Universidad de Montevideo
Facultad de Ingeniería

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Tema: INTEGRACIÓN

Primera parte

La integral indefinida: cálculo de primitivas

José Eduardo DIAZ

Montevideo - 3 de abril de 2013

Capítulo 2

La integral indefinida: cálculo de primitivas

Sección 2.1

Integración: proceso inverso a la derivación.

Frecuentemente a cada operación básica se le asocia una operación, llamada inversa, que deshace lo que la primera hace. Son ejemplos de operaciones inversas la suma y la resta; la multiplicación y la división; la potenciación y la radicación; la exponenciación y la logaritmación.
Las operaciones inversas son de gran utilidad en la resolución de las **ecuaciones numéricas**. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$e^{\sqrt[3]{x}-2} = 1$$

tomamos logaritmos

$$\ln(e^{\sqrt[3]{x}-2}) = \underbrace{\ln(1)}_{0}$$

simplicando (el logaritmo y la expoenecial son inversas)

$$\sqrt[3]{x} - 2 = 0$$

sumando 2

$$\sqrt[3]{x} - 2 + 2 = 2$$

simplificando (la suma y la resta son inversas)

$$\sqrt[3]{x} = 2$$

elevando a la potencia 3

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \underbrace{(2)^3}_{8}$$

simplificando (la potencia y la raiz son inversas)

$$x = 8$$

obtenemos la solución deseada.

Muchos modelos matemáticos de situaciones reales se expresan mediante ecuaciones con derivadas. Estas ecuaciones, que se llaman **ecuaciones diferenciales**, serán estudiadas más adelante en el curso.
Si queremos resolver estas ecuaciones, que incluyen derivadas, primero necesitamos conocer la operación inversa de la derivación.

La derivación fue estudiada en los cursos pre-universitarios, donde se resolvió el siguiente problema: dada una función f se estudiaron ciertas técnicas que permitían, cuando existía, hallar la derivada f'

$$f \xrightarrow{\text{derivación}} f'$$

Ahora queremos determinar una función a partir de su derivada. Es decir, dada una función f ¿qué función tiene por derivada a f?

$$F = ? \quad \text{tal que} \quad F' = f$$

Este proceso inverso se denominada **integración** (o **antiderivación**)

$$F \xrightarrow{\text{derivación}} F' \;=\; f \xrightarrow{\text{integración}} F$$

Nota Para poder integrar con cierto éxito es absolutamente necesario dominar las técnicas de la derivación. Si el lector no las recuerda o no deriva muy bien, deberá repasar sus materiales pre-universitarios sobre derivación y entrenarse.

SECCIÓN 2.2

Primitivas e integrales indefinidas.

Como vimos en la sección anterior, nuestro problema es el siguiente: dada una función f queremos encontrar una función F cuya derivada sea f. La función F que buscamos, se llama primitiva de f.
En concreto definimos

DEFINICION 2.1. *Una función F se llama* ***primitiva*** *(o antiderivada) de una función f en un intervalo I si*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Ejemplo 2.1. La función $F : F(x) = x^3 + 2x - 5$ es una primitiva de $f : f(x) = 3x^2 + 2$ en $I = \mathbb{R}$
En efecto

$$F'(x) = \left[x^3 + 2x - 5\right]' = 3x^2 + 2 = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Ejemplo 2.2. Las funciones $F_1 : F_1(x) = x^2$ y $F_2 : F_2(x) = x^2 + 1$ son primitivas de $f : f(x) = 2x$ en $I = \mathbb{R}$.
En efecto

$$F_1'(x) = \left[x^2\right]' = 2x = f(x)$$

y

$$F_2'(x) = \left[x^2 + 1\right]' = 2x = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

En el ejemplo anterior vimos que la función f tiene más de una primitiva. En general,

$$F(x) = x^2 + K \quad \text{con } K \text{ constante arbitraria}$$

son primitivas de

$$f : f(x) = 2x \text{ en } I = \mathbb{R}$$

Nos preguntamos:
(A) ¿el resultado anterior vale en general?, es decir si a una primitivia de una función le sumamos una constante obtenemos otra primitiva de la función.
(B) Y si lo anterior es cierto, ¿todas las primitivas de una función son de esta forma?, es decir que dos primitivas cualesquiera de una misma función siempre difieren en una constante?.

Las dos respuestas son afirmativas, y los probamos en la siguiente proposición.

PROPOSICION 2.1. ***(Caracterización de las primitivas)***
(A) *Si F es una primitiva de f en el intervalo I entonces $F+K$ (con K constante) también es una primitiva de f en el intervalo I.,*
(B) *Si F_1 y F_2 son primitivas de f en el intervalo I entonces existe una constante K tal que $F_1 = F_2 + K$ en el intervalo I,*

Demostración. **(A)** En efecto como F es una primitiva f en I

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I \tag{2.0}$$

y por otro lado, por propiedades de la derivación

$$[F(x) + K]' = F'(x) + \underbrace{K'}_{=0} = F'(x) \qquad \forall x \in I \tag{2.0}$$

con lo cual de (2.2) y (2.2) se tiene que

$$[F(x) + K]' = f(x) \qquad \forall x \in I$$

es decir que $F + K$ es una primitiva de f en I.
(B) Sea

$$H(x) \overset{def}{=} F_1(x) - F_2(x) \qquad \forall x \in I \tag{2.0}$$

Queremos probar que la función H es constante en I
Supongamos, por absurdo, que H no es constante en el intervalo I. Luego deben existir a y b ($a < b$) en I tales gue

$$H(a) \neq H(b) \tag{2.0}$$

Por ser H derivable en (a, b), del Teorema del valor medio para derivadas[1], podemos afirmar que existe algún c en (a, b) tal que

$$H(b) - H(a) = H'(c)\ (b - a) \tag{2.0}$$

[1] Si no recuerda este importante resultado, puede repasarlo al final de estas notas (pag. 49)

Pero

$$H' = [F_1 - F_2]' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{como } F_1 \text{ y } F_2 \text{ son primitivas de } f \\ \text{se cumple que } F_1' = f \quad \text{y} \quad F_2' = f \end{array} \right)$$

con lo cual $H'(c) = 0$. Y esto último, junto con (2.2), implica que

$$H(b) - H(a) = 0$$

de donde

$$H(a) = H(b)$$

en contradicción con (2.2).
Por consiguiente, concluimos que H es constante en I:

$$H(x) = K \qquad \forall x \in I \qquad \text{(donde } K \text{ es una constante)}$$

Por tanto, de (2.2),

$$K = F_1(x) - F_2(x) \qquad \forall x \in I$$

esto es

$$F_1(x) = F_2(x) + K \qquad \forall x \in I$$

■

Según la Proposición anterior se pueden representar todas las primitivas de una función añadiendo una constante arbitraria a una primitiva concreta conocida.
Por ejemplo, una vez sabido que $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f : f(x) = 2x$ el conjunto de todas las primitivas de $f : f(x) = 2x$ viene dada por

$$F(x) + K = x^2 + K$$

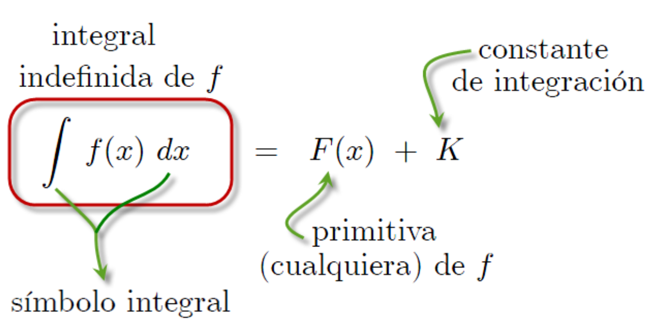
donde K es una constante arbitraria.
Este proceso ("operación") mediante el cual se determina el conjunto de todas las primitivas de una función se llama **integración indefinida (o antiderivación)**, y se denota por

$$\int f(x)dx \stackrel{def}{=} F(x) + K$$

y le llamaremos **integral indefinida** de f
Observar que la integral indefinida se indica con la combinación de dos símbolos

$$\int ...dx$$

Esta notación se debe a Leibniz y la razón de la misma será explicada más adelante cuando estudiemos el problema del área y las integrales llamadas definidas



La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede verificarse facilmente en la notación integral:

$$\int f(x)dx = F(x) + K \tag{2.0}$$

En efecto, como F es una primitiva de f se cumple que $F' = f$. Sustituyendo f por F'en (2.2), se obtiene

$$\int F'(x)dx = F(x) + K \tag{2.0}$$

la integración es la "inversa" de la derivación

Y por otro lado si derivamos en (2.2) se tiene

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + K]' = F'(x) = f(x)$$

esto es

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \tag{2.0}$$

la derivación es la "inversa" de la integración

SECCIÓN 2.3

Linealidad de la integral

Dos propiedades básicas, y bien conocidas, de la derivación son la derivada de la suma

$$[\ f(x) + g(x)\ ]' = f'(x) + g'(x)$$

y la derivada de una constante por una función

$$[\ c\ f(x)\ ]' = c\ f'(x) \qquad\qquad (c \text{ constante})$$

Siendo la integración la "inversa" de la derivación no es de estrañar que estas propiedades sean válidas en la integración

PROPOSICION 2.2. ***(A)*** *Propiedad aditiva de la integral*

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

(B) *Propiedad homogénea de la integral*

$$\boxed{\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad\qquad (c \text{ constante})}$$

Demostración. (A) Bastará con probar que la derivada del resultado es el integrando

$$\underline{\int (f(x)+g(x))\,dx} = \boxed{\int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

derivamos

En efecto

$$\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' = f(x)+g(x)$$

(B) Bastará con probar que la derivada del resultado es el integrando

$$\int \underline{cf(x)}dx = \boxed{c\int f(x)dx}$$

derivamos

En efecto

$$\left[c\int f(x)dx\right]' = c\left[\int f(x)dx\right]' = cf(x)$$

■

Al extender la parte (A) para un número finito de funciones y combinándola con la parte (B), se obtiene la **propiedad de linealidad de la integral**

$$\int (c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x))\;dx = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\;dx$$

que nos permite integrar "término a término".

SECCIÓN 2.4

Fórmulas básicas de integración

Por las relaciones (2.2) y (2.2) podemos pensar a la integración (indefinida) como la "operación inversa" de la derivación.

De esta manera cada fórmula de derivación produce inmediatamente, por "inversión" de la derivación, una fórmula correspondiente para la integral.

Por ejemplo, sabemos que

$$[\ x^5\ ]' = 5x^4$$

integrando

$$\int [\ x^5\ ]'\,dx = \int 5x^4 dx$$

simplificando

$$x^5 = 5\int x^4 dx$$

despejando

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$$

De esta manera a partir de una fórmula de derivación obtenemos una fórmula integral

Fórmulas de derivación	**Fórmulas de integración**
$[\ x^5\ ]' = 5x^4 \xrightarrow{\text{integro}}$	$\xrightarrow{\text{despejo}} \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + K$

y de manera inversa, si derivamos la integral debemos de obtener el integrando

derivo

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + K$$

En general, con el procedimiento anterior, podemos invertir la tabla de derivadas básicas y obtener una tabla de integrales básicas:

TABLA de integrales básicas		
Fórmulas de derivación	**Fórmulas de integración**	a es una constante
(1) $[\ ax\ ]' = a$	(1) $\int a\ dx = ax + K$	
(2) $[\ (x-a)^{\alpha+1}\ ]' = (\alpha+1)\,(x-a)^{\alpha}$	(2) $\int (x-a)^{\alpha}\,dx = \dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$\alpha \neq -1$
(3) $[\ \ln\vert x-a\vert\ ]' = \dfrac{1}{x-a}$	(3) $\int \dfrac{1}{x-a}dx = \ln\vert x-a\vert + K$	
(4) $[\ e^{ax}\ ]' = ae^{ax}$	(4) $\int e^{ax}dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + K$	$a \neq 0$
Funciones trigonométricas		
(5) $[\ \cos(ax)\ ]' = -a\sin(ax)$	(5) $\int \sin(ax)dx = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
(6) $[\ \sin(ax)\ ]' = a\cos(ax)$	(6) $\int \cos(ax)dx = \dfrac{\sin(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
(7) $[\ \tan(ax)\ ]' = \dfrac{a}{\cos^2(ax)}$	(7) $\int \dfrac{1}{\cos^2(ax)}dx = \dfrac{\tan(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
(8) $[\ \cot(ax)\ ]' = \dfrac{-a}{\sin^2(ax)}$	(8) $\int \dfrac{1}{\sin^2(ax)}dx = \dfrac{-\cot(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
Funciones hiperbólicas		
(9) $[\ \cosh(ax)\ ]' = a\sinh(ax)$	(9) $\int \sinh(ax)dx = \dfrac{\cosh(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
(10) $[\ \sinh(ax)\ ]' = a\cosh(ax)$	(10) $\int \cosh(ax)dx = \dfrac{\sinh(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
(11) $[\ \tanh(ax)\ ]' = \dfrac{a}{\cosh^2(ax)}$	(11) $\int \dfrac{1}{\cosh^2(ax)}dx = \dfrac{\tanh(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$

(12)	$\left[\ \coth(ax)\ \right]' = \dfrac{-a}{\sinh^2(ax)}$	(12)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2(ax)}dx = \frac{-\coth(ax)}{a} + K$	$a \neq 0$
Funciones trigonométricas inversas				
(13)	$\left[\ \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left[\ \arccos\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	(13)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + K$ $= -\arccos\left(\dfrac{x}{a}\right) + K$	$a > 0$
(14)	$\left[\ \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{a}{a^2+x^2}$ $\left[\ \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{-a}{a^2+x^2}$	(14)	$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$ $= \dfrac{-1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + K$	$a > 0$
(15)	$\left[\ \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[\ \operatorname{arccsc}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$	(15)	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + K$ $= \dfrac{-1}{a}\operatorname{arccsc}\left(\dfrac{x}{a}\right) + K$	$a > 0$
Funciones hiperbólocas inversas				
(16)	$\left[\ \operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	(16)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + K$ $= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + K$	$a > 0$
(17)	$\left[\ \operatorname{arccosh}\left(\dfrac{x}{a}\right)\ \right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	(17)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) + K$ $= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + K$	$a > 0$

En ocasiones puede ocurrir que sea preciso calcular una integral, en condiciones en que no sea posible consultar la tabla de integrales (por ejemplo, puede ocurrir que el lector siga un curso de Física como Mecánica o Electromagnetismo, en el cual se deberá conocer las integrales básicas como conoce las tablas de multiplicar), por eso deberá estudiar el contenido de la misma. La manera óptima de recordarla es utilizándola, es decir haciendo ejercicios.

A partir de las integrales de la tabla anterior ("**integrales básicas**") operando y usando la propiedad de linealidad de la integral se pueden calcular otras integrales.
A continuación damos una serie extensa de ejemplos. Una buena práctica es tomar lápiz y papel, y hacer cada ejemplo por sus propios medios.

Ejemplo 2.3. Calcular $\int \left(4x^2 + 3x + 20\right) dx$

$$\int \left(4x^2 + 3x + 20\right) dx = 4\int x^2 dx + 3\int x dx + \int 20 dx \qquad \text{(propiedad de linealidad)} \tag{2.0}$$

Usando la tabla de integrales básicas

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1 \qquad \text{(fórmula (2))}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2 \qquad \text{(fórmula (2))}$$

$$\int 20 dx = 20x + C_3 \qquad \text{(fórmula (1))}$$

si sustituimos en (2.3)

$$\begin{aligned} \int \left(4x^2 + 3x + 20\right) dx &= 4\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 3\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + (20x + C_3) \\ &= 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 20x + \underbrace{4C_1 + 3C_2 + C_3}_{K} \\ &= 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 20x + K \end{aligned}$$

Importante: Al integrar aparecieron tres constantes arbitrarias C_1, C_2 y C_3, que se combinaron al final en una sóla constante K. Para evitar esta tediosa notación, y sabiendo que las primitivas de una función difieren en constantes, al integrar, en los pasos intermedios, tomaremos las constantes como nulas (en este caso $C_1 = C_2 = C_3 = 0$) y al final agregamos una genérica K.
Esta práctica la seguiremos de manera consiste sin hacer mayores comentarios

Ejemplo 2.4. Calcular $\int \left(\frac{1}{x} + 3x + 1\right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{x} + x + 1\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + 3\int x dx + \int 1 dx \qquad \text{(linealidad)} \tag{2.-3}$$

Usando la tabla de integrales básicas

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \qquad \text{(fórmula (3))}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \qquad \text{(fórmula (2))}$$

$$\int 1 dx = x \qquad \text{(fórmula (1))}$$

si sustituimos en (2.4)

$$\int \left(\frac{1}{x} + x + 1\right) dx = \ln|x| + 3\frac{x^2}{2} + x + K$$

Ejemplo 2.5. Calcular $\displaystyle\int x\,(x-1)\,(x+2)\,dx$
Operando en el integrando se tiene que

$$x\,(x-1)\,(x+2) = x^3 + x^2 - 2x$$

luego

$$\begin{aligned}
\int x\,(x-1)\,(x+2)\,dx &= \int\ x^3 + x^2 - 2x\ \ dx && \text{(linealidad)}\\
&= \int x^3dx + \int x^2dx - 2\int xdx && \text{(fórmula (2))}\\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + K && \text{(simplificamos)}\\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6. Calcular $\displaystyle\int \left(2e^x + \frac{3}{e^{3x}}\right)^2 dx$
Operando se tiene que

$$\left(2e^x + \frac{3}{e^{3x}}\right)^2 = \left(2e^x + 3e^{-3x}\right)^2 = \left(2e^x\right)^2 + 2\left(2e^x\right)\left(3e^{-3x}\right) + \left(3e^{-3x}\right)^2 = 4e^{2x} + 12e^{-2x} + 9e^{-6x}$$

$$\boxed{\frac{1}{e^\alpha} = e^{-\alpha}} \qquad \boxed{\left(e^\alpha\right)^\beta = e^{\alpha\beta}} \qquad \boxed{e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int \left(2e^x + \frac{3}{e^{3x}}\right)^2 dx &= \int\ 4e^{2x} + 12e^{-2x} + 9e^{-6x}\ \ dx && \text{(linealidad)}\\
&= 4\int e^{2x}dx + 12\int e^{-2x}dx + 9\int e^{-6x}dx && \text{(fórmula (4))}\\
&= 4\frac{e^{2x}}{2} + 12\frac{e^{-2x}}{-2} + 9\frac{e^{-6x}}{-6} + K && \text{(simplificamos)}\\
&= 2e^{2x} - 6e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-6x} + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.7. Calcular $\displaystyle\int \left(e^x + 1\right)^3 e^x dx$
Operando se tiene que

$$\left(e^x + 1\right)^3 e^x = \left(e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 1\right)e^x = e^{4x} + 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x$$

luego

$$\begin{aligned}
\int (e^x+1)^3 e^x dx &= \int e^{4x}+3e^{3x}+3e^{2x}+e^x \quad dx && \text{(linealidad)}\\
&= \int e^{4x}dx + 3\int e^{3x}dx + 3\int e^{2x}dx + \int e^x dx && \text{(fórmula (4))}\\
&= \frac{e^{4x}}{4} + 3\frac{e^{3x}}{3} + 3\frac{e^{2x}}{2} + e^x + K && \text{(simplificamos)}\\
&= \frac{e^{4x}}{4} + e^{3x} + 3\frac{e^{2x}}{2} + e^x + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8. Calcular $\int (\sin 2x - 3\cos 4x)\, dx$

$$\begin{aligned}
\int (\sin 2x - 3\cos 4x)\, dx &= \int \sin 2x \ dx - 3\int \cos 4x dx && \text{(linealidad)}\\
&= -\frac{\cos 2x}{2} - 3\frac{\sin 4x}{4} + K && \text{(fórmulas (5) y (6))}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.9. Calcular $\int \frac{4-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

Operando en el integrando se tiene que

$$\frac{4-3\sin^3 x}{\sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 x} - 3\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 x} - 3\sin x$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{4-3\sin^3 x}{\sin^2 x}dx &= \int \frac{4}{\sin^2 x} - 3\sin x \quad dx && \text{(linealidad)}\\
&= 4\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx - 3\int \sin x \ dx && \text{(fórmulas (5) y (8))}\\
&= -4\cot(x) + 3\cos x + K && \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10. Calcular $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Usando el producto notable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ tenemos que

$$1-x^4 = \left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)$$

de donde

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx && \text{(linealidad)}\\
&= \operatorname{arcsen}(x) - \operatorname{arcsinh}(x) + K && \text{(fórmulas (13) y (16))}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11. Calcular $\int \sqrt[5]{(x-2)^3}dx$

Como

$$\sqrt[5]{(x-2)^3} = (x-2)^{\frac{3}{5}} \qquad \text{(propiedad: } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}})$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[5]{(x-2)^3}dx &= \int (x-2)^{\frac{3}{5}}\, dx && \text{(fórmula (2))}\\
&= \frac{(x-2)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + K && \text{(simplificamos)}\\
&= \frac{5}{8}(x-2)^{\frac{8}{5}} + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.12. Calcular $\int \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x-2)^2}\, dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x-2)^2}\, dx &= \int (x+1)^{-3} + 3(x-2)^{-2}\, dx && \text{(propiedad: } \frac{1}{a^p} = a^{-p})\\
&= \int (x+1)^{-3}\, dx + 3\int (x-2)^{-2}\, dx && \text{(linealidad)}\\
&= \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + 3\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + K && \text{(fórmula (2))}\\
&= -\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{3}{x-2} + K && \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.13. Calcular $\int \frac{\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x}}dx$

Primero operamos en el integrando, usando propiedades de la potenciación

$$\frac{\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x}} \underset{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}{=} \frac{\sqrt[3]{x^5x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{1}{4}}} \underset{a^pa^q = a^{p+q}}{=} \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{13}{2}}}}{x^{\frac{1}{4}}} \underset{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}{=} \frac{x^{\frac{13}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}} \underset{\frac{1}{a^p} = a^{-p}}{=} x^{\frac{13}{6}}x^{\frac{-1}{4}} \underset{a^pa^q = a^{p+q}}{=} x^{\frac{23}{12}}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^3}}}{\sqrt[4]{x}}dx &= \int x^{\frac{23}{12}}dx \\
&= \frac{x^{\frac{35}{12}}}{\frac{35}{12}} + K \qquad \text{(fórmula (2))} \\
&= \tfrac{12}{35}x^{\frac{35}{12}} + K \qquad \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.14. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

Primero operamos en el integrando, usando propiedades de la potenciación

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{-3}{4}} = x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{-3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-3}{4}} = x^{\frac{-5}{12}} - x^{\frac{-1}{4}}$$

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $\qquad$ $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ $\qquad$ $a^pa^q = a^{p+q}$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx &= \int x^{\frac{-5}{12}} - x^{\frac{-1}{4}}\, dx \qquad \text{(linealidad)} \\
&= \int x^{\frac{-5}{12}}dx - \int x^{\frac{-1}{4}}dx \qquad \text{(fórmula (2))} \\
&= \tfrac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} - \tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + K \qquad \text{(simplificamos)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.15. Calcular $\displaystyle\int (2x+\sqrt{x})\,(x-3\sqrt{x})\,dx$

Primero operamos en el integrando, usando propiedades de la potenciación

$$\begin{aligned}
(2x+\sqrt{x})\,(x-3\sqrt{x}) = \;& 2x^2 - 5x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\sqrt{x} && \text{(desarrollamos)} \\
& 2x^2 - 5xx^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} && \text{(propiedad: } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}\text{)} \\
& 2x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x && \text{(propiedad: } a^pa^q = a^{p+q}\text{)}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int (2x+\sqrt{x})\,(x-3\sqrt{x})\,dx &= \int \left(2x^2 - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x\right)dx \qquad \text{(propiedad de linealidad)} \\
&= 2\int x^2dx - 5\int x^{\frac{3}{2}}dx - 3\int xdx \qquad \text{(fórmula (2))} \\
&= 2\frac{x^3}{3} - 5\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + K \qquad \text{(simplificamos)} \\
&= \frac{2}{3}x^3 - 2\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}x^2 + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.16. Calcular $\int \left(x^3+1\right)^2 \sqrt[3]{x^5}dx$

Primero operamos en el integrando, usando propiedades de la potenciación

$$\begin{aligned}
\left(x^3+1\right)^2 \sqrt[3]{x^5} &= \left(x^6+2x^3+1\right) \sqrt[3]{x^5} && \text{(desarrollamos)}\\
&= x^6 \sqrt[3]{x^5} + 2x^3 \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^5} \\
&= x^6 x^{\frac{5}{3}} + 2x^3 x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{5}{3}} && \text{(propiedad: } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}\text{)}\\
&= x^{\frac{23}{3}} + 2x^{\frac{14}{3}} + x^{\frac{5}{3}} && \text{(propiedad: } a^p a^q = a^{p+q}\text{)}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \left(x^3+1\right)^2 \sqrt[3]{x^5}dx &= \int \left(x^{\frac{23}{3}} + 2x^{\frac{14}{3}} + x^{\frac{5}{3}}\right) dx && \text{(propiedad de linealidad)}\\
&= \int x^{\frac{23}{3}}\, dx + 2\int x^{\frac{14}{3}}\, dx + \int x^{\frac{5}{3}} dx && \text{(fórmula (2))}\\
&= \frac{x^{\frac{26}{3}}}{\frac{26}{3}} + 2\frac{x^{\frac{17}{3}}}{\frac{17}{3}} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + K && \text{(simplificamos)}\\
&= \frac{3}{26}\sqrt[3]{x^{26}} + \frac{6}{17}\sqrt[3]{x^{17}} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Calcular $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{x}dx$

Operando se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{x} &= \frac{x-\sqrt{x}-6}{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} = \\
&= 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{6}{x} = 1 - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{6}{x}
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{x}dx &= \int \left(1 - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{6}{x}\right) dx = \int 1dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 6\int \frac{1}{x}dx = \\
&= x - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 6\ln|x| + K = x - 2\sqrt{x} - 6\ln|x| + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.18. Calcular $\int (2x-3)^5\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int (2x-3)^5\,dx &= \int \left(\ 2\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\ \right)^5 dx && \text{(factor común)}\\
&= \int (2)^5 \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^5 dx && \text{(potencia de un producto: } (a.b)^n = a^n.b^n\text{)}\\
&= \underbrace{(2)^5}_{32}\int \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^5 dx && \text{(propiedad homogénea)}\\
&= 32\frac{\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^6}{6} + K && \text{(fórmula (2))}\\
&= \frac{16}{3}\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^6 + K
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.19. Calcular $\int \frac{1}{3x-1}dx$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{3x-1}dx &= \int \frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}dx && \text{(factor común)}\\
&= \int \frac{1}{3}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)}dx && \text{(producto de fracciones: } \tfrac{1}{a.b} = \tfrac{1}{a}.\tfrac{1}{b}\text{)}\\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-\frac{1}{3}}dx && \text{(propiedad homogénea)}\\
&= \frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{1}{3}\right| + K && \text{(fórmula (3))}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.20. Calcular $\int \frac{1}{6+5x^2}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{6+5x^2}dx &= \int \frac{1}{5\left(\frac{6}{5}+x^2\right)}dx && \text{(factor común)}\\
&= \int \frac{1}{5}\frac{1}{\left(\frac{6}{5}+x^2\right)}dx && \text{(producto de fracciones: } \tfrac{1}{a.b}=\tfrac{1}{a}.\tfrac{1}{b}\text{)}\\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{6}{5}+x^2}dx && \text{(propiedad homogénea)}\\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2+x^2}dx && \text{(fórmula (3))}\\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{6}{5}}}\right)+K && \text{simplificamos}\\
&= \frac{1}{\sqrt{30}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)+K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.21. Calcular $\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)}}dx && \text{(factor común)}\\
&= \int \frac{1}{x\sqrt{3}\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}}dx && \text{(propiedad homogénea)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}d && \text{(fórmula (15))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)+K && \text{simplificamos}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)+K
\end{aligned}$$

NOTA: De ahora en más dejaremos de explicitar la fórmula y la propiedad que utilizamos.

Ejemplo 2.22. Calcular $\displaystyle\int \frac{3x^2+8x-1}{x+2}dx$

Vamos a reescribir el integrando, usando la división entre polinomios:

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2+8x-1 & x+2 \\ \cline{3-3} - & 3x^2+6x & 3x+2 \\ \cline{2-2} & \quad 2x-1 & \\ - & \quad 2x+4 & \\ \cline{2-2} & \qquad -5 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 3x^2+8x-1=(3x+2)(x+2)-5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x^2+8x-1}{x+2}=3x+2-\frac{5}{x+2} \qquad (\text{dividimos entre } x+2\ )$$

Luego, la integral se puede transformar en dos integrales fáciles de calcular

$$\int \frac{3x^2+8x-1}{x+2}\,dx=\underbrace{\int 3x+2\,dx}_{\frac{3}{2}x^2+2x}-\underbrace{\int \frac{5}{x+2}\,dx}_{5\ln|x+2|}=\frac{3}{2}x^2+2x-5\ln|x+2|+K$$

Ejemplo 2.23. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+3}dx$

Podemos reescribir el integrando, usando la división entre polinomios

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 & x^2+3 \\ \cline{3-3} - & x^2+3 & 1 \\ \cline{2-2} & \ -3 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad x^2=\left(x^2+3\right)(1)-3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+3}=1-\frac{3}{x^2+3}$$

el mismo resultado se obtiene si operamos en el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{x^2+3-3}{x^2+3}=\frac{x^2+3}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}=1-\frac{3}{x^2+3}$$

Luego, la integral se puede transformar en dos integrales fáciles de calcular

$$\int \frac{x^2}{x^2+3}dx=\underbrace{\int 1\,dx}_{x}-\underbrace{\int \frac{3}{x^2+3}\,dx}_{\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}= \quad x-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Ejemplo 2.24. Calcular $\displaystyle\int \frac{x+5}{x+2}dx$

Podemos reescribir el integrando, usando la división entre polinomios

$$\begin{array}{rl|l} & x+5 & x+2 \\ \cline{3-3} - & x+2 & 1 \\ \cline{2-2} & \quad 3 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad x+5=(x+2)(1)+3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+5}{x+2}=1+\frac{3}{x+2}$$

el mismo resultado se obtiene si operamos en el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{x+5}{x+2} = \frac{x+2+3}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{3}{x+2} = 1 + \frac{3}{x+2}$$

Luego, la integral se puede transformar en dos integrales fáciles de calcular

$$\int \frac{x+5}{x+2}\, dx = \underbrace{\int 1\, dx}_{x} + \underbrace{\int \frac{3}{x+2}\, dx}_{3\ln|x+2|} = x + 3\ln|x+2| + K$$

Ejemplo 2.25. Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Podemos reescribir el integrando

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

Luego, la integral se puede transformar en dos integrales fáciles de calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \underbrace{\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx}_{\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}} - \underbrace{\int (x+1)^{\frac{-1}{2}}\, dx}_{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + K$$

Ejemplo 2.26. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx$

Observando que

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

Podemos reescribir el integrando

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - (x+1)^{-2}$$

Luego, la integral se puede transformar en dos integrales fáciles de calcular

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = \underbrace{\int 1 dx}_{x} - \underbrace{\int (x+1)^{-2}\, dx}_{\frac{(x+1)^{-1}}{-1}} = x + \frac{1}{x+1} + K$$

SECCIÓN 2.5

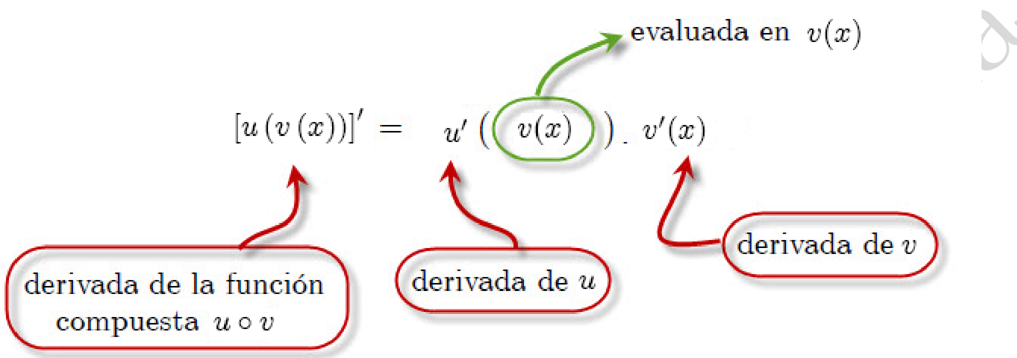
Técnicas de integración

De los cursos pre-universitarios, sabemos que, a paritr de las derivadas de las funciones elementales, usando las propiedades de la derivación, podemos calcular la derivada de cualquier función (derivable). Lo anterior no ocurre con la integración. Es decir que, mientras la derivación es un proceso rutinario, la integración requiere de entrenamiento y experiencia, y a pesar de ello, no siempre será sencillo integrar cualquier función (integrable).

No obstante, existen ciertas técnicas que nos permiten transformar la integral original en otra integral que sea más fácil de calcular. A continuación veremos las dos técnicas clásicas de integración: **la integración por cambio de variable** y la **integración por partes**.

2.5.1 Integración por cambio de variable.

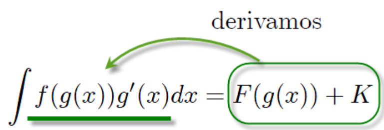
El método de integración por cambio de variable es una consecuencia de la regla de la cadena (o derivada de la función compuesta):



PROPOSICION 2.3. ***(cambio de variable)*** *Si F es un primitiva de f y g tiene derivada continua, se cumple que*

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + K} \tag{2.-16}$$

Demostración. Bastará con probar que



En efecto si derivamos tenemos

$$[F(g(x)) + K]' = [F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x) \qquad \text{(por la regla de la cadena)}$$

y siendo F es un primitiva de f

$$F'(x) = f(x)$$

con lo cual

$$[F(g(x)) + K]' = f(g(x)).g'(x)$$

■

Método de integración por cambio de variables.

Por la Proposición 2.3 sabemos que es válida la fórmula

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + K \qquad \text{donde } \ F \text{ es una primitiva de } f \tag{2.-16}$$

En la práctica vamos a utilizar el siguiente procedimiento simbólico que nos permite deducir (2.5.1), pero que no puede ser considarado como una prueba formal.
Este procedimiento simbólico hace uso de la notación de Leibniz para la derivada

$$u' = \frac{du}{dx}$$

notación usual

notación de Leibniz

Vamos a los detalles. Si se le llama

$$u = g(x) \tag{2.-16}$$

al derivar se tiene

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \tag{2.-16}$$

Sustituimos (2.5.1) y (2.5.1) en la integral[2], y procedemos de la siguiente manera;

$$\int f\left(g(x)\right)\, g'(x)\, dx = \int f\left(u\right) \frac{du}{dx} dx = \int f(u)du = F(u) + K = F(g(x)) + K$$

F es una primitiva de f

"simplificamos"

deshacemos el cambio $u = g(x)$

y obtenemos el resultado deseado.

En resumen para calcular una integral de la forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx \tag{2.-16}$$

seguimos los siguientes pasos:
Paso 1: Hacemos la sustitución

$$\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{cases}$$

obteniendo

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f\left(u\right) du \tag{2.-16}$$

[2] de aquí proviene su nombre de **"cambio de variable"**, pues se pasa de la variable original x a una nueva variable u.

(observar que finalizado este paso, en la nueva integral solamente debe aparecer la variable u, no puede estar la variabe x)
Paso 2: Luego, determinamos una primitiva F de f , con lo cual

$$\int f(u)du = F(u) + K \tag{2.-16}$$

Paso 3: Finalmente, deshacemos el cambio, volvemos a sustituir $u = g(x)$

$$F(u) + K = F(g(x)) + K \tag{2.-16}$$

de (2.5.1), (2.5.1) y (2.5.1) se tiene

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + K$$

que es el resultado buscado.

Nota El éxito de este método depende de la habilidad en determinar la parte del integrando que se ha de substituir por la variable u, y esta habilidad se adquiere con la experiencia que se logra resolviendo ejercicios.
En algunos casos, esta sustitución es obvia; en otros no lo es tanto, por eso es fundamental practicar.
Con la práctica seremos capaces de ver más rapidamente si un determindado cambio de variable puede o no tener éxito. Si nuestro intento de cambio de variable no funciona, es interesante determinar la razones de porque falla, de esta forma, los intentos fallidos se vuelven útiles para ganar experiencia.

A continuación darenos una serie de ejemplos. Una buena práctica es tomar lápiz y papel, y hacer cada ejemplo por sus propios medios.

La **aplicacion directa** este método de integración consiste en reconocer la función g y su derivada g' en el integrando, para hacer el cambio

$$\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{cases}$$

Ejemplo 2.27. Calcular $\int \left(x^2 + 3x + 1\right)^4 (2x + 3)\, dx$
En este caso reconocemos

$$\int (\underbrace{x^2 + 3x + 1}_{g(x)})^4 (\underbrace{2x + 3}_{g'(x)})dx$$

Paso 1: hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = x^2 + 3x + 1 \\ du = (2x + 3)\, dx \end{cases}$$

y tenemos

$$\int \left(\boxed{x^2+3x+1}\right)^4 \boxed{(2x+3)\,dx} = \int \left(\boxed{u}\right)^4 \boxed{du}$$

Paso 2: Calculamos la integral

$$\int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + K$$

Paso 3: deshacemos el cambio, volvemos a sustituir $u = x^2+3x+1$

$$\frac{u^5}{5} + K = \frac{\left(x^2+3x+1\right)^5}{5} + K$$

Así

$$\int \left(x^2+3x+1\right)^4 (2x+3)\,dx = \frac{\left(x^2+3x+1\right)^5}{5} + K$$

Ejemplo 2.28. Calcular $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^6}{x} dx$

En este caso reconocemos

$$\int \frac{(1+\ln x)^6}{x} dx = \int (\underbrace{1+\ln x}_{g(x)})^6 \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx$$

Paso 1: hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = 1+\ln x \\ du = \dfrac{1}{x} dx \end{cases}$$

y tenemos

$$\int \left(\boxed{1+\ln x}\right)^6 \boxed{\frac{1}{x}\, dx} = \int \left(\boxed{u}\right)^6 \boxed{du}$$

Paso 2: Calculamos la integral

$$\int u^6 \, du = \frac{u^7}{7} + K$$

Paso 3: deshacemos el cambio, volvemos a sustituir $u = 1+\ln x$

$$\frac{u^7}{7} + K = \frac{(1+\ln x)^7}{7} + K$$

Así

$$\int \frac{(1+\ln x)^6}{x} dx = \frac{(1+\ln x)^7}{7} + K$$

Ejemplo 2.29. Calcular $\displaystyle\int x \sin\left(\frac{x^2+1}{2}\right) dx$

En este caso reconocemos

$$\int x \sin\left(\frac{x^2+1}{2}\right) dx = \int \sin \underbrace{\left(\frac{x^2+1}{2}\right)}_{g(x)} \underbrace{x}_{g'(x)} dx$$

Paso 1: hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = \dfrac{x^2+1}{2} \\ du = x dx \end{cases}$$

y tenemos

$$\int \sin\left(\boxed{\frac{x^2+1}{2}}\right)\ \boxed{x\ dx} = \int \sin\left(\boxed{u}\right)\ \boxed{du}$$

Paso 2: Calculamos la integral

$$\int \sin u\ du = . - \cos u + K$$

Paso 3: deshacemos el cambio, volvemos a sustituir $u = 1 + \ln x$

$$-\cos u + K = -\cos\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + K$$

Así

$$\int x \sin\left(\frac{x^2+1}{2}\right) dx = -\cos\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + K$$

NOTA: De ahora en más no haremos explícitos los pasos del procedimiento

Ejemplo 2.30. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+3}}\ (2x+1)\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= 2\sqrt{u} + K \\ &= 2\sqrt{x^2+x+3} + K \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = x^2+x+3 \\ du = (2x+1)\,dx \end{array}\right]$$

Ejemplo 2.31. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x}dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+4}{x^2+4x}dx &= \int \frac{1}{x^2+4x}\ (2x+4)\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| + K \\ &= \ln\left|x^2+4x\right| + K \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = x^2+4x \\ du = (2x+4)\,dx \end{array}\right]$$

Ejemplo 2.32. Calcular $\displaystyle\int \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x}{\sqrt{x^2+4}}dx &= \int 6\ \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx \\ &= \int 6du \\ &= 6u + K \\ &= 6\sqrt{x^2+4} + K \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = \sqrt{x^2+4} \\ du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx \end{array}\right]$$

En algunas integrales hay que hacer algunos ajustes en el integrando para obtener la derivada del cambio

Ejemplo 2.33. Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$

$$\left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = x^2+1 \\ du = \boxed{2x\ dx} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\boxed{x\ dx} \\
&= \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\boxed{2x\ dx} \qquad \text{(ajustamos el integrando)} \\
& \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\boxed{2x\ dx} \qquad \text{(aplicamos el cambio)} \\
&= \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + K \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.34. Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}dx$

$$\left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = 2x-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{u+1}{2} \\ du = \boxed{2\ dx} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x-1}\boxed{dx} &= \\
&= \int \frac{1}{2}\ x\ \sqrt{2x-1}\boxed{2\ dx} \qquad \text{(ajustamos el integrando)} \\
&= \int \frac{1}{2}\boxed{x}\sqrt{\boxed{2x-1}}\boxed{2\ dx} \qquad \text{(aplicamos el cambio)} \\
&= \int \frac{1}{2}\boxed{\frac{u+1}{2}}\sqrt{\boxed{u}}\boxed{du} \\
&= \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du \\
&= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + K \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3} + \frac{1}{10}\sqrt{(2x-1)^5} + K
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.35. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\boxed{dx} &= \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u=\sqrt{x} \\ du = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx} \end{array}\right] \\
&= \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} \qquad \text{(ajustamos el integrando)} \\
&= \int \frac{2\boxed{\sqrt{x}}}{\boxed{\sqrt{x}}+1}\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} \qquad \text{(aplicamos el cambio)} \\
&= \int \frac{2\boxed{u}}{\boxed{u}+1}\boxed{du} \\
&= 2\int \frac{u}{u+1}du \\
&= 2\int \frac{u+1-1}{u+1}du \qquad \text{(sumo y resto 1)} \\
&= 2\int \left(\frac{u+1}{u+1}-\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= 2\int \left(1-\frac{1}{u+1}\right)du \\
&= 2\left(u-\ln|u+1|\right)+K = \\
&= 2\left(\sqrt{x}-\ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right)+K
\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo, además de tener que ajustar el integrando, vamos a aplicar dos cambios de variables en forma consecutiva.

Ejemplo 2.36. Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx &= \int 2\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u=\sqrt{x} \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{array}\right] \\
&= \int 2\,\cos u\sin u du \\
&= 2\int \cos u\sin u du \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ w=\cos u \\ dw = \sin u du \end{array}\right] \\
&= 2\int w\,dw \\
&= w^2+K \\
&= \cos^2 u+K \\
&= \cos^2\sqrt{x}+K
\end{aligned}$$

Veamos ahora algunos ejemplos donde el cambio de variable no es tan evidente. Aquí la idea es intentar cambios de variables hasta obtener una integral que sea fácil de calcular.

Ejemplo 2.37. Calcular $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^6+4}dx &= \int \frac{1}{(x^3)^2+4}\, x^2\, dx \\
&= \int \frac{1}{3}\frac{1}{(x^3)^2+4}\, 3x^2\, dx \\
&= \int \frac{1}{3}\frac{1}{u^2+4}\, du \\
&= \frac{1}{6}\arctan\frac{u}{2}+K \\
&= \frac{1}{6}\arctan\frac{x^3}{2}+K
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} c.v. \\ u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.38. Calcular $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx \\
&= \int \frac{1}{u^2+1}du \\
&= \arctan u + K \\
&= \arctan(x+1)+K
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} c.v. \\ u = x+1 \\ du = dx \end{bmatrix}$$

En algunas integrales resulta más cómodo trabajar con el cambio de variable inverso

$$\underset{\text{(cambio de variable original o directo)}}{\begin{cases} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{cases}} \Leftrightarrow \underset{\text{(cambio de variable inverso)}}{\begin{cases} x = g^{-1}(u) \\ dx = \left(g^{-1}\right)'(u)\, du \end{cases}}$$

El procedimiento es el mismo, pero simplicando considerablemente las operaciones.

Ejemplo 2.39. Calcular $\int x\sqrt[3]{x-1}dx$

Primero apliquemos el cambio "directo"

$$
\begin{aligned}
\int x \sqrt[3]{x-1}\,\boxed{dx} &= \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u=\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow x-1=u^3 \Leftrightarrow x=u^3+1 \\ du=\boxed{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx} \end{array}\right] \\
&= \int 3\; x\; \sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x-1)^2}\;\boxed{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx} \qquad \text{(ajustamos el integrando)} \\
&= 3\int x\;(x-1)^3\;\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx \qquad \text{(simplificamos)} \\
&= 3\int \boxed{x}\;\left(\boxed{x-1}\right)^3 \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx} \qquad \text{(aplicamos el cambio)} \\
&= 3\int \boxed{u^3+1}\;\left(\boxed{u}\right)^3\;\boxed{du} \\
&= 3\int \left(u^6+u^3\right) du \\
&= \frac{3}{7}u^7+\frac{3}{4}u^4+K \\
&= \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+K
\end{aligned}
$$

Ahora apliquemos el cambio inverso (y se simplifican las operaciones)

$$
\begin{aligned}
\int \boxed{x}\;\boxed{\sqrt[3]{x-1}}\;\boxed{dx} &= \left[\begin{array}{lcl} c.v. & & \\ u=\sqrt[3]{x-1} & \Leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{l} x=u^3+1 \\ dx=3u^2du \end{array}} \end{array}\right] \\
&= \int \boxed{\left(u^3+1\right)}\;\boxed{u}\;\boxed{3u^2du} \\
&= 3\int \left(u^6+u^3\right) du \\
&= \frac{3}{7}u^7+\frac{3}{4}u^4+K \\
&= \frac{3}{7}u^7+\frac{3}{4}u^4+K \\
&= \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+K
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.40. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

Vamos a realizar un cambio de variable de modo de obtener una integral sin radicales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}dx \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=u^6 \\ dx=6u^5du \end{array}} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
(\text{esto hace que } x^{\frac{1}{2}} &= \left(u^6\right)^{\frac{1}{2}}=u^3 \quad \text{y} \quad x^{\frac{2}{3}}=\left(u^6\right)^{\frac{2}{3}}=u^4) \\
&= \int \frac{1}{u^3+u^4}\,6u^5du \\
&= 6\int \frac{u^3u^2}{u^3\left(1+u\right)}du \\
&= 6\int \frac{u^2}{1+u}du \\
&= 6\int \frac{u^2-1+1}{1+u}du \\
&= 6\int \frac{\left(u-1\right)\left(u+1\right)+1}{1+u}du \\
&= \int \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)du \\
&= 6\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln\left(u+1\right)\right)+K \\
&= 6\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)+K
\end{aligned}$$

2.5.2

Integración por partes.

Sabemos que la derivada de un producto **no es** el producto de la derivadas

$$\boxed{[f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)}$$

y sí es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda más la primera función por la derivada de la segunda, esto es,

$$\boxed{[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)} \qquad \text{(regla del producto)}$$

Lo mismo ocurre con la integral, **es falso** que la integral de un producto sea el producto de las integrales

$$\boxed{\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx}$$

La formulación correcta nos la proporciona la siguiente proposición

PROPOSICION 2.4. ***(Integración por partes)*** *Si f tiene derivada f' continua y g tiene una primitiva G continua se cumple que*

$$\boxed{\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx} \qquad \textit{(fórmula de integración partes)} \tag{2.-93}$$

Demostración. Bastará con probar que la derivada del resultado es el integrando

derivamos

$$\int \underline{f(x)g(x)}\, dx = \boxed{f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx}$$

Si derivamos tenemos

$$\left[f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx\right]' = \underbrace{[f(x)G(x)]'}_{(*)} - \underbrace{\left[\int f'(x)G(x)dx\right]'}_{(**)} \tag{2.-93}$$

$(*)$ Por un lado, por la derivada del producto

$$[f(x)G(x)]' = f'(x)G(x) + f(x)\underbrace{G'(x)}_{=g(x)} \qquad \text{(por ser } G \text{ unaprimitiva de } g\text{)} \tag{2.-93}$$

$(**)$ por otro lado

$$\left[\int f'(x)G(x)dx\right]' = f'(x)G(x) \tag{2.-93}$$

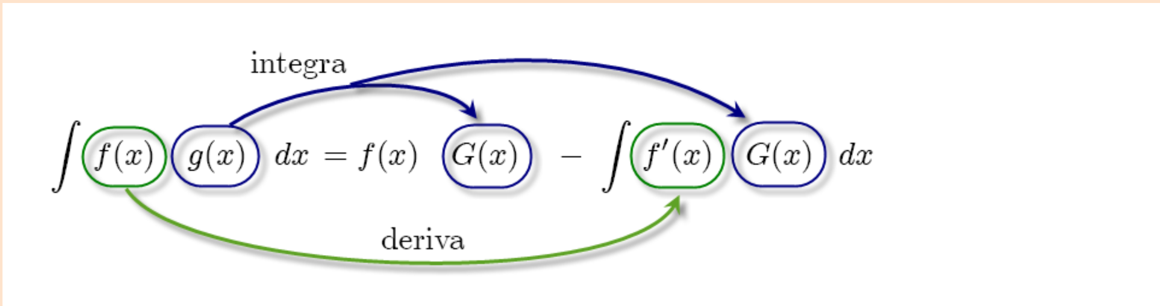
sustituyendo (2.5.2) y (2.5.2) en (2.5.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\left[f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx\right]' &= f'(x)G(x) + f(x)g(x) - f'(x)G(x) = \\ &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

■

Método de integración por partes

En la fórmula de integración por partes la función f se deriva (se calcula f'), mientras que la función g se integra (se determina una primitiva G)



En la práctica suele utilizarse la siguiente notación.
Se le llama u a la función que vamos a derivar y se le llama v' a la función que vamos a integrar

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\ \underbrace{g(x)}_{v'}\, dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx \qquad (2.\text{-}95)$$

y por lo tanto

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u = f(x) & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = f'(x) \\ v' = g(x) & \xrightarrow{\text{integro}} & v = G(x) \end{array}}$$

al sustituir en (2.5.2) se tiene

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\ \underbrace{g(x)}_{v'}\, dx = \underbrace{f(x)}_{u}\ \underbrace{G(x)}_{v} - \int \underbrace{f'(x)}_{u'}\ \underbrace{G(x)}_{v}\, dx \qquad (2.\text{-}95)$$

es decir que se tiene la fórmula

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v} \qquad (2.\text{-}95)$$

que es sencilla de recordar.
La fórmula de integración partes expresa la integral original en términos de una nueva integral

$$\underbrace{\int uv'}_{\text{intregal original}} = uv - \underbrace{\int u'v}_{\text{nueva integral}}$$

NOTA: El éxito en la aplicación del método de intergación por partes depende de una buena elección de u y de v' de modo que la nueva integral sea más fácil de calcular que la integral original. Hay que practicar el método lo suficiente como para desarrollar la capacidad de tener un buen criterio de elección.

A continuación darenos una serie de ejemplos. Se sugiere tomar lápiz y papel, y hacer cada ejemplo por sus propios medios, antes de leer el dasarrollo del mismo.

Ejemplo 2.41. Calcular $\int e^x (x+1)\, dx$

Para aplicar integración por partes tenemos que escoger la función u que vamos a derivar y la función v' que vamos a integrar. Hay varias manera de hacerlo.
Una primera elección es la siguiente:

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{(x+1)}_{v'}\, dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^x & \xrightarrow{\text{derivo}} \quad u' = e^x \\ v' = x+1 & \xrightarrow{\text{integro}} \quad v = x^2 + x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene

$$\int \underbrace{u}_{e^x} \underbrace{v'}_{x+1} = \underbrace{u}_{e^x} \underbrace{v}_{x^2+x} - \int \underbrace{u'}_{e^x} \underbrace{v}_{x^2+x}$$

esto es

$$\int e^x (x+1)\, dx = e^x \left(x^2+x\right) - \int e^x \left(x^2+x\right) dx$$

La integral que resulta

$$\int e^x \left(x^2+x\right) dx$$

es más complicada que la original, por lo cual se descarta esta elección.
Otra elección posible es

$$\int e^x (x+1)\, dx = \int \underbrace{(x+1)}_{u} \underbrace{e^x}_{v'}\, dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = x+1 & \xrightarrow{\text{derivo}} \quad u' = 1 \\ v' = e^x & \xrightarrow{\text{integro}} \quad v = e^x \end{cases}$$

aplicando la fórmula (2.5.2) de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{x+1} \underbrace{v'}_{e^x} = \underbrace{u}_{x+1} \underbrace{v}_{e^x} - \int \underbrace{u'}_{1} \underbrace{v}_{e^x}$$

esto es

$$\int (x+1)\, e^x dx = (x+1)\, e^x - \int e^x dx \tag{2.-95}$$

Ahora sí la segunda integral es sencilla

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{2.-95}$$

Si sustituimos (2.41) en (2.41) se tiene

$$\int (x+1)\, e^x dx = (x+1)\, e^x - e^x + K \qquad \text{(simplificando)}$$

$$\int (x+1)\, e^x dx = xe^x + K$$

Se puede comprobar el resultado derivando el resultado y obteniendo el integrando:

$$(xe^x + K)' = e^x + xe^x = (x+1)\, e^x$$

Un tipo de funciones que "invitan" a ser derivadas en el método de integración por partes son las inversas de las funciones trigonométricas e hipérbólicas y las funciones logarítmicas, ya que su derivada son funciones algebraicas

Ejemplo 2.42. Calcular $\int (6x-8) \ln x dx$

$$\int (6x-8) \ln x dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{(6x-8)}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \ln x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 6x-8 & \xrightarrow{\text{integro}} & v = \int (6x-8)\, dx = 3x^2 - 8x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\ln x} \underbrace{v'}_{6x-8} = \underbrace{u}_{\ln x} \underbrace{v}_{3x^2-8x} - \int \underbrace{u'}_{\frac{1}{x}} \underbrace{v}_{3x^2-8x}$$

esto es

$$\int \ln x \ \ (6x-8)\, dx = \ln x \ \ \left(3x^2 - 8x\right) - \int \underbrace{\frac{1}{x} \ \left(3x^2 - 8x\right)}_{3x-8} dx \qquad (2.\text{-}95)$$

la segunda integral es sencilla

$$\int (3x-8)\, dx = 3\frac{x^2}{2} - 8x + C \qquad (2.\text{-}95)$$

Si sustituimos (2.42) en (2.42) se tiene

$$\int \ln x \ \ (6x-8)\, dx = \ln x \ \ \left(3x^2 - 8x\right) - \frac{3}{2}x^2 + 8x + K$$

Verificación:

$$\begin{aligned} \left[\ln x \quad \left(3x^2 - 8x\right) - \frac{3}{2}x^2 + 8x + K\right]' &= \frac{1}{x}\left(3x^2 - 8x\right) + \ln x \quad (6x-8) - 3x + 8 \\ &= \ln x \quad (6x-8) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.43. Calcular $\int x \arctan x dx$

$$\int x \arctan x dx = \int \underbrace{\arctan x}_{u} \ \underbrace{x}_{v'} \ dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \arctan x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v' = x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\arctan x} \underbrace{v'}_{x} = \underbrace{u}_{\arctan x} \underbrace{v}_{\frac{x^2}{2}} - \int \underbrace{u'}_{\dfrac{1}{x^2+1}} \underbrace{v}_{\frac{x^2}{2}}$$

esto es

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \tag{2.-97}$$

la segunda integral es sencilla

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \quad 1 - \frac{1}{x^2+1} \quad dx = x - \arctan x + C \tag{2.-97}$$

Si sustituimos (2.43) en (??) se tiene

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + K$$

La técnica de integración por partes es particularmente eficaz para integrandos donde aparecen productos de polinomios por funciones exponenciales o funciones trigonométricas. En ests caso se deriva el polinomio

Ejemplo 2.44. Calcular $\int \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x dx$

$$\int \underbrace{x^2 - 2x + 4}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = x^2 - 2x + 4 & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = 2x - 2 \\ v' = e^x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = e^x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{x^2-2x+4} \underbrace{v'}_{e^x} = \underbrace{u}_{x^2-2x+4} \underbrace{v}_{e^x} - \int \underbrace{u'}_{2x-2} \underbrace{v}_{e^x}$$

esto es

$$\int \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x dx = \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x - \int (2x-2) e^x dx \tag{2.-97}$$

para resolver la segunda integral aplicamos nuevamente integración partes

$$\int \underbrace{2x - 2}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = 2x - 2 & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = 2 \\ v' = e^x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = e^x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{2x-2} \underbrace{v'}_{e^x} = \underbrace{u}_{2x-2} \underbrace{v}_{e^x} - \int \underbrace{u'}_{2} \underbrace{v}_{e^x}$$

esto es

$$\begin{aligned} \int (2x-2)\, e^x dx &= (2x-2)\, e^x - \underbrace{\int 2e^x dx}_{2e^x} \\ &= (2x-2)\, e^x - 2e^x + C = (2x-4)\, e^x + C \end{aligned} \quad (2.\text{-}97)$$

Si sustituimos (2.-97) en (2.44) se tiene

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x dx &= \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x - (2x-4)\, e^x + K \\ &= \left(x^2 - 4x + 8\right) e^x + K \end{aligned}$$

esto es

$$\int \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x dx = \left(x^2 - 4x + 8\right) e^x + K$$

Verificación:

$$\left[\left(x^2 - 4x + 8\right) e^x\right]' = (2x-4)\, e^x + \left(x^2 - 4x + 8\right) e^x = \left(x^2 - 2x + 4\right) e^x$$

Ejemplo 2.45. Calcular $\int x^2 \cos x dx$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = x^2 & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = 2x \\ v' = \cos x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = \sin x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{x^2} \underbrace{v'}_{\cos x} = \underbrace{u}_{x^2} \underbrace{v}_{\sin x} - \int \underbrace{u'}_{2x} \underbrace{v}_{\sin x}$$

esto es

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \quad (2.\text{-}99)$$

para resolver la segunda integral aplicamos nuevamente integración partes

$$\int \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = 2x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = 2 \\ v' = \sin x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = -\cos x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{2x}\underbrace{v'}_{\sin x} = \underbrace{u}_{2x}\underbrace{v}_{-\cos x} - \int \underbrace{u'}_{2}\underbrace{v}_{-\cos x}$$

esto es

$$\begin{aligned} \int 2x \sin x dx &= -2x\cos x + 2\underbrace{\int \cos x dx}_{\sin x} \\ &= -2x\cos x + 2\sin x + C \end{aligned} \tag{2.-99}$$

Si sustituimos (2.-99) en (2.45) se tiene

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + K$$

En algunas integrales, al aplicar integración por partes, llegamos a una fórmula recurrente donde debemos despejar la integral que buscamos

Ejemplo 2.46. Calcular $\int e^x \cos x dx$

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'}\, dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = e^x \\ v' = \cos x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = \sin x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{e^x}\underbrace{v'}_{\cos x} = \underbrace{u}_{e^x}\underbrace{v}_{\sin x} - \int \underbrace{u'}_{e^x}\underbrace{v}_{\sin x}$$

esto es

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \tag{2.-99}$$

para resolver la segunda integral aplicamos nuevamente integración partes

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\, dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = e^x \\ v' = \sin x & \xrightarrow{\text{integro}} & v = -\cos x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{e^x}\underbrace{v'}_{\sin x} = \underbrace{u}_{e^x}\underbrace{v}_{-\cos x} - \int \underbrace{u'}_{e^x}\underbrace{v}_{-\cos x}$$

esto es

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \tag{2.-99}$$

Si sustituimos (2.46) en (2.46) se tiene

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Pasando la integral del segundo miembro al primer miembro de la igualdad

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

de donde

$$\int e^x \cos x dx = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + K$$

Verificación:

$$\left[e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + K\right]' = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + e^x \frac{\cos x - \sin x}{2} = e^x \cos x$$

Ejemplo 2.47. Calcular $\int \sin^3 x dx$

Usando la identidad trivial:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \ . \ \sin x$$

tenemos

$$\int \sin^3 x dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u} \ \underbrace{\sin x}_{v'} \ dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \sin^2 x & \overset{\text{derivo}}{\longrightarrow} & u' = 2\sin x \cos x \\ v' = \sin x & \overset{\text{integro}}{\longrightarrow} & v = -\cos x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\sin^2 x}\underbrace{v'}_{\sin x} = \underbrace{u}_{\sin^2 x}\underbrace{v}_{-\cos x} - \int \underbrace{u'}_{2\sin x \cos x}\underbrace{v}_{-\cos x}$$

esto es

$$\int \sin^3 x dx = -\sin^2 x \ \cos x + 2\int \sin x \cos^2 x dx \tag{2.-99}$$

en la segunda integral usamos la identidad

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

y resulta

$$\int \sin x \cos^2 x dx = \int \sin x \left(1 - \sin^2 x\right) dx = \int \sin x dx - \int \sin^3 x dx \tag{2.-99}$$

Si sustituimos (2.47) en (2.47) se tiene

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= -\sin^2 x \ \cos x + 2\left(\int \sin x dx - \int \sin^3 x dx\right)\\ &= -\sin^2 x \ \cos x + 2\int \sin x dx - 2\int \sin^3 x dx\end{aligned}$$

Pasando la integral del segundo miembro al primer miembro de la igualdad

$$3\int \sin^3 x dx = -\sin^2 x \ \cos x + 2\underbrace{\int \sin x dx}_{-\cos x}$$

de donde

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{\sin^2 x \ \cos x}{3} - \frac{2}{3}\cos x + K$$

Verificación :

$$\begin{aligned}\left[-\frac{\sin^2 x \ \cos x}{3} - \frac{2}{3}\cos x + K\right]' &= -\frac{2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x}{3} + \frac{2}{3}\sin x\\ &= -\frac{2\sin x\left(1-\sin^2 x\right) - \sin^3 x}{3} + \frac{2}{3}\sin x = \sin^3 x\end{aligned}$$

Segunda forma de resolverla: La integral también se puede resolver utilizando la técnica de sustitución o cambio de variable.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx \qquad \left(\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\right)\\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ u = \cos x \\ du = -\sin x dx \Leftrightarrow -du = \sin x dx \end{array}\right]\\ &= -\int \left(1-u^2\right) du = -u + \frac{u^3}{3} + K = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + K\\ &= -\cos x + \frac{\cos^2 x \cos x}{3} + K = -\cos x + \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{3} + K\\ &= -\frac{\sin^2 x \ \cos x}{3} - \frac{2}{3}\cos x + K\end{aligned}$$

obteniendo el mismo resultado.

La técnica de integración por partes se puede aplicar a integrandos que constan de un solo factor.

Ejemplo 2.48. Calcular $\int \ln x \ dx$.

Usando la identidad trivial:

$$\ln x = \ln x \ . \ 1$$

tenemos

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \ \underbrace{1}_{v'} \ dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \ln x \xrightarrow{\text{derivo}} u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 \xrightarrow{\text{integro}} v = x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\ln x}\underbrace{v'}_{1} = \underbrace{u}_{\ln x}\underbrace{v}_{x} - \int \underbrace{u'}_{\frac{1}{x}}\underbrace{v}_{x}$$

esto es

$$\int \ln x dx = \ln x \;\; x - \int \underbrace{\frac{1}{x}\, x}_{1} dx \qquad (2.\text{-}108)$$

la segunda integral es sencilla

$$\int 1dx = x + C \qquad (2.\text{-}108)$$

Si sustituimos (2.48) en (2.48) se tiene

$$\boxed{\int \ln x dx = \ln x \;\; x - x + K = x\left(\ln x \;\; - 1\right) + K}$$

Verificación:

$$\left[x\left(\ln x \;\; - 1\right)\right]' = \left(\ln x \;\; - 1\right) + x\frac{1}{x} = \ln x$$

Ejemplo 2.49. Calcular $\int \cos^2 x dx$
Usando la identidad trivial:

$$\cos^2 x = \cos x \ . \ \cos x$$

tenemos

$$\int \cos^2 x dx = \int \underbrace{\cos x}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \cos x \xrightarrow{\text{derivo}} u' = -\sin x \\ v' = \cos x \xrightarrow{\text{integro}} v = \sin x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\cos x}\underbrace{v'}_{\cos x} = \underbrace{u}_{\cos x}\underbrace{v}_{\sin x} - \int \underbrace{u'}_{-\sin x}\underbrace{v}_{\sin x}$$

esto es

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \;\; \sin x + \int \sin^2 x dx \qquad (2.\text{-}108)$$

A partir de la relación fundamental de la trigonometría

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

se tiene que
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
luego
$$\int \sin^2 x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \underbrace{\int 1 dx}_{x+C} - \int \cos^2 x dx \tag{2.-108}$$
Si sustituimos (2.49) en (2.49) se tiene
$$\int \cos^2 x dx = \cos x \ \sin x + x + C - \int \cos^2 x dx$$
Pasando la integral del segundo miembro al primer miembro de la igualdad
$$2\int \cos^2 x dx = \cos x \ \sin x + x + C$$
de donde
$$\int \cos^2 x dx = \frac{\cos x \ \sin x}{2} + \frac{x}{2} + K$$
Verificación:
$$\begin{aligned}\left[\frac{\cos x \ \sin x}{2} + \frac{x}{2} + K\right]' &= \frac{-\sin x \sin x + \cos x \cos x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\overbrace{-\sin^2 x + \cos^2 x}^{-1+\cos^2 x}}{2} + \frac{1}{2} = \cos^2 x\end{aligned}$$
Nota: La integral también se puede resolver utilizando las siguientes fórmulas trigonométricas:
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \sin 2x = 2\cos x \sin x$$
Luego
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int \cos 2x dx}_{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + K \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{2\cos x \sin x}{4} + K = \frac{x}{2} + \frac{\cos x \ \sin x}{2} + K\end{aligned}$$

Ejemplo 2.50. Calcular $\int \arctan x \ dx$.
Usando la identidad trivial:
$$\arctan x = \arctan x \ . \ 1$$
tenemos
$$\int \arctan x dx = \int \underbrace{\arctan x}_{u} \ \underbrace{1}_{v'} \ dx$$
de donde
$$\begin{cases} u = \arctan x & \overset{\text{derivo}}{\longrightarrow} \quad u' = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v' = 1 & \overset{\text{integro}}{\longrightarrow} \quad v = x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\arctan x}\underbrace{v'}_{1} = \underbrace{u}_{\arctan x}\underbrace{v}_{x} - \int \underbrace{u'}_{\frac{1}{x^2+1}}\underbrace{v}_{x}$$

esto es

$$\int \arctan x dx = \arctan x \;\; x - \int \frac{x}{x^2+1}dx \tag{2.-112}$$

la segunda integral se resuelve aplicando cambio de variables (ver ejercicio 2.33 pag. 27)

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C \tag{2.-112}$$

Si sustituimos (2.50) en (2.50) se tiene

$$\boxed{\int \arctan x dx = \arctan x \;\; x - \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+K}$$

Verificación:

$$\left[\arctan x \;\; x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+K\right]' = \frac{1}{x^2+1}x + \arctan x - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \arctan x$$

Finalmente veamos algunos ejemplos donde se aplican los dos métodos.

Ejemplo 2.51. Calcular $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'}dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = x & \overset{\text{derivo}}{\longrightarrow} & u' = 1 \\ v' = \dfrac{1}{\cos^2 x} & \overset{\text{integro}}{\longrightarrow} & v = \tan x \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{x}\underbrace{v'}_{\frac{1}{\cos^2 x}} = \underbrace{u}_{x}\underbrace{v}_{\tan x} - \int \underbrace{u'}_{1}\underbrace{v}_{\tan x}$$

esto es

$$\int x\frac{1}{\cos^2 x}dx = x \;\; \tan x - \int \tan x dx \tag{2.-112}$$

la segunda integral la resolvemos aplicando un cambio de variable

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x dx \qquad \begin{bmatrix} c.v. \\ u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{bmatrix} \\ &= -\int \frac{1}{u}du = -\ln u + C = -\ln(\cos x) + C \end{aligned} \tag{2.-112}$$

Si sustituimos (2.-112) en (2.51) se tiene

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \ \tan x + \ln(\cos x) + K$$

Verificación :

$$[x \ \tan x + \ln(\cos x) + K]' = \tan x + x\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}\sin x = \frac{x}{\cos^2 x}$$

Ejemplo 2.52. Calcular $\int x^2 \arctan x dx$

$$\int x^2 \arctan x dx = \int \underbrace{\arctan x}_{u} \ \underbrace{x^2}_{v'} \ dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = \arctan x & \xrightarrow{\text{derivo}} & u' = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v' = x^2 & \xrightarrow{\text{integro}} & v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{\arctan x} \ \underbrace{v'}_{x^2} = \underbrace{u}_{\arctan x} \ \underbrace{v}_{\frac{x^3}{3}} - \int \underbrace{u'}_{\frac{1}{x^2+1}} \ \underbrace{v}_{\frac{x^3}{3}}$$

esto es

$$\int \arctan x \ \ x^2 \ dx = \arctan x \ \ \frac{x^3}{3} - \int \underbrace{\frac{1}{x^2+1}\frac{x^3}{3}}_{\frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2+1}} dx \tag{2.-112}$$

la segunda integral la resolvemos aplicando un cambio de variable

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{x^2+1} \ x \ dx \qquad \begin{bmatrix} c.v. \\ u = x^2 \\ du = 2xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = xdx \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{u}{u+1} \ \frac{1}{2}du = \frac{1}{6}\int \frac{u}{u+1} \ du \\ & \left(\begin{matrix} \text{modificamos el} \\ \text{integrando} \end{matrix} : \frac{u}{u+1} = \frac{u+1-1}{u+1} = \frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1} \right) \\ &= \frac{1}{6}\int 1 - \frac{1}{u+1} \ du = \frac{1}{6}(u - \ln(u+1)) + C = \frac{1}{6}\left(x^2 - \ln\left(x^2+1\right)\right) + C \end{aligned} \tag{2.-114}$$

Si sustituimos (2.-114) en (2.52) se tiene

$$\int x^2 \arctan x \ dx = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{6} + K$$

Verificación :

$$\left[\frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{6} + K\right]' = x^2 \arctan x + \frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{x}{x^2+1} = x^2 \arctan x$$

Ejemplo 2.53. Calcular $\int e^{\sqrt{x}}dx$

Ahora comenzamos con un cambio de variable, y luego aplicamos partes.

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}dx &= 2\int te^t dt \qquad \left[\begin{array}{l} c.v. \\ t=\sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \qquad (\text{con } x \geq 0) \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2tdt = dx \end{array}\right] \\
&= 2\int \underbrace{t}_{u}\ \underbrace{e^t}_{v'}\,dt \qquad \begin{cases} u = t & \xrightarrow{\text{derivo}} \quad u' = 1 \\ v' = e^t & \xrightarrow{\text{integro}} \quad v = e^t \end{cases} \\
&= 2\left(te^t - \int e^t dt\right) \\
&= te^t - 2e^t + K \\
&= \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + K
\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Ejemplo 2.54. Calcular $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^2}}_{v'}\ dx$$

de donde

$$\begin{cases} u = x & \xrightarrow{\text{derivo}} \quad u' = 1 \\ v' = \dfrac{x}{(x^2+1)^2} & \xrightarrow{\text{integro}} \quad v = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+1} \end{cases} \qquad (\text{cambio de variable} \quad u = x^2+1)$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int \underbrace{u}_{x}\ \underbrace{v'}_{\frac{x}{(x^2+1)^2}} = \underbrace{u}_{x}\ \underbrace{v}_{\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+1}} - \int \underbrace{u'}_{1}\ \underbrace{v}_{\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+1}}$$

esto es

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx \qquad (2.\text{-}119)$$

la segunda integral es básica (tabla)

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C \qquad (2.\text{-}119)$$

Si sustituimos (2.54) en (2.54) se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{-1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + K$$

Verificación :

$$\left[\frac{-1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+K\right]'=\frac{-1}{2}\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

Por lo general las integrales con radicales no son sencillas de resolver.

Ejemplo 2.55. Calcular $\int\sqrt{1-x^2}dx$

Primera forma de resolverla: Observemos que

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luego

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{2.-119}$$

La primera integral es básica (tabla)

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C \tag{2.-119}$$

Para calcular la segunda integral aplicamos la técnica de integración por partes

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{v'}dx$$

de donde

$$\begin{cases} u=x & \xrightarrow{\text{derivo}} \quad u'=1 \\ v'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \xrightarrow{\text{integro}} \quad v=\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2} \qquad \text{(cambio de variable} \quad u=1-x^2) \end{cases}$$

aplicando la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\int\underbrace{u}_{x}\underbrace{v'}_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=\underbrace{u}_{x}\underbrace{v}_{-\sqrt{1-x^2}}-\int\underbrace{u'}_{1}\underbrace{v}_{-\sqrt{1-x^2}}$$

esto es

$$\int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int\sqrt{1-x^2}dx \tag{2.-119}$$

Si sustituimos (2.55) y (2.55) en (2.55) se tiene

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\arcsin x+C+x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx$$

Pasando la integral del segundo miembro al primer miembro de la igualdad

$$2\int\sqrt{1-x^2}dx=\arcsin x+C+x\sqrt{1-x^2}$$

de donde

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + K$$

Verificación:

$$\left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + K\right]' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

Segunda forma de resolverla: La integral anterior también se puede resolver utilizando un cambio de variable adecuado. Como se estudiará con más detalle en el práctico, estas integrales con radicales se resuelven utilizando el siguiente **cambio de variable trigonométrico**

cambio directo

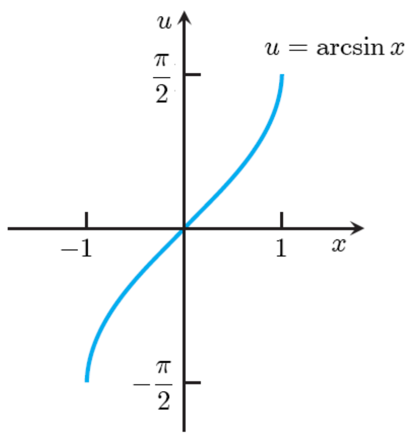
$$\left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{array}\right]$$

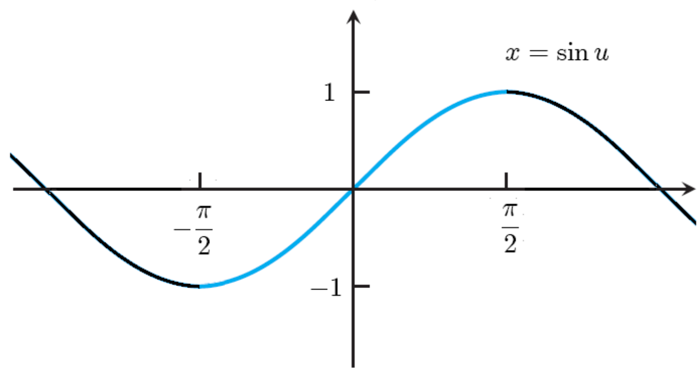
$$-1 < x < 1$$

cambio inverso

$$\left[\begin{array}{l} x = \sin u \\ dx = \cos u dx \end{array}\right]$$

$$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$





Si aplicamos el cambio directo (hay que ajustar el integrando) y se tiene:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \left(1-x^2\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(1-\sin^2 u\right) du = \int \cos^2 u du$$

y si aplicamos el cambio inverso:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\ \cos u du = \int |\cos u|\ \cos u du = \int \cos^2 u du \qquad (\cos u > 0 \text{ pues } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$$

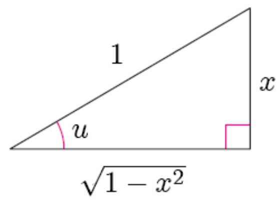
y como era de esperar, se llega a la misma integral. Pero esta integral ya fue resuelta en el ejemplo 2.49 pag. 2.49 con lo cual

$$\int \cos^2 u du = \frac{\cos u\ \sin u}{2} + \frac{u}{2} + K \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{1-x^2}\ x}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + K$$

$(*)$ Observar que siendo $x = \sin u$ se tiene que $x^2 = \sin^2 u$ y como $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ se deduce que $x^2 + \cos^2 u = 1$, de donde

$$\cos u = \sqrt{1-x^2} \qquad (\cos u > 0 \text{ pues } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2})$$

Otra forma de deducir lo anterior, es usar trigonometría básica:



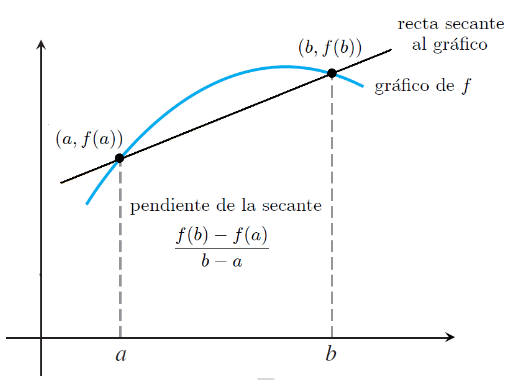
$$\begin{cases} \sin u = \dfrac{cat.opt.}{hip.} = x \\[2ex] \cos u = \dfrac{cat.ady.}{hip.} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

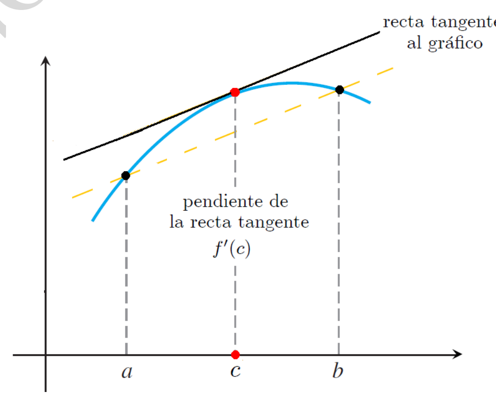
Teorema del valor medio

Vamos a recordar el Teorema del valor medio de Lagrange para derivadas, que se estudia en los cursos pre-universitarios y fue utilizado en la Proposición 2.1 (pag. 5).

Joseph-Louis Lagrange
(1736 - 1813)

La interpretación geométrica de este importante resultado es fácil de enteder.
Si consideramos el gráfico de una función f continua en un intervalo $[a, b]$, siempre existe al menos un punto c en dicho intervalo donde la recta tangente es paralela a la recta secante





y como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, resulta que

$$\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendiente de la secante}} = \underbrace{f'(c)}_{\text{pendiente de la tangente}}$$

El enunciado es

TEOREMA 2.1. ***(del valor medio de Lagrange para derivadas).***
Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

o en forma equivalente

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$