

תרגיל בית 6

סטודנט א'		
שם	עידו פנג בנטוב	
ת"ז	322869140	
דואר אלקטרוני	ido.fang@campus.technion.ac.il	

סטודנט ב'		
שם	ניר קרל	
ת"ז	322437203	
דואר אלקטרוני	nir.karl@campus.technion.ac.il	

שאלה 1

$$I = \int_0^6 \frac{x+1}{4x+3} dx$$

שאלה א'

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^6 \frac{x+1}{4x+3} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^6 \frac{4x+4}{4x+3} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^6 \frac{4x+3}{4x+3} + \frac{1}{4x+3} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^6 1 dx + \frac{1}{4} \int_0^6 \frac{1}{4x+3} dx \\
 &= \frac{1}{4} x \Big|_0^6 + \frac{1}{16} \ln(4x+3) \Big|_0^6 \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{1}{16} \ln(27) - \frac{1}{16} \ln(3) \\
 &= \boxed{1.63732653608}
 \end{aligned}$$

סעיף ב'

האינטגרנד שלנו :

$$f(x) = \frac{x+1}{4x+3}$$

נשים לב כי :

$$a = 0, \quad b = 6$$

וערכי הפונקציה בנקודות אלו :

$$f(0) = \frac{1}{3}, \quad f(3) = \frac{4}{15}, \quad f(6) = \frac{7}{27}$$

ניוטון קוטס מסדר ראשון :

$$I_{\text{trap}} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

נציב :

$$I_{\text{trap}} = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{27} \right) = \boxed{\frac{16}{9}}$$

ניוטון קוטס מסדר שני :

$$I_{\text{Simp}} = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right]$$

נציב :

$$I_{\text{Simp}} = 1 \cdot \left[\frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{15} + \frac{7}{27} \right] = \boxed{\frac{224}{135}}$$

השגיאה בפועל :

$$E_{\text{trap}} = I - I_{\text{trap}} = \boxed{-0.14045124169}$$

$$E_{\text{Simp}} = I - I_{\text{Simp}} = \boxed{-0.02193272318}$$

השגיאה התאורטית :

$$E_{\text{trap}} = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

$$E_{\text{Simp}} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5$$

כאשר $0 < \xi < 6$.

נמצא את הנגזרות של f :

$$f'(x) = \frac{4x+3-4(x+1)}{(4x+3)^2} = -\frac{1}{(4x+3)^2} = -(4x+3)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(4x+3)^{-3}$$

$$f'''(x) = -24(4x+3)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 384(4x+3)^{-5}$$

הפונקציות f'' ו- $f^{(4)}$ הן פונקציות יורדות בקטע הנתון. לכן נקבל ערך מקסימלי בקצוות.

$$f''(0) = \frac{2}{27} \quad f''(6) = 1.0162 \cdot 10^{-4}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{128}{81} \quad f^{(4)}(6) = 2.676 \cdot 10^{-5}$$

נסיק כי החסמים העליונים והתחתונים עבור שתי השיטות הן:

$$-\frac{4}{3} = -\frac{f''(0)}{12} \cdot 6^3 < E_{\text{trap}} < -\frac{f''(6)}{12} \cdot 6^3 = -0.00183$$

$$-4.2666 < -\frac{f^{(4)}(0)}{90} \cdot 3^5 < E_{\text{Simp}} < -\frac{f^{(4)}(6)}{90} \cdot 3^5 = -7.2252 \cdot 10^{-5}$$

אכן השגיאות שלנו נמצאים בטווח של השגיאה התאורטית.

סעיפים ג', ד ו-ה'

```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

def composite_trapezoidal(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        s += 2 * f(a + i * h)
    return s * h / 2

def composite_simpsons(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            s += 2 * f(a + i * h)
        else:
            s += 4 * f(a + i * h)
    return s * h / 3

def richardson_extrapolation(f, a, b, n, method):
    I1 = method(f, a, b, n)
    I2 = method(f, a, b, 2*n)
    return (4*I2 - I1) / 3

f = lambda x: (x+1)/(4*x+3)
a = 0
b = 6

points = [21, 41, 81, 161]
n = np.array(points) - 1
```

```

x = sp.symbols('x')
fsym = (x+1)/(4*x+3)
I_real = sp.integrate(fsym, (x, 0, 6))
I_real = float(I_real)

E_trap = [abs(I_real - composite_trapezoidal(f, a, b, i)) for i in n]
E_simp = [abs(I_real - composite_simpsons(f, a, b, i)) for i in n]
E_rich = [abs(I_real - richardson_extrapolation(f, a, b, i, composite_simpsons)) for i in n]

plt.plot(n, E_trap, label=rule" "Trapezoidal)
plt.plot(n, E_simp, label=rule" s" Simpson)
plt.plot(n, E_rich, label=extrapolation" Richardson)
plt.yscale('log')
plt.xscale('log')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('Error')
plt.legend()
plt.show()

```

להוסיף גרף [!TODO]

להוסיף לגבי תאוריה [!TODO]

תרגיל 2

סעיף א'

נשתמש בשיטת המקדמים החופשיים:

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} dx = \pi = A_1 + A_2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} dx = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2$$

$$\begin{aligned} \text{I: } & \pi = A_1 + A_2 \\ \text{II: } & \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2 \\ 3 \cdot \text{II} - \text{I: } & \frac{\pi}{2} = A_2 \\ A_2 \rightarrow \text{I: } & \pi = A_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_1 = A_2 = \frac{\pi}{2}}$$

סעיף ב'

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x} \\ I &= \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) + E \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} + E = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} + E$$

$$I = 2.70296 + E$$

סעיף ג'

בקטע $[0, 1]$ הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ לא רציפה בכל נק', ולכן גם לא גזירה בכל נק'. לכן אי אפשר לעשות לה פיתוח מקלורן - ומכאן שאי אפשר לחסום את השגיאה.

תרגיל 3

סעיף א'

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1.2} e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{1.2} \\ &= e^0 - e^{-1.2} \\ &= \boxed{0.69880578809} \end{aligned}$$

סעיף ב'

עבור 2 צמתי אינטגרציה:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = 1.2 \\ \tilde{I} &= \frac{h}{2} [f(x_2) + f(x_1)] \\ &= \underbrace{0.6}_{1.2/2} \cdot (1 + 0.3012) \\ &= 0.78071652715 \end{aligned}$$

ולכן השגיאה שלנו:

$$\begin{aligned} E_{\text{trap}} &= 0.69880578809 - 0.78071652715 \\ &= \boxed{-0.08191073906} \end{aligned}$$

עבור 3 צמתי אינטגרציה:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1.2 \\ \tilde{I} &= \frac{h}{3} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)] \\ &= \underbrace{0.2}_{0.6/3} [1 + 4 \cdot 0.5488 + 0.3012] \\ &= 0.69928815126 \end{aligned}$$

ולכן השגיאה שלנו :

$$\begin{aligned} E_{\text{Simp}} &= 0.69880578809 - 0.69928815126 \\ &= \boxed{-0.00048236317} \end{aligned}$$

סעיף ג'

נעביר לתחום אינטגרציה $[-1, 1]$:

$$x = T(t) = \frac{(1.2 - 0)t + (1.2 + 0)}{2} = 0.6t + 0.6$$

$$dx = 0.6dt$$

נציב בנוסחה של אינטגרציית גאוס :

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = \int_{-1}^1 0.6 \cdot f(0.6t + 0.6) dt = \int_{-1}^1 0.6e^{-(0.6t+0.6)} dt$$

נסמן :

$$g(t) = 0.6e^{-(0.6t+0.6)}$$

ולכן :

$$\int_0^{1.2} f(x) dx = \int_{-1}^1 g(t) dt \approx A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2)$$

מטבלת שורשי לג'נדר :

$$t_1 = -0.57735 \quad A_1 = 1$$

$$t_2 = 0.57735 \quad A_2 = 1$$

נוכל כעת לשער את ערך האינטגרל :

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2) \\ &= 0.6 \cdot e^{-0.6} \cdot (e^{0.6 \cdot 0.57735} + e^{-0.6 \cdot 0.57735}) \\ &= 0.69848509187 \end{aligned}$$

נסיק כי השגיאה :

$$\begin{aligned} E &= 0.69880578809 - 0.69848509187 \\ &= \boxed{0.00032069622} \end{aligned}$$

$$|E_{\text{gauss}}^{(2)}| < |E_{\text{trap}}|$$

נשים לב שבסעיף ב' קיבלנו חסם שלילי, כלומר בשיטה מסעיף ב' קיבלנו שטח קטן מהשטח האמיתי. לעומת זאת בשיטה בסעיף זה החסם הוא חיובי, כלומר תמיד נקבל שטח גדול מהשטח האמיתי.

נבדוק את השגיאה התיאורטית לפי שיטת גאוס-לז'נדר. עבור $0 < \xi < 1.2$:

$$E = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi) = \frac{2^5 \cdot 2^4}{5 \cdot 24^3} \cdot g^{(4)}(\xi) = 0.0074 \cdot g^{(4)}(\xi)$$

נשים לב שהנגזרת הרביעית היא :

$$g^{(4)}(x) = 0.0426756 \cdot e^{-0.6t}$$

ולכן החסם העליון והתחתון הם :

$$0.0074 \cdot g^{(4)}(1) = 0.00031579944 \cdot e^{-0.6 \cdot 1} = 0.000288857$$

$$0.0074 \cdot g^{(4)}(-1) = 0.00031579944 \cdot e^{-0.6 \cdot (-1)} = 0.000576$$

$$0.000173 \leq E = 0.00032069622 \leq 0.000576$$

קיבלנו ש- E בפועל אכן בטווח ששיערנו שהוא יהיה.

סעיף ד'

מסעיף קודם :

$$g(t) = 0.6e^{-(0.6t+0.6)}$$

שורשי לג'נדר :

$$t_{1,2} = \pm 0.774597 \quad A_{1,2} = \frac{5}{9}$$

$$t_3 = 0.774597 \quad A_3 = \frac{8}{9}$$

נוכל כעת לשער את ערך האינטגרל :

$$\tilde{I} = A_1 g(x_1) + A_2 g(x_2) + A_3 g(x_3)$$

$$= 0.6 \cdot e^{-0.6} \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot e^{0.6 \cdot 0} + \frac{8}{9} \cdot e^{0.6 \cdot 0.774597} + \frac{8}{9} \cdot e^{-0.6 \cdot 0.774597} \right)$$

$$= 0.9880483684$$

נסיק כי השגיאה :

$$E = 0.69880578809 - 0.69880483684$$

$$= 0.9512 \cdot 10^{-6}$$

$$|E_{\text{gauss}}^{(3)}| < |E_{\text{trap}}|$$

נשים לב שבסעיף ב' קיבלנו חסם שלילי, כלומר בשיטה מסעיף ב' קיבלנו שטח קטן מהשטח האמיתי. לעומת זאת בשיטה בסעיף זה החסם הוא חיובי, כלומר תמיד נקבל שטח גדול מהשטח האמיתי.

נבדוק את השגיאה התיאורטית לפי שיטת גאוס-לז'נדר. עבור $0 < \xi < 1.2$:

$$E = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi) = \frac{2^7 \cdot 6^4}{7 \cdot 720^3} \cdot g^{(6)}(\xi) = 6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(4)}(\xi)$$

נשים לב שהנגזרת הרביעית היא :

$$g^{(6)}(t) = 0.0153632 \cdot e^{-0.6t}$$

ולכן החסם העליון והתחתון הם :

$$6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(6)}(1) = 0.97544 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0.6 \cdot 1} = 0.5354 \cdot 10^{-6}$$

$$6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(6)}(-1) = 0.97544 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0.6 \cdot (-1)} = 1.777 \cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{0.5354 \cdot 10^{-6} \leq E = 0.9512 \cdot 10^{-6} \leq 1.777 \cdot 10^{-6}}$$

קיבלנו ש- E בפועל אכן בטווח ששיערנו שהוא יהיה.