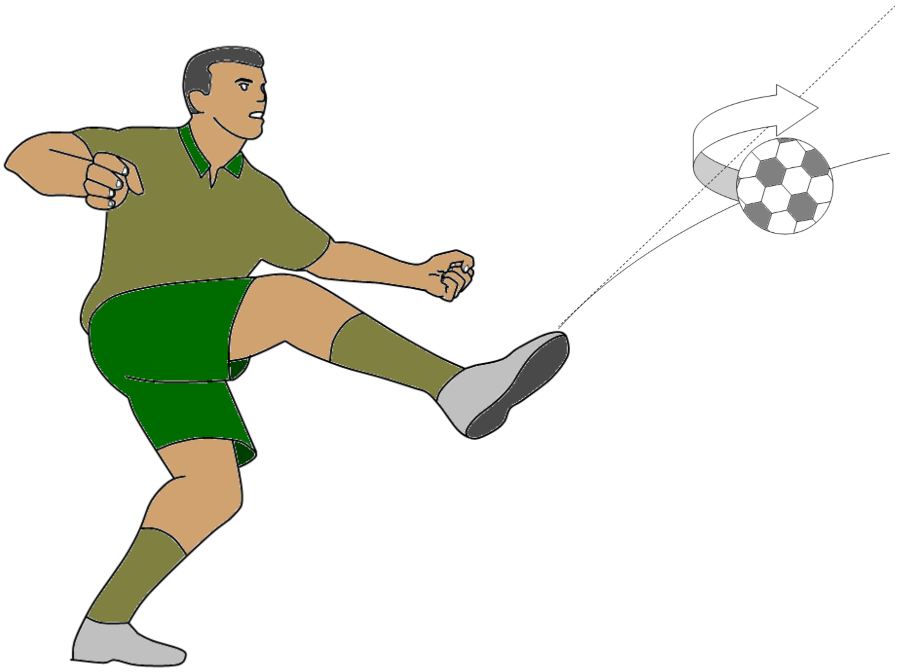


Efecto Magnus. Es usado en por los jugadores de Futbol. Mientras el balón se mueve con rotación (en el **aire**), la trayectoria de éste es afectada. La rotación del balón, causa una diferencia de **presión** a ambos lados de la trayectoria.

CAPITULO No. 3

Mecánica de Fluidos

Euripides Herasme Medina

Santo Domingo Este, Prov. Santo Domingo

23 de agosto de 2012

INDICE DEL CONTENIDO

Autor: Euripides Herasme Medina

Mecánica de Fluidos

En virtud de algunos aspectos relacionados con el comportamiento de la materia, se han definido tres estados: líquidos, gases y sólidos. Los dos primeros son agrupados en una “categoría” llamada fluidos. Nuestra interacción con estos (los fluidos) permite apreciar dos aspectos que los hace diferentes a los llamados sólidos; ofrecen poca resistencia a los esfuerzos tangenciales (esfuerzo de corte) y toman la forma del recipiente que los contiene.

Es usual que la mecánica de los líquidos y gases (fluidos) es presentada por separado de los sólidos. Sin embargo, los principios básicos para su estudio, coinciden con los utilizados para los sólidos.

En general, cuando se estudia un fluido, no se hace referencia a su masa (cantidad física asociada a la inercia). En el caso de los fluidos, usamos la densidad. Este es tan solo uno de los aspectos. Asociado al esfuerzo de corte de sólidos, tenemos una cantidad física llamada módulo de corte y asociado al esfuerzo de corte entre partículas de fluido, tenemos una cantidad física llamada viscosidad.

En nuestro curso, presentaremos los aspectos fundamentales relacionados con los fluidos. Nos circunscribiremos a los fluidos ideales, que son fluidos tratados con propiedades y condiciones que facilitan su estudio. Las ecuaciones conseguidas considerando fluidos ideales, son cualitativamente válidas para fluidos reales.

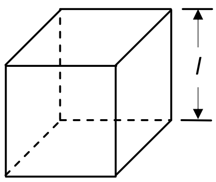
1. Estática de Fluidos

La mecánica de fluidos se divide en: cinemática de fluidos, dinámica de fluidos y **estática de fluidos**. Esta última que se ocupa del análisis del estado esfuerzos en un fluido en reposo. Es habitual que la dinámica y la cinemática de los fluidos sean tratadas en conjunto. La parte de la mecánica de los fluidos que se ocupa del estudio de las peculiaridades mecánicas de los líquidos, es denominada **hidráulica**.

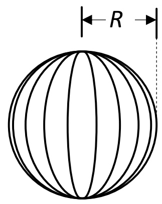
1.1 Densidad

La cantidad física con que establece el espacio ocupado por una porción de sustancia dada. Algunos cuerpos poseen igualdad de aristas, igualdad de caras o igualdad de ángulos tales que puede establecerse alguna simetría y por tanto se puede ("con facilidad") especificar una fórmula que permite determinar su volumen. A estos cuerpos les llamamos **cuerpos regulares**. Les llamamos cuerpos irregulares, a aquellos tales que no se puede establecer alguna simetría y en consecuencia no se dispone de una fórmula para determinar su volumen. A continuación mostramos algunos cuerpos regulares y las fórmulas con las que se obtiene el volumen correspondiente.

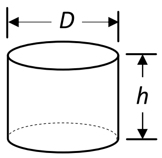
a) El cubo. $V = l^3$



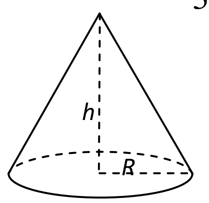
b) Esfera. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



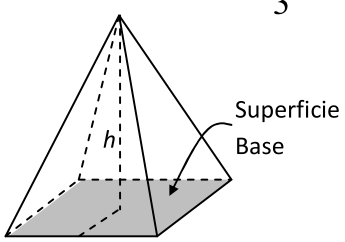
c) Cilindro. $V = \frac{\pi D^2}{4} h$



d) Cono recto. $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$



e) Pirámide regular. $V = \frac{A_b h}{3}$ (A_b es el área de la superficie base)



Considere que tenemos varios cuerpos constituido de la misma sustancia. Medimos la masa y el volumen de cada cuerpo. Con los valores de masa y volumen obtenidos, construimos el gráfico $m = f(V)$. Resulta una línea recta que pasa por el origen (ver figura 3.1).

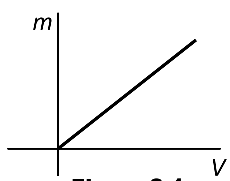


Figura 3.1

Autor: Euripides Herasme Medina

Las figuras fueron confeccionadas por el autor

Dado el aspecto del gráfico $m = f(V)$, se establece que la masa y el volumen de una sustancia dada son directamente proporcionales ($m \propto V$). La constante de proporcionalidad entre la masa y el volumen de una sustancia dada, es una cantidad física asociada a la sustancia, denominada densidad. Esta se denota con la letra griega ρ (se lee rho). Atendiendo a la relación existente entre la masa y el volumen de una sustancia dada, la ecuación correspondiente es:

$$m = \rho V \tag{3.1}$$

La densidad es la cantidad física con que se precisa que masa posee cada unidad de volumen de una sustancia dada. Esta se expresa en kg/m³ en el Sistema Internacional.

Al resultado de dividir la densidad de una sustancia dada entre la densidad del agua a 4.00 ºC, se le denomina densidad relativa. Esta es una cantidad sin unidad de medida.

Por otro lado, a la cantidad física con que se precisa cuál es el peso de cada unidad de volumen de una sustancia dada, se le denomina **peso específico**. El valor del peso específico de una sustancia dada está dado por:

$$\gamma = \rho g \tag{3.2}$$

Dado el volumen del cuerpo y el peso específico de la sustancia de la que está constituido, el peso de este puede conseguirse utilizando la siguiente ecuación:

$$w = \gamma V \tag{3.3}$$

1.2 Presión

Imagine que se sienta en un banco cuya superficie (sobre la que te sientas) está equipada de varios medidores de fuerza. Cada medidor de fuerzas dispone de un pequeño soporte cuadrado. Todos de igual área. Suponga, además, que tu trasero cubre por completo la superficie del banco y que tus pies quedan "colgando". La suma de las medidas realizadas por cada medidor de fuerzas es igual a la fuerza que tú aplicas sobre el asiento. Sin embargo, cada medidor registra un valor distinto. En vista de esto, se dice que la fuerza que le aplicas al asiento no está distribuida de manera uniforme. Es decir, la fuerza que le aplicas al asiento no está distribuida por igual sobre toda la superficie. Decir que la fuerza no está distribuida uniformemente sobre la superficie, equivale a decir que la **presión** no es uniforme. La presión es la cantidad física con que mide fuerza **perpendicular** por cada unidad de área. Si supiésemos que la presión es uniforme, la magnitud de la fuerza que recibe la superficie y el área de contacto, entonces calculamos la presión con sobre la superficie con la siguiente fórmula:

$$P = \frac{F}{A} \tag{3.4}$$

En general, no se supone que la fuerza sea la información primaria. En realidad, se analiza el estado del fluido, tal nos permite determinar la presión en cada punto, atendiendo a otras variables asociadas al mismo. Con dicha información y el área de cierta superficie de contacto con el fluido, calculamos la fuerza perpendicular sobre la superficie en cuestión. Es decir, dada el área de la superficie y la presión del fluido en cada punto del fluido en contacto con dicha superficie, calculamos la fuerza que ésta recibe. Si la presión sobre la superficie es uniforme, entonces la magnitud de la fuerza perpendicular se obtiene con:

$$F = PA$$

Si la superficie es plana, pero la presión no es uniforme (no tiene el mismo valor en todos los puntos de la misma), la magnitud de la fuerza del fluido sobre la superficie está dada por:

$$F = \int_A P dA \qquad (3.5)$$

La presión se expresa en Pascal (se denota Pa) en el Sistema Internacional. El Pascal es la presión sobre un superficie de 1 m² que multiplicada por dicha área resulta una fuerza de 1 Newton (Pa = N/m²).

1.3 Principio de Pascal.

En un fluido confinado, incompresible y en reposo, todo cambio de presión un punto del mismo se transmite íntegramente a todos los puntos de dicho fluido. Este enunciado constituye el **Principio de Pascal**.

Para comprender la utilidad de este principio, consideremos un tubo en forma de u, que contiene un líquido. Ambos "brazos" del tubo disponen de émbolos que ajustan sin fricción, con masa despreciable (ver figura 3.6a). Se aplica una fuerza vertical hacia abajo sobre el émbolo menor, de magnitud F_1, el cual tiene caras de área A_1. En virtud de esto, se dice que justo debajo del mencionado émbolo se ha incrementado la presión. Dicho incremento es $\Delta P = \frac{F_1}{A_1}$. Atendiendo al **Principio de Pascal**, decimos que todo el líquido ha sufrido tal incremento de presión. Así pues, la cara inferior del otro émbolo recibe un incremento de fuerza de abajo hacia arriba, cuyo valor es igual a $\Delta P A_2 = \left(\frac{F_1}{A_1}\right) A_2$. Para mantener a este émbolo en reposo (y a todo el fluido), se necesita aplicarle al referido émbolo una fuerza vertical hacia abajo, cuya magnitud sea igual al incremento de fuerza recibido (ver figura 3.6c). Por tanto:

$$F_2 = \left(\frac{F_1}{A_1}\right) A_2 \qquad (3.6)$$

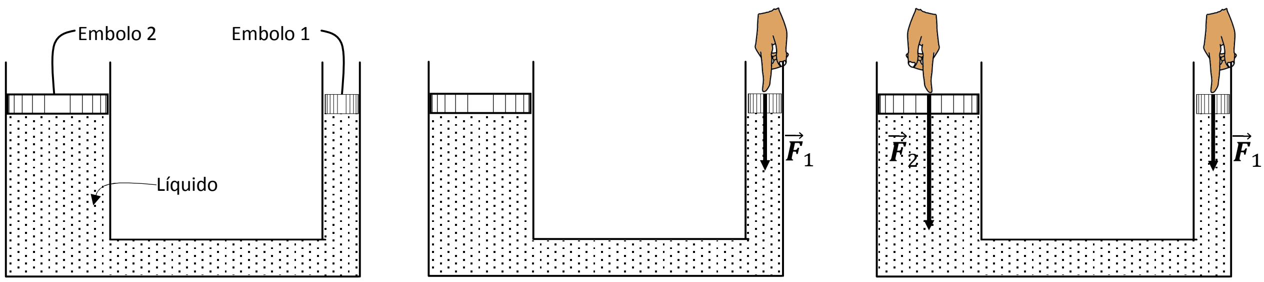


Figura 3.6a　　Figura 3.6b　　Figura 3.6c

Viendo a la ecuación 3.6, advertimos que F_2 y F_1 sólo serán iguales si $A_1 = A_2$. Es decir, el líquido se mantiene en reposo bajo la acción de dos fuerzas verticales de magnitudes diferentes, aplicadas sobre émbolos de diferentes áreas. La magnitud de $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ es tanto mayor que la magnitud de $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ como lo es A_2 con respecto a A_1.

¡Cuidado! Es usual que algunas personas digan que en todos los puntos del líquido haya igual presión. Antes de aplicarse las fuerzas, había diferentes valores de presión en el líquido y luego de aplicadas las fuerzas, todos estos valores **sufrieron el mismo incremento de presión**, conservando las diferencias de presión originales.

1.4 Ecuación fundamental de la Hidrostática

Considere una porción de fluido en reposo contenida en un recipiente. Analicemos el estado de equilibrio de cierta sub-porción del mismo, en forma de disco, de muy pequeño espesor (*dy*), orientado horizontalmente. Sobre dicho disco actúan tres fuerzas verticales; su peso ($d\vec{\boldsymbol{w}}$), la fuerza sobe la cara inferior debida al fluido bajo él ($\vec{\boldsymbol{F}}_1$) y la fuerza sobre la cara superior debida al fluido sobre él ($\vec{\boldsymbol{F}}_2$)

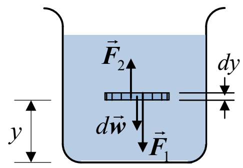


Figura 3.2

Dado que el volumen del disco es *Ady*, entonces la magnitud de su peso es: $dw = \rho gAdy$

La presión en la cara inferior del disco es *P* y en la cara superior (*dy* más arriba) es *P + dP* ("un poco más de *y*, implica un poco más de *P*"). Por tal razón, las magnitudes de las fuerzas que el disco recibe sobre las caras (F_1 y F_2) son: $F_1 = PA$ y $F_2 = (P + dP)A$. Como el disco está en reposo, entonces $F_{neta\text{-}y}$ (componente y de la fuerza neta es cero). Esto permite escribir:

$F_{neta\text{-}y} = F_2 - dw - F_1 = 0$

Sustituyendo la expresión de *dw*, de F_1 y de F_2, antes citadas, en la ecuación anterior, tenemos:

$(P + dP)A - \rho gAdy - PA = 0$

Simplificando, resulta:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho y \qquad (3.7)$$

Esta última ecuación, es denominada Ecuación Fundamental de la Hidrostática. A partir de ella, pueden hacerse las siguientes afirmaciones:

1. La presión en un fluido en reposo disminuye con la altura, porque la función de P con respecto a y e decreciente. Sabemos que es decreciente porque la derivada de P con respecto a y es negativa. En todos los puntos dentro de una porción de fluido dada a la misma altitud, hay la misma presión.

2. La presión en un fluido en reposo depende de la densidad del fluido y de la altitud (y). Esto así porque en la derivada de P con respecto a y aparece ρ y g. “Si aparecen en la derivada, también estaban antes de derivar”

1.5 Presión en un punto de un líquido en reposo

Es importante señalar que la variación de densidad en un líquido debida a la variación de presión, es despreciable. Esta condición permite calificar a los líquidos como **incompresibles**.

Considere un recipiente herméticamente cerrado en el que hay un líquido en reposo. Supongamos que el líquido no llena todo el recipiente. Entre la superficie del líquido y la tapa del recipiente, hay aire (ver figura 3.3). El punto 2 es un punto en la superficie. Dada la ecuación fundamental de la hidrostática, determinamos la diferencia de presión entre el punto 1 y el punto 2. Para los fines, ρ = constante (fluido incompresible) y g = constante (campo gravitatorio uniforme). En consecuencia, tenemos:

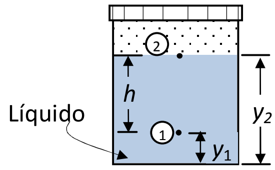


Figura 3.3

$$P_2 - P_1 = \int_{y_1}^{y_2} -\rho g dy$$
$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1)$$

Como el punto 2 está en la superficie, decimos que tiene profundidad cero y cambiamos la denotación de P_2 a P_0. Además, debe notar que el resultado de $y_2 - y_1$ es igual a h (la profundidad del punto 1). Así pues, cambiamos la denotación de P_1 a, simplemente, P (presión a la profundidad h). Nos queda entonces:

$$P = P_o + \rho g h \tag{3.8}$$

La ecuación anterior es la ecuación fundamental de la estática de los líquidos, que es la ecuación con la que se obtiene la presión en un punto de un líquido en reposo.

Donde P_o es la presión en la superficie superior del líquido y ρ es la densidad del líquido. Si no hubiese aire sobre el líquido (ni ninguna otra cosa), entonces P_o = 0, pues P_o es la presión debido al aire sobre él.

En un punto de un líquido a una profundidad h_1, la presión es $P = P_o + \rho g h_1$. De igual modo, en otro punto del mismo fluido a una profundidad h_2, la presión es $P = P_o + \rho g h_2$. Esto permite establecer que la diferencia de presión entre estos puntos es $P_2 - P_1 = \rho g(h_2 - h_1)$. En general, tenemos que la diferencia de presión entre dos puntos de un líquido está dada por:

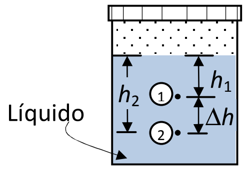


Figura 3.4

$$\Delta P = \rho g \Delta h \qquad (3.9)$$

Donde Δh es la diferencia de profundidad entre los puntos considerados (ver figura).

Note que la presión en un punto de un fluido depende de la densidad del mismo, del valor de la aceleración gravitacional y de la profundidad (h). A mayor profundidad, mayor presión. Dos puntos a igual nivel en un líquido dado, tienen igual presión. Si el recipiente estuviese abierto, entonces la superficie del líquido estaría en contacto con el aire de la atmosfera. En cuyo caso P_o sería igual a la **presión atmosférica**. Se llama así a la presión debido al aire de la atmosfera. El valor de la presión atmosférica al nivel del mar es 1.01×10^5 Pa. Salvo se indique lo contrario, si se nos pide la presión en un punto de un líquido dado, que tiene la superficie en contacto con la atmosfera, usaremos $P_o = 1.01 \times 10^5$ Pa. Es necesario señalar que la presión atmosférica no es constante. Depende de la altitud (tiene un menor valor en los puntos de la atmosfera de mayor altitud).

1.6 Presión en un punto de la atmósfera en reposo.

Los gases son muy susceptibles a cambiar su densidad, al cambiar la presión del mismo. Esto es, no son incompresibles. Considerando una masa fija de gas, a temperatura constante, puede establecerse que la presión y la densidad en un punto del gas son directamente proporcionales. En tal sentido, podemos decir que en la superficie de la Tierra la presión es P_o y la densidad es ρ_o. Asimismo, en otro punto de la atmosfera, la presión es P y la densidad es ρ. En virtud de la relación antes citada ente presión y densidad de un gas, escribimos:

De donde:

$$\rho = \rho_o \frac{P}{P_o}$$

Ahora usaremos la ecuación fundamental de la hidrostática, considerando un punto en la superficie de la Tierra (con y = 0) y otro punto de la atmosfera a y sobre la superficie de la Tierra. En ella, sustituimos la ecuación que relaciona a ρ y a P, antes mencionada.

$$dP = -\rho g dy = \rho_o \frac{P}{P_o} g dy$$

De donde surge:

$$P = P_o \mathrm{e}^{-\frac{\rho_o g}{P_o} y} \qquad (3.10)$$

1.7 Determinación de la presión atmosférica (Experimento de Torricelli)

Se llena por completo una probeta de 1.00 m longitud, con mercurio. Se tapa (con un dedo) el extremo abierto de la probeta. Se introduce el extremo tapado con el dedo en el mercurio que está en una cubeta. Se quita el dedo y el mercurio en la probeta baja de nivel, tal que la superficie del mercurio en la probeta está a 0.76 m sobre la superficie del mercurio en la cubeta (ver figura).

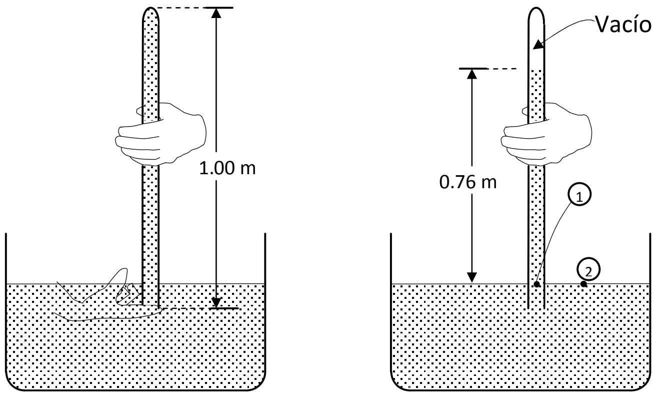


Figura 3.5

El punto 1 (dentro de la probeta) y el punto 2 (en la superficie del mercurio de la cubeta) están al mismo nivel. Por tal razón, la presión en el punto 1 es igual a la presión en el punto 2. Al determinar la presión en el punto 1, sabremos la presión en el punto 2. La presión en el punto 1 puede obtenerse con la ecuación fundamental de la estática de los líquidos, teniendo en cuenta que P_o = 0. Esto es:

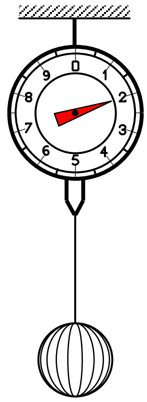
$$P = P_o + \rho g h = 0 + (1{,}000\,\mathrm{kg/m^3})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.76\,\mathrm{m}) = 1.01\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$$

El experimento descrito fue llevado a cabo por Evangelista Torricelli en el año 1643. A este se le atribuye haber hecho la primera medición de la presión atmosférica.

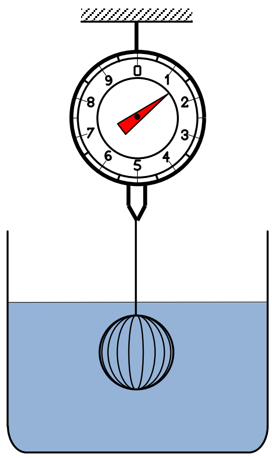
Todo instrumento que sirve para medir la presión atmosférica, es denominado **Barómetro**. Puede decirse que el instrumento descrito es el primer barómetro del que se tiene registro.

1.8 Principio de Arquímedes

En nuestra experiencia cotidiana, hemos observado que resulta más fácil sostener un cuerpo que está dentro del agua que sostener el mismo cuerpo fuera del agua. Si el cuerpo está fuera del agua, podemos sostener un cuerpo aplicándole una fuerza hacia arriba igual a su peso. Sin embargo, podemos sostenerlo dentro del agua aplicándole una fuerza vertical hacia arriba menor que su peso.



Imagine que desarrollamos el siguiente ensayo: Suspendemos una esfera de una báscula y tomamos la lectura en esta (en la báscula). Dicha lectura es el peso de la esfera. Luego, la esfera se sumerge en agua, manteniéndose suspendida de la báscula. La nueva lectura será menor. La lectura obtenida mientras está dentro del agua (y de cualquier otro fluido), se denomina **peso aparente**.



Cuando la esfera estaba suspendida de la báscula y fuera del agua, esta recibía la acción de dos fuerzas; la fuerza gravitatoria debido a la Tierra (su peso) y la fuerza vertical hacia arriba debido a la báscula. Estas son de igual magnitud. Sin embargo, cuando la esfera está sumergida en el agua y colgando de la báscula, recibe tres fuerzas; El peso, la fuerza debido a la báscula y otra vertical hacia arriba debido al agua. Todo cuerpo sumergido (parcial o totalmente) en un fluido, recibe una fuerza debido a éste llamada **fuerza de flotación o empuje**, la cual se denota con $\vec{\boldsymbol{E}}$. Fijándonos en los descrito anteriormente, se establece que la magnitud del empuje es igual a la diferencia de las dos lecturas de la báscula. Esto es:

$$E = w_r - w_a \tag{3.11}$$

Donde hemos denotado w_r a la lectura tomada cuando la esfera estaba fuera del agua (peso real) y denotamos con w_a a la lectura tomada cuando el cuerpo estaba dentro del agua (pero aparente).

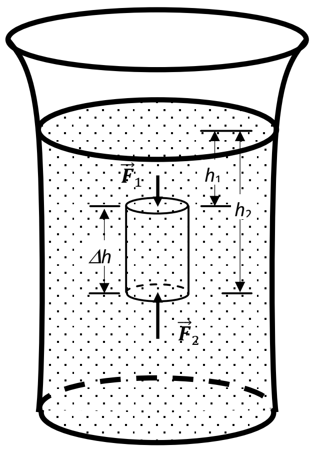


Figura 3.7

Consideremos que un cilindro sólido está sumergido en un fluido. Este recibe dos fuerzas verticales debido al fluido; una sobre la cara superior y otra sobre la cara inferior (ver figura). La magnitud de la fuerza sobre la cara superior es $F_1 = P_1 A$ y la magnitud de la fuerza sobre la cara inferior es $F_2 = P_2 A$. En tanto que la **fuerza neta debido al fluido** es:

$$E = F_2 - F_1 = P_2 A - P_1 A$$

$$E = (P_2 - P_1)A$$

Ahora sustituimos la ecuación 5.6 ($\Delta P = \rho g \Delta h$) en la ecuación anterior y tenemos:

$$E = (\rho g \Delta h) A$$

Dado que $\Delta h A$ es igual al volumen del cilindro, tenemos que $E = \rho g V$. Esto es, el empuje que recibe el cilindro es igual al peso del volumen de fluido que desaloja dicho cilindro. Aunque el planteamiento ha sido hecho con un cilindro, el mismo es universal, independiente de la forma del cuerpo de que se trate. Este resultado es el **principio de Arquímedes**, el cual puede enunciarse como:

Todo cuerpo sumergido parcial o totalmente en un fluido, recibe una fuerza vertical hacia arriba (debido al fluido) cuya magnitud es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo.

2. Dinámica de fluidos

Imagine que pudiéramos seguir el rastro dejado por cierto conjunto contiguo de partículas de un fluido en movimiento. Suponga, además, que la "ruta" seguida por éstas es justo o casi la misma seguida por las que les siguen. Es como si nos figurásemos que una partícula deja "marcado" un camino y que es seguido por las partículas tras ella. A esta línea imaginaria seguida por una partícula de fluido, le denominamos **línea de flujo**. A un conjunto contiguo de líneas de flujo, le denominamos **tubo de flujo**. Si es posible establecer que tal observación persiste en el tiempo, decimos que se trata de **flujo estable**.

En general, las cantidades físicas asociadas al movimiento de fluido en movimiento no son las mismas entre un punto y otro. Atendiendo a esto, se les denominas **flujo no uniforme**. Una característica que obliga a que la rapidez con que avanza un fluido no sea la misma en todos los puntos, es la **viscosidad**. Es una cantidad asociada a la resistencia de fluido a escurrir. En términos matemáticos, la viscosidad se define como la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo tangencial y la rapidez de deformación tangencial del fluido.

2.1 Ecuación de continuidad

Supongamos que un volumen ΔV de un fluido en movimiento atraviesa una sección de un tubo de flujo en el intervalo t_1 a t_2. Definimos como **tasa de flujo de volumen media** en la sección dada, en el intervalo t_1 a t_2, como:

$$T_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.12}$$

Esta cantidad nos informa sobre cuál es el volumen que en cada unidad de tiempo atraviesa la sección considerada en el intervalo t_1 a t_2.

Si el ritmo con que el fluido atraviesa la sección considerada no es fijo, entonces es apropiado referirse a tasa de flujo en cada instante (tasa de flujo instantánea).

$$T = \frac{dV}{dt} \tag{3.13}$$

De igual modo, podemos referirnos a la **tasa de flujo de masa**. Su valor está dado por el producto de la densidad del fluido por la tasa de flujo de volumen.

$$Q = \rho \frac{dV}{dt} \tag{3.14}$$

Consideremos una superficie perpendicular a la dirección del flujo, lo suficientemente pequeña (de área *dA*) tal que puede suponerse que en todo punto de dicha superficie las partículas tienen la misma velocidad. En un intervalo *Δt*, todas las partículas que han atravesado la sección, han llenado un volumen *d*AΔ*l*. Donde Δ*l* es la magnitud del desplazamiento las partículas que atravesaron la superficie considerada en el instante inicial del intervalo (ver figura 1.0).

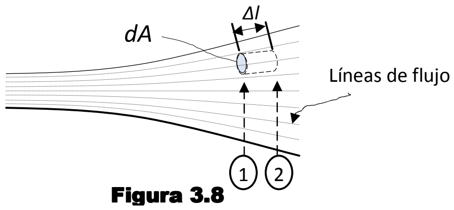


Figura 3.8

Esto permite definir la tasa de flujo de masa instantánea de la sección (con área *dA*) considerada:

$$dQ = \lim_{\Delta t \to 0} \rho \frac{(dA)\Delta l}{\Delta t} = \rho(dA) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho(dA)\frac{dl}{dt} = \rho(dA)v$$

En el límite *dA* es una constante porque la sección considerada no cambian con *t*

Donde *v* es la magnitud de la velocidad con que las partículas atraviesan la superficie en cuestión.

A partir del resultado anterior, generalizamos la expresión para tomar en cuenta la posibilidad de que la superficie asociada a la cual calculamos la tasa de flujo no sea necesariamente perpendicular a la dirección del flujo (ver figura 3.9). Tendremos:

$$dQ = \rho v dA \cos\theta = \rho \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

Donde $\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ es un vector cuya dirección es normal a la superficie considerada (la color naranja en la figura 3.9) y su magnitud es el área de dicha superficie, θ es el ángulo entre la superficie perpendicular al flujo (superficie 1 en la figura 3.9 – la azul) y la superficie correspondiente a la cual se pretende calcular el flujo (la naranja). Además, puede apreciarse que θ es el ángulo entre $\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ y la velocidad de las partículas que atraviesan la superficie.

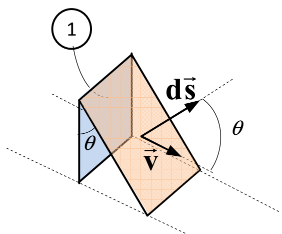


Figura 3.9

Donde $\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ es un vector cuya dirección es normal a la superficie considerada y su magnitud es el área de la superficie, θ es el ángulo entre la superficie perpendicular al flujo (superficie 1 en la figura 3.9 – la azul) y la superficie correspondiente a la cual se pretende calcular el flujo (superficie inclinada en la figura 3.9). Además, puede apreciarse que θ es el ángulo entre $\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$ y la velocidad de las partículas que atraviesan la superficie.

Examinemos ahora un tubo de flujo de sección variable con flujo irrotacional, no viscoso e incompresible (figura 3.10). Como el fluido es incompresible, la tasa de flujo de masa correspondiente a la sección 1 es igual a la tasa de flujo de la sección 2 (“la masa que entra es igual a la masa que sale”).

$$Q_1 = Q_2 \tag{*}$$

Además, al tratarse de flujo irrotacional y no viscoso, entonces puede precisarse que todas las partículas atraviesan la sección 1 con la misma velocidad y perpendicular a esta. Esto es:

$$Q_1 = \int \rho\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \rho v_1 A_1 \tag{**}$$

Donde v_1 es la magnitud de la velocidad con que las partículas atraviesan la sección 1 y A_1 de la sección.

De igual modo:

$$Q_2 = \int \rho\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \rho v_2 A_2 \tag{***}$$

Donde v_2 es la magnitud de la velocidad con que las partículas atraviesan la sección 1 y A_2 de la sección.

Combinando (*), (**) y (***), tenemos:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{3.15}$$

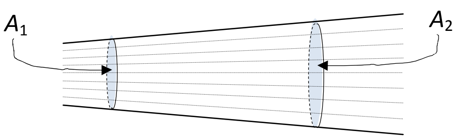


Figura 3.10

Tenga en cuenta que la ecuación 3.15 está condicionada a un flujo ideal (irrotacional, no viscoso e incompresible).

2.2 Ecuación de Bernoulli

Consideremos un tubo de sección variable por el que circula un fluido no viscoso, sin rotación e incompresible (ver figura 3.8) y estudiemos el fluido la masa de fluido contenida en la región B-C.

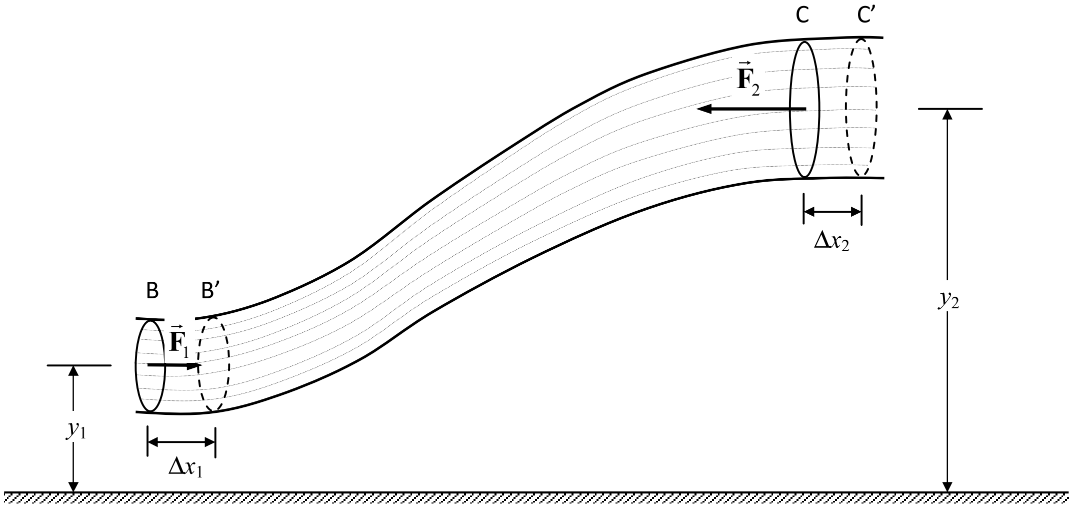


Figura 3.10

En cierto intervalo Δt, a la región B-C entra una masa de fluido que ocupa el volumen comprendido entre B y B'. En el mismo intervalo Δt, de la región B-C (a misma región) sale una masa de fluido que ocupa el volumen comprendido entre C y C'. Las partículas atraviesan la sección B (de área A_1) con rapidez v_1, en dirección perpendicular a ella. Asimismo, las partículas atraviesan la sección C (de área A_2) con rapidez v_2, en dirección perpendicular a ella.

Atendiendo a los señalamientos anteriores, tenemos que la masa el fluido que entró a la región B-C está dada por:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1$$

Asimismo, la masa de fluido que salió de la región B-C está dada por:

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 \Delta x_2$$

Como hemos considerado un fluido incompresible, entonces $\rho_1 = \rho_2$ y la masa que entra a la región es la misma que sale de ella. Es decir, $\Delta m_1 = \Delta m_2$. Esto nos conduce a establecer que $A_1\Delta x_1 = A_2\Delta x_2$, que es el volumen de fluido que entra y sale de la región en estudio, al que llamaremos V.

El fluido a la izquierda de B aplica en B una fuerza de magnitud P_1A_1 (P_1 y A_1 son presión y área en el extremo izquierdo de la región B-C)

De igual modo, el fluido a la derecha de C le aplica en C una fuerza de magnitud P_2A_2 (P_2 y A_2 son presión y área en el extremo derecho de la región B-C)

Ahora usaremos el teorema trabajo – energía mecánica para establecer la relación entre las cantidades asociadas a la masa de fluido en estudio (la masa de fluido entre B y C).

Se realiza un trabajo W_1 sobre el extremo izquierdo del fluido entre B y C. Su valor está dado por:

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$$

Se realiza un trabajo W_2 sobre el extremo derecho del fluido entre B y C. Su valor está dado por:

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 V$$

El signo negativo de la ecuación anterior viene dado por el hecho de que $\vec{\mathbf{F}}_2$ apunta a la izquierda y las partículas en el tramo B-C, que reciben dicha fuerza, se mueven hacia la derecha.

El trabajo total recibido por la masa de fluido contenida en B-C es:

$$W_t = W_1 + W_2 = P_1 V - P_2 V \qquad (*)$$

La variación de energía mecánica de la masa en B-C es:

$$\Delta E_m = \left(\frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} - \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} \right) + \left(\Delta m_2 g y_2 - \Delta m_1 g y_1 \right)$$

Recordando que $\Delta m_1 = \Delta m_2$, que $V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$, entonces la expresión anterior queda:

$$\Delta E_m = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \right) + \left(\rho g y_2 - \rho g y_1 \right) \qquad (**)$$

Combinamos (*) con (**), dado que $W_t = \Delta E_m$ (teorema trabajo-energía cinética). Teniéndose:

$$\left(P_1 - P_2 \right) = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} \right) + \left(\rho g y_2 - \rho g y_1 \right)$$

Agrupamos todos los términos con subíndices 1, en un lado de la igualdad, y todos los términos con subíndices 2, en el otro lado de la igualdad. Así tendremos:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g y_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g y_2 \qquad (3.12)$$

La ecuación anterior es denominada ecuación de Bernoulli. Otro modo de escribirla es:

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g y = \text{constante}$$

Escrito de esta última forma, todo queda más claro. **Asociado a un fluido** (no viscoso, irrotacional e incompresible) **en movimiento**, tenemos cantidades físicas que sumadas dan una constante. Estas son: La presión (P), la energía cinética por unidad de volumen $\frac{1}{2}\rho v^2$ y la energía potencial gravitatoria por unidad de volumen ($\rho g y$).

Que dicha suma sea una constante, nos da una información valiosísima; si una disminuye, al menos una de las otras aumenta. Si consideramos un fluido ideal que avanza horizontalmente, entonces no hay variación de energía potencial gravitatoria y, en consecuencia, queda claro que **si aumenta la rapidez de flujo, disminuye la presión**.

BIBLIOGRAFIA

Gilberto Sotelo Avila

Hidráulica General.Vol. 1

Editorial Liusa, S.A. 1995.