Reporte de artículo
Matemáticas Aplicadas

N. Pérez Medina.

29 de mayo de 2025

Catedrático: Haydey Alvarez Allende
.

Índice

1. Resumen

Se presenta una revisión y reflexión del artículo *"A mathematical model for the corneal transparency problem"*, en el que se utiliza un modelo matemático y computacional para simular cómo la estructura de la córnea influye en la propagación de la luz y, por ende, en su transparencia. A través de las ecuaciones de Maxwell y su reducción al modo transversal eléctrico, se modela la interacción de la luz con el estroma corneal, considerando tanto una estructura sana como una afectada por alteraciones patológicas. Se emplean métodos numéricos como el método de Galerkin discontinuo y el esquema Runge-Kutta de bajo almacenamiento, para resolver el sistema.

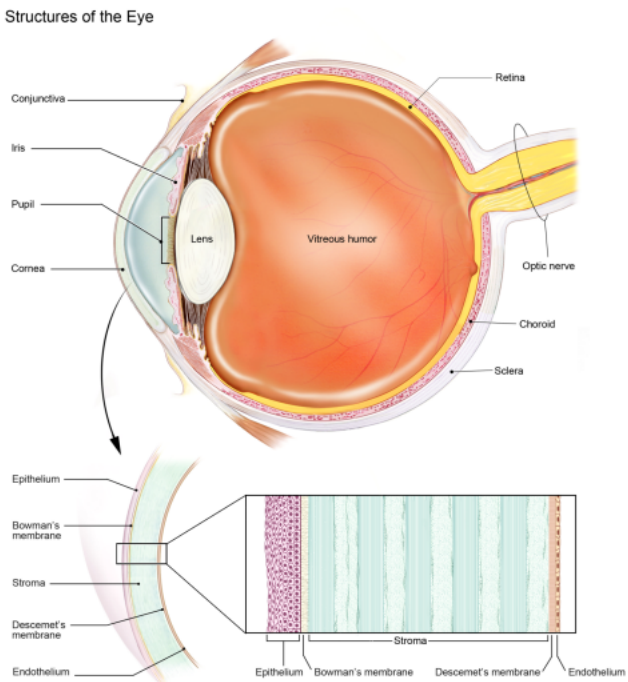
2. Introducción.

La córnea contiene fibras de colágeno organizadas de forma muy precisa, lo que permite que la luz se propague con mínima dispersión y, en consecuencia, que podamos ver con claridad. Sin embargo, ciertas patologías corneales alteran esta estructura, provocando un aumento en la dispersión de la luz, lo cual reduce la transparencia de la córnea y afecta la calidad de la visión.

El artículo aborda este fenómeno desde un enfoque matemático y computacional. Para ello, se utilizan las ecuaciones de Maxwell, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe cómo se propaga la luz a través de medios materiales, en este caso, los tejidos de la córnea. (Especificamente una parte de la cornea llamada estorma)

Para simplificar el problema, se considera una representación de dos dimenciones de la córnea. El modelo incluye condiciones iniciales y de frontera que simulan la entrada de un pulso de luz, y se resuelve mediante métodos numéricos. En particular, se utiliza una combinación del método de Galerkin discontinuo para discretización espacial y Runge-Kutta para la evolución temporal de la solución.

2.1. Contexto físico del problema



Antes de que la luz llegue a la retina para ser interpretada por nuestro sistema visual, atraviesa la córnea, una estructura transparente ubicada en la parte frontal del ojo. La córnea está compuesta por varias capas, entre las cuales el aretículo se enfoca en el estroma.

El estroma está formado por fibras de colágeno organizadas de manera estructurada y regular. Este ordenamiento específico permite que, aunque la luz se disperse al atravesar este medio, dicha dispersión ocurra de forma controlada, lo que preserva la transparencia y garantiza una buena visión.

Sin embargo, existen patologías corneales que alteran esta organización del estroma. Cuando la estructura de las fibras se afecta, la luz se dispersa de manera distinta, reduciendo la transparencia y deteriorando la calidad de la visión.

Comprender cómo y en qué medida estas alteraciones estructurales afectan la propagación de la luz es importante para evaluar el impacto en la vista de las enfermedades corneales.

3. Desarrollo

3.1. Formulación matemática del modelo

Para estudiar cómo se comporta la luz al pasar por la córnea, el artículo utiliza las ecuaciones de Maxwell, que son un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen cómo cambian en el tiempo y en el espacio los campos eléctricos y magnéticos.

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Como trabajar con las ecuaciones completas en tres dimensiones puede ser muy costoso computacionalmente, se simplifica el problema considerando una versión en dos dimensiones. Esta reducción se basa en suponer que la propagación ocurre principalmente en un plano. Además, se usa algo llamado modo TE (transversal eléctrico), que básicamente significa que el campo eléctrico solo tiene componentes dentro del plano que se está estudiando, y que el campo magnético apunta perpendicularmente a ese plano. El artículo expresa lo anterior como

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y)$$
$$\mathbf{H} = (H_z)$$

Otro punto importante es que el modelo toma en cuenta que la córnea no responde igual en todas las direcciones. Por eso, en lugar de usar un solo valor para la permitividad eléctrica (que reoresenta las propiedades de la córnea), se usa una matriz o tensor que representa cómo varía esa propiedad según la dirección. Esto es lo que se conoce como una permitividad anisotrópica. El artículo expresa lo anterior como

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

Finalmente, para resolver el problema se definen condiciones iniciales (en este caso, sin campos presentes), y condiciones de frontera, que sirven para que la onda que se simula no se refleje artificialmente en los bordes del dominio. Estas últimas se conocen como condiciones de Silver-Müller.

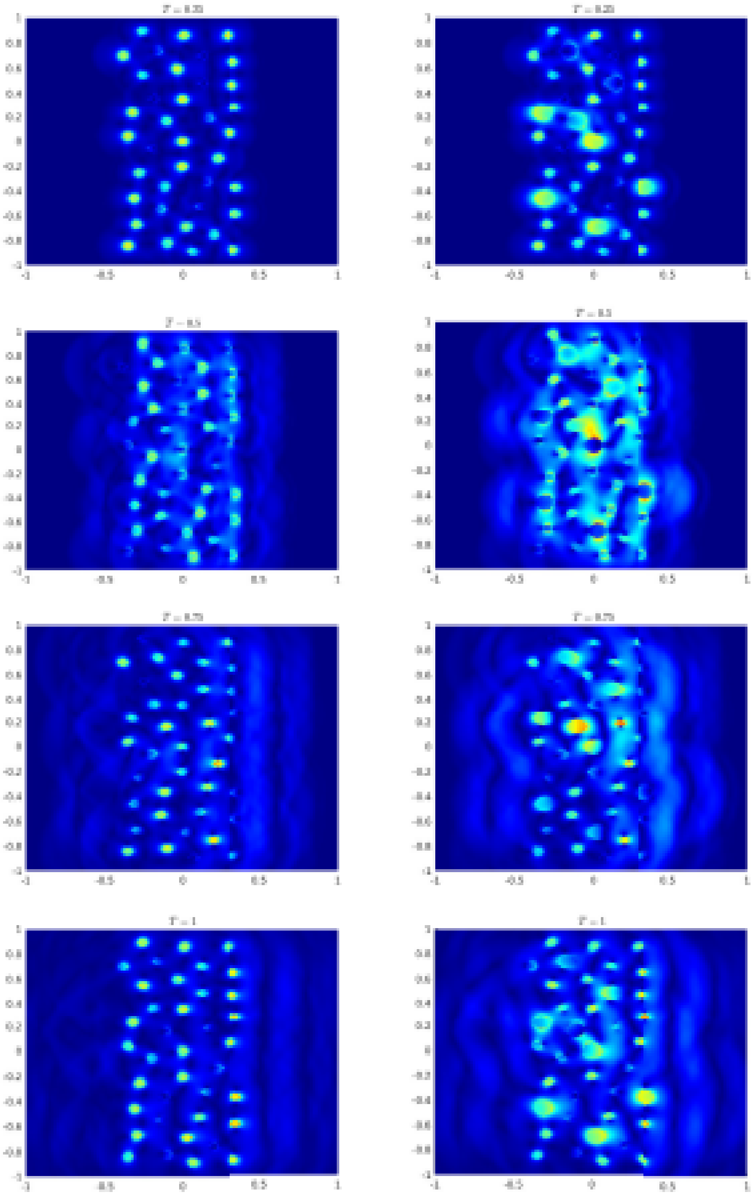
3.2. Métodos numéricos utilizados

Como el sistema de ecuaciones diferenciales que se plantea en el modelo no se puede resolver de forma exacta, se utilizan métodos numéricos para aproximar su solución. En el artículo se aplican dos técnicas que nunca había visto, pero se relacionan con algunas cosas que sí hemos visto en la carrera.

Primero, para resolver el problema en el espacio, se usa el método de Galerkin discontinuo. Según investigué, este método es una variante del método de elementos finitos, pero con la diferencia de que permite que la solución sea discontinua entre los elementos de la malla.

Para resolver el problema en el tiempo, se utiliza un método de Runge-Kutta de bajo almacenamiento, también llamado LSERK por sus siglas en inglés (Low-Storage Explicit Runge-Kutta). Por lo que entendí, este es un tipo de Runge-Kutta que está optimizado para usar menos memoria en las simulaciones. Aunque es una técnica que no hemos visto, cumple la misma función básica que los Runge-Kutta que sí conocemos: aproximar soluciones paso a paso en el tiempo.

3.3. Simulaciones y resultados



En las imágenes presentadas en el artículo, se puede observar claramente la diferencia entre una córnea sana (lado izquierdo) y una córnea con alteraciones patológicas (lado derecho). En el caso de la córnea sana, la simulación muestra que, a lo largo del tiempo, la luz mantiene una propagación uniforme y con una dispersión mínima. En contraste, el lado derecho, que representa una córnea donde algunas fibras han aumentado su diámetro, se nota cómo la dispersión de la luz cambia con el tiempo.

En este caso, se muestra cómo una modificación aparentemente pequeña puede tener un impacto visual importante, algo que sería muy difícil de analizar sin un modelo matemático que relacione todas estas variables.

4. Conclusiones

4.1. Reflexión sobre el artículo

Como primera aproximación a este tipo de publicaciones con análisis más robustos, comprendo mejor por qué existen tantas variaciones en los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales. De hecho, ahora me parecen incluso más complejos los comportamientos físicos que intentamos modelar que los propios modelos matemáticos que aplicamos para simularlos.

Intentar entender este artíclo me ha llevado a replantear lo que entiendo por *pensamiento matemático*. Antes lo entendía principalmente como una capacidad de análisis, pero ahora veo que dicho análisis necesita estar respaldado por una formulación formal y bien adaptada al contexto específico del problema que se está abordando.

Aunque reconozco que cuento con las *bases* necesarias para identificar los elementos mencionados en el artículo, también me doy cuenta de que aún me falta formalidad y profundidad conceptual para poder interpretar correctamente lo que se plantea y, sobre todo, comprender por qué se plantea de esa manera.

4.2. Reflexión del curso y la carrera

Este curso me hizo darme cuenta de la profundidad con la que se pueden comprender los comportamientos físicos cuando se utilizan correctamente las herramientas matemáticas. Me gustó sentir que todos los temas que hemos visto hasta ahora en la carrera se combinan para, no solo reconocer los símbolos y ecuaciones, sino también para poder interpretarlos, darles un significado y relacionarlos con el fenómeno que se está estudiando.

Me dió mucho gusto reencontrarme con las ecuaciones de Maxwell, después de no haberlas visto desde mi último curso de física, y descubrir que ahora podía entender lo que intentaban expresar[1]. Gracias a las bases que he desarrollado a lo largo de la carrera, fue muy gratificante aplicar directamente los conceptos de los operadores diferenciales y visualizar cómo un pequeño cambio en una dirección del campo eléctrico puede afectar de manera precisa a otras componentes del campo magnético. Esa conexión me ayudó a comprender con mayor claridad la dinámica entre ambos campos, y entender que justamente esa interacción es lo que, en términos generales, conocemos como luz.

Fue algo que en su momento no dimensioné completamente, pero que ahora me resultó muy orgánico. Aunque tardé en asimilarlo, eventualmente todo fue encajando, y eso me dio una sensación muy distinta, más profunda y conectada con lo que implica hacer matemáticas aplicadas.

[1] Tampoco crea que tanto.

5. Referencias

- Sadiku, M. N. O. (2014). *Elementos de electromagnetismo* (5.ª ed.). McGraw-Hill.
- Boas, M. L. (2005). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). Wiley.
- Araújo, A., Barbeiro, S., Bernardes, R., Morgado, M., & Sakić, S. (2022). *A mathematical model for the corneal transparency problem.* Journal of Mathematics in Industry, 12(10). https://doi.org/10.1186/s13362-022-00125-y