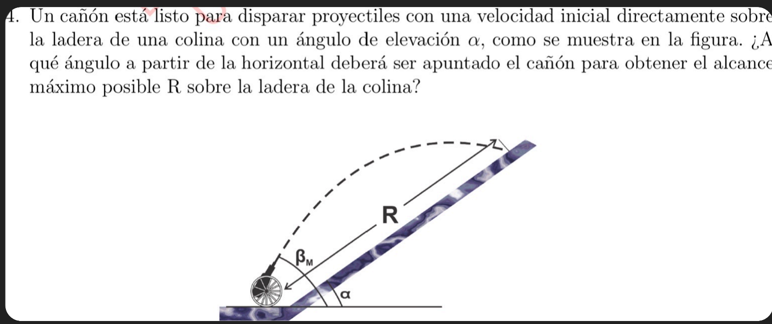
Mecanica Clasica - 01


4. Un cañón está listo para disparar proyectiles con una velocidad inicial directamente sobre la ladera de una colina con un ángulo de elevación α, como se muestra en la figura. ¿A qué ángulo a partir de la horizontal deberá ser apuntado el cañón para obtener el alcance máximo posible R sobre la ladera de la colina?

Una forma rápida de ver que el ángulo "óptimo" (medido desde la horizontal) resulta ser

$$\beta_M \;=\; 45^\circ \;+\; \tfrac{\alpha}{2}$$

es partir de la conocida expresión del alcance sobre un plano inclinado y maximizarla en función del ángulo de disparo.

---

1. Ecuaciones de la trayectoria

Supongamos que el cañón dispara con rapidez inicial v y un ángulo β medido desde la **horizontal**. Tomamos un sistema de ejes (x, y) con:

- Eje x horizontal,
- Eje y vertical (positivo hacia arriba),
- La ladera de la colina forma un ángulo α con la horizontal.

Las componentes iniciales de la velocidad son

$$v_x \;=\; v\,\cos\beta, \quad v_y \;=\; v\,\sin\beta.$$

La posición del proyectil en función del tiempo es

$$x(t) \;=\; v\cos\beta\;t, \qquad y(t) \;=\; v\sin\beta\;t \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

2. Condición de impacto sobre la pendiente

La pendiente está dada por

$$y \;=\; x\,\tan\alpha.$$

El proyectil impacta (además de en $t = 0$) en el instante $t = t_i$ que satisface

$$y(t_i) \;=\; x(t_i)\,\tan\alpha \quad\Longrightarrow\quad v\sin\beta\,t_i \;-\; \tfrac{1}{2}\,g\,t_i^2 \;=\; \bigl(v\cos\beta\,t_i\bigr)\,\tan\alpha.$$

Despejando $t_i \neq 0$, se obtiene

$$t_i \;=\; \frac{2\,v}{g}\,\bigl[\sin\beta \;-\; \cos\beta\,\tan\alpha\bigr].$$

3. Expresión del alcance sobre la pendiente

Para medir **el alcance R "sobre la ladera"** (es decir, la distancia a lo largo del plano inclinado), uno puede proyectar el vector $\bigl(x(t_i),\,y(t_i)\bigr)$ sobre la dirección de la ladera, cuyo vector unitario es

$$\hat{s} \;=\; (\cos\alpha,\;\sin\alpha).$$

Entonces

$$R \;=\; x(t_i)\,\cos\alpha \;+\; y(t_i)\,\sin\alpha.$$

Luego de algo de álgebra, se demuestra (o se puede encontrar en tablas de resultados clásicos) que

$$R(\beta) \;=\; \frac{v^2}{g}\,\frac{\sin\bigl(2\,\beta \;-\; \alpha\bigr)}{\cos^2\alpha}$$

cuando el proyectil efectivamente golpea la pendiente.

4. Ángulo que maximiza el alcance

Para maximizar $R(\beta)$ basta con derivar respecto de β y buscar donde la derivada se anula:

$$\frac{d}{d\beta}\,\sin\bigl(2\,\beta \;-\; \alpha\bigr) \;=\; \cos\bigl(2\,\beta \;-\; \alpha\bigr)\,\cdot 2 \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad 2\,\beta \;-\; \alpha \;=\; \tfrac{\pi}{2}.$$

Despejando β:

$$\boxed{\beta_M \;=\; \frac{\pi}{4} \;+\; \frac{\alpha}{2} \quad\Longrightarrow\quad \beta_M \;=\; 45^\circ \;+\; \frac{\alpha}{2}.}$$

Ese es el ángulo (desde la horizontal) que maximiza el alcance sobre la pendiente.

Resumen

- Se lanza el proyectil con rapidez v y ángulo β desde la horizontal, sobre una ladera inclinada α.
- El alcance máximo a lo largo de la ladera se logra con

$$\beta_M \;=\; 45^\circ \;+\; \tfrac{\alpha}{2}.$$