no esté en función de la variable integrada, por lo que se añaden funciones e.j: $\varphi(y, z)$, se comparan y se integran según sea necesario. Si en una función potencial se coge un polo, se opera de manera normal, sin atajos. **Green:** $\oint_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, siendo D el recinto cerrado de γ, que obligatoriamente ha de ser cerrado.

6. Integral de superficie: Vectores normales: implícitas: $F(x, y, z) = 0 \to \vec{n} = \pm\frac{(F_x,F_y,F_z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$; en paramétricas: $S \equiv \begin{cases} x \equiv x(u, v) \\ y \equiv y(u, v) \\ z \equiv z(u, v) \end{cases} \Bigg| \begin{cases} S_u = (x, y, z) \\ S_v = (x, y, z) \end{cases} \leftarrow$ vectores tangentes; vector normal: $\vec{n} = \pm\frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|}$. Sea σ una superficie dada por $z = z(x, y)$ y $F(x, y, z)$ una función continua en σ, entonces la integral de superficie es: $\iint_\sigma F(x, y, z)d\sigma = \iint_D F(x, y, z(x, y))\frac{dxdy}{\|cos\gamma\|} = \iint_D F(x, y, z(x, y))\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$, siendo D la proyección de σ en el plano XY (el plano opuesto a la función σ) y $cos\gamma$ la tercera (en el caso de la z) componente del vector normal de σ. Si $F(x, y, z) = 1$ se puede cambiar por 1 en la integral, quedando solo la raíz. Para cálculo de superficies no se incluye F (como en volúmenes). Con σ en paramétricas la integral es $\iint_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\|\frac{\partial \vec{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}\right\| dudv$; si $\vec{F} = 1$ se sustituye quedando solo el elemento diferencial.

7. Sucesiones y series: Sandwich. **Stolz:** si b_n es monótona divergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$. Se usa especialmente en puntos suspensivos, fracciones y factoriales. **Raíz:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx log(n)$. **Series: armónicas:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha > 1$ la suma es convergente. <u>**En Series:**</u> **criterio del cociente:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ si $\lambda < 1$ es convergente, si $\lambda = 1$ usamos Raabe; **Raabe** $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}) = \lambda$ si $\lambda < 1$ es convergente, $\lambda = 1$??. **Criterio de la raíz:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ si $\lambda < 1$ es convergente, $\lambda = 1$??. **Geométricas:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ con r siendo la razón, $\mathbf{S} = \dfrac{a_1}{1 - r}$, suma de los k-ésimos términos es $\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$. **Telescópicas:** se van anulando los términos, hay que poner la expresión en forma de restas. **Aritmetico-geométricas:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n)r^n$, se solucionan haciendo la "suma"; se le extrae la suma por la razón: $S - rS = (1 - r)S$, si se estabiliza, hayamos el valor de $(1 - r)S$, despejándose S; repetir el proceso de resta a lo "anterior" hasta que se estabilice, pudiéndonos quedar algunos sumandos. **Truco:** muchas veces hay que descomponer las fracciones para que aparezca una resta.

Extras: Trigonometría: $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$; $sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$; $cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$; $cos^2\theta = \frac{1+cos(2\theta)}{2}$, $sen^2\theta = \frac{1-cos(2\theta)}{2}$; $sen(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$, $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$; $ch^2 - sh^2 = 1$; $shx\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Cálculo. Creado por Fernando Oleo Blanco.