



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

FLUSSO GEODETICO E FRAZIONI CONTINUE

Relatore:

Prof. *Carlo Carminati*

Candidato:

Davide Modesto

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Indice

0.1	Introduzione	ii
1	Frazione continua e mappa di Gauss	1
1.1	Frazione continua	1
1.2	Mappa di Gauss	3
2	Sistemi dinamici e ergodicità	5
2.1	Ergodicità	5
2.2	Misure di Radon su spazi metrici compatti	5
2.3	Teorema Ergodico di Birkhoff	11
3	Semipiano di Poincaré	19
3.1	Varietà Riemanniana	19
3.2	Semipiano di Poincaré	21
3.3	$SL_2(\mathbb{R})$	21
3.4	Azione di $PSL_2(\mathbb{R})$ su \mathbb{H}	23
3.5	Azione di $PSL_2(\mathbb{R})$ su $T^1\mathbb{H}$	27
3.5.1	Misura su $T^1\mathbb{H}$ invariante per l'azione di $PSL_2(\mathbb{R})$	28
3.5.2	Misura di Haar su $PSL_2(\mathbb{R})$	29
3.6	Cammini geodetici nel semipiano di Poincaré	29
4	$X_2 = PSL_2(\mathbb{Z}) \backslash PSL_2(\mathbb{R})$	33
4.1	Misura su X_2	33
5	Flusso geodetico	37
5.1	Flusso su $T^1\mathbb{H}$	37
5.2	Relazione tra gli spazi studiati	38
5.3	Flusso su $PSL_2(\mathbb{R})$	38
5.4	Flusso su X_2	39
5.4.1	Ergodicità	39
6	Ergodicità mappa di Gauss	43
6.1	Velocità asintotica di convergenza dei convergenti	56
	Bibliografia	58

0.1 Introduzione

In questa tesi studieremo il rapporto tra le frazioni continue e il flusso geodetico su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$; in particolare mostreremo la relazione tra lo sviluppo in frazione continua indotto dalla mappa di Gauss e come questa sia collegata al flusso geodetico. Si individua una sezione trasversa del flusso la cui mappa di primo ritorno, scritta in opportune coordinate, risulta essere un'estensione della mappa di Gauss. Dopo aver verificato l'ergodicità del flusso dimostreremo l'ergodicità dell'estensione e quindi della mappa di Gauss stessa. Concluderemo infine questo studio applicando il Teorema Ergodico di Birkhoff per stimare la velocità asintotica di convergenza dei convergenti.

Capitolo 1

Frazione continua e mappa di Gauss

1.1 Frazione continua

Una *frazione continua* è un'espressione della forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

che indicheremo anche con

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

con $a_n \in \mathbb{N}$ per $n \geq 1$ e $a_0 \in \mathbb{N}_0$. Scriveremo anche

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

per indicare le frazioni finite

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

I numeri a_n sono i *quozienti parziali* della frazione continua.

Lemma 1.1.1. Fissiamo una sequenza $(a_n)_{n \geq 0}$ con $a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $a_n \in \mathbb{N}$ per $n \geq 1$. Allora i numeri razionali

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

per $n \geq 0$ con numeratore $p_n \geq 1$ e denominatore $q_n \geq 1$ coprimi tra loro, possono essere trovati nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ for } n \geq 0 \quad (1.1)$$

In particolare, definiamo $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = a_0$, e $q_0 = 1$.

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su n . Il passo base $n = 0$ è ovvio. Per ipotesi induttiva abbiamo

$$\frac{x}{y} = [a_1; a_2, \dots, a_k]$$

con x e y coprimi e definiti da

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 x + y & a_0 x' + y' \\ x & x' \end{pmatrix}$$

quindi

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_0 x + y}{x} = a_0 + \frac{y}{x} = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_k]} = [a_0; a_1, \dots, a_k],$$

□

Un'immediata conseguenza del Lemma 1.1.1 sono le formule ricorsive

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \quad (1.2)$$

per ogni $n \geq 1$, siccome

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1}p_n + p_{n-1} & p_n \\ a_{n+1}q_n + q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots \quad (1.3)$$

siccome $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$ e, sempre per induzione, che

$$q_n \geq 2^{(n-2)/2}, \quad p_n \geq 2^{(n-2)/2} \quad (1.4)$$

per ogni $n \geq 1$. Prendendo il determinante in (1.1) si ottiene che

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1} \quad (1.5)$$

e quindi per induzione

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + (-1)^{n+1} \frac{1}{q_{n-1} q_n} \\ &= a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{q_{n-1} q_n} \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 1$. Mostriamo ora che una frazione continua infinita non è solo un oggetto formale ma converge a un numero reale, infatti

$$\begin{aligned} u = [a_0; a_1, a_2, \dots] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

che converge assolutamente per la disuguaglianza (1.4). In più, come immediata conseguenza di (1.6) e (1.3) otteniamo una sequenza di disuguaglianze che descrivono come la frazione continua converge: se $a_n \in \mathbb{N}$ per $n \geq 1$ abbiamo

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dots < u < \dots < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \quad (1.7)$$

$[a_0; a_1, \dots]$ viene detto lo *sviluppo in frazione continua* di u . I numeri razionali $\frac{p_n}{q_n}$ sono chiamati *convergenti* dello sviluppo in frazione continua di u e forniscono un'approssimazione razionale di u . Infatti

$$u - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \left[\frac{1}{q_n q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \dots \right]$$

quindi per (1.3) abbiamo

$$\left| u - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad (1.8)$$

Inoltre per $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n u| < \frac{1}{q_{n+1}} \quad (1.9)$$

Infatti da (1.8) otteniamo

$$\left| u - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

e

$$\left| u - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}.$$

Per il comportamento alternante dei convergenti in (1.7), ogni termine dentro le parentesi nell'equazione

$$\left(u - \frac{p_n}{q_n} \right) = \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) - \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - u \right)$$

è positivo (se n è pari) o negativo (se n è dispari). Segue che

$$\left| u - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - u \right|,$$

quindi

$$\left| u - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} = \frac{q_{n+2} - q_n}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} = \frac{a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}$$

per (1.2) e (1.8). Segue che

$$\frac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n u| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

per $n \geq 1$.

1.2 Mappa di Gauss

Sia $Y = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e definiamo la mappa

$$T: Y \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (1.10)$$

dove $[t]$ è il più grande intero minore uguale di t . Quindi $T(x)$ è la parte frazionaria $\{\frac{1}{x}\}$ di $\frac{1}{x}$. Definiamo per $x \in Y = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ e $n \geq 1$ la sequenza di naturali $(a_n) = (a_n(x))$ con

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

in particolare vale

$$\frac{1}{1 + a_n} < T^{n-1}(x) < \frac{1}{a_n} \quad (1.11)$$

e

$$T^n(x) = T(T^{n-1}(x)) = \frac{1}{x} + \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor = \frac{1}{x} + a_n(x)$$

Lemma 1.2.1. Per ogni $x \in Y$ gli $(a_n(x))$ sono i quozienti parziali dello sviluppo in frazione continua di x , ovvero

$$x = [a_1(x), a_2(x), \dots].$$

Dimostrazione. Definiamo $a_n = a_n(x)$ e sia $u = [a_1, a_2, \dots]$ il limite come in (1.6) con $a_0 = 0$. Da (1.7) abbiamo

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < u < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$$

e da (1.5) e (1.4) abbiamo

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-2}}.$$

E' quindi sufficiente dimostrare

$$[a_1, \dots, a_{2n}] = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = [a_1, \dots, a_{2n+1}]$$

per concludere che $u = x$. Lo dimostriamo per induzione su n . Ricordiamo che $\frac{p_0}{q_0} = 0$ e $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$, quindi il passo base $n = 0$ è soddisfatto per definizione di a_1 . Applichiamo l'ipotesi induttiva a $T(x)$ ottenendo

$$[a_2, \dots, a_{2n+1}] < T(x) < [a_2, \dots, a_{2n+2}]$$

Siccome $T(x) = \frac{1}{x} - a_1$ abbiamo

$$a_1 + [a_2, \dots, a_{2n+1}] < \frac{1}{x} < a_1 + [a_2, \dots, a_{2n+2}]$$

e quindi

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, a_{2n+2}] &= \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_{2n+2}]} < x, \\ x &< \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_{2n+1}]} = [a_1, \dots, a_{2n+1}] \end{aligned}$$

come richiesto. □

Capitolo 2

Sistemi dinamici e ergodicità

2.1 Ergodicità

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di probabilità.

Definizione 2.1.1. Una mappa $T : X \rightarrow X$ misurabile si dice che *preserva* μ se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. In questo caso si dice che la misura μ è *T-invariante* e (X, \mathcal{A}, μ, T) un *sistema che preserva la misura*.

Definizione 2.1.2. Una mappa $T : X \rightarrow X$ che preserva μ si dice *ergodica* (rispetto a μ) se per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$T^{-1}(A) = A \implies \mu(A) = 0 \text{ o } \mu(A) = 1$$

In alternativa diciamo che μ è *T-ergodica*.

Lemma 2.1.1. La mappa T è ergodica se e solo se per ogni funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile se f è *T-invariante*, ovvero tale per cui $f \circ T = f$ μ -quasi ovunque, allora f è uguale a una costante μ -quasi ovunque.

Dimostrazione. Vedere [EW11, Proposizione 2.14.]. □

In questo capitolo mostreremo che per spazi metrici compatti, data una funzione misurabile, esiste una misura di probabilità boreliana ad essa invariante. Inoltre l'insieme di queste misure è un involuppo convesso nello spazio delle misure di probabilità boreliane sullo spazio metrico compatto dato, i cui punti estremali sono misure ergodiche a due a due singolari. Per farlo presenteremo vari lemmi che torneranno utili per dimostrare l'invarianza e l'ergodicità di alcune misure che tratteremo nelle sezioni successive.

2.2 Misure di Radon su spazi metrici compatti

Iniziamo introducendo la definizione di misura di Radon.

Definizione 2.2.1 (Misura di Radon). μ è una *misura di Radon* se è localmente finita, boreliana e regolare.

Sia (X, d) uno metrico compatto. Con $\mathcal{M}_R(X)$ identifichiamo lo spazio delle misure di Radon su X . Vogliamo dotare questo spazio di una topologia. Il teorema di Riesz ci fornisce la seguente identificazione

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R(X) &\rightarrow C(X)^* \\ \lambda &\mapsto T_\lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_X g d\lambda\end{aligned}$$

A questo punto induciamo su $\mathcal{M}_R(X)$ la topologia debole* di $C(X)^*$ ovvero la topologia più debole che rende continue le seguenti mappe in $\mathcal{M}_R(X)^*$

$$\begin{array}{ccccc}\widetilde{\text{eval}}_g : & \mathcal{M}_R(X) & \rightarrow & C(X)^* & \xrightarrow{\text{eval}_g} & \mathbb{R} \\ & \lambda & \mapsto & T_\lambda & \mapsto & \int_X g d\lambda\end{array}$$

Osservazione 2.2.1. $\overline{\widetilde{B_{\mathcal{M}_R(X)}}} = \{\mu \in \mathcal{M}_R(X) : \int g d\mu \in \overline{B_{\mathbb{R}}} \quad \forall g \in \overline{B_{C(X)}}\}$ è debole* compatta

Dimostrazione. Essendo X compatto ho che $C(X)$ è un Banach da cui segue, applicando il Teorema di Banach-Alaoglu, la compattezza di $\overline{B_{C(X)^*}} = \{\phi : C(X) \rightarrow \mathbb{R} : \langle \phi, g \rangle \in \overline{B_{\mathbb{R}}} \quad \forall g \in \overline{B_{C(X)}}\}$ e quindi di $\overline{B_{\mathcal{M}_R(X)}}$. \square

Osservazione 2.2.2. Siano $\mu, \nu \in \mathcal{M}_R(X)$ vale

$$\mu = \nu \iff \int f d\mu = \int f d\nu \quad \forall f \in C(X)$$

Dimostrazione. Immediata conseguenza del Teorema di Riesz. \square

Definiamo con $\mathbb{P}(X)$ lo spazio delle misure di probabilità boreliane su X .

Osservazione 2.2.3. $\mathbb{P}(X) \subset \mathcal{M}_R(X)$

Dimostrazione. $\mathbb{P}(X)$ è boreliana e finita, in particolare localmente finita quindi posso applicare il [EW11, Teorema B.13] per concluderne la regolarità. \square

Osservazione 2.2.4. $\mathbb{P}(X)$ è convesso

Dimostrazione. Siano $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ voglio mostrare $(1-t)\mu + t\nu \in \mathbb{P}(X)$. $\mathcal{M}_R(X)$ è uno spazio vettoriale quindi resta da verificare che sia di probabilità, ovvero

$$\begin{aligned}((1-t)\mu + t\nu)(X) &= (1-t)\mu(X) + t\nu(X) \\ &= 1-t+t = 1\end{aligned}$$

\square

Osservazione 2.2.5. $\mathbb{P}(X)$ è compatto

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{P}(X)$ è chiuso infatti

$$\mathcal{P}(X) = \widetilde{\text{eval}}_1^{-1}(1) \cap \widetilde{\text{eval}}_{f \geq 0}^{-1}([0, \infty))$$

Per concludere ci resta da verificare che $\mathbb{P}(X) \subset \overline{B_{\mathcal{M}_R(X)}}$, poichè chiuso in un compatto è compatto. Sia $\mu \in \mathbb{P}(X)$ allora

$$\int g d\mu \leq \int 1 d\mu = \mu(X) = 1 \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$$

quindi $\mu \in \overline{B_{\mathcal{M}_R(X)}}$ □

Definizione 2.2.2 (Operatore di push-forward). Sia (X, \mathcal{A}) uno spazio misurabile e $T : X \rightarrow X$ misurabile. L'operatore di push-forward applicato a T induce $T_* : \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ t.c.

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Proposizione 2.2.1. La restrizione dell'operatore di push-forward alle misura di probabilità boreliane è ben definito

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che data $\mu \in \mathbb{P}(X) \subset \mathcal{M}_R(X)$ allora $T_*\mu \in \mathbb{P}(X)$. $T_*\mu(X) = \mu(T^{-1}(X)) = \mu(X) = 1$ quindi è di probabilità. Siccome T è continua su un metrico quindi Borel misurabile, abbiamo che $T_*\mu$ è una misura di Borel su X . □

Da ora in poi con T_* indicheremo la restrizione dell'operatore di push-forward a $\mathbb{P}(X)$.

Proposizione 2.2.2. Siano $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ e $t \in (0, 1)$ allora

$$T_*((1-t)\mu + t\nu) = (1-t)T_*(\mu) + tT_*(\nu)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $((1-t)\mu + t\nu) \in \mathbb{P}(X)$ per convessità 2.2.4 quindi è definita l'immagine rispetto a T_* . Per dimostrare l'uguaglianza verifichiamo che coincidono per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} T_*((1-t)\mu + t\nu)(A) &= ((1-t)\mu + t\nu)(T^{-1}A) \\ &= (1-t)\mu(T^{-1}A) + t\nu(T^{-1}A) \\ &= ((1-t)T_*(\mu) + tT_*(\nu))(A) \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.2.3. Sia $\mu \in \mathbb{P}(X)$, per ogni $f \in L^1(\mu)$ vale $\int f dT_*\mu = \int f \circ T d\mu$

Dimostrazione. Verifichiamo l'identità per le funzioni caratteristiche. Sia $f = \chi_A$ per qualche insieme $A \subset X$. Allora

$$\int \chi_A dT_*\mu = T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int \chi_{T^{-1}(A)} d\mu = \int \chi_A \circ T d\mu$$

L'enunciato è quindi vero per le funzioni caratteristiche e segue per le funzioni integrabili dai classici argomenti di approssimazione. □

Proposizione 2.2.4. T_* è continua

Dimostrazione. Dalla proprietà universale della topologia debole abbiamo

$$T_* \text{ continua} \iff \widetilde{\text{eval}}_g \circ T_* \text{ continua} \quad \forall g \in C(X)$$

Osserviamo che $\widetilde{\text{eval}}_g \circ T_* = \widetilde{\text{eval}}_{g \circ T}$ che è ovviamente continua rispetto alla topologia debole* essendo $g \circ T \in C(X)$ infatti

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{eval}}_g \circ T_*(\mu) &= \int_X g d(T_*\mu) \\ &= \int_X g \circ T d\mu \\ &= \widetilde{\text{eval}}_{g \circ T}(\mu) \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo applicato la Proposizione 2.2.3 a g che essendo continua in un compatto è limitata e quindi contenuta in $L^1(\mu)$. \square

Indichiamo con:

- $\mathbb{P}^T(X) := \{\mu \in \mathbb{P}(X) : \mu \text{ } T\text{-invariante}\}$
- $\mathcal{E}^T(X) := \{\mu \in \mathbb{P}^T(X) : \mu \text{ ergodica}\}$

Proposizione 2.2.5 (Caratterizzazione misure invarianti). Sia $\mu \in \mathbb{P}(X)$ allora

$$\mu \in \mathbb{P}^T(X) \iff \int f \circ T d\mu = \int f d\mu \quad \forall f \in C(X)$$

Dimostrazione. \implies) Segue dalla Proposizione 2.2.3.

\impliedby) Sempre dalla Proposizione 2.2.3 otteniamo

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu = \int f dT_*\mu \quad \forall f \in C(X)$$

l'enunciato segue direttamente dall'Osservazione 2.2.2. \square

Proposizione 2.2.6. $\mathbb{P}^T(X)$ è chiuso e convesso

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^T(X) &:= \{\mu \in \mathbb{P}(X) : T_*\mu = \mu\} \\ &= (T_* - id)^{-1}(\underline{0}) \end{aligned}$$

quindi per continuità di T_* 2.2.4, $\mathbb{P}^T(X)$ è chiuso. La convessità segue immediatamente da 2.2.2

$$\begin{aligned} (T_* - id)((1-t)\mu + t\nu) &= T_*((1-t)\mu + t\nu) - (1-t)\mu - t\nu \\ &= (1-t)T_*(\mu) + tT_*(\nu) - (1-t)\mu - t\nu \\ &= (1-t)(T_* - id)(\mu) + t(T_* - id)(\nu) = \underline{0} \end{aligned}$$

\square

Teorema 2.2.1 (Teorema di Krylov–Bogolyubov). $\mathbb{P}^T(X)$ è non vuoto

Dimostrazione. Sia $\nu \in \mathcal{M}(X)$, definiamo

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j \nu$$

Per compattezza di $\mathbb{P}(X)$ (Proposizione 2.2.5) (μ_n) ammette una sottosuccessione debol*-convergente $(\mu_{n(j)})$ con $\mu_{n(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu$. Essendo la topologia debole vale

$$\mu_{n(j)} \rightarrow \mu \iff \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in C(X)$$

in particolare

$$\begin{aligned} \left| \int f \circ T d\mu - \int f d\mu \right| &= \left| \int (f \circ T - f) d\mu \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int (f \circ T - f) d\mu_{n(j)} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int f \circ T d\mu_{n(j)} - \int f d\mu_{n(j)} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n(j)} \left| \int \sum_{i=0}^{n(j)-1} (f \circ T^{i+1} - f \circ T^i) d\mu_{n(j)} \right| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n(j)} \left| \int (f \circ T^{n(j)+1} - f) d\mu_{n(j)} \right| \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2}{n(j)} \|f\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

per ogni $f \in C(X)$. Da segue che μ è T invariante. □

Proposizione 2.2.7. $\mu \in \mathcal{E}^T(X) \iff \mu$ è estrema¹ in $\mathbb{P}^T(X)$.

Dimostrazione. \Leftarrow) Supponiamo μ non sia ergodica, vogliamo mostrare che non può essere un punto estrema. Per definizione di ergodicità, esiste un insieme A con

$$T^{-1}(A) = A \quad T^{-1}(A^c) = A^c \quad \text{e} \quad \mu(A) \in (0, 1)$$

Definiamo μ_1, μ_2 nel seguente modo

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \quad \text{e} \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)}.$$

μ_1 e μ_2 sono misure di probabilità con $\mu_1(A) = 1, \mu_2(A^c) = 1$, e μ può essere scritto come

$$\mu = \mu(A)\mu_1 + \mu(A^c)\mu_2$$

che è una combinazione convessa di μ_1, μ_2 , infatti

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \quad \text{con} \quad t = \mu(A) \quad \text{e} \quad 1-t = \mu(A^c)$$

¹ x è un elemento estrema di un insieme convesso A se $x = tx_0 + (1-t)x_1$ con $x_0, x_1 \in A$ e $x_0 \neq x_1$ allora $t = 0$ oppure $t = 1$.

Rimane da dimostrare che sono invarianti. Sia B un insieme misurabile arbitrario, allora

$$\begin{aligned}\mu_1(f^{-1}(B)) &= \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A))}{\mu(A)} \\ &= \frac{\mu(f^{-1}(B \cap A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \mu_1(B)\end{aligned}$$

Questo mostra che μ_1 è invariante, la dimostrazione per μ_2 è analoga. \implies) Sia μ ergodica t.c.

$$\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{P}^T(X) \wedge t \in (0, 1) \text{ t.c. } \mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$$

vogliamo mostrare che $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Mostriamo $\mu_1 = \mu$, l'argomento per μ_2 è identico. Notiamo che $\mu_1 \ll \mu$ quindi, per il Teorema di Radon-Nykodim, ammette densità $h_1 := d\mu_1/d\mu$ t.c. per ogni insieme misurabile si ha $\mu_1(A) = \int_A h_1 d\mu$. E' quindi sufficiente dimostrare $h_1 = 1$ μ -quasi ovunque. Per dimostrarlo definiamo gli insiemi

$$B := \{x : h_1(x) < 1\} \quad \text{e} \quad C := \{x : h_1(x) > 1\}$$

e mostreremo che $\mu(B) = \mu(C) = 0$. Dimostreremo solo $\mu(B) = 0$, l'argomento per $\mu(C) = 0$ è analogo. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\mu_1(B) &= \int_B h_1 d\mu = \int_{B \cap f^{-1}(B)} h_1 d\mu + \int_{B \setminus f^{-1}(B)} h_1 d\mu \\ \mu_1(f^{-1}(B)) &= \int_{f^{-1}(B)} h_1 d\mu = \int_{B \cap f^{-1}(B)} h_1 d\mu + \int_{f^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu\end{aligned}$$

Siccome μ_1 è invariante, $\mu_1(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$ quindi

$$\int_{B \setminus T^{-1}(B)} h_1 d\mu = \int_{T^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu$$

Osserviamo inoltre

$$\mu(B \setminus T^{-1}(B)) = \mu(B) - \mu(B \cap T^{-1}(B)) = \mu(T^{-1}(B)) - \mu(B \cap T^{-1}(B)) = \mu(T^{-1}(B) \setminus B)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{T^{-1}(B) \setminus B} h_1 d\mu &\leq \int_{T^{-1}(B) \setminus B} 1 d\mu = \mu(T^{-1}(B) \setminus B) \\ &= \mu(B \setminus T^{-1}(B)) = \int_{B \setminus T^{-1}(B)} 1 d\mu \leq \int_{B \setminus T^{-1}(B)} h_1 d\mu\end{aligned}$$

L'uguaglianza del primo e ultimo termine costringe le disuguaglianze intermedie a uguaglianze. Siccome $h_1 < 1$ su $B \setminus T^{-1}(B)$ allora $\mu(T^{-1}(B) \setminus B) = \mu(B \setminus T^{-1}(B)) = 0$, ovvero $T^{-1}(B) = B$ (a meno di un insieme di misura nulla). Siccome μ è ergodica $\mu(B) = 0$ oppure $\mu(B) = 1$. Se $\mu(B) = 1$ avremmo

$$1 = \mu_1(X) = \int_X h_1 d\mu = \int_B h_1 d\mu < \mu(B) = 1$$

il che è assurdo. Quindi $\mu(B) = 0$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Proposizione 2.2.8. Se $\mu, \nu \in \mathcal{E}^T(X)$ e $\mu \neq \nu$ allora μ e ν sono singolari²

Dimostrazione. Sia $f \in C(X)$ t.c. $\int f d\mu \neq \int f d\nu$ (esiste per l'Osservazione 2.2.2). Quindi dal Teorema ergodico otteniamo

$$A_n^f(x) \rightarrow \int f d\mu \quad (2.1)$$

per μ -quasi ogni $x \in X$, e

$$A_n^f(x) \rightarrow \int f d\nu$$

per ν -quasi ogni $x \in X$. Segue che l'insieme $A = \{x \in X \mid \text{vale 2.1}\}$ è misurabile e $\mu(A) = 1$ e $\nu(A) = 0$. \square

2.3 Teorema Ergodico di Birkhoff

Per dimostrare il Teorema di Birkhoff, che è il risultato centrale di questo capitolo, presenteremo altri due importanti risultati della Teoria Ergodica: il Mean Ergodic Theorem e il Maximal Ergodic Theorem.

Una trasformazione T che preserva μ induce un operatore $U_T : L_\mu^2 \rightarrow L_\mu^2$ definito da

$$U_T(f) = f \circ T$$

Ricordiamo che L_μ^2 è uno spazio di Hilbert e per ogni $f_1, f_2 \in L_\mu^2$

$$\begin{aligned} \langle U_T f_1, U_T f_2 \rangle &= \int f_1 \circ T \cdot \overline{f_2 \circ T} d\mu \\ &= \int f_1 \overline{f_2} d\mu \quad \mu \text{ è } T\text{-invariante} \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi U_T è un'isometria da L_μ^2 in L_μ^2 ogni qualvolta (X, \mathcal{B}, μ, T) è un sistema invariante. Se $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ è un operatore lineare continuo tra spazi di Hilbert allora la relazione

$$\langle Uf, g \rangle = \langle f, U^*g \rangle$$

definisce un operatore associato $U^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ detto l'aggiunto di U .

Teorema 2.3.1 (Mean Ergodic Theorem). Sia (X, \mathcal{A}, μ, T) un sistema invariante, e sia P_T la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso

$$I = \{g \in L_\mu^2 \mid U_T g = g\} \subset L_\mu^2$$

Allora per ogni $f \in L_\mu^2$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f \xrightarrow{L_\mu^2} P_T f.$$

² μ e ν sono singolari se esiste un insieme misurabile A tale che $\mu(A) = \nu(A^C) = 0$

Dimostrazione. Prima dimostreremo che $L_\mu^2 = I \oplus \bar{B}$ con $B = \{U_T g - g \mid g \in L_\mu^2\}$ per poi passare al risultato mostrato nell'enunciato.

Mostreremo $B^\perp = I$ mostrando entrambi i contenimenti. Infatti se $U_T f = f$ allora

$$\langle f, U_T g - g \rangle = \langle U_T f, U_T g \rangle - \langle f, g \rangle = 0,$$

quindi $f \in B^\perp$. Viceversa se $f \in B^\perp$ allora

$$\langle U_T^* f, g \rangle = \langle U_T g, f \rangle = \langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle$$

per ogni $g \in L_\mu^2$, quindi

$$U_T^* f = f \tag{2.2}$$

Allora

$$\begin{aligned} \|U_T f - f\|_2 &= \langle U_T f - f, U_T f - f \rangle \\ &= \|U_T f\|_2^2 - \langle f, U_T f \rangle - \langle U_T f, f \rangle + \|f\|_2^2 \\ &= 2\|f\|_2^2 - \langle U_T^* f, f \rangle - \langle f, U_T^* f \rangle \\ &= 0 \quad \text{da (2.2)} \end{aligned}$$

quindi $f \in I$. Segue che $L_\mu^2 = I \oplus \bar{B}$, quindi ogni $f \in L_\mu^2$ si decompone come

$$f = P_T f + h \tag{2.3}$$

con $h \in \bar{B}$. Dimostriamo ora che

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h \xrightarrow{L_\mu^2} 0.$$

Questo è chiaro per $h = U_T g - g \in B$, siccome

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n (U_T g - g) \right\|_2 &= \left\| \frac{1}{N} ((U_T g - g) + (U_T^2 g - U_T g) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (U_T^N g - U_T^{N-1} g)) \right\|_2 \\ &= \frac{1}{N} \|U_T^N g - g\|_2 \\ &\leq \frac{1}{N} (\|U_T^N\|_2 + \|g\|_2) \leq \frac{2\|g\|_2}{N} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Sia $h \in \partial \bar{B}$ allora esiste (g_i) una sequenza in L_μ^2 tale che $h_i = U_T g_i - g_i \rightarrow h$. Allora per ogni $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h \right\|_2 &\leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n (h - h_i) \right\|_2 + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h_i \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|h - h_i\|_2 + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h_i \right\|_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e scegliamo i e N abbastanza grandi per cui vale $\|h - h_i\|_2 < \epsilon$ e $\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h_i \right\|_2 < \epsilon$. Usando queste stime nella disuguaglianza (2.4) otteniamo

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h \right\|_2 \leq 2\epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ abbiamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h \xrightarrow{L_\mu^2} 0$$

per ogni $h \in \bar{B}$. Il teorema segue da (2.3). \square

La quantità studiata nel Teorema 2.3.1 è la *media ergodica*. Per un sistema che preserva la misura (X, \mathcal{B}, μ, T) e una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ l' N -ennesima *media ergodica* di f è definita come

$$A_N = A_N^f = A_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n.$$

Faremo riferimento alla media ergodica variando tra le sue possibili interpretazioni.

- Nel Teorema 2.3.1 f è un elemento dello spazio di Hilbert L_μ^2 e A_N^f è interpretato come un elemento di L_μ^2 .
- Nel Corollario 2.3.1 penseremo a f come un elemento di L_μ^1 , ma valuteremo la media ergodica A_N^f in punti scrivendo $A_N^f(x)$. Ovviamente in questa configurazione ogni affermazione può essere fatta solo μ -quasi ovunque, siccome f (e quindi A_N^f) è solo una classe di equivalenza di funzioni.

Corollario 2.3.1. Sia (X, \mathcal{B}, μ, T) un sistema che preserva la misura. allora per ogni funzione $f \in L_\mu^1$ la media ergodica A_N^f converge in L_μ^1 a una funzione T -invariante $f' \in L_\mu^1$.

Dimostrazione. Dal teorema della media ergodica (Teorema 2.3.1) sappiamo che per ogni $g \in L_\mu^\infty \subseteq L_\mu^2$, la media ergodica A_N^g converge in L_μ^2 a qualche $g' \in L_\mu^2$. Affermiamo che $g' \in L_\mu^\infty$. Infatti $\|A_N^g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ e quindi

$$|\langle A_N^g, \chi_B \rangle| \leq \|g\|_\infty \mu(B)$$

per ogni $B \in \mathcal{B}$. Siccome $A_N^g \rightarrow g'$ in L_μ^2 , abbiamo

$$|\langle g', \chi_B \rangle| \leq \|g\|_\infty \mu(B)$$

per $B \in \mathcal{B}$, quindi $\|g'\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ come richiesto. Siccome $\mu(X) = 1$ allora $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$, quindi deduciamo che

$$A_N^g \xrightarrow{L_\mu^1} g' \in L_\mu^\infty.$$

Il corollario vale quindi per l'insieme denso di funzioni $L_\mu^\infty \subseteq L_\mu^1$. Sia $f \in L_\mu^1$, fissiamo $\epsilon > 0$ e prendiamo $g \in L_\mu^\infty$ con $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Quindi per ogni N abbiamo

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g \circ T^n \right\|_1 < \epsilon,$$

Da quanto appena osservato sappiamo esistere g' e N_0 con

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g \circ T^n - g' \right\|_1 < \epsilon$$

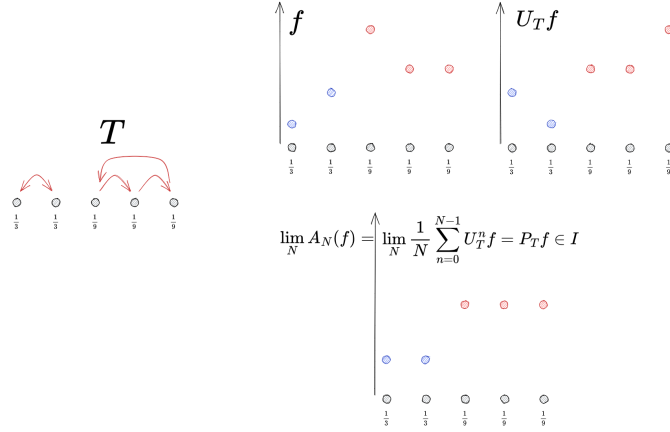


Figura 2.1: Un esempio in cui la media ergodica dipende dal punto.

per $N \geq N_0$. Combinando i due risultati otteniamo

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n - \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N'-1} f \circ T^n \right\|_1 < 4\epsilon$$

per ogni $N, N' \geq N_0$. Quindi le medie ergodiche formano una successione di Cauchy che per completezza di L^1_μ ammettono limite $f' \in L^1_\mu$. Siccome

$$\left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \right) \circ T - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \right\|_1 \leq \frac{2}{N} \|f\|_1$$

per ogni $N \geq 1$, la funzione limite f' deve essere T -invariante. \square

Esempio 2.3.1. Se T è ergodica allora la media ergodica non dipende dal punto. Mostriamo un caso in cui questo non vale. Sia $X = \{1, \dots, 5\}$, $T = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ e f, μ come in Figura 2.1. Osserviamo che gli insiemi invarianti sono le due orbite di T . L'insieme I è composto dalle funzioni costanti sulle orbite e $P_T f$, la proiezione ortogonale su I , è la miglior approssimazione di f a una funzione costante sulle orbite.

Ci chiediamo quanto tempo l'orbita di un punto passa in un dato insieme. Mostreremo che se la trasformazione è ergodica questa quantità è prevedibile.

Esempio 2.3.2. Osserviamo che se $B \subset X$ è un insieme invariante allora

$$A_N^{XB}(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'Esempio 2.3.1 è un caso non banale in cui possiamo verificare quanto appena osservato.

Teorema 2.3.2 (Maximal Ergodic Theorem). Consideriamo il sistema che preserva la misura (X, \mathcal{A}, μ, T) su uno spazio di probabilità e g una funzione reale in \mathcal{L}^1_μ . Definiamo

$$E_\alpha = \left\{ x \in X \mid \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) > \alpha \right\}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\alpha\mu(E_\alpha) \leq \int_{E_\alpha} g d\mu \leq \|g\|_1.$$

In più, $\alpha\mu(E_\alpha \cap A) \leq \int_{E_\alpha \cap A} g d\mu$ ogni qualvolta $T^{-1}A = A$.

Per dimostrarlo faremo uso della seguente proposizione.

Proposizione 2.3.1 (Maximal Inequality). Sia $U : L_\mu^1 \rightarrow L_\mu^1$ un operatore lineare positivo³ con $\|U\| \leq 1$. Per $f \in L_\mu^1$ una funzione reale, definiamo induttivamente le funzioni

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= f \\ f_2 &= f + Uf \\ &\vdots \\ f_n &= f + Uf + \cdots + U^{n-1}f \end{aligned}$$

per $n \geq 1$ e $F_N = \max\{f_n \mid 0 \leq n \leq N\}$. Allora

$$\int_{\{x \mid F_N(x) > 0\}} f d\mu \geq 0$$

per ogni $N \geq 1$.

Dimostrazione. Per ogni N , è chiaro che $F_N \in L_\mu^1$. Siccome U è lineare e positivo e

$$F_N \geq f_n$$

per $0 \leq n \leq N$, abbiamo

$$UF_N + f \geq Uf_n + f = f_{n+1}$$

In particolare

$$UF_N + f \geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n.$$

Per $x \in P = \{x \mid F_N(x) > 0\}$ abbiamo

$$F_N(x) = \max_{0 \leq n \leq N} f_n(x) = \max_{1 \leq n \leq N} f_n(x)$$

siccome $f_0 = 0$. Quindi,

$$UF_N(x) + f(x) \geq F_N(x)$$

per $x \in P$, e quindi

$$f(x) \geq F_N(x) - UF_N(x) \tag{2.5}$$

³Se $f \geq 0$ allora $Uf \geq 0$

per $x \in P$. Abbiamo $F_N(x) \geq 0$ per ogni x , quindi $UF_N(x) \geq 0$ per ogni x . Quindi la disuguaglianza (2.5) implica che

$$\begin{aligned} \int_P f d\mu &\geq \int_P F_N d\mu - \int_P UF_N d\mu \\ &= \int_X F_N d\mu - \int_P UF_N d\mu \quad (\text{ siccome } F_N(x) = 0 \text{ per } x \notin P) \\ &\geq \int_X F_N d\mu - \int_X UF_N d\mu \\ &= \|F_N\|_1 - \|UF_N\|_1 \geq 0 \end{aligned}$$

siccome $\|U\| \leq 1$. □

Dimostrazione del Teorema 2.3.2. Sia $f = (g - \alpha)$, $Uf = f \circ T$ per $f \in L_\mu^1$ e

$$E_\alpha = \bigcup_{N=0}^{\infty} \{x \mid F_N(x) > 0\}.$$

Segue che $\int_{E_\alpha} f d\mu \geq 0$ ovvero $\int_{E_\alpha} g d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha)$. Per l'ultima parte dell'enunciato è sufficiente applicare lo stesso argomento a $f = (g - \alpha)$ rispetto al sistema $(A, \mathcal{A}|_A, \frac{1}{\mu(A)}\mu|_A, T|_A)$. □

Teorema 2.3.3 (Teorema Ergodico di Birkhoff). Sia (X, \mathcal{B}, μ, T) un sistema che preserva la misura. Se $f \in \mathcal{L}_\mu^1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = f^*(x)$$

converge quasi ovunque in L_μ^1 a una funzione T -invariante $f^* \in \mathcal{L}_\mu^1$, e

$$\int f^* d\mu = \int f d\mu.$$

Se T è ergodica, allora

$$f^*(x) = \int f d\mu \tag{2.6}$$

quasi ovunque.

Possiamo riformulare questo risultato informalmente dicendo che se μ è ergodica la *media temporale* converge alla *media spaziale*.

Corollario 2.3.2. Nelle ipotesi dell'equazione (2.6) vale che per ogni insieme misurabile A e per μ -q.o. $x \in X$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n : f^j(x) \in A\} = \mu(A)$$

Remark. Il Teorema Ergodico di Birkhoff è l'analogo della Legge Forte dei Grandi Numeri. Infatti l'equazione (2.6) si può anche scrivere nella forma

$$\mathbb{P} \left(\left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = \mathbb{E}_\mu[f] \right\} \right) = 1$$

Dimostrazione del Teorema 2.3.3. Definiamo per ogni $x \in X$

$$f^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x),$$

$$f_*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x).$$

Studiamo la seguente identità

$$\frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(T^i x) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(Tx)) + \frac{1}{n} f(x). \quad (2.7)$$

Considerando il limite lungo la sottosequenza per cui il lato sinistro di (2.7) converge al \limsup , questo mostra che $f^* \leq f^* \circ T$. Il limite lungo la sottosequenza per cui il lato destro di (2.7) converge al \limsup mostra che $f^* \geq f^* \circ T$. Un'argomentazione simile per f_* mostra che

$$f^* \circ T = f^*, \quad f_* \circ T = f_*. \quad (2.8)$$

Ora consideriamo $\alpha > \beta$ razionali e definiamo

$$E_\alpha^\beta = \{x \in X \mid f_*(x) < \beta \text{ and } f^*(x) > \alpha\}.$$

Da (2.8), $T^{-1}E_\alpha^\beta = E_\alpha^\beta$ e $E_\alpha \supseteq E_\alpha^\beta$ dove E_α è l'insieme definito nel Teorema 2.3.2 (con $g = f$). Dal Teorema 2.3.2, siccome E_α^β è T -invariante abbiamo

$$\int_{E_\alpha^\beta} f d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha^\beta). \quad (2.9)$$

Sostituendo f con $-f$, un'argomentazione simile dimostra

$$\int_{E_\alpha^\beta} f d\mu \leq \beta \mu(E_\alpha^\beta). \quad (2.10)$$

Ora

$$\{x \mid f_*(x) < f^*(x)\} = \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha > \beta} E_\alpha^\beta,$$

mentre le disuguaglianze (2.9) e (2.10) mostrano che $\mu(E_\alpha^\beta) = 0$ per $\alpha > \beta$. Segue che

$$\mu \left(\bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha > \beta} E_\alpha^\beta \right) = 0$$

quindi

$$f_*(x) = f^*(x) \text{ q.o.}$$

Quindi

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \longrightarrow f^*(x) \text{ q.o.} \quad (2.11)$$

Dal Corollario (2.3.1) sappiamo anche che

$$g_n \xrightarrow{L_\mu^1} f' \in \mathcal{L}_\mu^1 \quad (2.12)$$

con f' una funzione T -invariante. Esiste quindi una sottosuccessione $n_k \rightarrow \infty$ in cui vale la convergenza puntuale quasi ovunque

$$g_{n_k}(x) \longrightarrow f'(x) \text{ q.o.} \quad (2.13)$$

Mettendo (2.11), (2.12) e (2.13) insieme vediamo che $f^* \in \mathcal{L}_\mu^1$ è una funzione T -invariante e che la convergenza in (2.11) avviene anche in L_μ^1 . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int g_n(x) d\mu(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(T^i x) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int f(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dal Lemma (2.2.5). Quindi possiamo concludere

$$\int f d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu(x) = \int f^* d\mu(x)$$

L'ultima parte dell'enunciato segue immediatamente dal Lemma 2.1.1. □

Capitolo 3

Semipiano di Poincaré

3.1 Varietà Riemanniana

Definizione 3.1.1 (Sistema di coordinate, Carta, Parametrizzazione). Sia \mathcal{M} uno spazio topologico e $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ un insieme aperto. Sia $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Un omomorfismo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ è un *sistema di coordinate* su \mathcal{U} . La coppia (\mathcal{U}, ϕ) è chiamata *carta* su \mathcal{M} . La mappa inversa ϕ^{-1} è una *parametrizzazione* di \mathcal{U} .

Definizione 3.1.2 (Atlante, Mappe di transizione). Un *atlante* su \mathcal{M} è un insieme di carte $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ tali che \mathcal{U}_α ricoprano \mathcal{M} . Gli omomorfismi $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ sono le *mappe di transizione*.

Definizione 3.1.3 (Varietà topologica, varietà liscia). Uno spazio topologico di Hausdorff secondo numerabile \mathcal{M} è una *n-varietà topologica* se ammette un atlante $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}, \phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. E' una *varietà liscia* se tutte le mappe di transizione sono diffeomorfismi.

Definizione 3.1.4 (Mappa liscia tra varietà). Siano M e N due varietà, una mappa $F : M \rightarrow N$ tra varietà è liscia in $p \in M$ se ci sono una carta (U, φ) centrata in p e (V, ψ) centrata in $F(p)$ tali che $F(U) \subset V$ e

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

sia liscia (C^∞). La funzione F è *liscia* se è liscia in tutti $p \in M$.

Definizione 3.1.5. Data una n -varietà liscia M , per ogni $p \in M$, e due curve lisce a tratti $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \rightarrow M$ e $\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \rightarrow M$, con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ sono *equivalenti* se e solo se esiste una carta (U, φ) in p tale che

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

Definizione 3.1.6 (Vettore tangente, Spazio tangente in un punto). Data una n -varietà liscia M per ogni $p \in M$, un *vettore tangente* a M in p è una classe di equivalenza di curve rispetto alla relazione data nella Definizione (3.1.5). Lo *spazio tangente in p* ovvero l'insieme di tutti i vettori tangenti in p viene indicato con $T_p(M) = \{(p, [\gamma]) | \gamma \text{ vettore tangente in } p\}$. Con $T_p^1(M) = \{h \in T_p(M) | \|h\|_p = 1\}$ indichiamo il *tangente unitario in p*.

E' ovvio che $T_p(M)$ è uno spazio vettoriale.

Osservazione 3.1.1. Sia (U, φ) una carta centrata in p allora

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}: T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, [\gamma]) &\longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)\end{aligned}\tag{3.1}$$

è un ben definito isomorfismo di spazi vettoriali.

Definizione 3.1.7 (Fibrato tangente, Fibrato unitario tangente). Data una n -varietà liscia M , il *fibrato tangente* di M è l'unione di tutti gli spazi tangenti ai punti di M

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Mentre l'unione degli spazi tangenti unitari

$$T^1 M := \bigcup_{p \in M} T_p^1 M$$

viene indicato con *fibrato unitario tangente*.

Definizione 3.1.8 (Metrica Riemanniana). Sia M una varietà liscia. Una *metrica Riemanniana* g su M è una mappa liscia

$$\begin{aligned}g: M &\longrightarrow (TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}) \\ p &\longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p\end{aligned}\tag{3.2}$$

tale che $\langle (p, \cdot), (p, \cdot) \rangle_p$ è bilineare, simmetrica e definita positiva. g è liscia nel senso che per ogni carta (U, φ) centrata in p , le mappe $x \mapsto \langle [\varphi^{-1}(x + te_i)], [\varphi^{-1}(x + te_j)] \rangle_{\varphi^{-1}(x)}$ con $x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq i, j \leq n$ sono lisce.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ può essere pensato come un prodotto scalare su $T_p M$ ovvero un modo per misurare lunghezze e angoli nello spazio tangente.

Definizione 3.1.9 (Varietà Riemanniana). La coppia (M, g) è detta *varietà Riemanniana* se M è una varietà liscia e g una metrica Riemanniana.

La metrica Riemanniana non è quella che è conosciuta come "metrica" dalla teoria degli spazi metrici, ma può essere usata per costruirne una, come vediamo di seguito. Sia $\phi: [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia

Definizione 3.1.10 (Derivata di una curva). Definiamo la derivata di ϕ in t come

$$D\phi(t) = (\phi(t), [\gamma(t - \cdot)]) \in T_{\phi(t)} M$$

Definizione 3.1.11 (Lunghezza di una curva su una varietà). Definiamo la *lunghezza* di ϕ come

$$L_g(\phi) := \int_a^b \|D\phi(t)\|_{\phi(t)} dt$$

con $\|\cdot\|_p$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Usando questa definizione di lunghezza di curva, possiamo definire una distanza tra due punti di M

Definizione 3.1.12 (Distanza geodetica). Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e $p, q \in M$. Allora definiamo la *distanza geodetica* tra due punti p and q come

$$d_g(p, q) := \inf \{L_g(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M \text{ liscia a tratti, } c(0) = p, c(1) = q\}$$

La funzione appena definita soddisfa effettivamente gli assiomi di metrica.

3.2 Semipiano di Poincaré

Il semipiano superiore

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C}$$

è un aperto di \mathbb{C} quindi una varietà liscia. Ammette *id* come parametrizzazione globale grazie alla quale potremo identificare $T_z \mathbb{H}$ con $\{z\} \times \mathbb{C}$ associando $(z, \gamma'(0))$ a $(z, [\gamma])$ come nell'Osservazione 3.1.1. Grazie a questa osservazione possiamo definire

Definizione 3.2.1 (Metrica iperbolica).

$$\begin{aligned} g_h : \mathbb{H} &\longrightarrow (T\mathbb{H} \times T\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}) \\ z &\longmapsto ((z, u), (z, v)) \mapsto \langle (z, u), (z, v) \rangle_z \end{aligned}$$

con

$$\langle (z, u), (z, v) \rangle_z := \frac{\Re(u\bar{v})}{(\Im z)^2} = \frac{\langle u, v \rangle}{(\Im z)^2}$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è indotto dal prodotto scalare Euclideo mediante l'identificazione di \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 . Osserviamo che g_h soddisfa le condizioni della Definizione 3.1.8 quindi definisce una metrica Riemanniana chiamata *metrica iperbolica*.

(\mathbb{H}, g_h) è quindi una varietà Riemanniana chiamata il *semipiano di Poincaré*. Con L_h, d_h indicheremo rispettivamente la lunghezza e la distanza rispetto al semipiano di Poincaré.

Osservazione 3.2.1. Sussiste la seguente relazione tra la norma indotta dalla metrica iperbolica sul tangente e quella euclidea

$$\|(z, v)\|_z = \sqrt{\langle (z, v), (z, v) \rangle_z} = \sqrt{\frac{\langle v, v \rangle}{(\Im z)^2}} = \frac{\|v\|_2}{\Im(z)}$$

3.3 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Sia $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\}$ il *gruppo speciale lineare* delle matrici reali 2×2 con determinante 1.

Proposizione 3.3.1 (Generatori). Siano

$$U^- = \left\{ u^-(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset SL_2(\mathbb{R})$$

$$U^+ = \left\{ u^+(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset SL_2(\mathbb{R})$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

$$V_1 := \langle U^- \cup \{w\} \rangle \subset SL_2(\mathbb{R})$$

$$V_2 := \langle U^- \cup U^+ \rangle \subset SL_2(\mathbb{R})$$

allora $V_1 = V_2 = SL_2(\mathbb{R})$

Dimostrazione. Sia

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

un generico elemento di $SL_2(\mathbb{R})$. Mostriamo $g \in V_1$ ovvero $V_1 = SL_2(\mathbb{R})$. Divideremo la dimostrazione in quattro parti:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ allora $u_+(a) \in V_1$
2. $\text{diag}\left(x, \frac{1}{x}\right) \in V_1$
3. $a \neq 0 \implies M \in V_1$
4. $a = 0 \implies M \in V_1$
5. $w \in V_2$

Osserviamo che w ha ordine 4 ovvero $w^4 = I_2$.

pt. 1 $wu^-(a)w^3 = u^+(a)$

pt. 2 Fissato $x \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\begin{aligned} \beta &= x - 1 \\ \alpha &= -\frac{1}{1 + \beta} \\ \gamma &= -\frac{\beta}{1 + \beta} \end{aligned}$$

allora

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{pt.1}}{\ni} u^+(\alpha)u^-(\beta)u^+(1)u^-(\delta) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

pt. 3 Osserviamo che $\det g = 1 \implies d = \frac{cb+1}{a}$

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \stackrel{\text{pt.1,2}}{\ni} u^+\left(\frac{c}{a}\right) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} u^-\left(\frac{b}{a}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{cb+1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pt. 4 Osserviamo che $a = 0 \implies b, c \neq 0$

$$wM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \stackrel{\text{pt.3}}{\in} V_1$$

siccome $w^4 = I_2$ allora $g = w^3(wM) \in V_1$

pt. 5 $u^-(1)u^+(-1)u^-(1) = w.$

□

3.4 Azione di $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ su \mathbb{H}

Osservazione 3.4.1. Il gruppo $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agisce su \mathbb{H} mediante la *trasformazione di Möbius* così definita

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.3)$$

Inoltre vale $\mathcal{I}(g \cdot z) = \frac{\mathcal{I}(z)}{|cz + d|^2}$

Dimostrazione. Mostriamo prima che la trasformazione di Möbius è ben definita. Per prima cosa verifichiamo che $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}$ ovvero $cz + d \neq 0$. Supponiamo per assurdo $cz + d = 0$. Se $c = 0$ allora $d = 0$ il che è assurdo poichè $\det(g) = 1$. Quindi $c \neq 0$ ovvero $z = -\frac{d}{c} \notin \mathbb{H}$ che è assurdo. Mostriamo ora che $g \cdot z \in \mathbb{H}$ ovvero $\Im(g \cdot z) > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(g \cdot z) &= \mathcal{I}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \mathcal{I}\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} \mathcal{I}(acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} (ad\mathcal{I}(z) - bc\mathcal{I}(z)) \\ &= \frac{\mathcal{I}(z)}{|cz + d|^2} > 0 \end{aligned}$$

Infine non è difficile dimostrare che è un'azione ovvero che dati $g_1, g_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ $(g_1 g_2) \cdot z = g_1 \cdot (g_2 \cdot z)$. □

Notiamo che $-I_2$ agisce banalmente su \mathbb{H} , quindi (3.3) definisce un'azione del *gruppo speciale lineare proiettivo*

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\}$$

D'ora in poi con trasformazione di Möbius faremo riferimento a quella quozientata e continueremo a scriverla come l'azione di una matrice su \mathbb{H} , nonostante gli elementi di $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ siano classi di equivalenza.

Definizione 3.4.1 (Derivata di un'azione). Sia

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Notiamo che g vista come una mappa da \mathbb{H} in \mathbb{H} è olomorfa con

$$g'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

La derivata di g , $Dg : T\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è definita come

$$Dg((z, v)) = (g(z), g'(z)v) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{v}{(cz + d)^2} \right)$$

che per $z \in \mathbb{H}$ fissato è una mappa lineare

$$(Dg)_z : T_z\mathbb{H} \rightarrow T_{g(z)}\mathbb{H}$$

Osservazione 3.4.2. La derivata definisce un'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su $T\mathbb{H}$ infatti dati $g, h \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $(z, v) \in T\mathbb{H}$ abbiamo

$$\begin{aligned} (Dg)_{h(z)}((Dh)_z((z, v))) &= (Dg)_{h(z)}((h(z), h'(z)v)) \\ &= ((g(h(z)), g'(h(z))h'(z)v)) \\ &= (Dgh)_z((z, v)) \end{aligned}$$

Osservazione 3.4.3 (Relazione tra derivata di un'azione e di una curva). Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva liscia a tratti e $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ allora $D(g \circ \phi)(t) = (Dg)_{\phi(t)}D\phi(t)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} D(g \circ \phi)(t) &= (g \circ \phi(t), (g \circ \phi)'(t)) && \text{Def 3.1.10} \\ &= (g(\phi(t)), g'(\phi(t))\phi'(t)) \\ &= (Dg)_{\phi(t)}D\phi(t) \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.1. L'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su \mathbb{H} ha le seguenti proprietà

1.

$$\langle (Dg)_zh, (Dg)_zk \rangle_{g \cdot z} = \langle h, k \rangle_z$$

per ogni $h, k \in T_z\mathbb{H}$ e $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

2. L'azione è isometrica, ovvero

$$d_h(g \cdot z_0, g \cdot z_1) = d_h(z_0, z_1)$$

per ogni $z_0, z_1 \in T_z\mathbb{H}$ e $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. pt. 1 $h, k \in T_z\mathbb{H}$ ovvero $h = (z, v)$, $k = (z, w)$ con $v, w \in \mathbb{C}$. Sia

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned}
\langle (Dg)_z h, (Dg)_z k \rangle_{g \cdot z} &= \left\langle \left(g \cdot z, \frac{v}{(cz+d)^2} \right), \left(g \cdot z, \frac{w}{(cz+d)^2} \right) \right\rangle_{g \cdot z} && \text{Def 3.4.1} \\
&= \frac{1}{\Im(g \cdot z)^2} \left\langle \frac{v}{(cz+d)^2}, \frac{w}{(cz+d)^2} \right\rangle && \text{Def 3.2.1} \\
&= \left(\frac{\mathcal{I}(z)}{|cz+d|^2} \right)^{-2} \left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} v, \frac{1}{(cz+d)^2} w \right\rangle && \text{Oss 3.4.1} \\
&= \frac{1}{\Im(z)^2} \langle v, w \rangle = \langle h, k \rangle_z && \text{Def 3.2.1}
\end{aligned}$$

pt. 2

$$\begin{aligned}
L(g \circ \phi) &= \int_0^1 \|D(g \circ \phi)(t)\|_{g \circ \phi(t)} dt \\
&= \int_0^1 \|(Dg)_{\phi(t)} D\phi(t)\|_{g \cdot \phi(t)} dt && \text{Oss 3.4.3} \\
&= \int_0^1 \|D\phi(t)\|_{\phi(t)} dt && \text{pt. 1} \\
&= L(\phi)
\end{aligned}$$

Definiamo $A = \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \text{ continua e } C^1 \text{ a tratti} \mid \phi(0) = z_0 \wedge \phi(1) = z_1\}$ e $B = \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \text{ continua e } C^1 \text{ a tratti} \mid \phi(0) = g \cdot z_0 \wedge \phi(1) = g \cdot z_1\}$. E' immediato osservare che $B = \{g \circ \phi \mid \phi \in A\}$. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
d(g \cdot z_0, g \cdot z_1) &= \inf_{\phi \in B} L(\phi) \\
&= \inf_{\phi \in A} L(g \circ \phi) \\
&= \inf_{\phi \in A} L(\phi) = d(z_0, z_1)
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.2 (Caratterizzazione immaginari puri). Sia

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sia $z \in \mathbb{H}$ allora

$$\frac{d}{d\theta} \Im(R_\theta \cdot z) \Big|_{\theta=0} = 0 \iff \Re(z) = 0$$

Dimostrazione. Dall'Oss 3.4.1 abbiamo

$$\Im(R_\theta \cdot z) = \frac{\Im(z)}{|\sin \theta z + \cos \theta|^2} = \frac{\Im(z)}{(\sin \theta z + \cos \theta)(\sin \theta \bar{z} + \cos \theta)}$$

quindi

$$\frac{d}{d\theta} \Im(R_\theta \cdot z) = -\Im(z) \frac{(z\bar{z} - 1) \sin(2\theta) + (z + \bar{z}) \cos(2\theta)}{(z \sin(\theta) + \cos(\theta))^2 (\bar{z} \sin(\theta) + \cos(\theta))^2}$$

allora

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\theta} \Im(R_\theta \cdot z) \right|_{\theta=0} \\ \implies 0 &= -\Im(z)(z + \bar{z}) = -2\Im(z)\Re(z) \\ \iff 0 &= \Re(z) \qquad \qquad \qquad \Im(z) > 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.3. 1. L'azione è transitiva ovvero dati $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ esiste $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $g \cdot z_0 = z_1$.

2.

$$\text{Stab}_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}(i) = \text{PSO}(2)$$

dove $\text{PSO}(2) = \text{SO}(2)/\{\pm I_2\}$ con $\text{SO}(2) = \{R_\theta | \theta \in \mathbb{R}\}$. In particolare vale $\mathbb{H} \leftrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})/\text{PSO}(2)$.

3. Dati $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ esiste $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $y_1 > 1$ tali che $g \cdot i = z_0 \wedge g \cdot iy_1 = z_1$.

Dimostrazione. [pt. 1] E' sufficiente mostrare che per ogni $z = x + iy$ con $y > 0$ esiste $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ t.c. $g \cdot i = z$. Infatti $g, h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ t.c. $g \cdot i = z_0$ e $h \cdot i = z_1$ allora $(hg^{-1}) \cdot z_0 = h \cdot i = z_1$. La matrice che stiamo cercando è $\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$.

[pt. 2] Sia $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $g \cdot i = i$ allora per l'Osservazione 3.4.1 vale $|c + id| = 1$ ovvero esiste $\theta \in \mathbb{R}$ t.c. $c = \sin(\theta)$ e $d = \cos(\theta)$. Siccome vale

$$\frac{ai + b}{\sin(\theta)i + \cos(\theta)} = i$$

allora $a = \cos(\theta)$ e $b = -\sin(\theta)$, ovvero $g = R_\theta$ [pt. 3] Dal pt. 1 sappiamo che esiste g t.c. $g \cdot i = z_0$. A meno di sostituire g con gR_θ con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, possiamo supporre $\Im(g^{-1}(z_1))$ massimale tra $\{\Im(R_\theta g^{-1}(z_1)) : \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ (esiste perchè $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ compatto). Sia $\widetilde{x}_1 + i\widetilde{y}_1$ t.c.

$$g \cdot (\widetilde{x}_1 + i\widetilde{y}_1) = z_1$$

vogliamo mostrare che $\widetilde{x}_1 = 0$ Per costruzione abbiamo $\left. \frac{d}{d\theta} \Im(R_\theta \cdot g^{-1}(z_1)) \right|_{\theta=0} = 0$ quindi dal Lemma 3.4.2 si ha $\widetilde{x}_1 = \Re(g^{-1}(z_1)) = 0$. Inoltre abbiamo $\widetilde{y}_1 > 1$ infatti se $\widetilde{y}_1 < 1$ allora

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot i\widetilde{y}_1 = -\frac{1}{i\widetilde{y}_1} = i \left(\frac{1}{\widetilde{y}_1} \right) > i\widetilde{y}_1$$

il che è assurdo per massimalità di \widetilde{y}_1 .

□

3.5 Azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su $T^1\mathbb{H}$

Dall'Osservazione 3.4.2 sappiamo che la derivata definisce un'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su $T\mathbb{H}$. Inoltre per quanto visto nel Lemma 3.4.1 preserva il prodotto scalare quindi definisce un'azione sul fibrato tangente unitario $T^1\mathbb{H}$.

Proposizione 3.5.1. L'azione è semplicemente transitiva ovvero dati $h_0, h_1 \in T^1\mathbb{H}$ esiste unico $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $g \cdot h_0 = h_1$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 parti

1. Per ogni $v \in \mathbb{C}$ t.c. $|v| = 1$ esiste unico $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ t.c. $Dg((i, i)) = (i, v)$
2. Per ogni $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ esiste unico $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ t.c. $Dg((i, i)) = (z, v)$.
3. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agisce semplicemente transitivamente su $T^1\mathbb{H}$

pt. 1 In particolare deve valere $g \cdot i = i$ ovvero $g = R_\theta$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

$$(DR_\theta)_i((i, i)) = \left(i, \frac{i}{(i \sin(\theta) + \cos(\theta))^2} \right) = \left(i, e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\theta)} \right)$$

Si vede facilmente che è transitiva mentre supponiamo $e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\theta)} = i$ allora $\frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ovvero $\pi \in \mathbb{Z}\pi$ quindi $g = R_\theta = \pm I_2$.

pt. 2 Per il Lemma 3.4.3 esiste g t.c. $g \cdot i = z$ quindi $Dg((i, k)) = (z, kg'(i))$ con $g'(i) \in \mathbb{C}$. Siccome $|v| = \left| \frac{v}{g'(i)} \right| = 1$ allora per il pt. 1 esiste h t.c. $Dh((i, i)) = \left(i, \frac{v}{g'(i)} \right)$ quindi $Dgh((i, i)) = Dg\left(\left(i, \frac{v}{g'(i)}\right)\right) = (z, v)$. Per mostrare l'unicità supponiamo $Dg_1((i, i)) = (z, v)$ allora $Dg^{-1}g_1((i, i)) = Dg^{-1}((z, v)) = (i, v(g^{-1})'(z)) = \left(i, \frac{v}{g'(i)}\right)$ dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema di invertibilità locale per funzioni olomorfe. Per l'unicità del pt. 1 concludiamo $g^{-1}g_1 = h$ ovvero $g_1 = gh$.

pt. 3 Devo mostrare che dati $(z_0, v_0), (z_1, v_1) \in T^1\mathbb{H}$, esiste unico g t.c. $Dg((z_0, v_0)) = (z_1, v_1)$. Per il pt. 2 esistono g_0, g_1 t.c. $Dg_0((i, i)) = (z_0, v_0)$ e $Dg_1((i, i)) = (z_1, v_1)$ da cui segue $Dg_1g_0^{-1}((z_0, v_0)) = Dg_1((i, i)) = (z_1, v_1)$. Per mostrare l'unicità, supponiamo $Dh((z_0, v_0)) = (z_1, v_1)$ allora $Dhg_0((i, i)) = (z_1, v_1)$ che per unicità del pt. 2 implica $hg_0 = g_1$ ovvero $h = g_1g_0^{-1}$. \square

Corollario 3.5.1.

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow T^1(\mathbb{H}) \\ g &\mapsto Dg((i, i)) \\ g_{(z, v)} &\leftarrow (z, v) \end{aligned}$$

con $g_{(z, v)}$ definito nel seguente modo

$$g_{(z, v)} = \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} x \cos\left(\frac{\bar{\theta}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{\bar{\theta}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) & x \cos\left(\frac{\bar{\theta}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{\bar{\theta}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{\bar{\theta}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\bar{\theta}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

con $(x + iy, ye^{i\bar{\theta}}) = (z, v)$

3.5.1 Misura su $T^1\mathbb{H}$ invariante per l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Proposizione 3.5.2. Il volume iperbolico

$$dV = \frac{1}{y^2} dx dy d\theta$$

su $T^1\mathbb{H}$, dove θ è l'angolo del vettore unitario tangente a $z = x + iy$, è invariante rispetto all'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Per un immediato corollario della Proposizione 2.2.5 è sufficiente dimostrare che per ogni $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e funzione continua $f : T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ a supporto compatto vale $\int_{T^1\mathbb{H}} f \circ g dV = \int_{T^1\mathbb{H}} f dV$. Per farlo divideremo la dimostrazione in punti. Siano $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta} : T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in T^1\mathbb{H}$ vale $k = (\bar{x}(k) + i\bar{y}(k), \bar{y}(k)e^{i\bar{\theta}(k)})$.

1. $\det(dg(x + iy)) = \frac{1}{|c(x + iy) + d|^4}$
2. $\frac{d}{d\theta} \bar{\theta}(Dg(k)) = 1$
3. $\det(d(Dg)(k)) = \frac{1}{|c(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)) + d|^4}$
4. $\bar{y}(Dg(k))^2 = \bar{y}(k)^2 \det d(Dg(k))$

pt 1)

Essendo g olomorfa abbiamo

$$\det |dg(x + iy)| = |g'(x + iy)|^2 = \frac{1}{|c(x + iy) + d|^4}$$

pt 2)

Sia $g'(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)) = \rho' e^{i\theta'}$ allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \bar{\theta}(Dg(k)) &= \frac{d}{d\theta} \bar{\theta}(g(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)), g'(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k))\bar{y}(k)e^{i\bar{\theta}(k)})) \\ &= \frac{d}{d\theta} \theta' + \theta = 1 \end{aligned}$$

pt 3)

Se scriviamo $d(Dg)$ nelle coordinate (x, y, θ) otteniamo

$$d(Dg)(k) = \left(\begin{array}{c|c} dg(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)) & 0 \\ \star & 1 \end{array} \right)$$

il cui determinante è quindi $\frac{1}{|c(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)) + d|^4}$ per il pt. 2.

pt 4)

$$\begin{aligned} \bar{y}(Dg(k)) &= \bar{y}(Dg(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k), \bar{y}(k)e^{i\bar{\theta}(k)})) \\ &= \frac{\bar{y}(k)}{|c(\bar{x}(k) + i\bar{y}(k)) + d|^2} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'Osservazione 3.4.1. Si conclude usando il pt. 3. Concludiamo la dimostrazione

$$\begin{aligned}
 \int_{T^1\mathbb{H}} f \circ Dg \, dV &= \int_{T^1\mathbb{H}} f(Dg(k)) \frac{1}{(\bar{y}(k))^2} dx dy d\theta \\
 &= \int_{T^1\mathbb{H}} f(Dg(k)) \frac{\frac{1}{|\frac{c(\bar{x}(k)+i\bar{y}(k))+d|^4}}}{\frac{1}{(\bar{y}(k))^2}}}{\frac{1}{|\frac{c(\bar{x}(k)+i\bar{y}(k))+d|^4}}} dx dy d\theta \\
 &= \int_{T^1\mathbb{H}} f(k') \frac{1}{(y(k'))^2} dx' dy' d\theta' = \int_{T^1\mathbb{H}} f dV
 \end{aligned}$$

□

3.5.2 Misura di Haar su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Siccome $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ allora considerando $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con la topologia descritta nella Sezione ereditiamo su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ una topologia quoziente.

Definizione 3.5.1 (Misura di Haar). Una *misura di Haar* su un gruppo topologico localmente compatto è una misura di Radon invariante per moltiplicazione a sinistra.

Siccome il volume iperbolico è invariante per l'azione sinistra di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su $T^1\mathbb{H}$ per la Proposizione 3.5.2 allora identificando $T^1\mathbb{H}$ con $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ come nella Proposizione 3.5.1 ottengo una misura di Haar su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ che indicheremo d'ora in avanti con $m_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$.

3.6 Cammini geodetici nel semipiano di Poincaré

Definizione 3.6.1 (Geodetica semipiano di Poincaré). $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ curva liscia a tratti è una *geodetica* nel semipiano di Poincaré se $L_h(\phi) = d_h(\phi)$

Definiamo $\mathbb{I} = \{iy \in \mathbb{H} | y > 0\}$

Lemma 3.6.1 (Geodetica in \mathbb{I}). Sia $a \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\begin{aligned}
 \phi : [0, d] &\rightarrow \mathbb{H} \\
 t &\mapsto y_0 e^{at} i
 \end{aligned}$$

ϕ è l'unica geodetica da $y_0 i$ a $y_0 e^{ad} i$ di velocità costante a .

Dimostrazione. Verifichiamo che ϕ ha velocità costante a ovvero $\|D\phi(t)\|_{\phi(t)} = a$.

$$\begin{aligned}
 \|D\phi(t)\|_{\phi(t)} &= \frac{1}{\sqrt{\Im(\phi(t))}} \|\phi'(t)\| && \text{Oss 3.2.1} \\
 &= (y_0 e^{at})^{-1} \|y_0 a e^{at} i\| = a
 \end{aligned}$$

Segue

$$L(\phi) = \int_0^d \|D\phi(t)\|_{\phi(t)} dt = ad$$

Verifichiamo che sia una geodetica. Sia $\eta : [0, d] \rightarrow \mathbb{H}$ curva da $y_0 i$ a $y_0 e^{ad} i$ con $\eta(t) = \eta_x(t) + i\eta_y(t)$ con $\eta_x(t), \eta_y(t) \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
 L(\eta) &= \int_0^d \|D\eta(t)\|_{\eta(t)} dt \\
 &= \int_0^d \frac{1}{\eta_y(t)} \|\eta'(t)\| dt && \text{Oss 3.2.1} \\
 &\geq \int_0^d \frac{1}{\eta_y(t)} |\eta'_y(t)| dt \\
 &\geq \int_0^d \frac{\eta'_y(t)}{\eta_y(t)} dt \\
 &= \int_{\eta_y(0)}^{\eta_y(d)} \frac{1}{y} dy \\
 &= \log(y_0 e^{ad}) - \log(y_0) = ad
 \end{aligned}$$

quindi ϕ è geodetica. Per quanto riguarda l'unicità è sufficiente osservare che l'uguaglianza regge se e solo se $\eta_x(t) = \eta'_x(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$. Infatti sapendo che $\eta(t) = i\eta_y(t)$ ha velocità costante a , ci ritroviamo a risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{|\eta'_y(t)|}{\eta_y(t)} = \|D\eta(t)\|_{\eta(t)} = a \\ \eta_y(0) = y_0 i \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\eta_y = y_0 e^{at} i$ ovvero $\eta = \phi$. □

Per quanto appena dimostrato

$$\begin{aligned}
 \phi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{H} \\
 t &\mapsto y_0 \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^t i = y_0 e^{\log(y_1/y_0)t} i
 \end{aligned}$$

è una geodetica da $y_0 i$ a $y_0 \frac{e^{\log y_1}}{e^{\log y_0}} i = y_1 i$ di velocità $\log y_1 - \log y_0$.

Lemma 3.6.2 (Geodetica caso generale). Per ogni due punti $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ esiste unico $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{aligned}
 \phi : [0, \log(y_1)] &\longrightarrow \mathbb{H} \\
 t &\longmapsto g \cdot (e^t i)
 \end{aligned}$$

con $y_1 > 1$ è l'unica geodetica di velocità unitaria da z_0 a z_1 .

Dimostrazione. Da 3.6.1 sappiamo che

$$\begin{aligned}
 \phi_0 : [0, \log(y_1)] &\longrightarrow \mathbb{H} \\
 t &\longmapsto e^t i
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

è una geodetica di velocità unitaria da i a iy_1 . Dal pt.3 del Lemma 3.4.3 sappiamo che esiste $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $g \cdot i = z_0$ e $g \cdot y_1 i = z_1$ con $y_1 > 1$. Quindi

$$\begin{aligned} \phi: [0, \log(y_1)] &\longrightarrow \mathbb{H} \\ t &\longmapsto g \cdot \phi_0(t) = g \cdot (e^t i) \end{aligned} \quad (3.5)$$

per il Lemma 3.4.1 è un cammino da z_0 a z_1 di velocità unitaria. Mostriamo che è una geodetica. Dal Lemma 3.6.1 e Lemma 3.4.1 abbiamo $L(\phi) = L(\phi_0) = d(i, iy_1) = d(z_0, z_1)$ ovvero ϕ è una geodetica. La dimostrazione dell'unicità la dividiamo in due parti.

1. I cammini geodetici da z_0 a z_1 sono della forma $t \mapsto g \cdot (e^t i)$ con $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$
2. Tale g è unico in $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$

[pt. 1] Sia ψ un cammino geodetico da z_0 a z_1 di velocità unitaria. Sia g come nel pt.3 del Lemma 3.4.3 allora $t \mapsto g^{-1}\psi(t)$ è un cammino geodetico da i a iy_1 con $y_1 > 1$ di velocità unitaria. Per l'unicità nel Lemma 3.6.1 concludiamo $g^{-1}\psi(t) = e^t i$ ovvero $\psi(t) = g \cdot (e^t i)$. **[pt. 2]** Sia $t \mapsto g_1 \cdot (e^t i)$ un altro cammino geodetico di velocità unitaria da z_0 a z_1 . Sia $k = g^{-1}g_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, vogliamo dimostrare $g = g_1$ ovvero $k = I_2$. Sappiamo che $k \cdot (e^t i) = e^t i$ quindi

$$\begin{aligned} (e^t i, e^t i) &= D(k \circ (e^t i))(t) && \text{Oss 3.4.3} \\ &= (Dk)_{e^t i} D(e^t i) \\ &= (Dk)_{e^t i} (e^t i, e^t i) \end{aligned}$$

In particolare per $t = 0$ vale $(i, i) = (Dk)_i(i, i)$ quindi $k = I_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ per la Proposizione 3.5.1. \square

Corollario 3.6.1. Le geodetiche sono rette verticali o semicirconferenze con centro reale

Dimostrazione. Dal Lemma 3.6.2 sappiamo che tutte le geodetiche sono contenute nell'immagine di \mathbb{I} tramite l'azione di $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Per vedere come sono fatte è sufficiente studiare come agiscono i generatori di $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Riprendendo la notazione della Proposizione 3.3.1 indichiamo con $\{w\} \cup U$ l'insieme che genera $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Sia A un generico elemento di U allora

$$A \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = z + b$$

quindi

$$\begin{aligned} x &= d \xrightarrow{A} x = d + b \\ (x - d)^2 + y^2 &= r^2 \xrightarrow{A} (x - (d + b))^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}$$

ovvero A manda rette in rette e semicirconferenze con centro reale in semicirconferenze con centro reale. Rimane da mostrare che w manda rette verticali o semicirconferenze con centro reale in rette verticali o semicirconferenze con centro reale. L'azione di w scritta in coordinate polari è

$(r, \theta) \mapsto \left(\frac{1}{r}, \pi - \theta\right)$. Sia le rette verticali che le semicirconferenze con centro reale possono essere definiti da equazioni della forma

$$ar^2 + br \cos \theta + c = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Il risultato cercato segue osservando che

$$ar^2 + br \cos \theta + c = 0 \xrightarrow{w} cr^2 - br \cos \theta + a = 0$$

□

Capitolo 4

$$X_2 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Per alleggerire la notazione d'ora in poi ci riferiremo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ con X_2 . A prima vista ci sono due modi di intendere il quoziente:

1. Quozientare $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ identificato come $T^1\mathbb{H}$ per l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tramite la trasformazione di Möbius.
2. X_2 come quoziente di gruppi

Verifichiamo che sono la stessa cosa. Indichiamo con π_1, π_2 rispettivamente i passaggi al primo e secondo quoziente

$$\begin{aligned} \pi_1(g) = \pi_1(h) &\iff \exists k \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \text{ t.c. } Dg((i, i)) = Dk(Dh((i, i))) \\ &= Dkg((i, i)) \\ &\iff \exists k \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \text{ t.c. } g = kh \\ &\iff \pi_2(g) = \pi_2(h) \end{aligned}$$

4.1 Misura su X_2

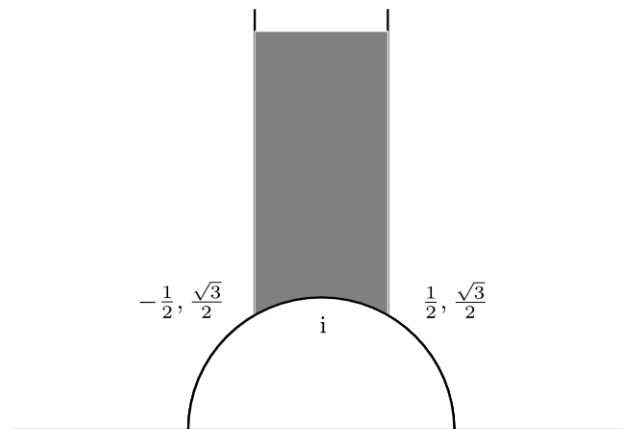
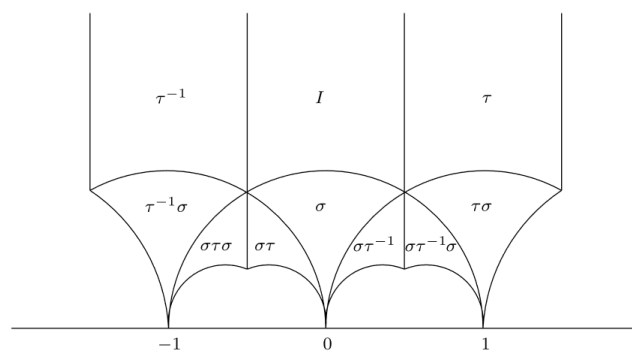
Proposizione 4.1.1. L'insieme $E = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ mostrato in Figura 4.1 è un dominio fondamentale per l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ su \mathbb{H} nel seguente senso:

$$A(\gamma E \cap E) = 0 \tag{4.1}$$

per $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \{I_2\}$, e

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} \gamma E \tag{4.2}$$

Gli insiemi F e γF per $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ con la proprietà 4.1 sono chiamati *quasi disgiunti*. Questa proprietà va interpretata come una sostituta della più restrittiva richiesta che $\gamma E \cap E = \emptyset$. Per capire come quest'azione agisce su \mathbb{H} , consideriamo l'azione di alcuni elementi di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ su E . Per quanto studiato nella Proposizione 3.3.1, i generatori di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sono

Figura 4.1: Un dominio fondamentale per l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ su \mathbb{H} .Figura 4.2: L'azione di σ e τ su E .

$\{w\} \cup U \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \{\tau, \sigma\}$ con $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le immagini di E mediante alcuni elementi di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sono mostrate in Figura 4.2.

Dimostrazione. 4.1.1 Sia $z \in \mathbb{H}$. Prima mostriamo che esiste un elemento $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ con $\gamma z \in E$, dimostrando 4.2. Ricordiamo che per $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\Im(\gamma z) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} \quad (4.3)$$

Siccome c e d sono interi, esiste una matrice $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ con

$$\Im(\gamma z) = \max \{ \Im(\eta z) \mid \eta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \} \quad (4.4)$$

Scegliamo $k \in \mathbb{Z}$ tale che $|\Re(\tau^k \gamma z)| \leq \frac{1}{2}$. Affermiamo che $w := \tau^k \gamma z \in E$: se $|w| < 1$ allora $\Im(-\frac{1}{w}) > \Im(z)$, contraddicendo 4.4. Quindi $|w| \geq 1$ e $w \in E$ come richiesto. Siano $z, w \in E$ con $\gamma z = w$ per qualche $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Affermiamo che vale una sola delle seguenti condizioni:

$|\Re(z)| = \frac{1}{2}$ (e $z = w \pm 1$), oppure $|z| = 1$ (e $w = -\frac{1}{z}$). Questo mostra 4.1. Sia $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Se $\Im(\gamma z) < \Im(z)$ sostituiamo (z, γ) con $(\gamma(z), \gamma^{-1})$ in modo da poter assumere senza perdita di generalità che $\Im(\gamma z) \geq \Im(z)$. Usando (4.3) otteniamo quindi $|cz + d| \leq 1$. Siccome $z \in E$ e $d \in \mathbb{Z}$, è necessario che $|c| < 2$, quindi $c = 0, \pm 1$. Se $c = 0$, allora $d = \pm 1$ e γ è la traslazione per $\pm b$. Per ipotesi $|\Re(z)| \leq \frac{1}{2}$ e $|\Re(\gamma z)| \leq \frac{1}{2}$ quindi $b = 0$ e $\gamma = I_2$ oppure $b = \pm 1$ e $\{\Re(z), \Re(\gamma z)\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Consideriamo $\kappa = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se $c = 1$, la condizione $z \in E$ e $|z + d| \leq 1$ implica che $d = 0$ a meno che $z = \kappa$ o $z = -\bar{\kappa}$. Prendendo $d = 0$ si forza $|z| \leq 1$ quindi $|z| = 1$. Se $c = -1$ allora sostituiamo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, che definisce lo stesso elemento di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, e riappliciamo le stesse argomentazioni sopradescritte. Questo mostra che E è un dominio fondamentale nel senso dato. \square

Corollario 4.1.1. E' possibile dare una stima del volume di E rispetto alla misura $dA = \frac{1}{y^2} dx dy$ infatti notando che per ogni $z \in E$ vale $\Im(z) \geq \sqrt{3}/2$ vale

$$\begin{aligned} \text{area}(E) &= \int_{z \in E} dA \leq \int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{3}} < \infty. \end{aligned}$$

Come per quanto fatto precedentemente considerando la derivata posso estendere l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ su \mathbb{H} a $T^1\mathbb{H}$. Posso quindi riciclare quanto appena visto per dare una stima del volume in $T^1\mathbb{H}$, rispetto alla misura $m_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ descritta nella Sezione 3.5.2, di un dominio fondamentale \tilde{F} dell'estensione in funzione del volume di E . Infatti posso assumere $\tilde{F} = F \times \{v \in \mathbb{C} \mid |v| = 1\} \subset T^1\mathbb{H}$ quindi $\text{vol}(\tilde{F}) = 2\pi \text{area}(E) < \infty$ con vol il volume iperbolico.

Proposizione 4.1.2. La misura di Haar $m_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ definita nella Sezione 3.5.2 induce una misura m_{X_2} finita su X_2 con

$$m_{X_2}(B) = m_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(\pi^{-1}(B) \cap \{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid Dg((i, i)) \in \tilde{F}\})$$

per ogni misurabile $B \subset X_2$. In più, la $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -azione destra $R_g(x) = xg^{-1}$ per ogni $x \in X_2$ e $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ lascia la misura m_{X_2} invariata.

Capitolo 5

Flusso geodetico

5.1 Flusso su $T^1\mathbb{H}$

Definizione 5.1.1 (Flusso geodetico). Sia $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ e $\phi_{(z,v)}$ l'unica geodetica di velocità unitaria tale che $D\phi_{(z,v)}(0) = (z, v)$. Definisco il *flusso geodetico* su $T^1\mathbb{H}$ come

$$g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$$

$$(t, (z, v)) \mapsto D\phi_{(z,v)}(t)$$

D'ora in poi con $g_t((z, v))$ indicheremo $g(t, (z, v))$.

Lemma 5.1.1. Sia $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ tale che $Dh((i, i)) = (z, v)$. Definiamo

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$$

Vale $g_t((z, v)) = D(ha_t^{-1})((i, i))$

Dimostrazione. Osserviamo che valgono

$$a_t^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

$$a_t^{-1} \cdot z = e^t z$$

$$(Da_t^{-1})_i(i, i) = (e^t i, e^t i) = g_t((i, i))$$

Quindi

$$\begin{aligned} g_t((z, v)) &= D\phi_{(z,v)}(t) \\ &= D(h \circ (e^t i))(t) && \text{Lemma 3.6.2} \\ &= Dh(D(e^t i)(t)) && \text{Oss 3.4.3} \\ &= Dh((e^t i, e^t i)) \\ &= Dh(Da_t^{-1}((i, i))) \\ &= D(ha_t^{-1})((i, i)) \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.1.1. Sia $k \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $(z, v), h$ come prima allora $g_t(k \cdot (z, v)) = D(kha_t^{-1})((i, i)) = Dk(g_t(z, v))$.

5.2 Relazione tra gli spazi studiati

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \tilde{D}: X_2 &\longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H} \\ \pi_1(g) &\longmapsto \pi_2(Dg((i, i))) \end{aligned} \quad (5.1)$$

è ben definita, infatti

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\pi_1(hg)) &= \pi_2(Dhg((i, i))) \\ &= \pi_2(Dh(Dg((i, i)))) \\ &= \pi_2(Dg((i, i))) = \tilde{D}(\pi_1(g)) \end{aligned}$$

Inoltre \tilde{D} fa commutare il seguente grafico

$$\begin{array}{ccc} g & \xleftarrow{\hspace{10em}} & Dg((i, i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\hspace{1.5em} D \hspace{1.5em}} & T^1\mathbb{H} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ X_2 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\hspace{1.5em} \tilde{D} \hspace{1.5em}} & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(g) & \xleftarrow{\hspace{1.5em} \tilde{D}(\pi_1(g)) = \pi_2(Dg((i, i))) \hspace{1.5em}} & \pi_2(Dg((i, i))) \end{array}$$

Per l'Osservazione 5.1.1 abbiamo che g_t passa al quoziente definendo un flusso \tilde{g}_t su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H}$. Il grafico appena presentato ci permette quindi di definire il flusso geodetico per tutti e 4 gli spazi presenti. Ora ci occuperemo di scrivere esplicitamente il flusso su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e X_2 .

5.3 Flusso su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Per quanto osservato prima la derivata mi fornisce un'identificazione tra $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e $T^1\mathbb{H}$ quindi g_t induce un flusso che indicheremo con $h \mapsto R_{a_t}h$.

Proposizione 5.3.1. R_{a_t} agisce su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ come moltiplicazione a destra per l'inversa di a_t ovvero $R_{a_t}(g) = ga_t^{-1}$ e vale $D(R_{a_t}(g))((i, i)) = g_t(Dg((i, i)))$.

Dimostrazione. Usando il Lemma 5.1.1 otteniamo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{R_{a_t}} & \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \\
 & & \downarrow (D\cdot)((i,i)) & & \uparrow ((D\cdot)((i,i)))^{-1} \\
 g & & T^1(\mathbb{H}) & \xrightarrow{g_t} & T^1(\mathbb{H}) \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 (Dg)((i,i)) = (z,v) & \xleftarrow{\hspace{10cm}} & g_t((z,v)) = (Dga_t^{-1})((i,i)) & &
 \end{array}$$

□

5.4 Flusso su X_2

Per quanto osservato nella Sezione 5.2 posso ricavarli esplicitamente il flusso \tilde{R}_{a_t} su X quotizzando R_{a_t} oppure componendo \tilde{g} con \tilde{D} . Verifichiamo che in effetti R_{a_t} passa al quoziente ovvero che la mappa

$$\tilde{R}_{a_t}(\pi_1(g)) = \pi_1(R_{a_t}(g))$$

per ogni $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, è ben definita. La buona definizione segue da

$$\tilde{R}_{a_t}(\pi_1(hg)) = \pi_1(hga_t^{-1}) = \pi_1(ga_t^{-1}) = \tilde{R}_{a_t}(\pi_1(g))$$

per ogni $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Riassumiamo in un grafico la relazione tra i flussi nei 4 spazi presentati

$$\begin{array}{ccc}
 R_{a_t}(g) = ga_t^{-1} & \xleftarrow{D(R_{a_t}(g))((i,i))=g_t(Dg(i,i))} & g_t(Dg((i,i))) = g \cdot (e^t i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & \begin{array}{ccc} \text{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{D} & T^1\mathbb{H} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ X_2 = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\tilde{D}} & \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H} \end{array} & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{R}_{a_t}(\pi_1(g)) = \pi_1(R_{a_t}(g)) & \xleftarrow{\tilde{D}(\tilde{R}_{a_t}(\pi_1(g)))=\tilde{g}_t(\pi_2(Dg((i,i)))} & \tilde{g}_t(\pi_2((z,v))) = \pi_2(g_t((z,v)))
 \end{array}$$

5.4.1 Ergodicità

Prima di procedere presentiamo un risultato tecnico.

Lemma 5.4.1. Per ogni $B_1, B_2 \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ misurabili con $m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}(B_1)m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}(B_2) > 0$, l'insieme

$$\{g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}(B_1 g \cap B_2) > 0\}$$

è non vuoto.

Teorema 5.4.1. Ogni elemento non banale del flusso (ovvero, la mappa \tilde{R}_{a_t} con $t \neq 0$) è una trasformazione ergodica su X_2 rispetto a m_{X_2} .

Dimostrazione. Normalizziamo m_{X_2} per assicurarci che $m_{X_2}(X_2) = 1$ e consideriamo $f : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile \tilde{R}_{a_t} -invariante per qualche $t \neq 0$. Fissiamo $\epsilon > 0$ e scegliamo un insieme compatto $K \subset X_2$ di misura $m_{X_2}(K) > 1 - \epsilon$ con la proprietà che $f|_K$ è continua (esiste per il teorema di Lusin). Affermiamo che

$$B = \left\{ x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \chi_K \left(\tilde{R}_{a_t}^\ell x \right) > \frac{1}{2} \right\}$$

ha misura $m_{X_2}(B) \geq 1 - 2\epsilon$. Infatti

$$g^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \chi_K \left(\tilde{R}_{a_t}^\ell x \right) \in [0, 1]$$

esiste quasi ovunque, e $\int g^* dm_{X_2} = m_{X_2}(K) \geq 1 - \epsilon$ per il Teorema di Birkhoff 2.3.3. Quindi

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon &\leq \int_B g^* dm_{X_2} + \int_{X_2 \setminus B} g^* dm_{X_2} \leq m_{X_2}(B) + \frac{1}{2} m_{X_2}(X_2 \setminus B) \\ &= m_{X_2}(B) + \frac{1}{2} (1 - m_{X_2}(B)) \\ &= \frac{1}{2} m_{X_2}(B) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e quindi $m_{X_2}(B) \geq 1 - 2\epsilon$ come voluto. Supponiamo che x e $y = \tilde{R}_{u^-(s)}x$ con $s \in \mathbb{R}$ e $u^-(s)$ come definiti come nella Proposizione 3.3.1 appartengano entrambi a B . Osserviamo che

$$f(x) = f \left(\tilde{R}_{a_t}^\ell(x) \right), f(y) = f \left(\tilde{R}_{a_t}^\ell(y) \right) \quad (5.2)$$

per ogni $\ell \geq 1$, per \tilde{R}_{a_t} -invarianza di f e

$$\begin{aligned} d_{X_2} \left(\tilde{R}_{a_t}^\ell(x), \tilde{R}_{a_t}^\ell(y) \right) &= d_{X_2} \left(x a_t^{-\ell}, x u^-(s) a_t^{-\ell} \right) \\ &\leq d_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})} \left(I_2, a_t^\ell u^-(s) a_t^{-\ell} \right) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

poichè

$$a_t^\ell u^-(s) a_t^{-\ell} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s}{e^{\ell t}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome sia per x che per y più della metà della loro orbita è in K , esiste una successione $\ell_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$ con

$$\tilde{R}_{a_t}^{\ell_n}(x), \tilde{R}_{a_t}^{\ell_n}(y) \in K.$$

Siccome K è compatto e f è continua su K allora ho che f è uniformemente continua su K in particolare

$$d_{X_2}(f(\tilde{R}_{a_t}^{\ell_n}(x)), f(\tilde{R}_{a_t}^{\ell_n}(y))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Insieme a (5.2) implica che

$$f(x) = f \left(\tilde{R}_{u^-(s)}(x) \right)$$

ogni volta che x e $\tilde{R}_{u^-(s)}(x)$ sono in B . Se $\epsilon_1 < \epsilon$ allora possiamo scegliere un sottoinsieme compatto $K_1 \subset X_2$ con

$$m_{X_2}(K_1) > 1 - \epsilon_1$$

per cui $f|_{K_1}$ è continua. Possiamo assumere $K \subset K_1$ siccome la continuità di $f|_K$ e $f|_{K_1}$ implica la continuità di $f|_{K \cup K_1}$. Quindi l'insieme B_1 definito da K_1 soddisfa $B_1 \supset B$. Per arbitrarietà di ϵ concludiamo che esiste un insieme X' con $m_{X_2}(X') = 1$ con la proprietà che per $x, y = \tilde{R}_{u^-(s)}(x) \in X'$ abbiamo $f(x) = f(y)$. Lo stesso argomento applicato a $\tilde{R}_{u^+(s)}^{-1}$ da la stessa conclusione per punti x e $y = \tilde{R}_{u^+(s)}(x)$ in X'' con X'' di misura 1. Prendendo l'intersezione $X_1 = X' \cap X''$ otteniamo entrambe le conclusioni per X_1 . Quindi se

$$g = u^+(s_2)u^-(s_1)$$

allora l'insieme

$$X_g = X_1 \cap \tilde{R}_{u^-(s_1)}^{-1}(X_1) \cap \tilde{R}_{u^+(s_2)u^-(s_1)}^{-1}(X_1)$$

ha misura 1 e affermiamo che soddisfa

$$f(x) = f(R_g(x))$$

per ogni $x \in X_g$. Infatti

$$\begin{aligned} x &\in X_1 \cap \tilde{R}_{u^-(s_1)}^{-1}(X_1) =: X_1^1 \subset X_1 \\ \implies x, \tilde{R}_{u^-(s_1)}(x) &\in X_1^1 \\ \implies f(\tilde{R}_{u^-(s_1)}(x)) &= f(x) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} x &\in X_1^1 \cap \tilde{R}_{u^+(s_2)u^-(s_1)}^{-1}(X_1) =: X_1^2 \subset X_1 \\ \implies \tilde{R}_{u^-(s_1)}(x) &\stackrel{x \in X_1^1}{\in} X_1^2 \wedge \tilde{R}_{u^+(s_2)u^-(s_1)}(x) = \tilde{R}_{u^+(s_2)}(\tilde{R}_{u^-(s_1)}(x)) \in X_1^2 \\ \implies f(R_g(x)) &= f(\tilde{R}_{u^+(s_2)u^-(s_1)}(x)) = f(\tilde{R}_{u^-(s_1)}(x)) \stackrel{x \in X_1^1}{=} f(x) \end{aligned}$$

Per quanto visto nella Proposizione 3.3.1 sappiamo che ogni elemento di $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ può essere scritto come prodotto di elementi di U^+ e U^- quindi f è R_g -invariante per ogni $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Assumiamo ora che $f : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ non è costante quasi ovunque rispetto a m_{X_2} . Allora esistono $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ insiemi disgiunti per cui

$$C_j = \{h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid f(\Gamma h) \in I_j\}$$

per $j = 1, 2$, sono nulli o conullti rispetto a $m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}$. Dal Lemma 5.4.1 esiste $g \in G$ con

$$m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}(C_1 \cap C_2 g) > 0.$$

Tuttavia abbiamo che l'insieme

$$D_g = \{h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mid \Gamma h \in X_g\}$$

è conullo rispetto a $m_{\text{PSL}_2(\mathbb{R})}$ quindi esiste $h \in C_1 \cap C_2 g \cap D_g$. Questo è assurdo poichè $f(\Gamma h) = f(\Gamma h g^{-1})$ per definizione di D_g e X_g , $f(\Gamma h) \in I_1$ e $f(\Gamma h g^{-1}) \in I_2$ per definizione di C_1 e C_2 . \square

Concludiamo questo capitolo sui flussi introducendo un ultimo flusso che ci sarà utile più avanti quando dimostreremo l'ergodicità della mappa di Gauss.

Lemma 5.4.2 (Flusso speciale). Sia $T : (Y, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ invertibile e invariante rispetto alla misura μ di probabilità e $r : Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione misurabile. Allora posso definire un flusso sullo spazio

$$X_r = \{(y, s) \mid y \in Y, 0 \leq s < r(y)\},$$

(con la misura m_r definita dalla restrizione di $\mu \times m_{\mathbb{R}}$ a X_r) come

$$T_t(y, s) = \begin{cases} (y, s+t) & 0 \leq s+t < r(y), \\ (Ty, s+t-r(y)) & 0 \leq s+t-r(y) < r(Ty), \\ (T^2y, s+t-r(y)-r(Ty)) & 0 \leq s+t-r(y)-r(Ty) < r(T^2y), \\ \vdots & \end{cases}$$

Presentiamo alcune proprietà del flusso speciale.

Lemma 5.4.3. Se m_r è finita, allora la mappa T è ergodica se e solo se il flusso $\{T_t\}$ è ergodico.

Capitolo 6

Ergodicità mappa di Gauss

In questa sezione useremo l'ergodicità del flusso geodetico su X_2 per dimostrare l'ergodicità della mappa di Gauss. Per ogni $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ con $v \neq \pm i$ sono associati due numeri reali y e \tilde{y} in modo univoco; rispettivamente il modulo della parte reale dei punti limite nel passato e futuro dell'unica geodetica $\phi_{(z,v)}$ associata a (z, v) . Per quanto visto nel Corollario 3.5.1 sappiamo scriverli esplicitamente in funzione di $(z, v) = (x + iy, ye^{i\theta})$. Sia $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ identificato con (z, v) , ovvero $Dg((i, i)) = (z, v)$ allora

$$\begin{aligned} y_{(z,v)} &:= \lim_{t \rightarrow +\infty} ga_t^{-1} \cdot i \\ &= \frac{x \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ \widetilde{y_{(z,v)}} &:= \lim_{t \rightarrow -\infty} ga_t^{-1} \cdot i \\ &= \frac{x \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

Definiamo ora

$$\begin{aligned} C_+ &= \{(ib, v) | \Re v > 0, \Im v < 0, y_{(z,v)} \in [0, 1), \tilde{y} \leq -1\} \\ C_- &= \{(ib, v) | \Re v < 0, \Im v < 0, y_{(z,v)} \in [0, -1), \tilde{y} \geq 1\} \\ C &= C_+ \cup C_- \end{aligned}$$

Sia $D = \{(z, v) \in T^1\mathbb{H} | \Re(z) = 0, v \neq \pm i\}$.

Osservazione 6.0.1. Per $(ib, be^{i\theta}) \in D \supset C$ abbiamo

$$\begin{aligned} y_{(ib, be^{i\theta})} &= b \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = b \tan\left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi)\right) \\ \widetilde{y_{(ib, be^{i\theta})}} &= b \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = b \cot\left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi)\right) \end{aligned}$$

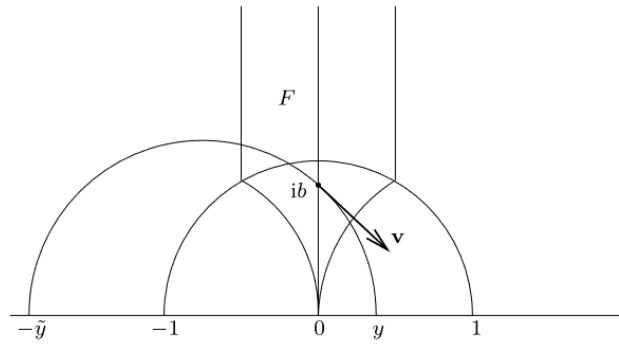


Figura 6.1: y e \tilde{y} associati alla geodetica; $(ib, v) \in C_+$

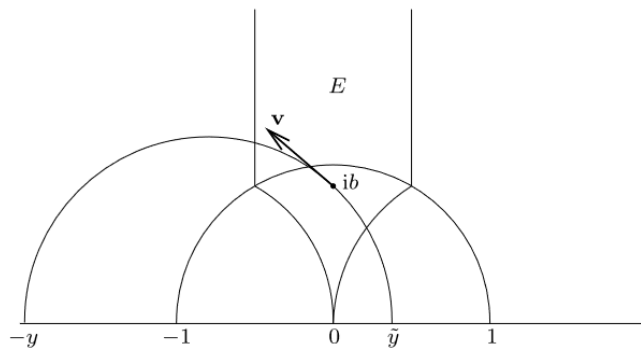


Figura 6.2: y e \tilde{y} associati alla geodetica; $(ib, v) \notin C_-$

Ci sono delle coordinate naturali (y, z, ϵ) per i punti (z, v) di C definite come segue

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\operatorname{sgn}(\tilde{y}_{(z,v)}) \\ y &= \epsilon y_{(z,v)} = |y_{(z,v)}| \\ z &= \frac{1}{\epsilon(y_{(z,v)} - \tilde{y}_{(z,v)})} \frac{1}{|y_{(z,v)}| + |\tilde{y}_{(z,v)}|}\end{aligned}$$

Definiamo $\tilde{Y} = \bar{Y} \times \{\pm 1\}$ con $\bar{Y} = \left\{ (y, z) \in [0, 1)^2 \mid 0 \leq z \leq \frac{1}{1+y} \right\}$.

Lemma 6.0.1. Per ogni $(y, z, \epsilon) \in \tilde{Y}$, $(ib, be^{i(\epsilon\bar{\theta} - \pi/2)}) \in C_\epsilon$ con $\bar{\theta} = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{yz+1}}\right) \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $b = \frac{(yz+1)^{\frac{3}{2}}}{z\sqrt{yz}}$, è l'unico elemento di C con coordinate naturali (y, z, ϵ) . Inoltre le coordinate naturali di un elemento di C sono in \tilde{Y}

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned}0 \leq z &\leq \frac{1}{1+y} \\ \implies \frac{1}{z} &\geq 1+y \\ \implies \tilde{y} = \frac{1}{z} - y &\geq 1\end{aligned}$$

Per quanto visto nell'Osservazione 6.0.1 è sufficiente risolvere

$$\begin{aligned}y &= b \left| \tan\left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi)\right) \right| \\ \tilde{y} &= b \left| \cot\left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi)\right) \right|\end{aligned}$$

E' un sistema del tipo

$$\begin{cases} c_1 = ab \\ c_2 = \frac{a}{b} \end{cases} \xrightarrow{b \neq 0} \begin{cases} c_1 = c_2 b^2 \\ a = c_2 b \end{cases} \xrightarrow{b > 0} \begin{cases} b = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \\ a = c_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \left| \tan\left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi)\right) \right| = \sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \\ b = \tilde{y} \sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} \arctan\left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}}\right) = \pm \frac{1}{4}(2\theta + \pi) \\ b = \tilde{y} \sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} \theta = \pm 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}}\right) - \frac{\pi}{2} \\ b = \tilde{y} \sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \end{cases}\end{aligned}$$

Ci resta da verificare che $\theta \in (-\pi; 0)$

$$\begin{aligned}
& y \in [0, 1) \wedge \tilde{y} \geq 1 \\
& \implies 0 \leq \frac{y}{\tilde{y}} < 1 \\
& \implies 0 \leq \arctan \left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \right) < \frac{\pi}{4} \\
& \implies \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \right) - \frac{\pi}{2} < 0 \\ -\frac{\pi}{2} \geq \theta = -2 \arctan \left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \right) - \frac{\pi}{2} > -\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Definendo $\bar{\theta} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{y}{\tilde{y}}} \right) \in [0, \frac{\pi}{2})$ e facendo un cambio di variabile si ottiene la prima parte dell'enunciato. Per l'ultima parte è sufficiente osservare che $y = |y_{(z,v)}| \in [0, 1)$ e $z = \frac{1}{|y|+|\tilde{y}|}$ con $|\tilde{y}| \geq 1$ quindi $0 \leq z \leq \frac{1}{1+\tilde{y}}$. \square

Studiamo come è fatta \hat{C} l'immagine di $\pi_2(C)$ rispetto all'identificazione di $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H}$ con \tilde{F} .

Lemma 6.0.2. $\hat{C} = \left\{ (ib, be^{i\theta}) \in \tilde{F} \mid \left| \theta \pm \frac{\pi}{2} \right| < 2 \arctan \left(\frac{1}{b} \right) \right\}$

Dimostrazione. Sia $x = (ib, be^{i\theta}) \in \tilde{F}$ allora $x \in \hat{C}$ se e solo se $\left| \theta \pm \frac{\pi}{2} \right| < 2 \arctan \left(\frac{1}{b} \right)$. Il problema è equivalente a verificare che

$$\begin{cases} y_x \in [0, 1) \\ \tilde{y}_x \in [1, \infty) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y_{D\sigma x} \in [0, 1) \\ \tilde{y}_{D\sigma x} \in [1, \infty) \end{cases}$$

con $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Siccome $\hat{C} \subset D$, dall'Osservazione (6.0.1) abbiamo

$$\begin{aligned}
y_x &= b \left| \tan \left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi) \right) \right| \\
\tilde{y}_x &= b \left| \cot \left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi) \right) \right|
\end{aligned}$$

Studiamo le condizioni implicate dai requisiti su y_x

$$\begin{aligned}
& 0 \leq y_x < 1 \\
& \implies b \left| \tan \left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi) \right) \right| < 1 \\
& \implies \left| \tan \left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi) \right) \right| < \frac{1}{b} \\
& \implies -\arctan \left(\frac{1}{b} \right) < \frac{1}{4}(2\theta + \pi) < \arctan \left(\frac{1}{b} \right) \\
& \implies -2\arctan \left(\frac{1}{b} \right) - \frac{\pi}{2} < \theta < 2\arctan \left(\frac{1}{b} \right) - \frac{\pi}{2} \\
& \implies \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| < 2\arctan \left(\frac{1}{b} \right)
\end{aligned}$$

Studiamo ora le condizioni implicate dai requisiti su \tilde{y}_x

$$\begin{aligned}
& 1 \leq \tilde{y}_x \\
& \implies \left| \tan \left(\frac{1}{4}(2\theta + \pi) \right) \right| \leq b \\
& \implies -\arctan(b) \leq \frac{1}{4}(2\theta + \pi) \leq \arctan(b) \\
& \implies -2\arctan(b) - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\arctan(b) - \frac{\pi}{2} \\
& \implies \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| \leq 2\arctan(b)
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$b \geq 1 \implies b \geq \frac{1}{b} \implies \arctan(b) \geq \arctan \left(\frac{1}{b} \right)$$

quindi l'unica condizione è $\left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| < 2\arctan \left(\frac{1}{b} \right)$. Ricordando che $D\sigma(x) = \left(\frac{1}{b}i, \frac{1}{b}e^{i(\theta+\pi)} \right)$, analogamente a quanto appena mostrato otteniamo

$$\begin{cases} \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < 2\arctan \left(\frac{1}{b} \right) \\ \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < 2\arctan(b) \end{cases} \iff \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < 2\arctan \left(\frac{1}{b} \right)$$

□

Se dimostro che $\pi_2|_C$ è bigettiva posso estendere queste coordinate a $\pi_2(C)$. Inoltre definendo $\widetilde{C}_\pm = \{g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) | Dg((i, i)) \in C_\pm\}$ e $\widetilde{C} = \widetilde{C}_+ \cup \widetilde{C}_+$, per quanto mostrato nella Sezione 5.2 eredito le coordinate naturali anche per i punti di $\pi_1(\widetilde{C})$.

Proposizione 6.0.1. $\pi_2|_C$ è bigettiva

Dimostrazione. E' ovviamente surgettiva quindi rimane da verificare l'injectività. Consideriamo un elemento $x \in \pi_2(C)$. Osserviamo che $\pi_2^{-1}(x) \cap D = \{(ib, v), \sigma \cdot (ib, v) = \left(\frac{i}{b}, -\frac{v}{b^2} \right)\}$ e uno solo dei due ha il vettore tangente con parte immaginaria negativa ed è quindi quello in C come si può vedere in Figura 6.4. □

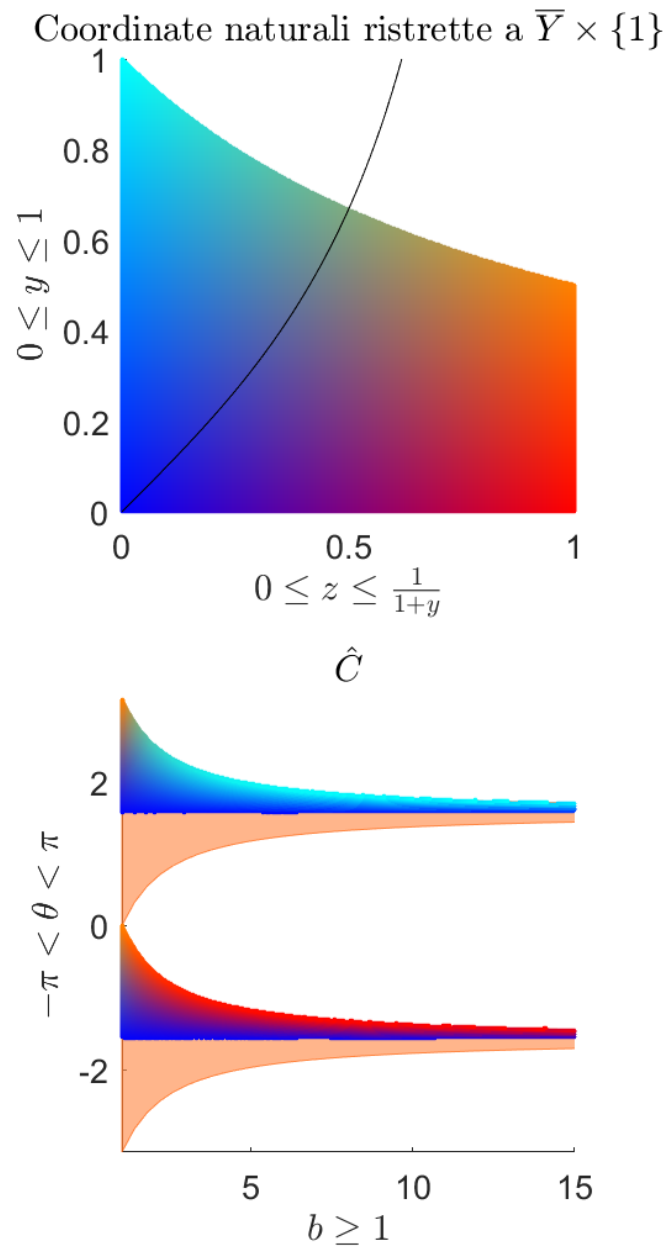


Figura 6.3: Come le coordinate naturali mappano $\hat{C}_+ \subset \hat{C}$ l'immagine di $\pi_2(C_+)$ rispetto all'identificazione di $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H}$ con \tilde{F} .

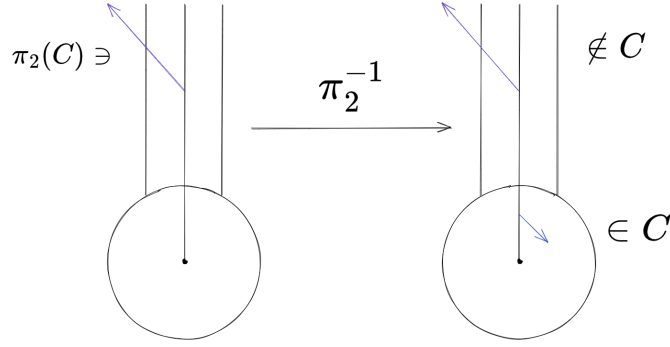


Figura 6.4: La controimmagine rispetto a π_2 di un elemento in $\pi_2(C)$, contiene un solo elemento di C .

Per quanto appena osservato posso quindi definire la mappa

$$\begin{aligned} x: \tilde{Y} &\longrightarrow X_2 \\ (y, z, \epsilon) &\longmapsto x \end{aligned} \quad (6.1)$$

con $x \in \pi_1(\tilde{C})$ l'unico elemento con coordinate naturali (y, z, ϵ) . Per $A \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash T^1\mathbb{H}, X_2$ definiamo

$$r_A = \inf\{t | t > 0, u_t(x) \in A\}$$

con u_t il flusso geodetico definito sullo spazio che contiene A .

Per quanto appena osservato si ha $r_{\pi_1(C)}(\pi_1(g)) = r_{\pi_2(C)}(\pi_2(Dg((i, i))))$ infatti $\tilde{g}_t(\pi_1(g)) \in \pi_2(C) \iff \tilde{R}_{a_t}(\pi_2(Dg((i, i)))) \in \pi_1(\tilde{C})$.

Sia $\bar{C} = \pi_2^{-1}(\pi_2(C))$ il saturato di C rispetto a π_2 .

Lemma 6.0.3. Per ogni $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $g \cdot \mathbb{I}$ è una retta verticale con parte reale intera oppure una semicirconferenza di centro reale con estremi contenuti in $[q, q + 1]$ per qualche $q \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Sia

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Sapendo che g manda geodetiche in geodetiche e sapendo che sono tutte e sole le rette verticali o semicirconferenze con centro reale, è sufficiente studiare il comportamento di $g \cdot ib$ per b che tende a 0 e a $+\infty$, gli "estremi" di \mathbb{I} . Sia $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ che agiscono rispettivamente come $z \mapsto -\frac{1}{z}$ e $z \mapsto z + 1$. Osservo che $\sigma \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$ quindi $g \cdot \mathbb{I} = g \cdot (\sigma \cdot \mathbb{I}) = g\sigma \cdot \mathbb{I}$. Consideriamo il caso $c = 0$. Siccome $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ allora $a = d = \pm 1$ ovvero g agisce come $z \mapsto z + b$. In questo caso $g \cdot \mathbb{I}$ è una retta verticale con parte reale b . Consideriamo il caso $d = 0$. Siccome $g\sigma = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$ possiamo ricondurci al caso precedente. Possiamo quindi supporre $c, d \neq 0$. Analogamente a quanto appena visto, a meno di moltiplicare a destra per σ posso supporre $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ e, poichè siamo in $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, $d > 0$. Osservo che $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{\det(g)}{cd} > 0$ quindi

$\text{sign}(c) = \text{sign}(\det(g))$. Sia $b = dq + r$ ovvero $\frac{b}{d} = q + \frac{r}{d}$ con $0 \leq r < d$. Considero

$$g' = \tau^{-q}g = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & dq+r \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-cq & r \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Osserviamo che $\frac{a-cq}{c} - \frac{r}{d} = \frac{\det(g')}{cd} = \frac{\det(g)}{cd} > 0$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{a-cq}{c} &= \frac{r}{d} + \frac{\det(g)}{cd} \\ &= \frac{cr + c\det(g)}{cd} \\ &= \frac{r + \det(g)}{d} \\ &\leq \frac{r+1}{d} \leq 1 \end{aligned}$$

Ho quindi che $g' \cdot \mathbb{I}$ è una semicirconferenza di centro reale con estremi $0 \leq \frac{r}{d} < \frac{a-cq}{c} \leq 1$ ovvero $g \cdot \mathbb{I} = \tau^q \cdot (g' \cdot \mathbb{I})$ una semicirconferenza di centro reale con estremi $q \leq \frac{r}{d} + q < \frac{a-cq}{c} + q \leq q+1$. \square

Lemma 6.0.4. Sia $(y, z, \epsilon) \in \tilde{Y}$, definisco $(ib, v) := (ib, be^{i\bar{\theta} - \frac{\pi}{2}})$ con $\bar{\theta}$ e b come nel Lemma 6.0.1, allora le coordinate naturali di $\tilde{g}_{r_{\pi_2(C)}}(\pi_2((ib, v)))$ sono $\left(\left\{\frac{1}{y}\right\}, y(1-yz), -\epsilon\right)$.

Dimostrazione. Sia $\bar{C} = \pi_2^{-1}(\pi_2(C))$ il saturato di C rispetto a π_2 . Sia $(z', v') = g_{r_{\bar{C}}}(D\sigma((ib, v)))$ e $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tale che $Dh((z', v')) \in C$. Siccome vale $\tilde{g}_t(\pi_2(g)) = \pi_2(g_t(g))$ allora l'enunciato è equivalente a dimostrare che le coordinate naturali di $Dh((z', v'))$ sono $\left(\left\{\frac{1}{y}\right\}, y(1-yz), -\epsilon\right)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} D\sigma((ib, v)) &= D\sigma\left(\left(ib, be^{i(\bar{\theta} - \pi/2)}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{b}i, \frac{1}{b}e^{i(\bar{\theta} + \pi/2)}\right) =: (ib', v') \end{aligned}$$

con $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2})$ quindi $\bar{\theta} + \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$. Definiamo $\tilde{y} = \frac{1}{z} + y$. Osserviamo che $g_t((ib, v))$ è una semicirconferenza di centro reale percorsa da $\tilde{y}_{(ib, v)} = -\epsilon\tilde{y}$ a $y_{(ib, v)} = \epsilon y$. Siccome vale

$$\begin{aligned} y_{(ib', v')} &= y_{D\sigma((ib, v))} = \sigma \cdot y_{(ib, v)} = -\frac{1}{y_{(ib, v)}} = -\frac{\epsilon}{y} \\ \tilde{y}_{(ib', v')} &= \tilde{y}_{D\sigma((ib, v))} = \sigma \cdot \tilde{y}_{(ib, v)} = -\frac{1}{\tilde{y}_{(ib, v)}} = \frac{\epsilon}{\tilde{y}} \end{aligned}$$

$g_t((ib', v'))$ è una semicirconferenza di centro reale percorsa da $\frac{\epsilon}{y}$ a $-\frac{\epsilon}{\tilde{y}}$. Sia \bar{t} t.c. $g_{\bar{t}}((ib', v')) = (\bar{z}, \bar{v})$ è l'ultima intersezione di $g_t((ib', v'))$ con una retta verticale con parte reale intera (esiste perchè $g_t((ib', v'))$ è una semicirconferenza con centro reale e $\Re(g_0((ib', v'))) = 0$). Supponiamo per assurdo che esiste $t' < \bar{t}$ t.c. $(z_1, v_1) := g_{t'}((ib', v')) \in \bar{C}$. Osserviamo che $g_{[0, \bar{t}]}((ib', v'))$ ha supporto in $S = \{(z, v) \in T^1\mathbb{H} \mid -\epsilon\Re(z) \in [0, -\epsilon\Re(\bar{z})]\}$. Per il Lemma 6.0.3 abbiamo che

$\overline{C} \cap S$ sono rette verticali con parte reale intera di modulo minore uguale a $-\epsilon \Re(\bar{z})$ oppure semicirconferenze di centro reale con estremi contenuti in $[q, q+1]$ con

$$q \in \begin{cases} [\Re(\bar{z}), 0) \cap \mathbb{Z} & \epsilon = 1 \\ [0, \Re(\bar{z})) \cap \mathbb{Z} & \epsilon = -1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi due casi:

1. (z_1, v_1) è un'intersezione con una semicirconferenza in $\overline{C} \cap S$.
2. (z_1, v_1) è un'intersezione con una retta verticale in $\overline{C} \cap S$.

pt. 1 Osserviamo che date due semicirconferenze di centro reale con estremi rispettivamente $e_1 < e_2$ e $e'_1 < e'_2$ con $e_1 \leq e'_1$, si intersecano se e solo se $e_1 = e'_1$ oppure $e_2 \leq e'_2$. E' quindi sufficiente osservare che

$$\begin{cases} -\frac{1}{y} < \Re(\bar{z}) < 0 < \frac{1}{y} & \epsilon = 1 \\ -\frac{1}{y} < 0 < \Re(\bar{z}) < \frac{1}{y} & \epsilon = -1 \end{cases}$$

per arrivare ad un assurdo.

pt. 2 Osserviamo che $0 < -\epsilon \Re(z_1) < -\epsilon \Re(\bar{z})$. Sia $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tale che $Dh((z_1, v_1)) \in C$ allora in particolare deve valere $Dh((z_1, v_1)) \in \{(z, v) \in T^1\mathbb{H} \mid \Re(z) = 0\}$ quindi $h = \tau^{-\Re(z_1)}, \sigma \tau^{-\Re(z_1)}$. Osserviamo che per definizione di (z_1, v_1) abbiamo

$$\begin{aligned} y_{(z_1, v_1)} &= y_{(ib', v')} = -\frac{\epsilon}{y} \\ \tilde{y}_{(z_1, v_1)} &= \tilde{y}_{(ib', v')} = \frac{\epsilon}{\bar{y}} \end{aligned}$$

Supponiamo $h = \tau^{-\Re(z_1)}$ allora

$$\begin{aligned} |y_{Dh((z_1, v_1))}| &= |\tau^{-\Re(z_1)} \cdot y_{(z_1, v_1)}| \\ &= \left| -\frac{\epsilon}{y} - \Re(z_1) \right| \\ &= \left| -\frac{\epsilon}{y} - \epsilon^2 \Re(z_1) \right| \\ &= \left| -\epsilon \left(\frac{1}{y} - (-\epsilon \Re(z_1)) \right) \right| \\ &= \frac{1}{y} - (-\epsilon \Re(z_1)) \\ &> -\epsilon \Re(z') - (-\epsilon \Re(z_1)) \geq 1 \end{aligned}$$

quindi $Dh((z_1, v_1)) \notin C$. Supponiamo allora $h = \sigma \cdot \tau^{-\Re(z_1)}$ allora

$$\begin{aligned}
 |\widetilde{y}_{Dh((z_1, v_1))}| &= \left| (\sigma \tau^{-\Re(z_1)}) \cdot \widetilde{y}_{(z_1, v_1)} \right| \\
 &= \left| \frac{\widetilde{y}}{\epsilon - \widetilde{y} \Re(z')} \right| \\
 &= \left| \frac{\widetilde{y}}{\epsilon - \widetilde{y} \epsilon^2 \Re(z')} \right| \\
 &= \left| \frac{\widetilde{y}}{\epsilon(1 + \widetilde{y}(-\epsilon \Re(z')))} \right| \\
 &= \frac{\widetilde{y}}{1 + \widetilde{y}(-\epsilon \Re(z'))} \\
 &\leq \frac{\widetilde{y}}{1 + \widetilde{y}} \leq 1
 \end{aligned}$$

quindi anche in questo caso $Dh((z_1, v_1)) \notin C$. Ci resta da verificare che $(\bar{z}, \bar{v}) \in \bar{C}$. Analogamente a quanto appena mostrato otteniamo

$$y_{D\tau^{-\Re(\bar{z})}((\bar{z}, \bar{v}))} = -\epsilon \left(\frac{1}{y} - (-\epsilon \Re(\bar{z})) \right) = -\epsilon \left\{ \frac{1}{y} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \widetilde{y}_{D\tau^{-\Re(\bar{z})}((\bar{z}, \bar{v}))} \right| &= \left| \tau^{-\Re(\bar{z})} \cdot \widetilde{y}_{(\bar{z}, \bar{v})} \right| \\
 &= \left| \frac{\epsilon}{\widetilde{y}} - \Re(\bar{z}) \right| \\
 &= \left| \frac{\epsilon}{\widetilde{y}} - \epsilon^2 \Re(\bar{z}) \right| \\
 &= \left| \epsilon \left(\frac{1}{\widetilde{y}} + (-\epsilon \Re(\bar{z})) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{\widetilde{y}} + (-\epsilon \Re(\bar{z})) \geq 1
 \end{aligned}$$

Per concludere mi rimane da dimostrare $\frac{1}{y} + (-\epsilon \Re(\bar{z})) = \frac{z}{1+zy} + (-\epsilon \Re(\bar{z})) = y(1 - yz)$

$$\frac{1}{\left| y_{D\tau^{-\Re(\bar{z})}((\bar{z}, \bar{v}))} \right| + \left| \widetilde{y}_{D\tau^{-\Re(\bar{z})}((\bar{z}, \bar{v}))} \right|} = y(1 - yz)$$

infatti

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\left(\frac{1}{y} - (-\epsilon \Re(\bar{z})) \right) + \left(\frac{1}{\widetilde{y}} + (-\epsilon \Re(\bar{z})) \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{\widetilde{y}}} = \frac{y\widetilde{y}}{y + \widetilde{y}} = y \left(1 - \frac{y}{y + \widetilde{y}} \right) = y(1 - yz)
 \end{aligned}$$

□

Posso quindi definire la mappa di primo ritorno in coordinate naturali come segue

$$\begin{aligned} \tilde{T}: \tilde{Y} &\longrightarrow \tilde{Y} \\ (y, z, \epsilon) &\longmapsto \left(\left\{ \frac{1}{y} \right\}, y(1 - yz), -\epsilon \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Osserviamo inoltre che per quanto osservato nella Sezione 5.2 ho che \tilde{T} codifica anche la mappa di primo ritorno a $\pi_1(\tilde{C})$ rispetto al flusso \tilde{g}_t .

Lemma 6.0.5. $\bar{T}: \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$ definita come la restrizione di \tilde{T} alle prime due coordinate è Lebesgue invariante

Dimostrazione. Lo Jacobiano di \bar{T} è Lebesgue quasi ovunque

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 1 - 2yz & -y^2 \end{pmatrix},$$

con determinante 1. □

Lemma 6.0.6. $\tilde{\mu} = \frac{1}{2\log(2)}(\lambda \times \nu)$ definita su \tilde{Y} con λ la misura di Lebesgue su \bar{Y} e ν quella che conta i punti su $\{\pm 1\}$, è una misura di probabilità \tilde{T} -invariante.

Dimostrazione. Sia $\pi: \tilde{Y} \rightarrow \bar{Y}$ la proiezione di \tilde{T} a \bar{Y} . Per definizione di misura prodotto abbiamo

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{1}{2\log(2)}(\lambda(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{1\})) + \lambda(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{-1\})))$$

per ogni A misurabile. Supponiamo valga

$$\pi(\tilde{T}^{-1}(A) \cap \bar{Y} \times \{\epsilon\}) = T^{-1}(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{-\epsilon\})) \quad (6.3)$$

allora

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\tilde{T}^{-1}(A)) &= \frac{1}{2\log(2)}(\lambda(\pi(\tilde{T}^{-1}(A) \cap \bar{Y} \times \{1\})) + \lambda(\pi(\tilde{T}^{-1}(A) \cap \bar{Y} \times \{-1\}))) \\ &= \frac{1}{2\log(2)}(\lambda(T^{-1}(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{1\}))) + \lambda(T^{-1}(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{-1\})))) \\ &= \frac{1}{2\log(2)}(\lambda(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{1\})) + \lambda(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{-1\}))) \\ &= \frac{1}{2\log(2)}\tilde{\mu}(A) \end{aligned}$$

Verifichiamo che $\tilde{\mu}$ è di probabilità, infatti

$$\tilde{\mu}(\tilde{Y}) = 2 \left(\frac{1}{2\log(2)} \lambda(\bar{Y}) \right) = 1$$

Ci resta quindi da dimostrare (6.3).

$$\begin{aligned} &x \in \pi(\tilde{T}^{-1}(A) \cap \bar{Y} \times \{\epsilon\}) \\ \iff &(x, \epsilon) \in \tilde{T}^{-1}(A) \\ \iff &(T(x), -\epsilon) = \tilde{T}((x, \epsilon)) \in A \\ \iff &T(x) \in \pi(A \cap \bar{Y} \times \{-\epsilon\}) \\ \iff &x \in T^{-1}(\pi(A \cap \bar{Y} \times \{-\epsilon\})) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato λ misura T -invariante per il Lemma 6.0.5. \square

Lemma 6.0.7. Se \tilde{T} è ergodica rispetto a $\tilde{\mu}$ su \tilde{Y} allora T è ergodica rispetto a μ su $Y = [0, 1]$, con $d\mu = \frac{1}{\log(2)} \frac{1}{1+x}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.1.1 è sufficiente dimostrare che per ogni $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ funzione misurabile se $\int_Y |f \circ T - f| d\mu = 0$ allora esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $\int_Y |f - c| d\mu = 0$. Definiamo $\tilde{f} : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\tilde{f}(y, z, \epsilon) = f(y)$ e supponiamo valga

$$\int_{\tilde{Y}=\bar{Y} \times \{\pm 1\}} |\delta \tilde{f} \circ \tilde{T} - \tilde{f} - c| d\tilde{\mu} = \int_Y |\delta f \circ T - f - c| d\mu \quad (6.4)$$

per $\delta = 0, 1$ e $c \in \mathbb{C}$. Osserviamo che \tilde{f} è \tilde{T} -invariante infatti se prendiamo $\delta = 1$ e $c = 0$ in (6.4), abbiamo

$$\int_{\tilde{Y}=\bar{Y} \times \{\pm 1\}} |\tilde{f} \circ \tilde{T} - \tilde{f}| d\tilde{\mu} = \int_Y |f \circ T - f| d\mu = 0$$

quindi, siccome \tilde{T} è ergodica rispetto a $\tilde{\mu}$, per il Lemma 2.1.1 esiste $c \in \mathbb{C}$ tale per cui

$$\int_{\tilde{Y}=\bar{Y} \times \{\pm 1\}} |\tilde{f} - c| d\tilde{\mu} = 0$$

E' quindi sufficiente prendere $\delta = 0$ in (6.4) per concludere. Concludiamo dimostrando (6.4)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Y}=\bar{Y} \times \{\pm 1\}} |\delta \tilde{f}(\tilde{T}((y, z, \epsilon))) - \tilde{f}((y, z, \epsilon))| d\tilde{\mu} &= \frac{1}{2 \log(2)} \int_{\bar{Y} \times \{\pm 1\}} |\delta f(T(y)) - f(y)| d(\lambda \times \nu) \\ &= \frac{1}{\log(2)} \int_{\bar{Y}} |\delta f(T(y)) - f(y)| d\lambda \\ &= \frac{1}{\log(2)} \int_Y \int_0^{\frac{1}{y+1}} |\delta f(T(y)) - f(y)| dx dy \\ &= \int_Y f(T(y)) \frac{1}{\log(2)} \frac{1}{y+1} dy = \int_Y |\delta f(T(y)) - f(y)| d\mu \end{aligned}$$

\square

La connessione tra la mappa di Gauss e il flusso geodetico su $X_2 = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ è descritta dal seguente lemma.

Teorema 6.0.1. La mappa di Gauss $T(y) = \{\frac{1}{y}\}$ su $[0, 1] = Y$ è ergodica rispetto alla misura μ .

Dimostrazione. Dimostreremo l'ergodicità per la mappa \tilde{T} , definita in (6.2), rispetto a $\tilde{\mu}$ da cui seguirà l'ergodicità della mappa di Gauss rispetto a μ per il Lemma 6.0.7. Definisco

$$\begin{aligned} \bar{r} : \tilde{T} &\longrightarrow \tilde{T} \\ (y, z, \epsilon) &\longmapsto r_{\pi_1(\tilde{C})}(x((y, z, \epsilon))) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Affermiamo che il flusso speciale $X_{\bar{r}}$ di $(\tilde{T}, \tilde{\mu})$ rispetto a \bar{r} , che posso definire grazie al Lemma 6.0.6, può essere immerso in X_2 . Infatti, per $(y, z, \epsilon, s) \in \tilde{Y} \times \mathbb{R}$ con $0 \leq s < \bar{r}((y, z, \epsilon))$ definiamo

$$\begin{aligned} \phi : X_{\bar{r}} &\longrightarrow X \\ (y, z, \epsilon, s) &\longmapsto \tilde{R}_{a_s}(x((y, z, \epsilon))) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Notiamo che $\phi((y, z, \epsilon, s)) \notin \pi_1(\tilde{C})$ a meno che $s = 0$. In generale, affermiamo che ϕ è iniettiva. Supponiamo che

$$x = \phi(y_1, z_1, \epsilon_1, s_1) = \phi(y_2, z_2, \epsilon_2, s_2)$$

Allora $s_1 = \min \{s \mid \tilde{R}_{a-s}(x) \in \pi_1(\tilde{C})\} = s_2$ poichè \bar{r} è definita per essere il tempo di primo ritorno da $\pi_1(\tilde{C})$ a $\pi_1(\tilde{C})$. Segue che $(y_1, z_1, \epsilon_1) = (y_2, z_2, \epsilon_2)$ sono le coordinate naturali del punto $\tilde{R}_{a-s_1}(x) \in \pi_1(\tilde{C})$. Affermiamo inoltre che $\phi(T_t(y, z, \epsilon, s)) = \tilde{R}_{a_t}(\phi(y, z, \epsilon, s))$. Questo significa che il flusso speciale rispetto a \bar{r} corrisponde al flusso geodetico mediante la mappa ϕ . Se $0 \leq s + t < \bar{r}((y, z, \epsilon))$, allora

$$\phi(T_t((y, z, \epsilon, s))) = \phi((y, z, \epsilon, s + t)) = \tilde{R}_{a_{s+t}}(x((y, z, \epsilon))) = \tilde{R}_{a_t}(\phi((y, z, \epsilon, s)))$$

Se $\bar{r}((y, z, \epsilon)) \leq s + t < \bar{r}(\tilde{T}((y, z, \epsilon)))$, allora

$$\begin{aligned} \phi(T_t((y, z, \epsilon, s))) &= \phi\left(\left(\tilde{T}(y, z, \epsilon), s + t - \bar{r}((y, z, \epsilon))\right)\right) \\ &= \tilde{R}_{a_{s+t-\bar{r}((y, z, \epsilon))}}(x(\tilde{T}(y, z, \epsilon))) \end{aligned}$$

Dalle proprietà del primo ritorno a $\pi_1(\tilde{C})$ discusse sopra e dalla definizione di \bar{r} come il tempo di primo ritorno, abbiamo

$$\tilde{R}_{a_{\bar{r}((y, z, \epsilon))}}(x(y, z, \epsilon)) = x(\tilde{T}(y, z, \epsilon))$$

Questo mostra quindi

$$\phi(T_t(y, z, \epsilon, s)) = \tilde{R}_{a_{s+t}}(x(y, z, \epsilon)) = \tilde{R}_{a_t}(\phi(y, z, \epsilon, s))$$

in questo caso. Gli altri casi seguono nello stesso modo. Descriveremo $\phi_*(m_{\bar{r}})$, dove m_{r_C} è la misura nel Lemma 5.4.2. $\phi_*(m_{\bar{r}})$ è una misura su X_2 e affermiamo che vale $\phi_*(m_{\bar{r}}) = cm_{X_2}$ per qualche $c > 0$. Per ora assumiamolo per vero e procediamo con la dimostrazione. Abbiamo quindi che il flusso speciale è isomorfo come sistema dinamico al flusso geodetico tramite ϕ . Dal Teorema 5.4.1 abbiamo l'ergodicità del flusso geodetico rispetto a m_{X_2} che, essendo una proprietà invariante per isomorfismo, implica l'ergodicità del flusso speciale rispetto a $m_{\bar{r}}$. Dal Lemma 5.4.3 questo da l'ergodicità di \tilde{T} rispetto a $\tilde{\mu}$. Ci resta quindi da dimostrare che $\phi_*(m_{\bar{r}}) = cm_{X_2}$ per qualche $c > 0$. Siccome ϕ è iniettiva, liscia e con Jacobiano non nullo, posso applicare il [EW11, Lemma A.26] e ottenere $\phi_*m_{\bar{r}}$ assolutamente continua rispetto a m_{X_2} . Dal Teorema di Radon-Nikodym otteniamo

$$d(\phi_*m_{r_C}) = Fdm_{X_2} \tag{6.7}$$

con $F \geq 0$ la derivata di Radon-Nikodym. Per concludere ci rimane da dimostrare che $F = c > 0$ finito. Siccome m_{r_C} è invariante rispetto al flusso speciale per costruzione e $\tilde{R}_{a_t} \circ \phi = \phi \circ T_t$ allora

$$\left(\tilde{R}_{a_t}\right)_* \phi_*m_{\bar{r}} = \left(\tilde{R}_{a_t}\phi\right)_* m_{\bar{r}} = (\phi T_t)_* m_{\bar{r}} = \phi_*m_{r_C}$$

che mostra l'invarianza di $\phi_*m_{r_C}$ rispetto al flusso geodetico. Applicando questo a (6.7) insieme all'invarianza di m_{X_2} , si ottiene

$$\int f \circ \tilde{R}_{a_t} F dm_{X_2} = \int f F dm_{X_2} = \int f F \circ \tilde{R}_{a_t} dm_{X_2}$$

per ogni misurabile $f \geq 0$. Questo implica che $F = F \circ \tilde{R}_{a_t}$ quasi ovunque per ogni $t \in \mathbb{R}$, che per l'ergodicità implica che $F = c$ quasi ovunque con c costante. \square

6.1 Velocità asintotica di convergenza dei convergenti

Proposizione 6.1.1. Per quasi ogni reale $x = [a_1, a_2, \dots] \in (0, 1)$ valgono

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} \quad (6.8)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \rightarrow -\frac{\pi^2}{6 \log 2} \quad (6.9)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima (6.8). Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} &= \frac{1}{a_1 + [a_2, \dots, a_n]} \\ &= \frac{1}{a_1 + \frac{p_{n-1}(Tx)}{q_{n-1}(Tx)}} \\ &= \frac{q_{n-1}(Tx)}{p_{n-1}(Tx) + q_{n-1}(Tx)a_1}, \end{aligned}$$

quindi $p_n(x) = q_{n-1}(Tx)$ siccome i convergenti sono in forma ridotta. Ricordiamo che vale $p_1 = q_0 = 1$. Per induzione su n segue

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \frac{p_{n-1}(Tx)}{q_{n-1}(Tx)} \dots \frac{p_1(T^{n-1}x)}{q_1(T^{n-1}x)}$$

infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{n+1}(x)} &= \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} \frac{1}{p_{n+1}(x)} \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} \frac{1}{q_n(Tx)} \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} \frac{1}{q_n(Tx)} \end{aligned}$$

Quindi

$$-\frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left[\frac{p_{n-j}(T^j x)}{q_{n-j}(T^j x)} \right].$$

Sia $h(x) = \log x$ (quindi $h \in L^1_\mu$). Allora

$$-\frac{1}{n} \log q_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h(T^j x)}_{S_n} - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\log(T^j x) - \log \left(\frac{p_{n-j}(T^j x)}{q_{n-j}(T^j x)} \right) \right]}_{R_n}$$

da una fattorizzazione di $-\frac{1}{n} \log q_n(x)$ nella media ergodica $S_n = A_h^n$ e un termine di resto R_n . Per ergodicità del sistema possiamo applicare il Teorema di Birkhoff (2.3.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo dimostrare $\frac{1}{n}R_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Ricordiamo che da (1.4) abbiamo

$$p_k \geq 2^{(k-2)/2}, q_k \geq 2^{(k-1)/2},$$

quindi, usando la disuguaglianza (1.8),

$$\left| \frac{x}{p_k/q_k} - 1 \right| = \frac{q_k}{p_k} \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{p_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Usando quanto appena osservato assieme al fatto che $|\log u| \leq 2|u - 1|$ se $u \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (che applichiamo alla sommatoria che segue per $j \leq n - 2$), otteniamo

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \log \frac{T^j x}{p_{n-j}(T^j x)/q_{n-j}(T^j x)} \right| \\ &\leq 2 \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \left| \frac{T^j x}{p_{n-j}(T^j x)/q_{n-j}(T^j x)} - 1 \right|}_{T_n} + \underbrace{\left| \log \frac{T^{n-1} x}{p_1(T^{n-1} x)/q_1(T^{n-1} x)} \right|}_{U_n}. \end{aligned}$$

Osserviamo che T_n può essere maggiorato da una costante

$$T_n \leq \sum_{j=0}^{n-2} \frac{2}{2^{n-j-1}} \leq 2$$

per ogni n , rimane da stimare U_n . Notiamo che

$$U_n = \left| \log \left[(T^{n-1} x) a_1(T^{n-1} x) \right] \right|,$$

e per la disuguaglianza (1.11) abbiamo

$$1 \geq (T^{n-1} x) a_1(T^{n-1} x) \geq \frac{a_1(T^{n-1} x)}{1 + a_1(T^{n-1} x)} \geq \frac{1}{2}$$

siccome $a_1(T^{n-1} x) \geq 1$. Quindi,

$$\left| \log \left[(T^{n-1} x) a_1(T^{n-1} x) \right] \right| \leq \log 2,$$

che completa la dimostrazione che

$$\frac{1}{n}R_n \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$ e quindi (6.8). L'equazione (6.9) segue da (6.8), siccome dalle disuguaglianze (1.8) e (1.9) abbiamo

$$\log q_n + \log q_{n+1} \leq -\log \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \log q_n + \log q_{n+2}.$$

□

Bibliografia

- [EW11] Manfred Leopold Einsiedler e Thomas Ward. *Ergodic theory: with a view towards number theory*. Graduate texts in mathematics v. 259. OCLC: ocn668211021. London ; New York: Springer, 2011. ISBN: 978-0-85729-020-5.