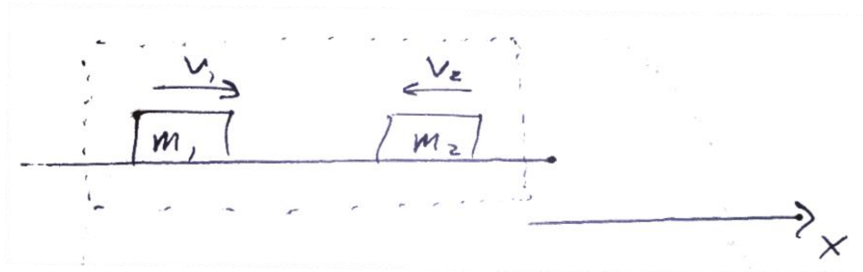
פיסיקה 1, הרצאה 9: התנגשות אלסטית\פלסטית ותנע זוויתי

נמשיך את הדיון בשימור תנע. בפרט, נדון בהתנגשות בין שני גופים. דוגמא לכך מופיעה באיור הבא.



בהנחה שאנו יודעים את המהירות ההתחלתית של הגופים, אנו מתעניינים במהירות (גודל וכיוון) של הגופים לאחר ההתנגשות. ברור מכאן שנצטרך שתי משוואות כדי למצוא שתי מהירויות.

בשיעור הקודם מצאנו שאם לא מופעל כח חיצוני על מערכת של גופים, התנע הכולל של המערכת נשמר:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

כאשר סימנו את המהירות אחרי ההתנגשות באות u והשמטנו את הכתיב הווקטורי משום שזו בעיה חד מימדית. במקרה זה, סימן המהירות יאמר לנו מה כיוון תנועת הגוף. סימן מינוס אומר שהגוף נע נגד כיוון הציר שבחרנו.

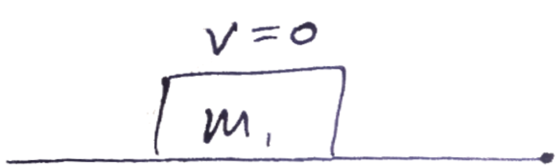
אנו צריכים משוואה שניה. בפיסיקה, אנו מאמינים בחוק שימור האנרגיה. שימו לב שאנו לא מאמינים בשימור אנרגיה קינטית! כפי שראינו בהרצאה הקודמת, כששני גופים נדבקים אחד לשני לאחר התנגשות, קיים חיכוך פנימי בין הגופים (לא חיכוך חיצוני) וחלק מהאנרגיה הקינטית הופכת לחום. באופן כללי, אנו מאמינים שאנרגיה לא הולכת לאיבוד, אלא הופכת מצורה אחת לשניה.

בצורה הכללית ביותר, ניתן לכתוב שהאנגריה הקינטית לפני ההתנגשות פלוס איזשהו מספר Q (שמבטא את המעבר של אנרגיה קינטית לצורה אחרת של אנרגיה), שווה לאנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות:

$$E_{k,before} + Q = E_{k,after}$$

אם נדע את המספר Q, תהיה לנו משוואה שניה ונוכל לפתור עבור שתי המהירויות של הגופים לאחר ההתנגשות.

- אם $Q > 0$, האנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות גדולה מזו שלפני ההתנגשות. מצב זה אפשרי כאשר גוף מתפוצץ. במקרה זה, האנרגיה הכימית של הפיצוץ הפכה לאנרגיה קינטית של הגופים.



- במקרה המיוחד בו $Q = 0$, האנרגיה הקינטית לפני ואחרי ההתנגשות שוות. במקרה זה אנרגיה קינטית לא נעלמת לחום או סוג אחר של אנרגיה. מצב זה קורה בקירוב עבור כדורים מאוד קופצניים שמגיעים כמעט לאותו גובה ממנו הם שוחררו. התנגשות זו נקראית התנגשות אלסטית.

- אם $Q < 0$, המערכת מאבדת אנרגיה קינטית. ראינו דוגמאות לכך בשיעור הקודם בו חלק או כל האנרגיה הקינטית הופכת לחום. התנגשויות מסוג זה נקראות התנגשויות לא-אלסטיות. עבור המקרה המיוחד בו הגופים נדבקים אחד לשני, כפי שראינו בפעם שעברה, ההתנגשות נקראית התנגשות פלסטית. אילוסטרציה של התנגשות פלסטית מובאת באיור הבא.

אם נדע את Q, יהיה לנו עוד תנאי על ההתנגשות (בנוסף לשימור תנע) ונוכל לפתור למהירויות של הגופים לאחר ההתנגשות. נדון כעת במקרה שיש לנו התנגשות אלסטית, כלומר האנרגיה הקיטנית לפני ואחרי ההתנגשות נשמרת.

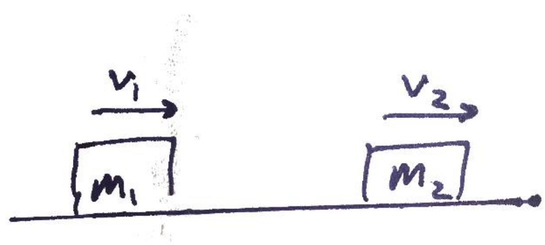
<u>התנגשות אלסטית</u>:

בהתנגשות שבה אפשר להזניח את איבוד האנרגיה הקינטית (כלומר אין איבוד אנרגיה לחום, קול או אנרגיה פוטנציאלית כלשהי), אז האנרגיה הקינטית לפני ואחרי ההתנגשות נשמרת.

הגדרה: התנגשות שבה האנרגיה הקינטית נשמרת נקראית התנגשות אלסטית.

עבור התנגשויות כאלה, $E_{k,before} = E_{k,after}$

נדון במקרה חד מימדי כללי שבו שני גופים נעים על משטח ללא חיכוך.



מכיוון שאין כוח חיצוני כולל הפועל על המערכת בכיוון התנועה, התנע הכולל נשמר. בנוסף, מכיוון שההתנגשות היא אלסטית, האנרגיה הקינטית הכוללת נשמרת.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{cases}$$

כאשר סימנו את המהירות אחרי ההתנגשות באות u. על ידי העברת אגפים בשתי המשוואות נקבל

$$\begin{cases} m_1(v_1-u_1)=m_2(u_2-v_2) \\ m_1({v_1}^2-{u_1}^2)=m_2({u_2}^2-{v_2}^2) \end{cases}$$

נחלק את המשוואה השניה בראשונה ונקבל $v_1+u_1=u_2+v_2$. מכאן שהמהירות היחסית בין הגופים בהתנגשות אלסטית אינה משתנה בגודלה אבל מתהפכת בסימנה.

$$v_1-v_2=-(u_1-u_2)$$

נפתור דוגמא עבור המהירות של הגופים לאחר ההתנגשות.

דוגמא: נסתכל על המקרה הפרטי שבו $v_2=0$.

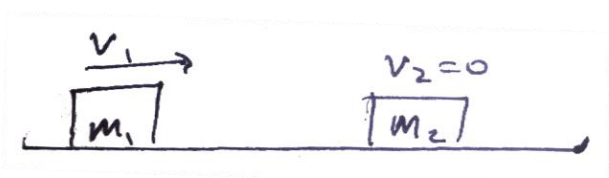
במקרה זה נקבל $u_1=u_2-v_1$. נציב במשוואה עבור שימור תנע ונקבל

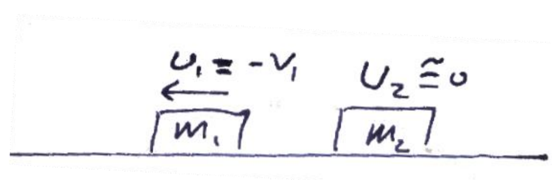
$$m_1v_1=m_1(u_2-v_1)+m_2u_2 \Rightarrow 2m_1v_1=u_2(m_1+m_2) \Rightarrow u_2=\frac{2m_1v_1}{(m_1+m_2)}$$

כסיכום ביניים, מצאנו שעבור דוגמא זו

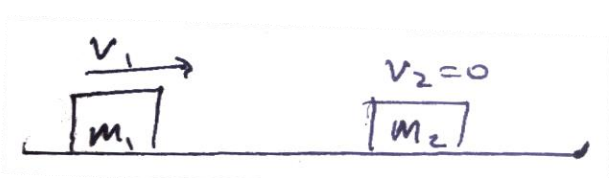
$$\begin{cases} u_1=u_2-v_1 \\ u_2=\dfrac{2m_1v_1}{(m_1+m_2)} \end{cases}$$

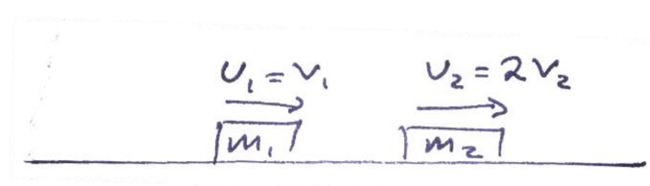
מקרה 1) אם $m_1 \ll m_2$ נקבל ש $u_1=-v_1$ ו $u_2\cong 0$. תוצאה זו אינטואיטיבית. כשגוף קל מתנגש בגוף כבד (כמו כדור פינג פונג המתנגש בכדור באולינג), הגוף הקל קופץ אחורה והגוף הכבד כמעט ואינו משנה את מהירותו.



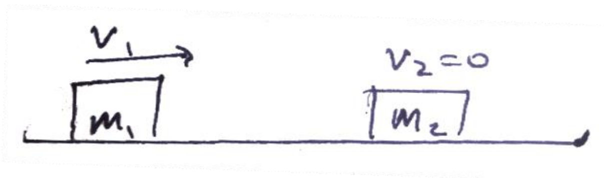


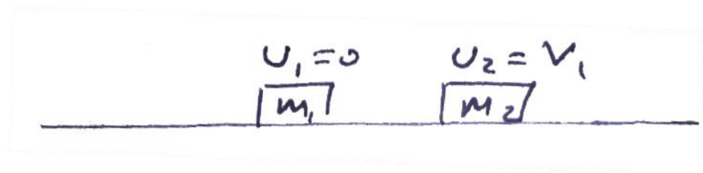
מקרה 2) אם $m_1 \gg m_2$ נקבל ש $u_2=2v_1$ ו $u_1=v_1$. במקרה זה הכדור הכבד מתנגש בכדור הקל וממשיך כמעט באותה מהירות. הכדור הקל, לעומת זאת, נע במהירות כפולה מהגוף הכבד.





מקרה 3) $m_1 = m_2$ נקבל ש $u_2 = v_1$ ו $v_1 = 0$. במקרה זה הכדור הראשון נעצר והכדור השני ממשיך לנוע באותה מהירות של הראשון. מקרה זה קורה בקירוב על שולחן הביליארד אם הכדורים מתנגשים ראש בראש.





התנגשות פלסטית (הועבר בשיעור הקודם ולכן לא יועבר שוב בהרצאה זו):

בהתנגשות פלסטית הגופים נדבקים אחד לשני כאשר הם מתנגשים. בשיעור הקודם ראינו שבמקרה זה האנרגיה הקינטית משתנה. נראה זאת באופן פורמלי.

כפי שראינו בשיעור הקודם, עבור התנגשות בין שני גופים בה התנע נשמר המהירות של הגוף המשולב לאחר ההתנגשות הוא $u = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$. האנרגיה הקינטית לפני ההתנגשות היא $E_{k,before} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

והאנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות היא $E_{k,after} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)}$.

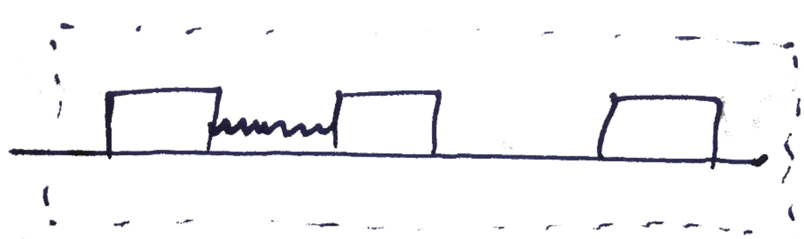
מכאן שהשינוי באנרגיה הקינטית בהתנגשות פלסטית היא

$$E_{k,after} - E_{k,before} = \frac{1}{2}\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)} - \frac{1}{2}\frac{(m_1v_1^2+m_2v_2^2)(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2v_1v_2 - m_1m_2v_1^2 - m_1m_2v_2^2}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2 < 0$$

מכאן שהאנרגיה הקינטית בהתנגשות פלסטית תמיד קטנה.

במציאות התנגשויות הן לרוב בין אלסטית לפלסטית. נשים לב שאם גוף מתפוצץ או מתפרק במהלך התנועה, אז בהעדר כוחות חיצוניים התנע של המערכת לפני ואחרי ההתפוצצות חייב להישמר. במקרה זה האנרגיה הקינטית לאחר הפיצוץ גדולה מהאנרגיה הקינטית לפי ההתפוצצות. הגורם שהוביל להתפרקות (קפיץ, חומר נפץ) העביר אנרגיה מסוג אחד לאנרגיה קינטית.

טיפים לפתרון בעיות בתנע:



עבור מערכת שלא פועל עליה כוח חיצוני כולל אנו יודעים ש (מכיוון שאנו דנים בתנועה בחד מימד, נשמיט את הכתיב הווקטורי):

1) התנע הכולל נשמר: $\sum m_iv_i = \sum m_iu_i$
2) מהירות מרכז המסה קבועה: $F_{tot,ext} = M_{tot}a_{com} \Rightarrow v_{com} = const$

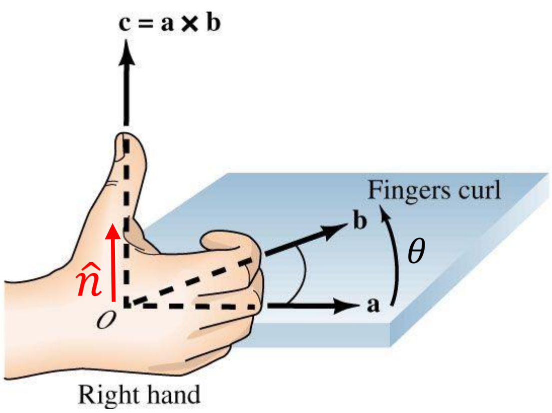
3) התנע הכולל של המערכת במערכת מרכז המסה היא 0: $P_{tot} = M_{tot}v_{com} \Rightarrow P_{tot}^{(com)} = 0$

תנע זוויתי:

אנחנו עכשיו נכנסים לנושא מרתק שנקרא תנע זוויתי. נתחיל בלשאול את עצמנו מספר שאלות:

אם אניח סביבון במצב מנוחה על החוד שלו, הוא יפול מיד. אבל אם אסובב את הסביבון, הוא יכול להמשיך להסתובב לפרקי זמן ארוכים (נכון ל 2018, שיא העולם היה קצת מעל 27 שעות). למה הסיבוב של הסביבון עוזר לו לא ליפול? את אותה שאלה נוכל להפנות לבדי דאפו מסתובבים. בעזרת תנע זוויתי נוכל להבין מדוע תופעות אלו אפשרויות. לשם כך, נתחיל בהגדרה חדשה להכפלת שני וקטורים, הנקראית מכפלה וקטורית, שבעזרת נבנה את מושג התנע הזוויתי.

מכפלה וקטורית:



הגדרה: מכפלה וקטורית (הנקראית גם *CROSS PRODUCT*) של שני וקטורים מוגדרת כ

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = |\vec{A}||\vec{B}|sin\theta\, \hat{n}$$

כאשר הזווית θ היא הזווית הקטנה בין שני הוקטורים ווקטור היחידה, $\hat{n}$, נקבע לפי כלל יד ימין: $\hat{n}$ הוא בכיוון הבוהן של יד ימין כאשר אצבעות יד ימין נסגרות מוקטור $\vec{A}$ (כי הוא מופיע ראשון) אל וקטור $\vec{B}$ דרך הזווית הקטנה ביותר.

במילים אחרות גודל המכפלה הוקטורית היא $|\vec{A}||\vec{B}|sin\theta$ וכיוונה $\hat{n}$.
שימו לב שבניגוד למכפלה סקאלרית, התוצאה של מכפלה וקטורית של שני וקטורים היא וקטור.

מחוק יד ימין אנו רואים שהתוצאה של מכפלה וקטורית היא וקטור שניצב לשני הוקטורים $\vec{A}$ ו $\vec{B}$. עוד תוצאה של ההגדרה של מכפלה וקטורית היא שהוקטור $\vec{A} \times \vec{B}$ הוא בעל אותו גודל אבל בכיוון הפוך לוקטור $\vec{B} \times \vec{A}$. כלומר, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. תוצאה שימושית נוספת, שלא נוכיח בשיעור, היא ש $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

אנו רואים מהתלות של המכפלה הוקטורית בפונקציית הסינוס שאם $\vec{A} \perp \vec{B}$ אז $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|sin90^{\circ} = |\vec{A}||\vec{B}|$ ואם $\vec{A} || \vec{B}$ אז $\vec{A} \times \vec{B}\, sin0 = 0$.

דוגמא:

$$\hat{x} \times \hat{x} = |\hat{x}||\hat{x}|sin0 = 0$$

כך גם עבור

$$\hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

דוגמא:

על ידי סגירה של אצבעות יד ימין מציר *X* אל ציר *Y* נקבל כי

$$\hat{x} \times \hat{y} = |\hat{x}||\hat{y}|sin90^{\circ}\hat{z} = \hat{z}$$

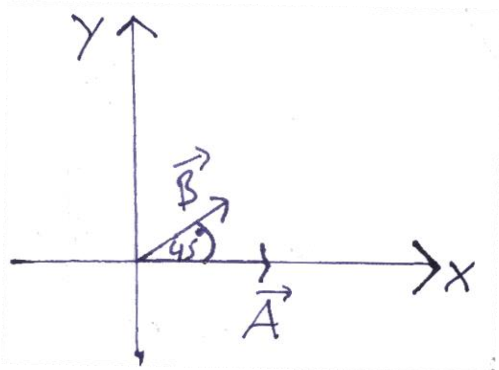
$$\hat{y} \times \hat{x} = -|\hat{x}||\hat{y}|sin90^{\circ}\hat{z} = -\hat{z}$$

ניתן להראות שהגדרה שקולה של המכפלה הוקטורית היא

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}$$

ניתן לזכור ביטוי זה כדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$ כאשר חשוב מאוד שהוקטור שמופיע ראשון במכפלה הוקטורית יהיה בשורה השניה של המטריצה.

<u>דוגמא:</u>



עבור שני הוקטורים $\vec{A} = 4\hat{x}$ ו $\vec{B} = 3\hat{x} + 3\hat{y}$ נקבל

$$\left|\vec{A}\right| = 4;\ \left|\vec{B}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$$

מכאן נקבל שהמכפלה הוקטורית של שני הוקטורים היא

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin(45^\circ)\,\hat{z} = 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z} = 12\hat{z}$$

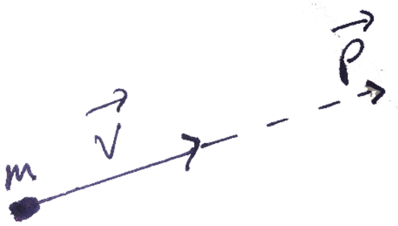
כאשר השתמשנו בכך ש $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$.

נחשב את אותה מכפלה וקטורית בצורה האלגברית:

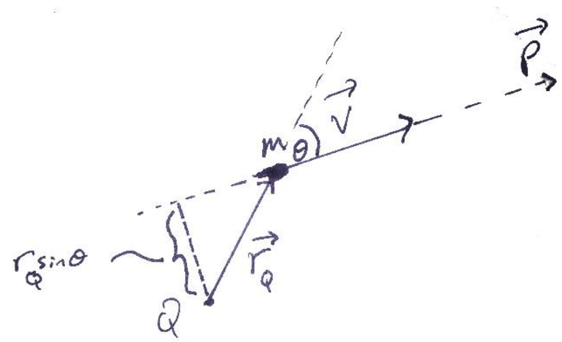
$$\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \hat{x}(0-0) - \hat{y}(0-0) + \hat{z}(12-0) = 12\hat{z}$$

<u>תנע זוויתי:</u>

אם לגוף יש מסה m ומהירות $\vec{v}$ אז יש לו תנע קוי, $\vec{p} = m\vec{v}$. נשים לב שהמהירות של גוף אינה תלויה בבחירת ראשית הצירים במערכת היחוס בה אנו עובדים. כלומר, עבור מערכת יחוס נתונה, בחירה שונה של ראשית הצירים לא תשנה את המהירות שאנו מודדים. זה נכון משום שמהירות היא קצב שינוי ההעתק, וההעתק אינו תלוי בבחירת הראשית. מכאן שהתנע של גוף לא תלוי בבחירת ראשית הצירים של מערכת היחוס בה אנו עובדים.



תנע זוויתי, לעומת זאת, תלוי בבחירת ראשית הצירים . נגדיר את ראשית הצירים, Q, במקום כלשהו שרירותי. ביחס לראשית צירים זו, אנו יכולים לתאר את מיקום המסה בעזרת וקטור המקום, $\vec{r}_Q$. התנע הזוויתי ביחס לראשית הצירים שבחרנו מוגדר להיות הוקטור

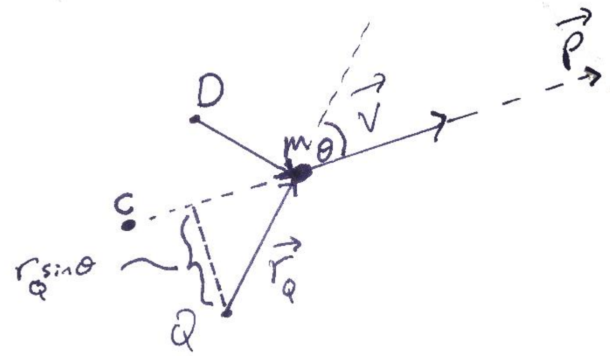


$$\vec{J}_Q = \vec{r}_Q \times \vec{p} = m(\vec{r}_Q \times \vec{v})$$

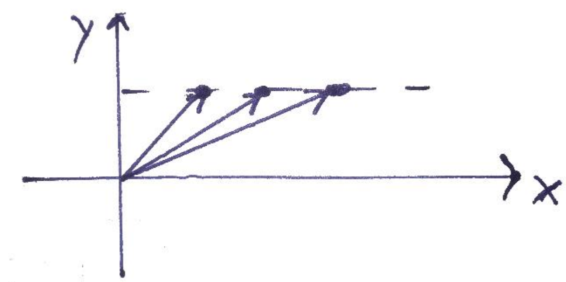
(לפעמים התנע הזוויתי מסומן באות $\vec{L}$). הגודל של התנע הזוויתי הוא $\left|\vec{J}_Q\right| = mvr_Q sin\theta$. המשמעות של הגודל $r_Q sin\theta$ משורטט באיור בצד. את כיוון התנע הזוויתי נקבל בעזרת כלל יד ימין של מכפלה וקטורית. במקרה של הדוגמא שמופיעה באיור, הכיוון של התנע הזוויתי הוא לתוך הלוח.

נשים לב שהתנע הזוויתי תלוי בבחירת ראשית הצירים. אילו נבחר את ראשית הצירים להיות בנקודה C כפי שמשורטט באיור הבא, התנע הזוויתי יהיה $\vec{J}_C = 0$, בגלל שוקטור המקום והמהירות מקבילים (מה שגורם למכפלה הוקטורית להתאפס). מכאן שתנע זוויתי הוא לא תכונה פנימית של גוף נע. אם אתם יושבים בכיתה ורואים גוף נע עם מהירות מסוימת ומסה מסוימת, אתם יודעים את

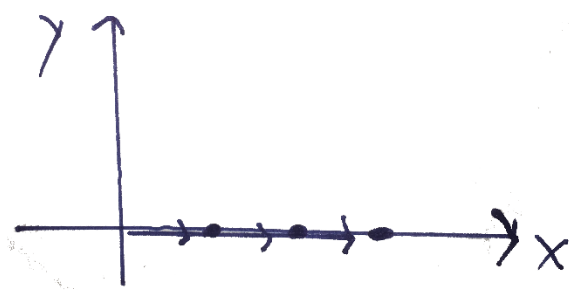
התנע שלו. התנע הזוויתי לעומת זאת תלוי בנקודת היחוס בה תבחרו. דוגמא נוספת: אילו נבחר את הנקודה D כפי שמסומן באיור, התנע הזוויתי יצביע מחוץ ללוח.



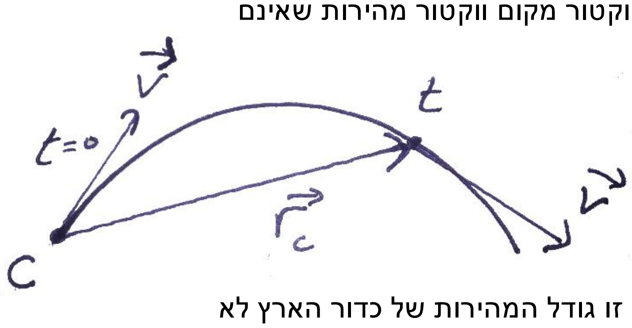
<u>דוגמא</u>: לגוף הנע לאורך קו ישר יכול להיות תנע זוויתי אם $\vec{r}$ ו $\vec{v}$ אינם מקבילים.



<u>דוגמא</u>: עבור המקרה המיוחד בו בחירת הראשית גורמת לכך שוקטור המקום ווקטור המהירות מקבילים, התנע הזוויתי הוא $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|sin(0) = 0$.

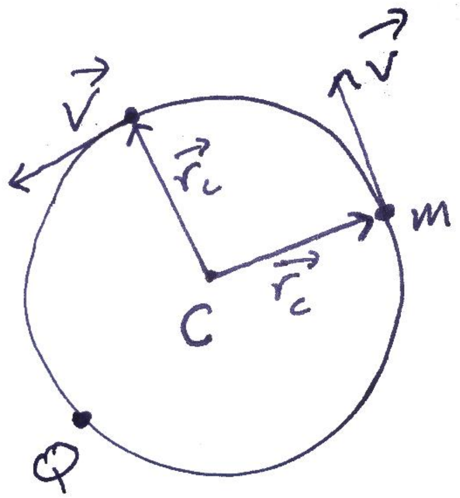


<u>דוגמא</u>: נניח שאנו זורקים גוף. איור של התנועה מופיע בצד. בואו נחשב את התנע הזוויתי של הגוף ביחס לנקודה C. התנע הזוויתי בזמן $t = 0$ הוא $\vec{J}_C = 0$ משום שוקטור המקום ברגע זה הוא $\vec{r} = 0$. מה לגבי התנע הזוויתי בזמן מאוחר יותר t? באופן ברור, התנע הזוויתי אינו 0, כי יש וקטור מקום ווקטור מהירות שאינם מקבילים. בדוגמא זו אנו רואים שיש שינוי בתנע הזוויתי. ניתן לחשוב שהשינוי בתנע הזוויתי מתרחש משום שמהירות הגוף משתנה במהלך התנועה. בדוגמא הבאה נראה שיתכן מצב בו המהירות משתנה כל הזמן והתנע הזוויתי אינו משתנה.



<u>דוגמא</u>: נדון בתנועת כדור הארץ סביב השמש (ראו איור בעמוד הבא). נניח שכדור הארץ נע במסלול מעגלי במהירות קבועה. בדוגמא זו גודל המהירות של כדור הארץ לא

משתנה אך כיוון המהירות כן משתנה. מה התנע הזוויתי של כדור הארץ המסתובב סביב השמש ביחס לנקודה C?



גודל התנע הזוויתי הוא
$|J_C| = M|\vec{r}_C \times \vec{v}| = Mr_C v sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = Mr_C v$. נשים לב שגודל התנע הזוויתי שווה בכל נקודה לאורך המסלול. זה נכון משום שהזווית בין וקטור המקום והמהירות הוא תמיד $\frac{\pi}{2}$. בנוסף, כיוון התנע זוויתי גם הוא קבוע ומצביע מחוץ ללוח. זוהי דוגמא בה המהירות משתנה כל הזמן, אך התנע הזוויתי אינו משתנה.

נניח שהיינו בוחרים נקודת ראשית אחרת, בנקודה Q באיור. האם התנע הזוויתי היה נשמר גם במקרה זה? במקרה זה התנע הזוויתי אינו נשמר. לדוגמא, יהיה רגע בוא הגוף ינוע דרך הנקודה Q והתנע הזוויתי יתאפס (כי וקטור המקום יהיה $\vec{r}_Q = 0$). בדוגמא זו התנע הזוויתי שמור רק ביחס לנקודה C.

בואו נתייחס באופן כללי לשאלה מתי התנע הזוויתי משתנה. שימו לב שבינתיים אנו מדברים רק על גוף נקודתי יחיד. התנע הזוויתי ביחס לנקודה Q כללית הוא

$$\vec{J}_Q = \vec{r}_Q \times \vec{p}$$

כדי ללמוד על השינוי בתנע הזוויתי נגזור לפי הזמן ונקבל

$$\frac{d\vec{J}_Q}{dt} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_Q \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

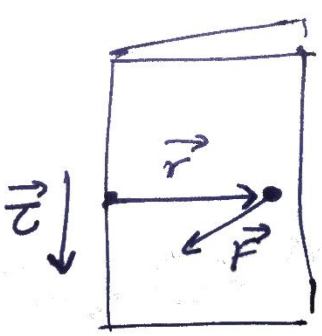
נזהה שהאיבר הראשון בצד ימין של המשוואה הוא $\frac{d\vec{r}_Q}{dt} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$, משום שמכפלה וקטורית של וקטור עם עצמו מתאפסת. בנוסף, מהחוק השני של ניוטון, הנגזרת של התנע הוא הכוח הכולל הפועל על הגוף, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{net}$. מכאן נקבל ש

$$\frac{d\vec{J}_Q}{dt} = \vec{r}_Q \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_i$$

כאשר הגדרנו את מומנט הסיבוב (*Torque*) המופעל על ידי כוח $\vec{F}_i$ להיות $\vec{\tau}_i = \vec{r}_Q \times \vec{F}_i$ ניתן לכתוב משוואה זו בעזרת מומנט הסיבוב הכולל כ

$$\frac{d\vec{J}_Q}{dt} = \vec{r}_Q \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}_{net}$$

זוהי אחת המשוואות החשובות בקורס שלנו. מה המשמעות של ה *Torque*? אנו רואים שזהו גודל שלוקח בחשבון גם את גודל הכוח הפועל על גוף וגם את המרחק שלו מנקודת יחוס. לדוגמא, נדמיין שאנו פותחים דלת. כאשר אנו מושכים את הדלת בידית אנו מפעילים כוח בכיוון ניצב לדלת. מכאן ש *Torque* ביחס לציר הסיבוב של הדלת הוא
$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|sin\frac{\pi}{2} = |\vec{r}||\vec{F}|$ וכיוונו במקביל לציר הסיבוב (ראו איור).



נדמיין שאנו מנסים לפתוח את הדלת על ידי הפעלת כוח ישירות על ציר הסיבוב. במקרה זה הדלת לא תפתח. מכיוון שהכוח מופעל על נקודת היחוס שבחרנו, ה *Torque* במקרה זה הוא $\vec{\tau} = 0$ (משום ש $\vec{r} = 0$).
אנו יודעים מנסיון שככל שהידית רחוקה יותר מציר הסיבוב, קל יותר לפתוח את הדלת עבור שימוש בכוח נתון. במקרה זה גודל וקטור המקום גדל וכך גם ה *Torque*. כלומר, זה אינו מספיק

לדעת באיזה כוח מנסים לגרום לגוף להסתובב, צריך גם לדעת באיזה מרחק מציר הסיבוב אנו מפעילים כוח זה. מניסוי מחשבתי זה אנו רואים שה *TORQUE* מרחיב את מושג הכוח כדי לתאר עד כמה הכוח גורם לגוף להסתובב סביב ציר סיבוב. במונחים של *TORQUE* ניתן לומר שככל שה *TORQUE* גדול יותר, כך התנע הזוויתי של הגוף ישתנה בקצב גדול יותר.

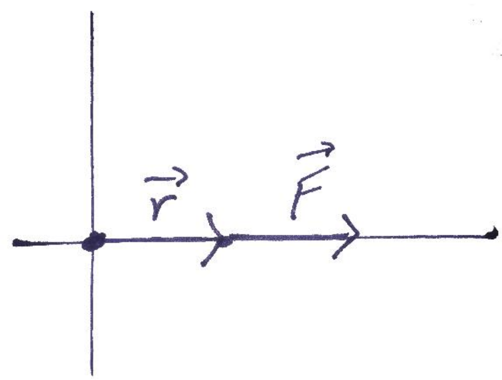
מהביטוי שמצאנו אנו רואים שהתנע הזוויתי משתנה אם פועל *TORQUE* כולל על הגוף. אם אין *TORQUE* כולל, התנע הזוויתי נשמר. כלומר, ללא *TORQUE* התנע הזוויתי קבוע

$$\vec{\tau}_{net} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{J} = const$$

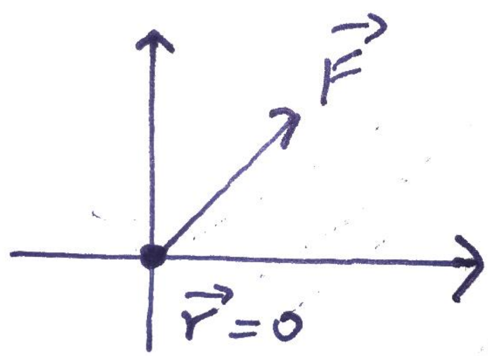
בדוגמא של כדור הארץ, הכוח תמיד מקביל לוקטור המקום (כוח הגרביטציה הוא כוח מרכזי ולכן פועל כלפי מרכז המעגל). במצב זה המכפלה הוקטורית בין וקטור המקום והכוח מתאפס (כי הסינוס במכפלה הוקטורית מתאפס). מכאן שבדוגמא זו אין *TORQUE* הפועל על המערכת והתנע הזוויתי נשמר ביחס לנקודה *C*. כאשר נבחר נקודת ראשית אחרת, יהיה *TORQUE* והתנע הזוויתי ישתנה.

כפי שראינו, תנע זוויתי נמדד ביחס לנקודה מסוימת. אם הוא נשמר, הוא נשמר ביחס לנקודה זו.

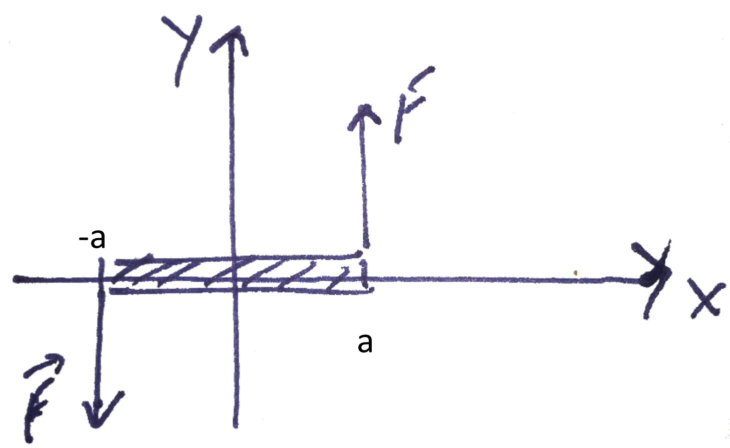
<u>דוגמא</u>: מטרת דוגמא זו היא להבהיר שיתכן שפועל כוח על הגוף, אך הוא אינו מרגיש *TORQUE* כולל. דוגמא זאת קורת, לדוגמא, כאשר אנו מושכים דלת על ידי כוח שפועל במישור הדלת. במקרה זה הדלת לא תסתובב. באופן כללי, מצב זה יכול לקרות כאשר הכוח מקביל לוקטור המקום.



<u>דוגמא</u> נוספת היא כאשר הכוח פועל על הנקודה שביחס אליה אנו מודדים את התנע הזוויתי. גם במקרה זה קיים כוח אך לא קיים מומנט סיבוב.



<u>דוגמא</u>: גם המקרה ההפוך אפשרי: יתכן שהכוח השקול הפועל על מערכת הוא 0 אך קיים *TOURQE*. דוגמא לכך נמצאת באיור הבא.

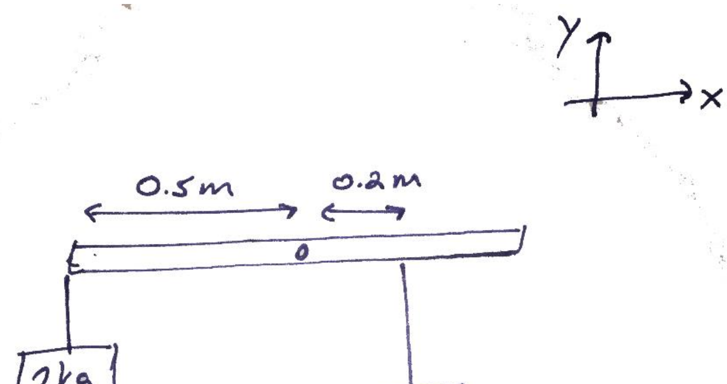


נסכום את ה *TOURQE* שמופעל על ידי כל כוח. מחוק יד ימין אנו רואים ששני מומנטי הסיבוב הם באותו כיוון (מצביעים מחוץ ללוח), וגודלם $|\vec{\tau}_i| = |\vec{r}||\vec{F}|sin\frac{\pi}{2} = |a||\vec{F}|$. נחשב את גודל המומנט בכתיב וקטורי:

$$\sum_i \vec{\tau}_i = a\hat{x} \times F\hat{y} - a\hat{x} \times F(-\hat{y}) = aF\hat{z} + aF\hat{z} = 2aF\hat{z}$$

מומנט סיבוב זה יגרום לגוף להסתובב נגד כיוון השעון. נשים לב שמכיוון שהכוח השקול החיצוני הפועל על המוט הוא 0, מרכז המסה של הגוף ישאר במקום (התנע שלו לא ישתנה).

<u>דוגמא</u>: על סרגל חסר מסה שאורכו $L = 1m$ תולים בצד אחד משקולת בעלת מסה $m_1 = 2\ kg$. איזו משקולת יש לתלות במרחק *0.2* מטר מהציר שעובר במרכז הסרגל כדי שהסרגל לא יתחיל הסתובב.



פתרון: לפני שהסרגל מתחיל להסתובב הוא במנוחה. כלומר, כל אלמנט מסה בו במנוחה. במצב זה, אין לסרגל תנע זוויתי. אם נתלה את המשקל הנכון במרחק *0.2* מטר מציר הסיבוב, אז מומנט הסיבוב הכולל על הסרגל יהיה 0 והתנע הזוויתי לא ישתנה. במצב זה הסרגל ישאר במנוחה. מומנט הסיבוב הכולל הוא

$$\sum \tau_i = \left(-\frac{L}{2}\hat{x}\right) \times (-m_1 g\hat{y}) + 0 \times \vec{N} + \left(\frac{L}{5}\hat{x}\right) \times (-m_2 g\hat{y}) = \frac{m_1 gL}{2}\hat{z} - \frac{m_2 gL}{5}\hat{z} = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{2}m_1 = 5\ kg$$

שימו לב שהציר מפעיל כוח נורמל על המוט בתגובה למשיכת הגופים את המוט כלפי מטה. מכיוון שכוח זה מופעל בנקודה ביחס אליה אנו מודדים את ה *TOURQUE* , וקטור המקום שלו הוא $\vec{r} = 0$ ואין לו תרומה ל *TOURQUE* הכולל.