Universidad Autónoma de Coahuila

REDES DE JACKSON

Proyecto Simulación

Equipo:
Jesús Eduardo García Morquecho
Ernesto Carrera de la Peña
Juan Jaime Reyes Herrera
Gerardo Martin Gaytan Morales
Oscar Uriel Rojas Badillo

Docente:
Carlos Trejo Nassif

Materia:
Simulación

Definición del problema

Se desarrollarán las ecuaciones para solucionar un sistema simple de redes de Jackson. Se identifican cuales son las variables involucradas en el proceso y el tipo de salida obtenida por la operación.

La propuesta aborda la elaboración de una red de Jackson para 3 nodos o líneas de espera que representan tres servicios proporcionados por un hotel: estacionamiento, recepción y elevador. La tasa de llegadas y la tasa de servicio es modificada en tiempo de ejecución, así que el programa debe de adaptarse a esas tasas y ofrecer el número de servidores mínimo necesario para cumplir la condición de no saturación del sistema.

Introducción

Las líneas de espera (o colas) forman parte de nuestra vida cotidiana. Tanto nuestra vida personal como laboral nos obliga a formar parte de estos sistemas. Pero el tiempo de espera que cada persona tiene que esperar para poder obtener un beneficio o pedir un servicio puede no suponer solamente una molestia sino también un coste monetario, más aún cuando las líneas de espera son analizadas desde el punto de vista empresarial. Esto es lógico puesto que muchas veces la espera puede limitar el tiempo productivo de un agente productivo. Es decir que el problema principal es no poder realizar las tareas programadas mientras se esté esperando, tal vez debido a la falta de recursos necesarios, de servidores capacitados, o simplemente que mantenerse presente en una línea de espera imposibilita estar presente en su área de trabajo.

La teoría de colas es el estudio de la espera en las distintas modalidades. Utiliza los modelos de colas para representar los tipos de sistemas de líneas de espera (sistemas que involucran colas de algún tipo) que surgen en la práctica. Las fórmulas de cada modelo indican cuál debe ser el desempeño del sistema correspondiente y señalan la cantidad promedio de espera que ocurrirá en

diversas circunstancias (Hillier & Lieberman, 2010)

La utilidad de estos modelos radica en que permite analizar el rendimiento de una línea de espera para así lograr encontrar un balance adecuado entre el costo de servicio y el coste que supone esperar por el servicio, sea este un coste real o un coste por oportunidad despreciada.

El presente escrito documenta la implementación de uno de estos modelos, concretamente un modelo de red de líneas de espera abierta (también conocido como red de Jackson), esto se logrará a través de un programa de Python donde se transcribieron las formulas con el modelo MMC y de Jackson

Modelo MMC

Este modelo presupone una cola infinita de espera y múltiples servidores en la cola. Los clientes llegan a la cola a una tasa de parámetro λ cada unidad de tiempo que sigue una distribución exponencial, son atendidos por s servidores a una tasa de parámetro μ operaciones cada unidad de tiempo que sigue también una distribución exponencial. Según estos parámetros, las medidas de rendimiento están dadas por las siguientes ecuaciones:

Factor de utilización

$$\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{(k\mu-\lambda)}\right)}$$

Probabilidad de que haya n unidades en cola

$Para\ n \leq k$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$$

$Para\ n > k$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{k!\,(k^{n-k})} P_0$$

Número promedio de unidades en cola

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^k \mu\lambda}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en una cola

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Se dice que una cola MMC cumple la condición de no saturación cuando su factor de utilización es menor a 1.

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

Redes de cola

Las redes de colas son múltiples líneas de espera interconectadas, en redes los clientes solicitan el servicio de algunas o todas las colas del sistema.

Es de destacable importancia el descubrimiento de la propiedad de equivalencia:

Propiedad de equivalencia: suponga que una instalación de servicio tiene s servidores, un proceso de entradas Poisson con parámetro y la misma distribución de los tiempos de servicio de cada servidor con parámetro (el modelo M/M/s), en donde s. Entonces, la salida en estado estable de esta instalación de servicio también es un proceso de Poisson con parámetro. (Hillier & Lieberman, 2010)

Así, una red de colas es un conjunto de nodos interconectados, cada uno de los cuales está formado por un sistema de colas con uno o más servidores que operan de forma asíncrona y concurrente.

Se distingue según sean sistemas abiertos o cerrados. Cuando se trata de una red cerrada, no se permite la entrada de nuevos clientes ni la salida de los clientes existentes, haciendo que el número de clientes sea constante en el tiempo. Por otra parte cuando se trata de una red abierta los clientes pueden entrar y salir del sistema libremente, el flujo de entrada en el sistema puede darse por cualquier nodo al igual que el flujo de salida del sistema.

Estos sistemas de redes pueden ser tanto cíclicos como acíclicos. Cuando un sistema de redes es cíclico se permite pasar en múltiples ocasiones a sistemas de colas ya utilizados, mientras que esto es imposible en sistemas acíclicos.

Red en tándem

En este sistema de colas el cliente debe visitar diversos servidores antes de completar el servicio requerido. El cliente va pasando por distintos subsistemas en serie donde cada subsistema tiene su propio tipo de cola, pero donde la tasa de entrada debe igualar a la tasa de salida.

Además, una red en tándem tiene las siguientes características:

• El número de clientes de cada uno de los servidores es independiente del otro.

• Los tiempos de espera de un cliente en cada cola no son independientes.

• Los tiempos totales de espera (cola + servicio) son independientes.

Red de Jackson

Por otra parte, una red de Jackson es un sistema de m nodos (sistema de colas de espera) de servicio en donde cada nodo i (i =1,2, . . ., m) recibe clientes que visitaron o visitaran las demás instalaciones en orden independiente (y que además pueden no llegar a todas ellas). Es decir que se trata de un sistema de redes abierto, pues los clientes pueden provenir tanto del exterior del sistema como de otras instalaciones en su interior. Debe de contar con:

• Una cola infinita

• Clientes que llegan de afuera del sistema según un proceso de entrada Poisson con parámetro ai
• si servidores con distribución exponencial de tiempos de servicio con parámetro μi .

Sus parámetros de rendimiento están dados por el total de la suma de los parámetros individuales de cada nodo.

$$L = \sum_{i=1}^{m} L_i$$

$$Lq = \sum_{i=1}^{m} Lq_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{m} W_i$$

$$Wq = \sum_{i=1}^{m} Wq_i$$

La probabilidad de tener xi clientes simultáneamente en cada nodo i esta dado simplemente por la probabilidad para xi de manera conjunta para cada nodo i. (Hillier & Lieberman, 2010) Además de que la condición de no saturación del sistema establece que todo nodo i cumpla con la condición de no saturación de manera independiente.

Conclusiones

A través de los modelos matemáticos se pueden hacer toma de decisiones claves para la reducción de costes no solo de utilización de servicios sino también de los ocasionados por la espera de estos, pues al reducirse la cantidad de servidores también se reducen los costos de operación. Al tratarse de una abstracción de un modelo complejo, permite aplicarse a distintas áreas.

Bibliografía

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. MÉXICO DF: MC GRAW HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. TAHA, H. A. (2012). INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. MÉXICO DF: PEARSON EDUCACIÓN.