MAT023 - Transformaciones Lineales

¿Qué es una Transformación Lineal?

Diremos que una Transformación Lineal será una función que lleva los elementos de un subespacio vectorial U hacia otro subespacio V, siempre y cuando cumpla la siguiente regla:

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$$

Esta regla debe cumplirse para cualquier elemento $u \in U$, $v \in U$ y $\alpha \in \mathbb{B}$ para que la función sea una Transformación Lineal. Sumado a esto, podemos hacer las siguientes observaciones:

1) Sean U y V espacios vectoriales cualquiera. Considere la función $T : U \rightarrow V$ definida por $T(u) = 0$, para cada $u \in U$

2) Sean U y V espacios vectoriales cualquiera. Considere la función identidad a $Id : U \rightarrow U$ definida por $Id(u) = u$, para cada $e \in U$.

3) El conjunto de todas las Transformaciones Lineales T de U se anota con el símbolo $L_{\mathbb{K}}(U, V)$, esto es:

$$L_{\mathbb{K}}(U, V) = \{T : U \rightarrow V \mid \text{T es lineal}\}$$

4) Con las operaciones usuales de funciones $L_{\mathbb{K}}(U, V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

5) La composición entre Transformaciones Lineales tambíen es una Transformación Lineal

Teorema de Existencia y Unicidad

Sean U y V espacios vectoriales sobre K con Dim $U < \infty$. Suponga que $\mathcal{B} = \{u1, u2, ...un\}$ es una base de U y que $v_1, v_2, ...v_n$ son n vectores cualquiera en V, entonces existe una única Transformación Lineal $T : U \rightarrow V$ tal que:

$$T(u_)i = v_i, \forall i = 1, 2, ...n.$$

Ejemplo: Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función definida a partir de la relación:

$$T(1, -2, 1) = (1, 0)$$
$$T(-2, 1, 0) = (-1, 1)$$
$$T(1, 0, 0) = (0, -2)$$

¿Es T definida de este modo una Transformación Lineal? En caso afirmativo, hallar una fórmuña explícita para T.

Desarrollo: Asumiremos que es una Transformación Lineal, de esta forma, al generarse cualquier inconsistencia, sabremos si realmente es o no es una T.L. Luego, cómo nuestro espacio de partida es $\mathbb{R}^3$ definimos las cordenadas de dicho espacio como {x,y,z}. Para resolver este ejercicio nosotros necesitamos saber cómo la Transformación Lineal toma cada una de estas coordenadas y las lleva al espacio de $\mathbb{R}^2$, oséa nuestro espacio de llegada.

Por el teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que solo una función nos dará esas coordenadas de salida para esas coordenadas de llegada. Entonces en la práctica debemos buscar cada $T(u_i) = v_i$, siendo cada u_i una coordenada del espacio de salida (para este caso {x,y,z}).

Luego, como las Transformaciones Lineales son distribuitivas por definición, podemos reescribir las transformaciones de la siguiente manera:

1) $T(1, -2, 1) = T(1, 0, 0) + T(0, -2, 0) + T(0, 0, 1)$
2) $T(-2, 1, 0) = T(-2, 0, 0) + T(0, 1, 0) + T(0, 0, 0)$

Asímismo, podemos sacar las constantes de cada uno de los vectores, para así poder resolver el sistema. Empezando por la primera transformación entregada:

$$T(1,-2,1) = T(1,0,0) + T(0,-2,0) + T(0,0,1)$$
$$T(1,-2,1) = T(1,0,0) + (-2) * T(0,1,0) + T(0,0,1)$$

Como ya sabemos que el resultado de $T(1,0,0) = (0,-2)$

$$T(1,-2,1) = (0,-2) + (-2)T(0,1,0) + T(0,0,1)$$
$$(1,0) = (0,-2) + (-2)T(0,1,0) + T(0,0,1)$$
$$(1,2) = (-2)T(0,1,0) + T(0,0,1)$$

Ahora, trabajemos con la otra transformación:

$$T(-2,1,0) = T(-2,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,0)$$
$$T(-2,1,0) = T(-2,0,0) + T(0,1,0)$$
$$T(-2,1,0) = (-2)T(1,0,0) + T(0,1,0)$$
$$(-1,1) = (-2)(0,-2) + T(0,1,0)$$
$$(-1,1) = (0,4) + T(0,1,0)$$
$$(-1,-3) = T(0,1,0)$$

Finalmente, como ya tenemos $T(1,0,0)$ y $T(0,1,0)$, solo nos faltaría $T(0,0,1)$

$$(1,2) = (-2)T(0,1,0) + T(0,0,1)$$
$$(1,2) = (-2)(-1,-3) + T(0,0,1)$$
$$(1,2) = (2,6) + T(0,0,1)$$
$$(-1,-4) = T(0,0,1)$$

Entonces habremos hallado la función que define la Transformación Lineal a través de las propiedades préviamente descritas, resultándonos:

$$T(1,0,0) = \text{(0,-2)}$$
$$T(0,1,0) = \text{(-1,-3)}$$
$$T(0,0,1) = \text{(-1,-4)}$$

Descrito de otra forma más explícita, tendremos que para ciertas cordenadas en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\{x,y,z\}$, la Transformación Lineal T se definirá a través de la siguiente fórmula:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que T}(x,y,z) = \text{(-y-z,-2x-3y-4z)}$$

Finalmente, como el sistema es consistente a través del uso de las propiedades de Transformación Lineal, podemos aseverar que es una T.L.

Por supuesto, las Transformaciones Lineales tiene dos características importantes que permiten identificarlas como tal. Sean U y V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T \in L_{\mathbb{K}}(U, V)$. Se definen los siguientes conjuntos:

Kernel o Núcleo

Definición: El núcleo corresponde al conjunto de elementos dentro de U tales que el resultado de su transformación resulta en el $0V$ (Vector Nulo). Es decir:

$$\ker T = \{u \in U : T(u) = 0\} \subseteq U$$

Por supuesto, implica que el Vector Nulo está dentro del conjunto V.

Imagen

Definición: La imagen corresponde al conjunto de elementos dentro de V tales que exista un elemento u dentro del espacio U que al aplicarsele la Transformación Lineal, resulten en los elementos de V. Es decir:

$$\text{Im } T = \{v \in V : \exists u \in U, T(u) = v\} \subseteq V$$

Ejemplo: Considere la Transformación Lineal $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida:

$$\mathrm{T} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + y - w, x - y + z)$$

Calcule el Núcleo e Imagen de T.

Desarrollo: Para hallar el núcleo primero, debemos encontrar los valores de $\{x, y, z, w\}$ tales que su Transformación resulten en el vector $(0, 0)$. Entonces realizamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} (x + y - w) &= 0 \\ (x - y + z) &= 0 \end{aligned}$$

Al desarrollar el sistema de ecuaciones como lo haríamos normalmente, obtendremos que:

$$\begin{aligned} w &= -x - y \\ z &= -x + y \end{aligned}$$

Entonces tendremos que el Kernel será cualquier elemento del conjunto U simpre y cuando $w = -x - y \wedge z = -x + y$, para cualquier x e y. Escrito de forma Matemática:

$$\ker T = \{x, y, z, w \in U : z = -x + y, w = -x - y\} \subseteq U$$

Luego, como la función de la Transformación ya está definida, la imagen resulta de la siguiente manera:

$$\operatorname{Im} T = \{v_1, v_2 \in V : v_1 = x + y - w, v_2 = z = x - y - z\} \subseteq V$$