סטודנט א'

שם	עידו פנג בנטוב
ת"ז	322869140
דואר אלקטרוני	ido.fang@campus.technion.ac.il

סטודנט ב'

שם	ניר קרל
ת"ז	322437203
דואר אלקטרוני	nir.karl@campus.technion.ac.il

תרגיל 1

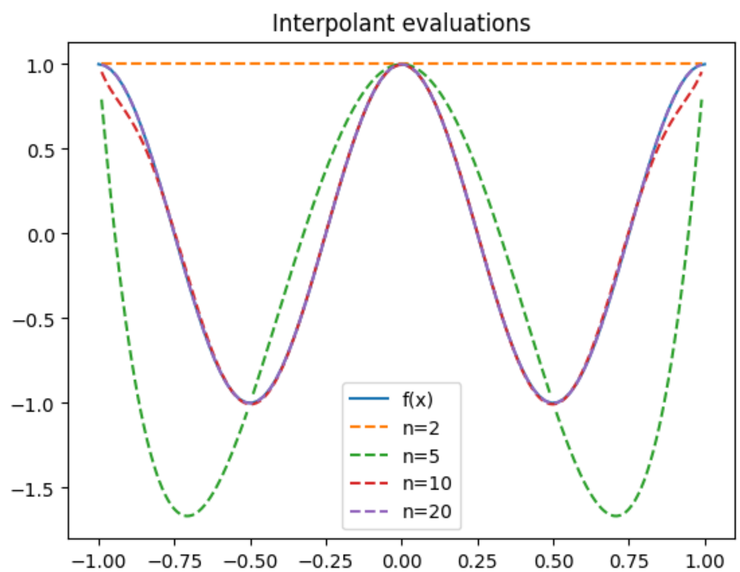
סעיף א'

הקוד הכולל של סעיף א' וסעיף ב' ב-python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def weight(j, point_x):
    w = 1
    n = len(point_x)
    for i in range(n):
        if i != j:
            w *= (1 / (point_x[j] - point_x[i]))
    return w

def helper_polynom(x, point_x):
    phi = 1
    n = len(point_x)
    for i in range(n):
        phi *= (x - point_x[i])
    return phi


def lagrange(f, n, a, b):
    point_x = np.linspace(a, b, n)
    point_y = f(point_x)
    w = [weight(j, point_x) for j in range(n)]

    intervals 01.0 at p Evaluate #
    t = 01.0
```

```
    x = np.linspace(a, b, int((b - a) / t) + 1)
    p = np.zeros_like(x)
    phi = np.zeros_like(x)
    for k in range(len(x)):
        for j in range(n):
            p[k] += (w[j] * point_y[j]) / (x[k] - point_x[j])
        phi[k] = helper_polynom(x[k], point_x)
        p[k] = phi[k] * p[k]
    return x, p, phi

def f(x):
    return np.cos(2 * np.pi * x)

a = -1
b = 1
n = [2, 5, 10, 20]

f of derivative n #

f_n = [
    lambda x: -((2 * np.pi) ** 2) * np.cos(2 * np.pi * x),
    lambda x: -((2 * np.pi) ** 5) * np.sin(2 * np.pi * x),
    lambda x: -((2 * np.pi) ** 10) * np.cos(2 * np.pi * x),
    lambda x: ((2 * np.pi) ** 20) * np.cos(2 * np.pi * x)
]

graph_i = plt.figure()
plt.title(evaluations" "Interpolant)
plt.plot(np.linspace(a, b, 100), f(np.linspace(a, b, 100)))


for k in range(len(n)):
    evaluation Interpolant #
    plt.figure(graph_i.number)

    x, p, phi = lagrange(f, n[k], a, b)
    plt.plot(x, p, -"-")

    error Absolute #
    graph_e = plt.figure()
    plt.title(" = "n + str(n[k]) + error" ")

    fval = f(x)
    e_abs = np.abs(fval - p)
    plt.plot(x, e_abs)
```

```
    boundaries Error #
    fnxi = np.max(np.abs(f_n[k](np.arange(-1, 25.1, 25.0))))
    e_boundary = np.abs(phi) * (fnxi * (1 / np.math.factorial(n[k])))

    plt.plot(x, e_boundary, -"-")
    plt.legend([error" "Absolute, boundary" "Error])

plt.figure(graph_i.number)
plt.legend(["f(x)", "n=2", "n=5", "n=10", "n=20"])
plt.show()
```



איור 1: book

[redacted]

סעיף ב'

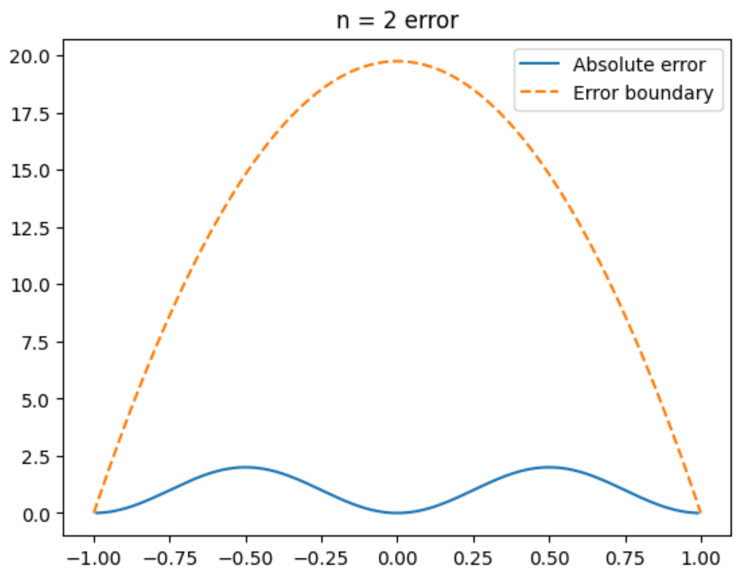
מאחר והנגזרות של $f(x)$ הן כולן פונקציות של $\cos(2\pi x)$ או $\sin(2\pi x)$ בכפולות שונות, ערכן המקסימלי תמיד יתקבל באחד מהערכים:

$$x = -1, -0.75, -0.5, \dots, 0.75, 1$$

ולכן מספיק לחשב את ערכי הנגזרת רק בהן. ברור שעבור רוב הנקודות הערכים יהיו זהים, אבל זה רק מוסיף כמה בדיקות בודדות, אז טוב לקחת מקדם ביטחון.

[redacted]

קיבלנו כי החסם לשגיאה אכן מהווה חסם לשגיאה האמיתית:



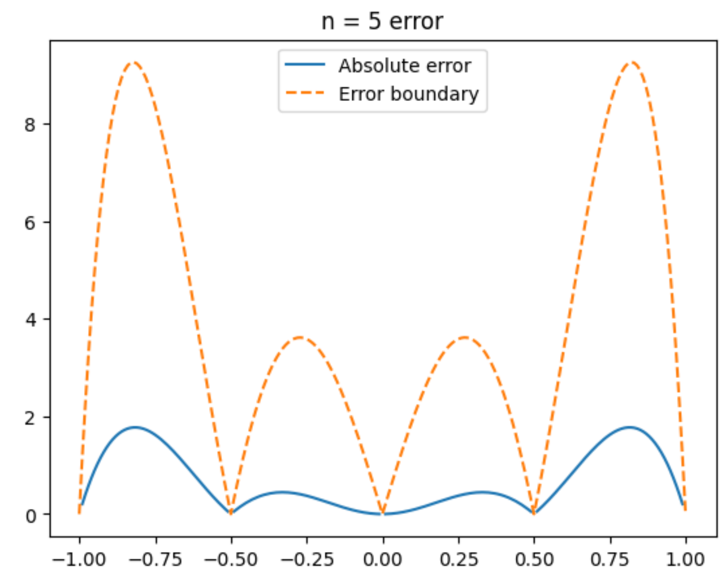
איור 2: book

תרגיל 2

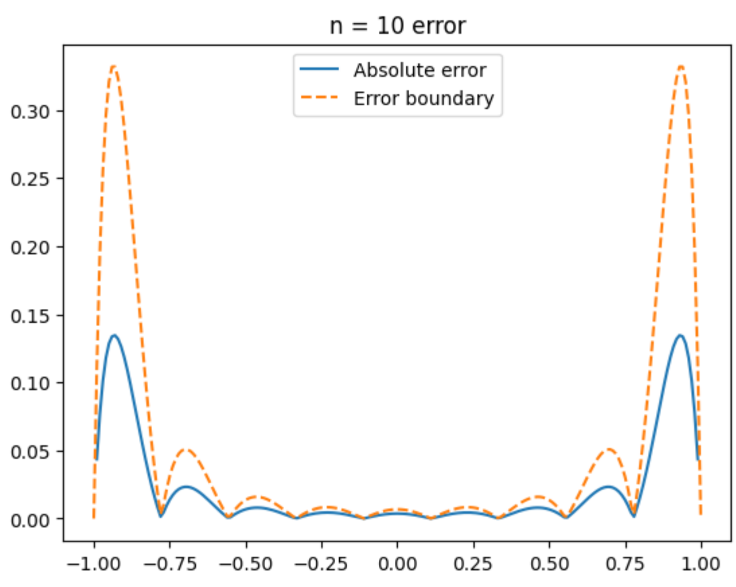
סעיף א'

נחשב את פולינום הבסיס עבור כל אחד מה-x הנתונים:

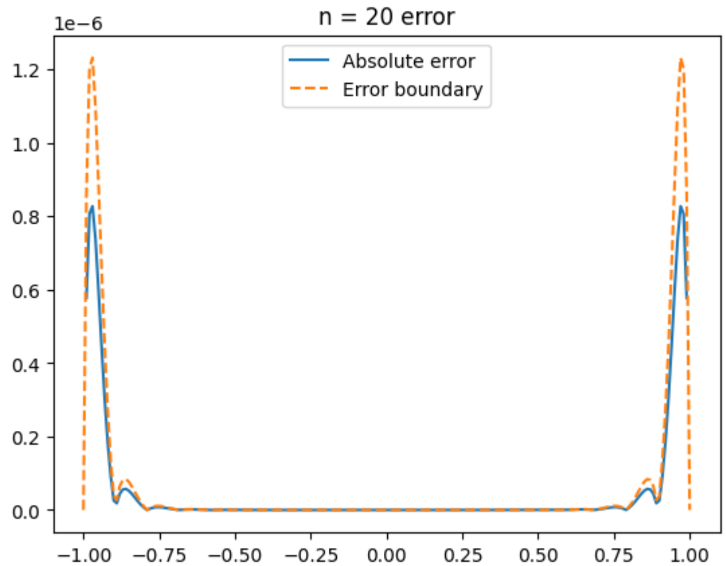
$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{2} = \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



איור 3: book



איור 4: book



איור 5: book

$$
\begin{aligned}
&L_0(x): \\
&\qquad j=0:\ i=j \Longrightarrow \emptyset \\
&\qquad j=1:\ \frac{x-0}{-1-0} = -x \\
&\qquad j=2:\ \frac{x-1}{-1-1} = -\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\
&\qquad L_0(x) = (-x)\cdot\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2} \\
&L_1(x): \\
&\qquad j=0:\ \frac{x-(-1)}{0-(-1)} = x+1 \\
&\qquad j=1:\ i=j \Longrightarrow \emptyset \\
&\qquad j=2:\ \frac{x-1}{0-1} = -x+1 \\
&\qquad L_{1(x)} = (x+1)(-x+1) = -x^2+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_2(x): \\
&\qquad j=0:\ \frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\
&\qquad j=1:\ \frac{x-0}{1-0} = x \\
&\qquad j=2:\ i=j \Longrightarrow \emptyset \\
&\qquad L_2 = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot x = \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

סעיף ב'

$$\sum_{i=0}^{2} L_i(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) + (-x^2+1) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1$$

נשים לב שקיבלנו שהסכום של פולינומי הבסיס קבוע, לכן נשער שלא משנה אילו x-ים נבחר, נקבל שהסכום של פולינומי הבסיס הוא 1.

נוכיח את ההשערה: ניקח פונקציה $f(x) = 1$. לפי הגדרה קירוב פולינומי של פולינום הוא הפולינום עצמו, לכן:

$$P(x) = f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

מכיוון ש-$P(x)$ הוא קירוב פולינומי של $f(x)$ שבחרנו להיות פולינום מסדר 0 נקבל ש- $P(x) = f(x) = 1$ כלומר:

$$P(x) = 1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$$

בהוכחה שהצגנו למעלה, לא הייתה תלות ב-n שמייצג את מספר הנקודות שלנו, כלומר את מספר צמדי האינטרפולציה שיהיו לנו. לכן הסכום של פולינומי הבסיס יהיה 1 לא משנה כמה צמדי אינטרפולציה יהיו לנו.

סעיף ג'

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y(x_j) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^{n} y(x_j) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x - x_j$$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x - x_j = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

מכיוון שבכל הגורמים יש לנו x ללא מקדם, תוצאת המכפלה של כל הגורמים תכיל ביטוי של x^n ללא מקדם - מכיוון שזוהי תוצאת המכפלה של כל ה-x בכל הגורמים.

לכן נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_j) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x - x_j = \sum_{i=0}^{n} y(x_j) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \left[x^n + p(x)\right]$$

כאשר $p(x)$ זהו פולינום שמייצג את שאר המכפלות שאינן מכילות את x^n. מכאן שהמקדם של x^n הוא:

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

תרגיל 3

$$u(t) = \gamma_1 e^{\gamma_2 t}$$

סעיף א' לא נוכל להשתמש בשיטת רגרסיה לינארית כדי לפתור ישירות את הבעיה. הסיבה היא שאחד מהתנאים לשימוש בשיטה זו היא שהפונקציה שאליה אנו רוצים להתאים, u, תהיה מהצורה הבאה:

$$u(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \bar{f}(t)\bar{\gamma}$$

אבל כל הפרמטרים γ_1, γ_2 לא לינאריים במשוואה שלנו, ולכן לא נוכל לרשום את u בצורה זו. כן נוכל לפתור את הבעיה הזאת בעקיפין עם שיטת הרגרסיה, אם נגדיר פונקציה חדשה, $v(t)$ כפי שאנו נעשה בסעיף ב'.

סעיף ב'

$$\begin{aligned} y(t) &= \ln(u(t)) \\ &= \ln \gamma_1 + \gamma_2 t \end{aligned}$$

נסמן:

$$\alpha_1 = \ln \gamma_1$$

נבנה את המערכת משוואות:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \gamma_2 t_1 &= y_1 \\ \alpha_1 + \gamma_2 t_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ \alpha_1 + \gamma_2 t_n &= y_n \end{aligned}$$

בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

נפתור כעת את הבעיה:

$$(A^TA)\hat{x} = A^Tb$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{n=1}^n (t_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n t_i y_i \end{pmatrix}$$

סעיף ג'

נציב את הנתונים במערכת משוואות:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{n=1}^n (t_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n t_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3.0 \\ 3.0 & 5.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.9539 \\ 17.2378 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.9539 \\ 6.2839 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6513 \\ 3.142 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5093 \\ 3.142 \end{pmatrix}$$

נסיק כי:

$$\gamma_1 = e^{\alpha} = 1.6641$$
$$\gamma_2 = 3.142$$

ולכן הפונקציה המקורית היא מהצורה:

$$u(t) = 1.6641e^{3.142x}$$

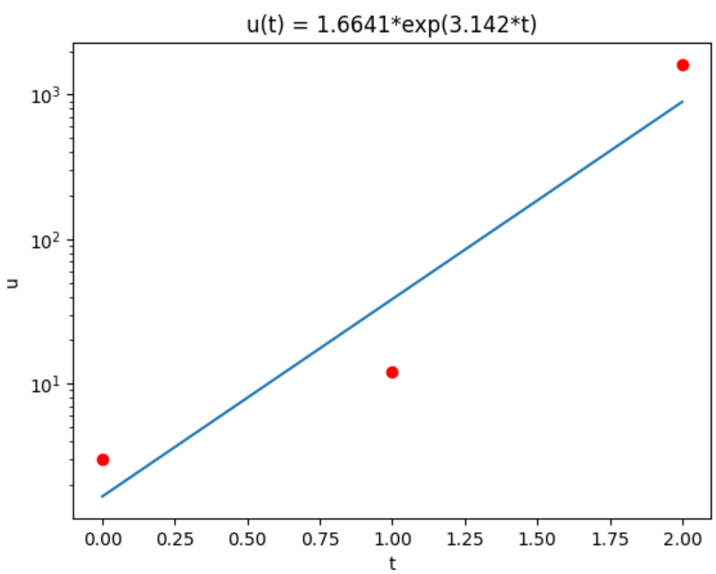
הנקודות (t_i, y_i), לאחר המרה ל-u_i:

$$y_i = \ln(u_i) \implies u_i = e^{y_i}$$

$$u_1 = 3.0198$$
$$u_2 = 11.7001$$
$$u_3 = 1618.249$$

קוד python להצגת הגרף והנקודות:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

points_t = [0,1,2]
points_y = [1052.1, 4956.2, 3891.7]

points_u = [np.exp(y) for y in points_y]

plt.plot(points_t, points_u, 'ro')

u = lambda t: 6641.1*np.exp(142.3*t)
ts = np.linspace(0, 2, 100)
plt.plot(ts, [u(t) for t in ts], '-')

plt.title('(t*142.3)exp*6641.1 = u(t)')

plt.yscale('log')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('u')

plt.show()
```



איור 6: book