Análisis Complejo.

Lo que entiendo de lo que vimos en el segundo parcial

natetas

15 de marzo de 2025

Índice general

Capítulo 1

Funciones Complejas.

1.1. Conceptos Básicos.

Sea E cualquier conjunto de números complejos.

$$E \in \mathbb{C}$$

1.1.1. Variable compleja.

Le llamamos *variable compleja* a un número z que pertenezca a E

1.1.2. Función compleja.

Con ***Función compleja*** nos referimos a una regla que asigna un número complejo w definido *de manera única* a cada $z \in E$. Escribimos entonces $w = f(z)$

Dominio de definición de la función.

Sea f una ***Función compleja*** y E el conjunto sobre el que se define la función entonces E es el *dominio de definición de la función.*

Rango de una función.

Al conjunto de todos los valores obtenidos por una función $f(z)$ evaluada en su ***dominio de definción*** E, lo sombolizamos con E' y le llamamos ***rango***

1.1.3. Funciones multivaluadas.

Es conveniente ampliar la definición de una función, ya que existen reglas que asignan varios (incluso infinitos) números complejos w para algunas (o todas) las ***variables complejas*** de un conjunto E. Tales funciones se denominan ***funciones multivaluadas***. [1]

1.1.4. Funciones inversas.

Sea $f(z)$ una ***función compleja,*** le llamamos ***función inversa*** $f^{-1}(x)$ a una regla[2] que lleva cada número complejo $w \in E'$ a todos aquellos puntos $z \in E$ tales que $f(z) = w$.

Observaciones

$z = f^{-1}(z)$ si y solo si $f(z_1) \neq f(z_2)$ siempre que $z_1 \neq z_2$

[1] Sin embargo, el término ***función*** sin más calificativos siempre se entenderá como ***función univaluada***.

[2] generalmente multivariada

1.2. Cuvas y Dominios.

1.2.1. Curvas Continuas

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos funciones reales continuas de una variable real t que toman todos los valores en un intervalo cerrado $a \leq t \leq b$. Entonces, las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{1.1}$$

determinan una *curva (continua)* C, formada por todos los puntos $(x(t), y(t))$ con $a \leq t \leq b$.

Si definimos $z = x+iy$ y $z(t) = x(t)+iy(t)$, podemos escribir (1.1) como **una única ecuación paramétrica compleja**

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b). \tag{1.2}$$

A medida que el parámetro t varía desde a hasta b, el punto $z = z(t)$ traza la curva C, comenzando en el *punto inicial* $z(a)$ y terminando en el *punto final* $z(b)$.

De esta manera, (1.2) dota a C de una dirección natural de recorrido, llamada la *dirección positiva* de C.

1.2.2. Curva Cerrada

La curva C se dice que es *cerrada* si su punto inicial y final coinciden, es decir, si $z(a) = z(b)$.

1.2.3. Arco

Si el punto inicial $z(a)$ y el punto final $z(b)$ no coinciden, la curva C se denomina *arco*. Este término se utiliza para enfatizar que C es no-cerrada.

1.3. Conjuntos Conexos

Un conjunto E de puntos en el plano complejo se dice que es *Conexo* si cada par de puntos x, y en E puede unirse mediante una **curva** que consiste enteramente en puntos de E, con x como su punto inicial y y como su punto final. En otras palabras, no hay *"huecos"* en E que impidan conectar cualquier par de puntos dentro de él.

1.4. Continuidad de una Función Compleja.

1.5. Continuidad uniforme.

Capítulo 2

Diferenciación en el Plano Complejo

2.1. La Derivada de una Función Compleja

2.1.1. Derivadas complejas

Decimos que una función compleja $f(z)$ definida en un dominio G es *diferenciable* en un punto $z \in G$ si el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad \text{con } (z, z + \Delta z) \in G \tag{2.1}$$

existe y es finito. Este límite, denotado como $f'(z)$, se llama la *derivada* de $f(z)$ en z.

2.1.2. Funciones analíticas

Una función $f(z)$ se dice que es *analítica en un dominio* G si $f(z)$ es *diferenciable* en cada punto de G.
Se dice que es *analítica en un punto* z si $f(z)$ es analítica en algún vecindario de z.

Observación

Cualquier función analítica en un dominio G es automáticamente analítica en cada punto de G. Sin embargo, diferenciabilidad en un punto no implica analiticidad en ese punto.[1]

2.1.3. Diferenciabilidad en $\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{C}$

La diferenciabilidad en el plano complejo es un concepto mucho más fuerte que en el caso real debido a la naturaleza bidimensional de los números complejos. En el caso real, la diferenciabilidad de una función $f(x)$ en un punto x significa que existe el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.2}$$

aquí, Δx solo puede tender a cero por dos direcciones posibles: desde la derecha ($\Delta x > 0$) o desde la izquierda ($\Delta x < 0$).

En el caso complejo, como trabajamos en el *plano complejo*, Δz es un número complejo y puede tender a cero desde **infinitas direcciones**. El límite:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{2.3}$$

debe existir **independientemente de la dirección** en la que Δz se aproxime a cero.

El hecho de que el cociente de diferencias deba tener el mismo valor para cualquier dirección en la que nos acerquemos a z significa que la función $f(z)$ debe cumplir con una condición mucho más estricta que en el caso real.[2]

---

[1] Me gusta pensar que, cuando una función es *diferenciable, tanto en un punto z como en puntos cercanos al rededor* (una vecindad centrada en z), entonces podemos *analizar* la función en ese *punto z*, y es por eso que es *analítica en ese punto*. De la misma manera, cuando la función es *diferenciable en todos los puntos de un conjunto*, entonces podemos *analizarla* en todo el conjunto y es por eso que es *analítica en ese dominio*

[2] En términos matemáticos, esto se traduce en las **ecuaciones de Cauchy-Riemann.**

2.1.4. Diferenciales Complejas

El concepto de la diferencial de una función compleja es formalmente idéntico al de la diferencial de una función real. Supongamos que $w = f(z)$ es *diferenciable* en el punto z y definimos:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \tag{2.4}$$

de modo que:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z). \tag{2.5}$$

Entonces:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \epsilon, \tag{2.6}$$

donde ϵ tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$, o equivalentemente:

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \epsilon \Delta z. \tag{2.7}$$

El primer término en la ecuación anterior se denomina la **diferencial** de la función w (o la *parte lineal principal* del incremento Δw) y se denota por:

$$dw = f'(z)dz. \tag{2.8}$$

En particular, al elegir $w = z$, obtenemos:

$$dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z, \tag{2.9}$$

es decir, el incremento y la diferencial de la variable independiente coinciden. Sustituyendo Δz en la ecuación anterior, obtenemos:

$$dw = f'(z)dz. \tag{2.10}$$

Esto conduce a la fórmula:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}. \tag{2.11}$$

Las dos expresiones en el lado derecho pueden considerarse como notaciones alternativas para la derivada $f'(z)$, así como cocientes de diferenciales.

2.2. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

2.2.1. Diferenciabilidad de una función real

Se dice que una función real $u(x, y)$ es **diferenciable** en el punto (x, y) si el incremento

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \tag{2.12}$$

puede escribirse en la forma:

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \tag{2.13}$$

donde A y B son independientes de $\Delta x, \Delta y$, y los términos ϵ_1, ϵ_2 tienden a cero cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Es fácil ver que los coeficientes A y B son simplemente las derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ de la función u en el punto (x, y). De hecho, eligiendo primero $\Delta y = 0$ y luego $\Delta x = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \epsilon_1 \Delta x}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_1 = A. \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{B\Delta y + \epsilon_2 \Delta y}{\Delta y} = B + \lim_{\Delta y \to 0} \epsilon_2 = B. \tag{2.15}$$

2.2.2. Diferenciabilidad en el plano complejo y las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sabemos que especificar una función $w = f(z) = u + iv$ de una variable compleja $z = x + iy$ es equivalente a especificar dos funciones reales u y v en términos de las variables reales x e y.

La continuidad de u y v implica obviamente la continuidad de w, pero la diferenciabilidad de u y v **no implica** la diferenciabilidad de w

Por lo tanto, las partes real e imaginaria de una función diferenciable $w = u + iv$ **no pueden elegirse de manera independiente**. En su lugar, deben satisfacer ciertas condiciones conocidas como las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

Teorema 2.2.1. *La función $w = f(z) = u + iv$ es diferenciable en el punto $z = x + iy$ si y solo si las funciones u y v son diferenciables en el punto (x, y) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.16}$$

en el punto (x, y).

2.2.3. Consecuencias del teorema anterior

Del teorema anterior se sigue que una función $w = f(z) = u + iv$ es **analítica** en un dominio G si y solo si sus partes real e imaginaria u y v son diferenciables y satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** en cada punto de G. La derivada $f'(z)$ se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.17}$$

Como sabemos del cálculo, una **condición suficiente** (pero **no necesaria**) para la diferenciabilidad de u y v en un punto (x, y) es que u y v tengan derivadas parciales **continuas** en (x, y).