Autocorrelación Parcial.

N.Pérez-Medina

FING - **UACH**
Series de tiempo
Catedrático: M. C. Erick N. Grijalva

21 de marzo de 2025

Definición

Los **Modelos autorregresivos (AR)** son un tipo básico de *modelos de procesos estacionarios.*

Definición

Los **Modelos autorregresivos (AR)** son un tipo básico de *modelos de procesos estacionarios.*[a]

[a] Series de tiempo cuyas *propiedades estadísticas* (media, varianza y autocorrelación) se mantienen **constantes** en el tiempo.

Premisa general.

Los **valores actuales** dependen *en cierta medida* de **valores previos.**

Para cuantificar esa dependencia.

- **Función de autocovarianza**
- **Función de autocorrelación**

Para cuantificar esa dependencia.

- **Función de autocovarianza:** mide la relación entre valores de la serie en distintos momentos del tiempo.
- **Función de autocorrelación**

Para cuantificar esa dependencia.

- **Función de autocovarianza:** mide la relación entre valores de la serie en distintos momentos del tiempo.
- **Función de autocorrelación:** normaliza la autocovarianza para expresar la relación en términos de correlación, facilitando su interpretación.

En resumen.

Premisa general.

Los **valores actuales** dependen *en cierta medida* de **valores previos.**

Para cuantificar esa dependencia.

- **Función de autocovarianza:** mide la relación entre valores de la serie en distintos momentos del tiempo.
- **Función de autocorrelación:** normaliza la autocovarianza para expresar la relación en términos de correlación, facilitando su interpretación.

Observación

Ambas funciones *extienden* los conceptos clásicos de covarianza y correlación.

Pero

En lugar de aplicarse entre dos variables diferentes, estamos modelando la relación lineal entre valores pasados y presentes.

AR(1)

Definición

Diremos que una serie sigue un *Proceso autoregresivo de primer orden*, si su variabilidad puede describirse a través de:

$$z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t \tag{1}$$

con $-1 < \phi < 1$

Donde:

- c: Captura el **efecto de la media en la serie.**
- ϕ: Coeficiente que determina **la influencia de los valores pasados en el valor presente.**
- a_t: Término de **ruido blanco**

AR(2)

Definición

Diremos que una serie sigue un *Proceso autoregresivo de segundo orden*, si su variabilidad puede describirse a través de:

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t \tag{2}$$

Donde:

- c: Captura el **efecto de la media en la serie.**
- ϕ_1 y ϕ_2: Coeficientes que determinan **la influencia de los valores pasados en el valor presente.**
- a_t: Término de **ruido blanco**

AR(p)

Definición

Diremos que una serie sigue un *Proceso autoregresivo de orden p*, si su variabilidad puede describirse a través de:

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t \tag{3}$$

Donde:

- c: Captura el **efecto de la media en la serie.**
- ϕ_p: Coeficientes que determinan **la influencia de los valores pasados en el valor presente.**
- a_t: Término de **ruido blanco**

Para hacerlo más elegante.

Tomamos la esperanza de ambos lados.

$$E[z_t] = E[c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t]$$

Usando la propiedad lineal de la esperanza.

$$E[z_t] = E[c] + \phi_1 E[z_{t-1}] + \phi_2 E[z_{t-2}] + \cdots + \phi_p E[z_{t-p}] + E[a_t]$$

Hay que tomar en cuenta que

Como a_t es **ruido blanco** tenemos que:

$$E[a_t] = 0 \tag{4}$$

Dado que la serie es **estacionaria** tenemos que:

$$E[z_t] = E[z_{t-1}] + E[z_{t-2}] + \cdots + E[z_{t-p}] = \mu \tag{5}$$

Para hacerlo más elegante.

Tomamos la esperanza de ambos lados.

$$E[z_t] = E[c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t]$$

Usando la propiedad lineal de la esperanza.

$$E[z_t] = E[c] + \phi_1 E[z_{t-1}] + \phi_2 E[z_{t-2}] + \cdots + \phi_p E[z_{t-p}] + E[a_t]$$

Tomando en cuenta (4) y (5)

$$\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \cdots + \phi_p \mu$$

luego

$$c = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p) \tag{6}$$

Volviendo a nuestra definición

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

Volviendo a nuestra definición

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

Aplicando $\tilde{z}_t = z_t - \mu$

$$\tilde{z}_t + \mu = c + \mu + \phi_1(\tilde{z}_{t-1} + \mu) + \phi_2(\tilde{z}_{t-2} + \mu) + \cdots + \phi_p(\tilde{z}_{t-p} + \mu) + a_t$$

Volviendo a nuestra definición

$$z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

Aplicando $\tilde{z}_t = z_t - \mu$

$$\tilde{z}_t + \mu = c + \mu + \phi_1(\tilde{z}_{t-1} + \mu) + \phi_2(\tilde{z}_{t-2} + \mu) + \cdots + \phi_p(\tilde{z}_{t-p} + \mu) + a_t$$

Reagrupando términos

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t + c - \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$$

Recordando (6)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \tag{7}$$

AR(p)

Definición

Diremos que una serie sigue un *Proceso autoregresivo de orden p*, si su variabilidad puede describirse a través de:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t$$

Donde:

- $\tilde{z}_t = z_t - \mu$
- ϕ_p: Coeficientes que determinan **la influencia de los valores pasados en el valor presente.**
- a_t: Término de **ruido blanco**

1. Generalidades importantes.
2. Procesos autorregresivos
   - Proceso autorregresivo de primer orden AR(1)
   - Proceso autorregresivo de segundo orden AR(2)
   - Proceso autoregresivo general AR(p)
3. Función de autoccorelación simple
4. Funcion de autocorrelación parcial
   - ¿Qué hace?
   - ¿Cómo lo hace?

¿Qué hace?

Mide qué tan parecido es z_t con z_{t-k} para distintos rezagos k.

¿Qué desventajas presenta?

Esas medidas consideran tanto relaciones **directas** como **indirectas**.

Eso quiere decir...

Si z_t está fuertemente correlacionado con z_{t-1} y z_{t-1} también está correlacionado con z_{t-2}, entonces z_t y z_{t-2} **pueden aparecer como correlacionados, aunque no haya una relación directa entre ellos.**

¿Qué hace?

Mide qué tan parecido es z_t con z_{t-k} **eliminando la influencia de los rezagos intermedios.**

¿Qué ventajas presenta?

- Si el modelo real es **AR(2)**, la ***PACF*** será **significativa solo en los rezagos 1 y 2**, y cercana a 0 para $k > 2$.
- En cambio, la **ACF** podría mostrar una correlación decreciente incluso para rezagos más grandes, porque incluye influencias indirectas.

Con 3 sencillos pasos

Para calcular la ACP entre un instante z_t y uno z_{t-k}

1. Regresión de $\tilde{z}_t$ contra sus valores intermedios
2. Regresión de $\tilde{z}_{t-k}$ contra sus valores intermedios
3. Correlación entre u y v

1. Regresión de $\tilde{z}_t$ contra sus valores intermedios

Aplicando regresión encontraremos

$$\tilde{z}_t = \beta_1 \tilde{z}_{t-1} + \beta_2 \tilde{z}_{t-2} + \cdots + \beta_{k-1} \tilde{z}_{t-k} + u_t$$

¿Qué representa u_t?

La parte de $\tilde{z}_t$ que no está explicada por los valores intermedios.

2. Regresión de $\tilde{z}_{t-k}$ contra sus valores intermedios

Aplicando regresión encontraremos

$$\tilde{z}_{t-k} = \gamma_1 \tilde{z}_{t-1} + \gamma_2 \tilde{z}_{t-2} + \cdots + \gamma_{k-1} \tilde{z}_{t-k+1} + v_t$$

¿Qué representa v_t?

La parte de $\tilde{z}_{t-k}$ que no está explicada por los valores intermedios.

Correlación entre u y v

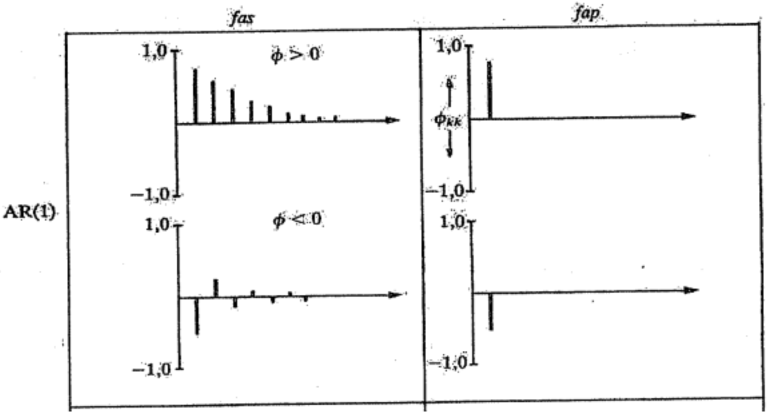
Tomando en cuenta lo anterior

La correlación entre u y v mide ***únicamente*** la relación directa entre $\tilde{z}_t$ y $\tilde{z}_{t-k}$, **eliminando la influencia de los valores intermedios.**

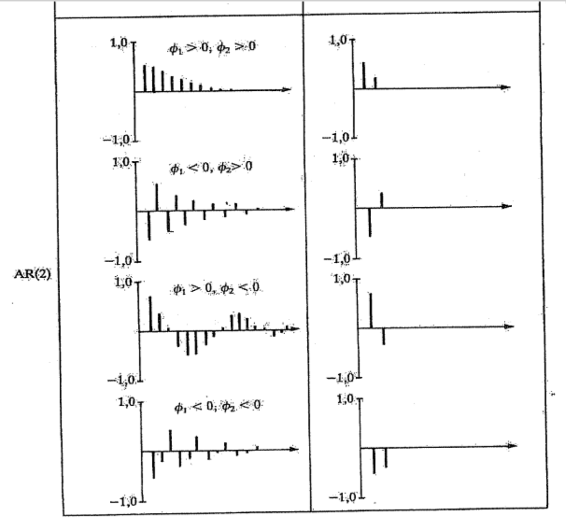
$$\rho = Corr(u_t, v_t) \tag{8}$$

ρ es precisamente la autocorrelación parcial en el rezago k.

Idea gráfica (1/2)



Idea gráfica (2/2)



1. Generalidades importantes.

2. Procesos autorregresivos
   - Proceso autorregresivo de primer orden AR(1)
   - Proceso autorregresivo de segundo orden AR(2)
   - Proceso autoregresivo general AR(p)

3. Función de autoccorelación simple

4. Funcion de autocorrelación parcial
   - ¿Qué hace?
   - ¿Cómo lo hace?

Por su atención:

Gracias y bonito vierneeees