Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 15.12.2016

Blatt 9

Übungen zur Computergestützten Analysis

1. Die Kugelkoordinaten sind definiert durch

$$\Psi(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von Ψ. An welchen Punkten verschwindet sie?

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 37-8\,a & 3 & 33-8\,a \\ -1 & -6+a & -3 & -8+a \\ -1 & 2-a & -3 & -a \end{pmatrix}.$$

   (a) Die Matrix A_1 bestehe aus den ersten drei Spalten von A und die Matrix A_2 aus den letzten drei Spalten von A. Berechnen Sie $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$.
   Hinweis: Wenn $\det(A_1) + \det(A_2) \neq 0$, dann haben Sie sich bei der Eingabe der Matrix vertippt.

   (b) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der Rang von A gleich 2 ist.
   Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, was $\det(A_1) \neq 0$ für den Rang von A impliziert.

3. (a) Seien $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren mit $x_3 = y_3 = 0$. Rechnen Sie nach, dass das Kreuzprodukt $x \times y$ auf der z-Achse liegt.

   (b) Für welchen Werte a hat das von den Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 5? Verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe das Kreuzprodukt.

4. Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die durch $f(x,y) = (x + ay + b)\exp(-x^2 - y^2)$ gegebene Funktion. Bestimmen Sie ihren Gradienten im Punkt $(1,2)$. Für welche Werte von a und b verschwindet der Gradient in $(1,2)$? Machen Sie für diese Werte eine Probe.

5. Betrachten Sie das Definitheitsverhalten der Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gehen Sie dazu für jedes der drei Matrizen wie folgt vor:

(a) Stellen Sie das Definitheitsverhalten mittels des Hurwitz-Kriteriums fest, falls es anwendbar ist. Andernfalls begründen Sie, warum es nicht anwendbar ist.

(b) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und deren Vorzeichen. Falls das Hurwitz-Kriterium anwendbar ist, überprüfen Sie nun Ihre Antwort aus (a).

Aufgaben 1 und 4 sind Pflichtaufgaben.

Besprechung: 19. bis 23. Dezember