

Sviluppi in frazione continua: misure invarianti e entropia

Davide Modesto

December 1, 2022

1 Introduzione

Introdurremo una famiglia di funzioni K_α che codificano, al variare di α , diversi sviluppi in frazione continua e ne studieremo il loro comportamento dal punto di vista dei sistemi dinamici. Passando dallo studio di una loro estensione naturale, sarà possibile dare una formula esplicita per il calcolo dell'entropia che ci permetterà di stimare la velocità asintotica di convergenza dello sviluppo in frazione continua troncato di un numero a se stesso.

2 Introduzione ai sistemi dinamici

Definizione 2.1 (Sistema dinamico deterministico discreto). Sia \mathcal{X} un insieme che chiameremo *spazio delle fasi* e \mathcal{A} una σ -algebra su \mathcal{X} .

Un *sistema dinamico deterministico discreto* è definito da uno spazio misurabile $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ e da una funzione $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ misurabile, ossia tale che per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Definizione 2.2 (Insieme invariante). Un insieme $A \in \mathcal{A}$ si dice *invariante* per il sistema (\mathcal{X}, T) se $T^{-1}(A) = A$.

Definizione 2.3 (Misura invariante). Una misura di probabilità μ su $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ si dice *invariante per T* se per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Remark. Per $n \geq 0$ e $A \in \mathcal{A}$,

$$T^{-n}(A) = \{x : T^n(x) \in A\}.$$

Quindi, dire che μ è T -invariante è equivalente a dire che $\mu(\{T^n(x) \in A\})$ non dipende da n . In altre parole, se lanci molte traiettorie allora la massa di punti secondo μ in A al tempo n è $\mu(\{T^n(x) \in A\}) = \mu(A)$, che è quello che ci si aspetta da una misura invariante.

Definizione 2.4 (Misura ergodica). Una misura di probabilità μ si dice *ergodica* per un sistema dinamico (\mathcal{X}, T) se per ogni insieme T -invariante $A \in \mathcal{A}$ si ha $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

2.1 Teorema Ergodico di Birkhoff

Sia (\mathcal{X}, T) un sistema deterministico con misura di probabilità μ invariante, allora per ogni $f \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$$

esiste per μ -q.o. $x \in \mathcal{X}$. Inoltre, se μ è ergodica, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) \quad (1)$$

per μ -q.o. $x \in \mathcal{X}$. Possiamo riformulare questo risultato informalmente dicendo che se μ è ergodica la *media temporale* converge alla *media spaziale*.

Corollario 2.1. Nelle ipotesi dell'equazione (1) vale che per ogni insieme Borel misurabile A e per μ -q.o. $x \in \mathcal{X}$ abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n : f^j(x) \in A\} = \mu(A)$$

Remark. Il Teorema Ergodico di Birkhoff è l'analogo della Legge Forte dei Grandi Numeri. Infatti l'equazione (1) si può anche scrivere nella forma

$$\mathbb{P} \left(\left\{ x \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \mathbb{E}_{\mu}[f] \right\} \right) = 1$$

2.2 Entropia

Sia (\mathcal{X}, T, μ) sistema dinamico, con μ misura di probabilità T -invariante. Sia $Z = \{I_1, \dots, I_N\}$ partizione finita e misurabile di X .

Definizione 2.5 (Partizione iterata). Data la partizione Z , definiamo la *partizione iterata* Z_n come

$$Z_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} Z$$

Gli insiemi della partizione Z_n sono della forma

$$I_{i_0} \cap T^{-1} I_{i_1} \cap \dots \cap T^{-(n-1)} I_{i_{n-1}}$$

Definizione 2.6 (Entropia metrica di una partizione). Si definisce *entropia metrica* della partizione Z il valore

$$H_{\mu}(Z) := - \sum_{i=1}^N \mu(I_i) \log(\mu(I_i))$$

con la convenzione $0 \log(0) = 0$.

I valori $\mu(I_i)$ si possono interpretare come la probabilità che un punto di \mathcal{X} scelto a caso, secondo la distribuzione di probabilità μ , appartenga a I_i . Ne segue che $(-\log(\mu(I_i)))$ si può interpretare come l'informazione contenuta nella frase " $x \in I_i$ ". L'entropia metrica di una partizione Z è quindi l'informazione media che si ottiene conoscendo a quali insiemi di Z appartengono i punti di X .

Definizione 2.7 (Entropia metrica di un sistema relativa a una partizione). Sia $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ la successione di partizioni iterate generate da una partizione Z finita e misurabile di \mathcal{X} . L'entropia metrica $h_\mu(T, Z)$ del sistema dinamico (\mathcal{X}, T, μ) relativa a Z e dipendente dalla misura di probabilità μ T -invariante è data da

$$h_\mu(T, Z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_\mu(Z_n)}{n}$$

Definizione 2.8 (Entropia metrica di un sistema). Sia μ una misura di probabilità T -invariante sullo spazio \mathcal{X} . L'entropia metrica $h_\mu(T)$ del sistema dinamico (\mathcal{X}, T) dipendente da μ è definita come

$$h_\mu(T) := \sup \{h_\mu(T, Z) : Z \text{ partizione finita} \}$$

3 Frazione continua

Per ogni $\alpha \in [0, 1]$ consideriamo la mappa $K_\alpha : [\alpha - 1, \alpha] \rightarrow [\alpha - 1, \alpha]$ definita da $K_\alpha(0) = 0$ e

$$K_\alpha(x) = -\frac{1}{x} - c_\alpha(x), \quad c_\alpha(x) := \left\lceil -\frac{1}{x} + 1 - \alpha \right\rceil \in \mathbb{Z}.$$

Ogni K_α determina uno sviluppo in frazione continua del tipo

$$x = -\frac{1}{c_{1,\alpha} - \frac{1}{c_{2,\alpha} - \frac{1}{c_{3,\alpha} - \dots}}}$$

con coefficienti $c_{j,\alpha} := c_\alpha(K_\alpha^{j-1}(x))$.

Proposizione 3.1. Fissato α razionale, i numeri razionali sono tutti e soli i reali che ammettono uno sviluppo finito.

Osserviamo che la famiglia K_α possiede la seguente simmetria: le mappe K_α e $K_{1-\alpha}$ sono topologicamente coniugate, in particolare si ha

$$K_\alpha(x) = -K_{1-\alpha}(-x)$$

per ogni $x \in [\alpha - 1, \alpha] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k - \alpha}$. Come conseguenza, è sufficiente studiare le dinamiche per $\alpha \in [0, 1/2]$.

3.1 Misure invarianti

Per quanto visto in [1] sappiamo che per $\alpha \neq 0, 1$ esiste un'unica misura di probabilità invariante assolutamente continua rispetto a Lebesgue che indicheremo con $d\mu_\alpha = \rho_\alpha d\mathcal{L}$ e che il sistema $([\alpha - 1, \alpha], K_\alpha, \mu_\alpha)$ è ergodico.

Usando i risultati della sezione precedente vorremmo stimare ρ_α .

La Proposizione 3.1 ci dice che, per α razionale, i razionali fanno parte dell'insieme di misura nulla per cui non vale l'equazione (1). Infatti, se così fosse, dal Corollario 2.1 si dedurrebbe $\mu_\alpha(\mathcal{X}) = 0$ il che è assurdo.

Quello che possiamo fare è provare a considerare molti razionali sperando che diano una buona rappresentazione del comportamento del sistema. Con questo fine abbiamo implementato il seguente codice

```

1 def num_density_k(alpha, step, num_points, margin):
2     ml, mr = alpha - 1 - margin, alpha + margin
3     x = np.arange(ml, mr, step)
4     rho_raw = np.zeros(len(x))
5
6     alpha_rational = Rational(alpha)
7
8     for i in range(num_points):
9         p = k_alpha(alpha_rational, Rational(alpha - 1 + random.
10            random()))
11         while p != 0:
12             j = gi(p, ml, step)
13             rho_raw[j] += 1
14             p = k_alpha(alpha_rational, p)
15
16     # Sapendo che l'integrale della densità sul dominio fa 1,
17     # rinormalizzo i valori
18     average_density = sum(rho_raw) * step
19     rho = list(map(lambda x: x / average_density, rho_raw))
20
21     plt.plot(x, rho)

```

Quello che abbiamo ottenuto è mostrato in Figura 1.

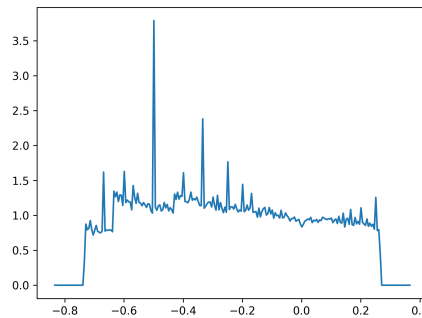


Figure 1: Stima numerica di ρ_α per $\alpha = 4/15$

3.2 Estensione naturale

Definiamo l'*estensione naturale* di K_α come

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{1}{c_\alpha(y) - x}, K_\alpha(y) \right)\end{aligned}$$

Definizione 3.1 (Attrattore). Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un insieme compatto $A \subset \mathbb{R}^2$ è un *attrattore* per F se soddisfa le seguenti proprietà:

- D è T -invariante
- D contiene un punto la cui traiettoria è densa in D
- $\exists U \supset D$ aperto t.c. $\forall x \in D$ si ha $F^n(x) \in U \forall n > 0$ e $F^n(x) \rightarrow D$ con $n \rightarrow \infty$

In [2] gli autori dimostrano che gli attrattori Δ_α per le mappe Φ_α hanno una struttura finita di rettangoli fornendo una ricetta esplicita per costruirli. Un implementazione in Python ha generato quanto visibile in Figura 2 e 3

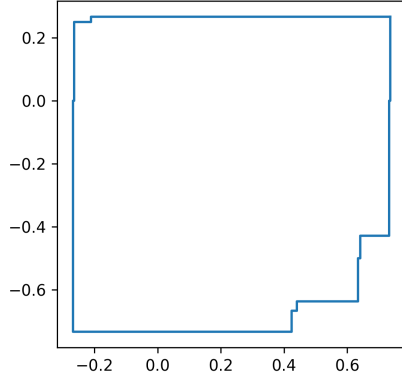


Figure 2: L'attrattore Δ_α per $\alpha = 4/15$

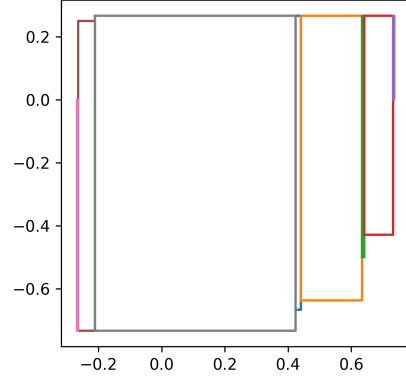


Figure 3: Partizione dell'attrattore Δ_α per $\alpha = 4/15$ in rettangoli

Proposizione 3.2. La mappa Φ_α ammette densità invariante

$$\nu_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{(1+xy)^2} dx dy & (x, y) \in \Delta_\alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo, analogamente a quanto fatto per K_α , questo risultato. Con questo fine abbiamo implementato il seguente codice

```

1 def num_density_phi(alpha, step=0.005, num_points=10000, margin
  =0.1):
2     xs, ys = attractor(alpha)
3     l, r = float(ys[0][0]), float(xs[0][0])
4     b, t = alpha - 1, alpha
5     ml, mr = l - margin, r + margin
6     mb, mt = b - margin, t + margin
7     x = np.arange(ml, mr, step)
8     y = np.arange(mb, mt, step)
9     X, Y = np.meshgrid(x, y)
10    Z = X * 0
11
12    alpha_rational = Rational(alpha)
13
14    for i in range(num_points):
15        p = phi(alpha_rational, (Rational(random.uniform(l, r)),
16        Rational(b + random.random())))
17        while p[1] != 0:
18            Z[gi(p[1], mb, step), gi(p[0], ml, step)] += 1
19            p = phi(alpha_rational, p)

```

Quello che abbiamo ottenuto è mostrato in Figura 4.

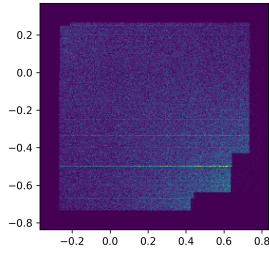


Figure 4: Stima numerica di ν_α per $\alpha = 4/15$

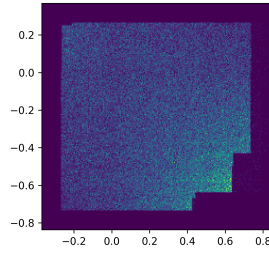


Figure 5: Stima numerica filtrata di ν_α per $\alpha = 4/15$

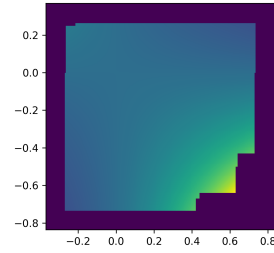


Figure 6: ν_α per $\alpha = 4/15$

Notiamo degli strani picchi di densità in corrispondenza dei punti con ordinata con denominatore più piccolo in $[\alpha - 1, \alpha]$. Analogamente a quanto osservato precedentemente questo fenomeno non è allarmante poichè i razionali non sono un ottimo campione. A questo proposito abbiamo introdotto il seguente pezzo di codice che genera quanto mostrato in Figura 5

```

1 def num_density_phi(alpha, step=0.005, num_points=10000, margin
  =0.1, filter_degree=8):
2     # ... Stesso codice riportato di sopra
3     Z_filtered = np.copy(Z)
4     for j in range(2, filter_degree):
5         for u in range(1, j):
6             if math.gcd(j, u) == 1:
7                 v = u / j
8                 if b < v < t:
9                     k = gi(v, mb, step)
10                    for d in range(len(Z[k])):
11                        average = (Z_filtered[k - 1, d] +
12                                Z_filtered[k + 1, d]) / 2
13                        Z_filtered[k, d] = average
14                    if b < -v < t:
15                        k = gi(-v, mb, step)
16                        for d in range(len(Z[k])):
17                            average = (Z_filtered[k - 1, d] +
18                                    Z_filtered[k + 1, d]) / 2
19                            Z_filtered[k, d] = average
20
21    plt.figure(figsize=(4, 4))
22    plt.pcolormesh(X, Y, Z_filtered)
23
24    plt.figure(figsize=(4, 4))
25    plt.pcolormesh(X, Y, Z)

```

Dalla Proposizione 3.2, segue il seguente corollario

Corollario 3.1. $\tilde{\rho}_\alpha$ definita come segue è una densità invariante per K_α

$$\tilde{\rho}_\alpha(t) := \left(\int_{\Delta_\alpha \cap \{y=t\}} (1+xy)^{-2} dx \right) / \left(\int_{\Delta_\alpha} (1+xy)^{-2} dx dy \right)$$

Dall'unicità della misura di probabilità invariante assolutamente continua per K_α segue $\tilde{\rho}_\alpha = \rho_\alpha$.

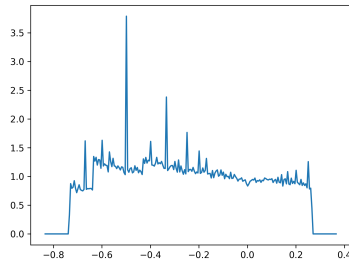
Possiamo quindi verificare la bontà della stima numerica di ρ_α precedentemente ottenuta. Per ottenere la densità indotta su $[\alpha - 1, \alpha]$ da quella ricavata numericamente su Δ_α ho aggiunto quanto segue

```

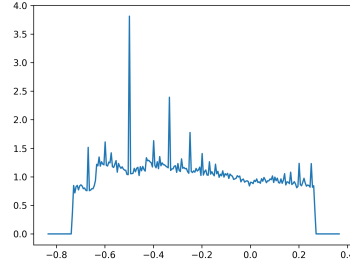
1 def num_density_phi(alpha, step=0.005, num_points=10000, margin
  =0.1, filter_degree=8):
2     # ... Stesso codice riportato di sopra
3     raw_induced_rho = np.zeros(len(y))
4     for i in range(len(y)):
5         raw_induced_rho[i] = np.sum(Z[i])
6
7     average_density_raw_rho = sum(raw_induced_rho) * step
8     induced_rho = list(map(lambda x: x / average_density_raw_rho,
9                             raw_induced_rho))
10
11    raw_induced_rho_filtered = np.zeros(len(y))
12    for i in range(len(y)):
13        raw_induced_rho_filtered[i] = np.sum(Z_filtered[i])
14
15    average_density_raw_rho_filtered = sum(raw_induced_rho_filtered
16                                           ) * step
17    induced_rho_filtered = list(map(lambda x: x /
18                                    average_density_raw_rho_filtered, raw_induced_rho_filtered))
19
20    plt.figure()
21    plt.plot(y, induced_rho)
22
23    plt.figure()
24    plt.plot(y, induced_rho_filtered)

```

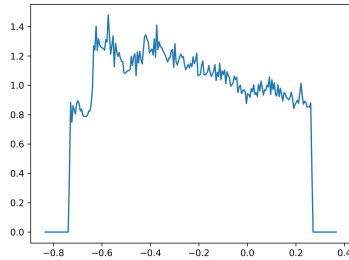
Quello che abbiamo ottenuto è mostrato di seguito.



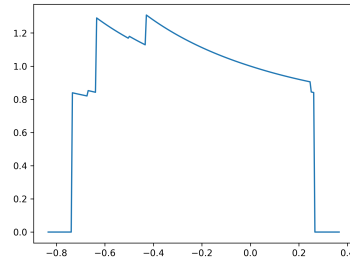
(a) Stima numerica di ρ_α per $\alpha = 4/15$



(b) Stima numerica di $\tilde{\rho}_\alpha$ per $\alpha = 4/15$



(c) Stima numerica filtrata di $\tilde{\rho}_\alpha$ per $\alpha = 4/15$



(d) $\tilde{\rho}_\alpha$ per $\alpha = 4/15$

3.3 Entropia

Per quanto visto in [1, Conseguenza 6.22] abbiamo:

$$h(\alpha) := h_{\mu_\alpha}(K_\alpha) = \frac{\pi^2}{3 \int_{\Delta_\alpha} \frac{dxdy}{(1+xy)^2}}$$

Riorganizzando i termini e partizionando Δ_α come in Figura 3 è possibile scrivere una facile implementazione per il calcolo esatto dell'entropia. Il grafico generato dal codice che segue è mostrato in Figura 8

```
1 def integral_on_rectangle(a, b, c, d):
2     return ln(b*d+1)-ln(a*d+1)-ln(b*c+1)+ln(a*c+1)
3
4
5 def entropy(alp):
6     xs, ys = attractor(alp)
7
8     mass = 0
9     for i in range(2, len(xs), 2):
10        mass += integral_on_rectangle(xs[i+1][0], xs[i][0], alp-1,
11        xs[i][1])
12
13    for i in range(2, len(ys), 2):
14        mass += integral_on_rectangle(ys[i][0], ys[i+1][0], ys[i]
15        ][1], alp)
16
17    mass += integral_on_rectangle(xs[1][0], ys[1][0], alp-1, alp)
18
19    return float(pi**2/(3*mass))
```

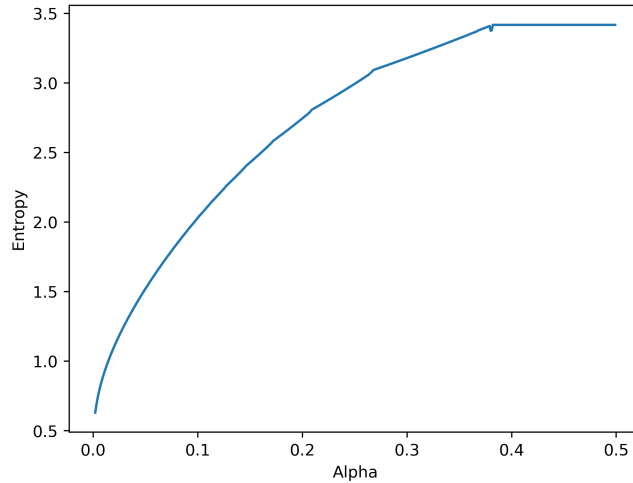


Figure 8: $h_{\mu_\alpha}(K_\alpha)$ in funzione di α

Sia $p_{n,\alpha}(x)/q_{n,\alpha}(x)$ l' n -esimo α -approssimante di x definito come segue

$$\frac{p_{n,\alpha}}{q_{n,\alpha}} = \mathbf{M}_{\alpha,x,n} \star 0$$

con $\mathbf{M}_{\alpha,x,n}$ e \star così definite

$$\mathbf{M}_{\alpha,x,n} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_{1,\alpha}(x) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_{n,\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x := \frac{ax+b}{cx+d}$$

Osservazione 3.1. Segue da una facile induzione che $\mathbf{M}_{\alpha,x,n}$ rappresenta l'inversa di K_α , nel senso che

$$\mathbf{M}_{\alpha,x,j} (K_\alpha^j(x)) = x$$

per ogni $\alpha \in [0, 1]$, $x \in [\alpha - 1, \alpha]$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Per ogni x , l' n -ennesimo α -approssimante di x tende a x . Da [1], per μ_α -q.o. $x \in [\alpha - 1, \alpha]$ abbiamo inoltre

$$h(\alpha) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |q_{n,\alpha}(x)| \quad (2)$$

Remark. L'equazione (2) ci permette quindi di stimare la velocità asintotica di convergenza dell' n -ennesimo α -approssimante di x a x come l'entropia della mappa K_α che genera lo sviluppo.

References

- [1] Carlo Carminati, Stefano Isola, and Giulio Tiozzo. *Continued fractions with $SL(2, \mathbb{Z})$ -branches: combinatorics and entropy*. 2013. DOI: 10.48550/ARXIV.1312.6845. URL: <https://arxiv.org/abs/1312.6845>.
- [2] Svetlana Katok and Ilie Ugarcovici. *Applications of (a,b) -continued fraction transformations*. 2011. DOI: 10.48550/ARXIV.1105.6133. URL: <https://arxiv.org/abs/1105.6133>.