Notas sobre polinomios ortogonales

Emilio Pereyra

June 2, 2024

This documents reflects the path I took in order to comprehend the orthogonal polynomials. So far, we start reviewing some of the basics of real functions analysis, towards the concepts of measure theory that Lebesgue integration requieres. Immediatly after, Lebesgues integral.

1 Real Numbers

Definition 1.1 *Infimum and supremum:*
Let $A \subset \mathbb{R}$, the minimum upper bound of A is called supremum. Symetrically, the maximum lower bound of A is called infimum.

We say that the real number s is the supremum of A if and only if:

1) Every $x \in A$ verifies that $x \leq s$.
2) For every number $\varepsilon > 0$, exists at least an $x \in A$ such that $x > s - \varepsilon$.

These two properties are symetrically defined for infimum.

Definition 1.2 *Intervals:*
Given two real numbers a and b such that $a \leq b$. There are four intervals with left end a, and right end b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Proposition 1.1 *The intersection between two intervals it's an interval. The difference of two intervals is the union of two disjointed intervals.*

Definition 1.3 *The measure or longitude of any interval with ends a and b, is the number $b - a$.*

Definition 1.4 *To indicate that the set $A \subset \mathbb{R}$ has no upper bound, we say:*

$$\sup A = +\infty$$

Symetrically when we have no lower bound, we say:

$$\inf A = -\infty$$

Using the definition above, and convening that for every $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$, it's a fact that every non empty $A \subset \mathbb{R}$, has a supremum and an infimum. The set $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ it's called the extended real line. We agree that:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \tag{1}$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \tag{2}$$

$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) \quad = 0 \tag{3}$$

$$(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty \tag{4}$$

$$(+\infty) * (-\infty) = (-\infty) * (+\infty) = -\infty \tag{5}$$

if x is a real number,

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \ , \ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$x \cdot (+\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ \mp\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.1 Superior limit, inferior limit

Definition 1.5 *The inferior limit ℓ and the superior limit $\mathbb{L}$ of a sequence a_k of real real numbers, are defined using the following formulas:*

$$\begin{aligned} \ell \lim_{k\to\infty} \inf a_k &= \sup_j (\inf_{k\geq j} a_k) \\ \mathcal{L} = \lim_{k\to\infty} \sup b_k &= \inf_j (\sup_{l\geq j} a_k) \end{aligned} \tag{6}$$

From the definition, the two properties that characterize the element $\mathcal{L} \in \widehat{\mathbb{R}}$ are easily deduced; namely

1) For each $\beta > \mathcal{L}$, exists a positive integer j such that if $k \geq j$ then $a_k < \beta$;
2) For each $\alpha < \mathcal{L}$,and for every positive integer j, there exists an integer $k \geq j$, such that $\alpha < a_k$.

First propertie shows that if $\beta > \mathcal{L}$, then $a_k < \beta$ for k big enough; The second one, that if $\alpha < \mathcal{L}$ then $\alpha < a_k$ for infinite k indexes.

2 Families of sets and Sequences of sets

3 Integral Stieltjes-Lebesgue

3.1 Antes: Integral de Riemann-Stieltjes

La integral de Riemann-Stieltjes es una generalización del concepto integral que propuso Riemann. Esta integral de R-S toma 2 funciones, llamadas el **integrando** y el **integrador**.
Veamos un ejemplo donde f es el integrando y la funcion α es el integrador.

$$\int_a^b f d\alpha \tag{7}$$

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ con
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ .Llamaremos suma Riemman-Stieltjes a:

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})). \tag{8}$$

f es Riemman-Stieltjes integrable respecto a α , en $[a, b]$ si existe un número A, tal que para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existe P_ε una partición con que para toda particion P más fina que P_ε y cualquier eleccion de los t_k tenemos:

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon \tag{9}$$

Además notemos que si α es la función identidad, esto es en realidad una integral de Riemann convencional:

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f d\alpha(x) \tag{10}$$

Propiedades

1) Es lineal con respecto al integrando

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f(x) d\alpha(x) + c_1 \int_a^b g(x) d\alpha(x) \tag{11}$$

Y con respecto al integrador:

$$\int_a^b f(x) d(c_1 \alpha(x) + c_2 \beta(x)) = c_1 \int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b f(x) d\beta(x) \tag{12}$$

2) Se puede partir el intervalo de integración. Sea $c \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x). \tag{13}$$

3) Hay integracion por partes.

$$\int_a^b f d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(x) - f(a)\alpha(a). \tag{14}$$

3.1.1 Ejemplos y aplicaciones

Ejemplo 1:Si $\alpha(x)$ es una función escalonada, en este caso usaremos:

$$\alpha(x) = \begin{cases} a \text{ si } x < x_0 \\ c \text{ si } x = x_0 \\ b \text{ si } x > x_0 \end{cases}$$

Entonces los sumandos de de $S(P, f, \alpha)$ son 0, excepto en el sub intervalo $[u, v]$ de P, que tiene x_0 como **punto interior**. Al obtener el limite de la suma, tenemos:

$$(b - a) f(x_0) \tag{15}$$

Ejemplo 2: Otro ejempmlo es la función parte entera $y = [x]$, que nos ayuda a definir la sumatoria a partir de una integral:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} d[x], n \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Notar: $\boxed{[t_k] - [t_{k-1}] = 0 \text{ si son un tramo con la misma parte entera}}$

Ejemplo 2: Como ultimo ejemplo vamos a hablar de como funciona la integral R-S sobre curvas:

Una curva $f(x, y, z)$, respecto a la longitud de arco de una curva:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ con } t_0 < t < t_f. \tag{17}$$

Esto puede ser visto como una integral de Riemann-Stieltjes en que el integrando es:

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \tag{18}$$

Y el integrador es la funcion $S(t)$ que indica la longitud de arco de curva.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(f, y, z) ds &= \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), y(t), z(t)) ds(t) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} F(t) s'(t) dt \end{aligned} \tag{19}$$

3.2 Teoria de medida (para comprender la integral de Lebesgue)

Una medida de un conjunto es la forma rigurosa de asignar un numero a cada subconjunto apropiado de un conjunto.