Flusso geodetico e frazioni continue

Davide Modesto

Relatore
Prof. Carlo Carminati

Università di Pisa

Anno accademico: 2021/2022

Una *frazione continua* è un'espressione della forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

che indicheremo anche con

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

con $a_n \in \mathbb{N}$ per $n \geq 1$ e $a_0 \in \mathbb{N}_0$. Scriveremo anche

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

per indicare le frazioni finite

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

I numeri a_n sono i *quozienti parziali* della frazione continua.

Teorema

Fissiamo una successione $(a_n)_{n\geq 0}$ *con* $a_0 \in \mathbb{N}_0$ *e* $a_n \in \mathbb{N}$ *per* $n \geq 1$.
Siano p_n, q_n *interi coprimi tali per cui*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

allora

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \;\; q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

Corollario

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n},$$

con

$$q_n \geq 2^{(n-2)/2}$$

per ogni $n \geq 1$.

Quindi

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, a_2, \dots] &= \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \dots, a_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n}\end{aligned}$$

Sia $Y = [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ e definiamo la mappa

$$\begin{aligned} T \colon Y &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{aligned}$$

Definiamo per $n \geq 1$

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor \text{ ovvero } T^n(x) = \frac{1}{T^{n-1}(x)} + a_n(x)$$

Lemma

Per ogni $x \in Y$ gli $(a_n(x))$ sono i quozienti parziali dello sviluppo in frazione continua di x, ovvero

$$x = [a_1(x), a_2(x), \ldots].$$

Il *Semipiano di Poincarè* è lo spazio metrico $(\mathbb{H}, d)$

1. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C}$
2. $d(z_0, z_1) = \inf_\phi L(\phi)$ con $\phi(0) = z_0$ e $\phi(0) = z_1$

dove

$$L(\phi) = \int_0^1 \|(\phi(t), \phi'(t))\|_{\phi(t)} dt$$

con $\|\cdot\|_z$ indotto da

$$\langle (z,u), (z,v) \rangle_z := \frac{\langle u, v \rangle}{(\Im z)^2}$$

Lemma

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *agisce su* $\mathbb{H}$ *mediante la trasformazione di Möbius così definita*

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

$-I_2$ agisce banalmente su $\mathbb{H}$, quindi (1) definisce un'azione del $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{H}$.

La *derivata Dg di g* definita come

$$\begin{aligned} Dg\colon T\mathbb{H} &\longrightarrow T\mathbb{H} \\ (z,v) &\longmapsto (g(z), g'(z)v) \end{aligned}$$

estende l'azione di $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ a $T\mathbb{H} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}$.
Inoltre

$$\langle Dg((z,v_0)), Dg((z,v_1))\rangle_{g\cdot z} = \langle (z,v_0),(z,v_1)\rangle_z$$

quindi definisce un'azione su $T^1\mathbb{H} = \{(z,v) \in T\mathbb{H} | \|v\|_z = 1\}$.
Inoltre l'azione è semplicemente transitiva quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) &\leftrightarrow T^1(\mathbb{H}) \\ g &\mapsto Dg((i,i)) \end{aligned}$$

Definizione (Geodetica semipiano di Poincaré)

Un cammino ϕ è una *geodetica* se $L(\phi) = d(\phi(0), \phi(1))$.

Lemma

Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ *allora*

$$\begin{aligned} \phi \colon [0, d(z_0, z_1)] &\longrightarrow \mathbb{H} \\ t &\longmapsto g \cdot (e^t i) \end{aligned}$$

con $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *è l'unica geodetica di velocità unitaria da* z_0 *a* z_1*.*

Proposizione

Il supporto di ogni geodetica è contenuto in una retta verticale oppure una semicirconferenza con centro reale.

Definizione (Flusso geodetico)

Definisco il *flusso geodetico* su $T^1\mathbb{H}$ come

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} &\to T^1\mathbb{H} \\ (t, (z, v)) &\mapsto (\phi_{(z,v)}(t), \phi'_{(z,v)}(t)) \end{aligned}$$

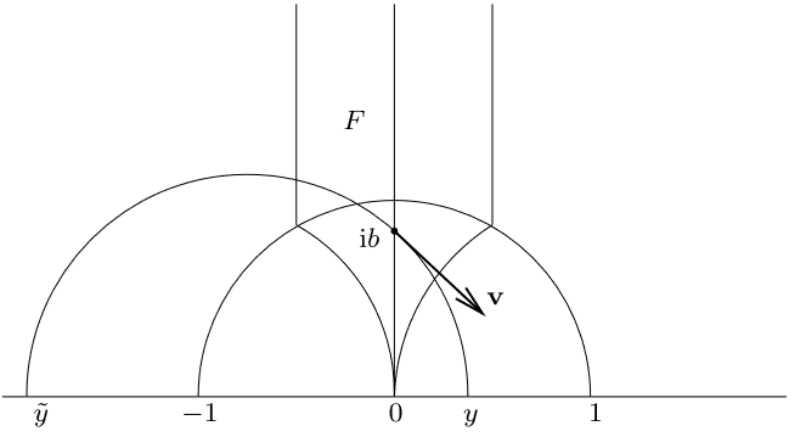
con $\phi_{(z,v)}$ l'unica geodetica di velocità unitaria t.c. $(\phi_{(z,v)}(0), \phi'_{(z,v)}(0)) = (z, v)$.

Inoltre $g_t(k \cdot (z, v)) = Dk(g_t(z, v))$ con $k \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ quindi g_t passa al quoziente definendo un flusso $\widetilde{g}_t$ su $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash T^1\mathbb{H}$ e quindi su $X_2 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ che si scrive esplicitamente come $\widetilde{R}_{a_t}(\pi(g)) = \pi(g a_t^{-1})$ con

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$$

Per ogni $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ con $v \neq \pm i$ sono associati due numeri reali $y_{(z,v)}$ e $\widetilde{y}_{(z,v)}$ in modo univoco

$$y_{(z,v)} := \lim_{t \to +\infty} \phi_{(z,v)}(t), \quad \widetilde{y_{(z,v)}} := \lim_{t \to -\infty} \phi_{(z,v)}(t)$$



Definiamo ora

$$C_+ = \{(ib, v) | \Re v > 0, \Im v < 0, y_{(z,v)} \in [0,1), \widetilde{y} \leq -1\}$$
$$C_- = \{(ib, v) | \Re v < 0, \Im v < 0, y_{(z,v)} \in [0,-1), \widetilde{y} \geq 1\}$$
$$C = C_+ \cup C_-$$

Ci sono delle coordinate naturali (y, z, ϵ) per i punti (z, v) di C

$$\epsilon = -\operatorname{sgn}(\widetilde{y}_{(z,v)})$$
$$y = \epsilon y_{(z,v)}$$
$$z = \frac{1}{\epsilon(y_{(z,v)} - \widetilde{y}_{(z,v)})}$$

Siccome $\pi|C$ è bigettiva posso estenderle a $\pi(C)$.

Definiamo *il tempo di ritorno* a $\pi(C)$ rispetto al flusso geodetico come

$$r_C(x) = \min\{t | t > 0, \widetilde{g}_t(x) \in \pi(C)\}$$

Definiamo $\widetilde{Y} = \overline{Y} \times \{\pm 1\}$ con
$\overline{Y} = \{(y, z) | y \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q},\ z \in [0, 1)\}$.

Lemma

Sia $x(y, z, \epsilon)$ l'unico elemento di $\pi(C)$ di coordinate naturali $(y, z, \epsilon) \in \widetilde{Y}$ allora $r_C(x(y, z, \epsilon)) < +\infty$ e le coordinate naturali di $\widetilde{g}_{r_C(x)}(x(y, z, \epsilon))$ sono $\left(\left\{\frac{1}{y}\right\}, y(1 - yz), -\epsilon\right)$.

Posso quindi definire la mappa di primo ritorno in coordinate naturali come segue

$$\begin{aligned} \widetilde{T}\colon \widetilde{Y} &\longrightarrow \widetilde{Y} \\ (y, z, \epsilon) &\longmapsto \left(\left\{ \frac{1}{y} \right\}, y(1 - yz), -\epsilon \right) \end{aligned}$$

e la corrispondente mappa dei tempi di primo ritorno

$$\begin{aligned} \widetilde{r}\colon \widetilde{T} &\longrightarrow \widetilde{T} \\ (y, z, \epsilon) &\longmapsto r_C(x_2((y, z, \epsilon))) \end{aligned}$$

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di probabilità.

Definizione

Una mappa $T : X \to X$ misurabile si dice che *preserva* μ se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. In questo caso si dice che la misura μ è T-*invariante* e $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un *sistema che preserva la misura*.

Definizione

Una mappa T che preserva μ si dice *ergodica* se per ogni $A \in \mathcal{A}$

$$T^{-1}(A) = A \implies \mu(A) = 0 \text{ o } \mu(A) = 1$$

In alternativa diciamo che μ è T-ergodica.

Teorema

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *un sistema che preserva la misura. Se* $f \in \mathscr{L}^1_\mu$*, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) = f^*(x)$$

converge μ*-quasi ovunque e in* L^1_μ *a una funzione* T*-invarianti* $f^* \in \mathscr{L}^1_\mu$*. Inoltre se* T *è ergodica vale*

$$f^*(x) = \int f d\mu$$

μ*-quasi ovunque.*

Sia m_{X_2} la misura su X_2 indotta dal volume iperbolico

$$dV = \frac{1}{y^2} dx dy d\theta$$

definito su $T^1\mathbb{H}$ allora

Teorema

Ogni elemento non banale del flusso (ovvero, la mappa $\widetilde{R}_{a_t}$ con $t \neq 0$) è una trasformazione ergodica su X_2 rispetto a m_{X_2}

Lemma (Flusso speciale)

Sia μ una misura di probabilità T-invariante e $r : Y \to \mathbb{R}^+$ una funzione misurabile. Allora posso definire un flusso sullo spazio

$$X_r = \{(y,s) \mid y \in Y, 0 \leq s < r(y)\}$$

(con la misura m_r definita dalla restrizione di $\mu \times m_{\mathbb{R}}$ a X_r) come

$$T_t(y,s) = \begin{cases} (y, s+t) & 0 \leq s+t < r(y), \\ (Ty, s+t-r(y)) & 0 \leq s+t-r(y) < r(Ty), \\ \vdots & \end{cases}$$

Lemma

Se m_r è finita, allora la mappa T è ergodica se e solo se il flusso $\{T_t\}$ è ergodico.

Teorema

La mappa di Gauss $T(y) = \{\frac{1}{y}\}$ *su* $Y = [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ *è ergodica rispetto alla misura* μ.

Lemma

$\widetilde{\mu} = \frac{1}{2\log(2)}(\lambda \times \nu)$ *definita su* $\widetilde{Y}$ *con* λ *la misura di Lebesgue su* $\overline{Y}$ *e* ν *quella che conta i punti su* $\{\pm 1\}$, *è una misura di probabilità* $\widetilde{T}$*-invariante.*

Lemma

Se $\widetilde{T}$ *è ergodica rispetto a* $\widetilde{\mu}$ *su* $\widetilde{Y}$ *allora* T *è ergodica rispetto a* μ *su* $Y = [0,1] \backslash \mathbb{Q}$, *con* $d\mu = \frac{1}{\log(2)} \frac{1}{1+x}$.

Dimostrazione Teorema.

E' sufficiente dimostrare l'ergodicità di $\widetilde{T}$ rispetto a $\widetilde{\mu}$.
Siano $X_{\widetilde{r}}$ e $m_{\widetilde{r}}$ dati dalla costruzione del flusso speciale di $(\widetilde{T}, \widetilde{\mu})$ rispetto a $\widetilde{r}$.
Allora $\phi(y, z, \epsilon, s) = \widetilde{R}_{a_s}((x(y, z, \epsilon)))$ definisce un'immersione di $X_{\widetilde{r}}$ in X_2.
Siccome $\phi_*\,(m_{\overline{r}}) = cm_{X_2}$ con $c > 0$ finito e
$\phi\,(T_t(y, z, \epsilon, s)) = \widetilde{R}_{a_t}(\phi(y, z, \epsilon, s))$ allora T_t è ergodica poichè $\widetilde{R}_{a_t}$ lo è.
Concludo applicando la caratterizzazione di ergodicità per il flusso speciale. $\square$

Proposizione

Per quasi ogni $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *allora*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} \tag{2}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \longrightarrow -\frac{\pi^2}{6 \log 2} \tag{3}$$

Dimostrazione.

Per induzione su n si dimostra

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\left(T^j x\right)}_{S_n} - R_n$$

con $R_n \to 0$. Concludo applicando il Teorema di Birkhoff

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}dx = -\frac{\pi^2}{12\log 2}.$$

Il punto (3) segue da (2) osservando che

$$\log q_n + \log q_{n+1} \leq -\log\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \log q_n + \log q_{n+2}.$$

$\square$