Tarea 2do Parcial
Análisis Complejo

N. Pérez Medina.

April 7, 2025

Capítulo 4

6.- La transformación

$$w = f(z) = az + b \quad (a \neq 0), \tag{1}$$

donde a y b son números complejos arbitrarios (excepto por la condición $a \neq 0$), se llama una *transformación lineal entera.* Demuestra que:

a) $f(z)$ es biunívoca (uno a uno) en el plano complejo extendido (mapeando ∞ en ∞);

b) $f(z)$ es conforme en todo punto del plano finito;

c) Bajo la transformación $f(z)$, las tangentes a todas las curvas en el plano finito se rotan en el mismo ángulo $\arg a$ y la magnificación en cada punto es igual a $|a|$;

d) Si $a = 1$, entonces $f(z)$ se reduce a un desplazamiento de todo el plano por el vector b.

22.- La transformación

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2}$$

donde a, b, c y d son números complejos arbitrarios (excepto que c y d no sean ambos cero), se llama una *transformación lineal fraccionaria* (o *transformación de Möbius*). Demuestra que:

a) $f(z)$ se reduce a una transformación lineal entera si $c = 0$;

b) $f(z)$ se reduce a una constante si $ad - bc = 0$;

c) Si $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$, entonces $f(z)$ tiene una derivada no nula $f'(z)$ para todo z, excepto en $z = \delta = -d/c$;

d) Si $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$, entonces $f(z)$ es conforme en todos los puntos finitos excepto posiblemente en δ (ver también el problema 26), donde el ángulo α en el cual las tangentes a las curvas son rotadas tiene el mismo valor:

$$\alpha = \arg f'(z) = \arg\left(\frac{ad - bc}{c^2}\right) - 2\arg(z - \delta) \tag{3}$$

a lo largo de cualquier rayo que emana de δ, y la magnificación tiene el mismo valor:

$$\mu = |f'(z)| = \left|\frac{ad - bc}{c^2}\right| \cdot \frac{1}{|z - \delta|^2} \tag{4}$$

a lo largo de cualquier circunferencia centrada en δ.

Capítulo 5

6.- Sea C una curva suavemente seccionada de longitud l, con ecuación paramétrica dada por

$$z = z(t), \tag{5}$$

y sea $s(t)$ la longitud del arco variable de C con punto inicial $z(a)$ y punto final $z(t)$. Demuestra que $s = s(t)$ es continua y estrictamente creciente en el intervalo $a \leq t \leq b$, con una inversa continua y estrictamente creciente $t = t(s)$ en el intervalo $0 \leq s \leq l$. Muestra que C tiene una representación paramétrica de la forma:

$$z = \tilde{z}(s), \quad (0 \leq s \leq l) \tag{45'}$$

usando la longitud de arco s como parámetro. Demuestra que la derivada $\tilde{z}'(s)$ existe y tiene módulo 1 en todos los puntos del intervalo $0 \leq s \leq l$, salvo un número finito de ellos.

13.- Sea $f(z)$ una función continua en una curva suavemente seccionada C. Demuestre que

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,ds(t),$$

donde $s(t)$ es la misma función que en el Problema 6. Deduzca el Teorema 5.23 a partir de esta estimación más precisa.