תרגיל בית 6

	סטודנט א'	סטודנט ב'
שם	עידו פנג בנטוב	ניר קרל
ת"ז	322869140	322437203
דואר אלקטרוני	ido.fang@campus.technion.ac.il	nir.karl@campus.technion.ac.il

שאלה 1

$$I = \int_0^6 \frac{x+1}{4x+3}\,\mathrm{d}x$$

שאלה א'

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^6 \frac{x+1}{4x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^6 \frac{4x+4}{4x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^6 \frac{4x+3}{4x+3} + \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^6 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^6 \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x\Big|_0^6 + \frac{1}{16}\ln(4x+3)\Big|_0^6 \\
&= \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{16}\ln(27) - \frac{1}{16}\ln(3) \\
&= \boxed{1.63732653608}
\end{aligned}$$

סעיף ב'

האינטגרנד שלנו:

$$f(x) = \frac{x+1}{4x+3}$$

נשים לב כי:

$$a = 0, \quad b = 6$$

וערכי הפונקציה בנקודות אלו:

$$f(0) = \frac{1}{3}, \quad f(3) = \frac{4}{15}, \quad f(6) = \frac{7}{27}$$

ניוטון קוטס מסדר ראשון:

$$I_{\text{trap}} = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

נציב:

$$I_{\text{trap}} = 3\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{27}\right) = \boxed{\frac{16}{9}}$$

ניוטון קוטס מסדר שני:

$$I_{\text{Simp}} = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)\right]$$

נציב:

$$I_{\text{Simp}} = 1\cdot\left[\frac{1}{3}+4\cdot\frac{4}{15}+\frac{7}{27}\right] = \boxed{\frac{224}{135}}$$

השגיאה בפועל:

$$E_{\text{trap}} = I - I_{\text{trap}} = \boxed{-0.14045124169}$$

$$E_{\text{Simp}} = I - I_{\text{Simp}} = \boxed{-0.02193272318}$$

השגיאה התאורטית:

$$E_{\text{trap}} = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

$$E_{\text{Simp}} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

כאשר $0<\xi<6$.

נמצא את הנגזרות של f:

$$f'(x) = \frac{4x+3-4(x+1)}{(4x+3)^2} = -\frac{1}{(4x+3)^2} = -(4x+3)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(4x+3)^{-3}$$

$$f'''(x) = -24(4x+3)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 384(4x+3)^{-5}$$

הפונקציות f'' ו-$f^{(4)}$ הן פונקציות יורדות בקטע הנתון. לכן נקבל ערך מקסימלי בקצוות.

$$f''(0) = \frac{2}{27} \qquad f''(6) = 1.0162\cdot 10^{-4}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{128}{81} \qquad f^{(4)}(6) = 2.676\cdot 10^{-5}$$

נסיק כי החסמים העליונים והתחתונים עבור שתי השיטות הן:

$$-\frac{4}{3} = -\frac{f''(0)}{12}\cdot 6^3 < E_{\text{trap}} < -\frac{f''(6)}{12}\cdot 6^3 = -0.00183$$

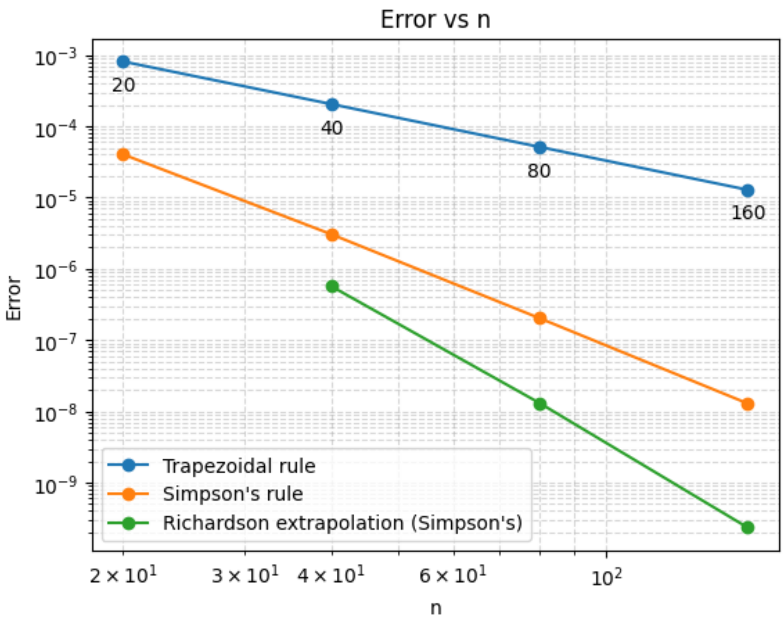
$$-4.2666 < -\frac{f^{(4)}(0)}{90}\cdot 3^5 < E_{\text{Simp}} < -\frac{f^{(4)}(6)}{90}\cdot 3^5 = -7.2252\cdot 10^{-5}$$

אכן השגיאות שלנו נמצאים בטווח של השגיאה התאורטית.

סעיפים ג', ד ו-ה'

```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

def composite_trapezoidal(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        s += 2 * f(a + i * h)
    return s * h / 2

def composite_simpsons(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            s += 2 * f(a + i * h)
        else:
            s += 4 * f(a + i * h)
    return s * h / 3

def richardson_extrapolation_simp(f, a, b, n):
    I1 = composite_simpsons(f, a, b, n)
    I2 = composite_simpsons(f, a, b, 2*n)
    return (16*I2 - I1) / 15

f = lambda x: (x+1)/(4*x+3)
a = 0
b = 6

points = [21,41,81,161]
n = np.array(points) - 1
n_richardson = n[1:]//2

x = sp.symbols('x')
fsym = (x+1)/(4*x+3)
I_real = sp.integrate(fsym, (x, 0, 6))
I_real = float(I_real)

E_trap = [abs(I_real - composite_trapezoidal(f, a, b, i)) for i
 ↪  in n]
E_simp = [abs(I_real - composite_simpsons(f, a, b, i)) for i in
 ↪  n]
E_rich = [abs(I_real - richardson_extrapolation_simp(f, a, b, i))
 ↪  for i in n_richardson]

print("n | Trapezoidal | Simpson's | Richardson")
for i in range(len(n)):
```

```python
    E_rich_value = E_rich[i-1] if i >= 1 else '---'
    print(f"{n[i]} | {E_trap[i]:.6e} | {E_simp[i]:.6e} | {E_rich_value if isinstance(E_rich_value, str) else f'{E_rich_value:.6e}'}")

plt.plot(n, E_trap, 'o-', label="Trapezoidal rule")
plt.plot(n, E_simp, 'o-', label="Simpson's rule")
plt.plot(n_richardson*2, E_rich, 'o-', label="Richardson extrapolation (Simpson's)")

for i, txt in enumerate(n):
    plt.annotate(txt, (n[i], E_trap[i]), textcoords="offset points", xytext=(0,-15), ha='center')


log_n = np.log(n)
log_n_richardson = np.log(n_richardson*2)

log_E_trap = np.log(E_trap)
log_E_simp = np.log(E_simp)
log_E_rich = np.log(E_rich)

slope_trap, _ = np.polyfit(log_n, log_E_trap, 1)
slope_simp, _ = np.polyfit(log_n, log_E_simp, 1)
slope_rich, _ = np.polyfit(log_n_richardson, log_E_rich, 1)

print(f"Slope of Trapezoidal rule: {slope_trap}")
print(f"Slope of Simpson's rule: {slope_simp}")
print(f"Slope of Richardson extrapolation (Simpson's): {slope_rich}")

plt.yscale('log')
plt.xscale('log')
plt.title('Error vs n')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('Error')
plt.grid(True, which="both", ls="--", alpha=0.5)
plt.legend()
plt.show()
```



איור 1: שגיאה אמיתית ביחס ל-n, לפי כל שיטה.

פלט הקוד:

```
n | Trapezoidal | Simpson's | Richardson
20 | 8.105947e-04 | 4.039358e-05 | ---
40 | 2.049434e-04 | 3.059592e-06 | 5.706596e-07
80 | 5.138850e-05 | 2.035455e-07 | 1.314238e-08
160 | 1.285683e-05 | 1.294218e-08 | 2.352962e-10
Slope of Trapezoidal rule: -1.9930828748445153
Slope of Simpson's rule: -3.8733404175488584
Slope of Richardson extrapolation (Simpson's): -5.621968240212317
```

נראה כי התוצאות שלנו תואמות לתאוריה. מההרצאה, השגיאה של שיטת הטרפזים ושיטת סימפסון המוכללים:

$$E_{\text{trap}}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$$

$$E_{\text{Simp}}(f) = -\frac{f''''(\xi)}{180}(b-a)h^4$$

מספר הקטעים n נתון ע"י $h = \frac{b-a}{n}$. לכן:

$$E_{\text{trap}}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

$$E_{\text{Simp}}(f) = -\frac{f''''(\xi)}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4}$$

נסמן:

$$K_1 = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \quad K_2 = -\frac{f'''(\xi)}{180}(b-a)^5$$

ולכן:

$$E_{\text{trap}}(f) = \frac{K_1}{n^2}$$

$$E_{\text{Simp}}(f) = \frac{K_2}{n^4}$$

עבור המשוואה הראשונה:

$$\ln(E_{\text{trap}}(f)) = \ln(K_1) - \ln(n^2)$$

$$\ln(E_{\text{trap}}(f)) = \ln(K_1) - 2\ln(n)$$

באותו אופן עבור המשוואה השניה:

$$\ln(E_{\text{Simp}}(f)) = \ln(K_2) - 4\ln(n)$$

נסיק כי השיפועים המתקבלים הם:

$$\boxed{m_{\text{trap}} = -2, \quad m_{\text{Simp}} = -4}$$

ואכן ניתן לראות בגרף ומהטבלה כי השיפוע המתקבל הוא -2 עבור שיטת הטרפזים ו--4 עבור שיטת סימפסון. נסיק כי השיפוע מייצג לנו את סדר השגיאה, בהתאם לתאוריה - h^2 עבור שיטת הטרפזים ו-h^4 עבור שיטת סימפסון.

עבור אקסטרפולציית ריצ'רדסון, אנו רואים מהגרף ומהטבלה כי יש לו שיפוע יותר חד:

$$\boxed{m_{\text{Rom}} = -6}$$

בדיוק כמצופה מהתאוריה, בה ראינו כי אקסטרפולציית ריצ'רדסון על שיטת סימפסון מקטינה את סדר הגודל של השגיאה, שהיה h^4, פי-h^2:

$$E_{\text{Rom}}(f) = \mathcal{O}(h^6)$$

תרגיל 2

סעיף א'

נשתמש בשיטת המקדמים החופשיים:

$$f(x) = 1 \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \pi = A_1 + A_2$$

$$f(x) = x \longrightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \pi = A_1 + A_2 \\ \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2 \end{cases}$$

נפתור:

$$
\begin{aligned}
3\cdot \mathrm{II}-\mathrm{I}: &\quad \frac{\pi}{2}=A_2\\
A_2\to \mathrm{I}: &\quad \pi=A_1+\frac{\pi}{2} \implies A_1=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

ולכן:

$$\boxed{A_1=A_2=\frac{\pi}{2}}$$

סעיף ב'

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{(1+x)}$$

נציב בקירוב:

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{2}f\left(\frac{2}{3}\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}\\
&=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\\
&=\boxed{2.70296}
\end{aligned}
$$

סעיף ג'

בקטע $[0,1]$ הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ לא רציפה בכל נקודה. היא גם לא גזירה בכל נקודה. לפיכך, אי אפשר לעשות לה פיתוח מקלורן - ומכאן שאי אפשר לחסום את השגיאה.

תרגיל 3

סעיף א'

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{1.2} e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&=-e^{-x}\Big|_0^{1.2}\\
&=e^0-e^{-1.2}\\
&=\boxed{0.69880578809}
\end{aligned}
$$

סעיף ב'

עבור 2 צמתי אינטגרציה:

$$x_1=0,\ x_2=1.2$$

$$\begin{aligned}\tilde{I} = &\ \frac{h}{2}\Big[f(x_2) + f(x_1)\Big] \\ = &\ \underbrace{0.6}_{1.2/2} \cdot (1 + 0.3012) \\ = &\ 0.78071652715\end{aligned}$$

ולכן השגיאה שלנו:

$$\begin{aligned}E_{\text{trap}} &= 0.69880578809 - 0.78071652715 \\ &= \boxed{-0.08191073906}\end{aligned}$$

עבור 3 צמתי אינטגרציה:

$$\begin{aligned}& x_1 = 0,\ x_2 = 0.6,\ x_3 = 1.2 \\ \tilde{I} = &\ \frac{h}{3}\Big[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\Big] \\ = &\ \underbrace{0.2}_{0.6/3}\Big[1 + 4 \cdot 0.5488 + 0.3012\Big] \\ = &\ 0.69928815126\end{aligned}$$

ולכן השגיאה שלנו:

$$\begin{aligned}E_{\text{Simp}} &= 0.69880578809 - 0.69928815126 \\ &= \boxed{-0.00048236317}\end{aligned}$$

סעיף ג'

נעביר לתחום אינטגרציה $[-1, 1]$:

$$x = T(t) = \frac{(1.2-0)t + (1.2+0)}{2} = 0.6t + 0.6$$

$$\mathrm{d}x = 0.6\mathrm{d}t$$

נציב בנוסחה של אינטגרציית גאוס:

$$\int_0^{1.2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 0.6 \cdot f(0.6t + 0.6)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 0.6e^{-(0.6t+0.6)}\,\mathrm{d}t$$

נסמן:

$$g(t) = 0.6e^{-(0.6t+0.6)}$$

ולכן:

$$\int_0^{1.2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2)$$

מטבלת שורשי לז'נדר:

$$\begin{aligned}t_1 &= -0.57735 \quad A_1 = 1 \\ t_2 &= 0.57735 \quad\ \ A_2 = 1\end{aligned}$$

נוכל כעת לשער את ערך האינטגרל:

$$\tilde{I} = A_1 g(t_1) + A_2 g(t_2)$$
$$= 0.6 \cdot e^{-0.6} \cdot \left(e^{0.6 \cdot 0.57735} + e^{-0.6 \cdot 0.57735}\right)$$
$$= 0.69848509187$$

נסיק כי השגיאה:

$$E = 0.69880578809 - 0.69848509187$$
$$= \boxed{0.00032069622}$$

$$\left|E^{(2)}_{\text{gauss}}\right| < \left|E_{\text{trap}}\right|$$

נשים לב שבסעיף ב' קיבלנו חסם שלילי, כלומר בשיטה מסעיף ב' קיבלנו שטח קטן מהשטח האמיתי. לעומת זאת בשיטה בסעיף זה החסם הוא חיובי, כלומר תמיד נקבל שטח גדול מהשטח האמיתי.

נבדוק את השגיאה התיאורטית לפי שיטת גאוס-לז'נדר. עבור $0 < \xi < 1.2$:

$$E = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi) = \frac{2^5 \cdot 2^4}{5 \cdot 24^3} \cdot g^{(4)}(\xi) = 0.0074 \cdot g^{(4)}(\xi)$$

נשים לב שהנגזרת הרביעית היא:

$$g^{(4)}(x) = 0.0426756 \cdot e^{-0.6t}$$

ולכן החסם העליון והתחתון הם:

$$0.0074 \cdot g^{(4)}(1) = 0.00031579944 \cdot e^{-0.6 \cdot 1} = 0.000288857$$
$$0.0074 \cdot g^{(4)}(-1) = 0.00031579944 \cdot e^{-0.6 \cdot (-1)} = 0.000576$$

$$\boxed{0.000173 \leq E = 0.00032069622 \leq 0.000576}$$

קיבלנו ש- E בפועל אכן בטווח ששיערנו שהוא יהיה.

סעיף ד'

מסעיף קודם:

$$g(t) = 0.6e^{-(0.6t+0.6)}$$

שורשי לז'נדר:

$$t_{1,2} = \pm 0.774597 \quad A_{1,2} = \frac{5}{9}$$
$$t_3 = 0.774597 \qquad A_3 = \frac{8}{9}$$

נוכל כעת לשער את ערך האינטגרל:

$$\tilde{I} = A_1 g(x_1) + A_2 g(x_2) + A_3 g(x_3)$$
$$= 0.6 \cdot e^{-0.6} \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot e^{0.6 \cdot 0} + \frac{8}{9} \cdot e^{0.6 \cdot 0.774597} + \frac{8}{9} \cdot e^{-0.6 \cdot 0.774597}\right)$$
$$= 0.9880483684$$

נסיק כי השגיאה:

$$E = 0.69880578809 - 0.69880483684$$
$$= \boxed{0.9512 \cdot 10^{-6}}$$

$$\left|E_{\text{gauss}}^{(3)}\right| < \left|E_{\text{trap}}\right|$$

נשים לב שבסעיף ב' קיבלנו חסם שלילי, כלומר בשיטה מסעיף ב' קיבלנו שטח קטן מהשטח האמיתי. לעומת זאת בשיטה בסעיף זה החסם הוא חיובי, כלומר תמיד נקבל שטח גדול מהשטח האמיתי.

נבדוק את השגיאה התיאורטית לפי שיטת גאוס-לז'נדר. עבור $0 < \xi < 1.2$:

$$E = \frac{2^{(2n+1)}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi) = \frac{2^7 \cdot 6^4}{7 \cdot 720^3} \cdot g^{(6)}(\xi) = 6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(4)}(\xi)$$

נשים לב שהנגזרת הרביעית היא:

$$g^{(6)}(t) = 0.0153632 \cdot e^{-0.6t}$$

ולכן החסם העליון והתחתון הם:

$$6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(6)}(1) = 0.97544 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0.6 \cdot 1} = 0.5354 \cdot 10^{-6}$$
$$6.3492 \cdot 10^{-5} \cdot g^{(6)}(-1) = 0.97544 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-0.6 \cdot (-1)} = 1.777 \cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{0.5354 \cdot 10^{-6} \leq E = 0.9512 \cdot 10^{-6} \leq 1.777 \cdot 10^{-6}}$$

קיבלנו ש- E בפועל אכן בטווח ששיערנו שהוא יהיה.