Mecanica Clásica - o1 Problemas

Considere un cometa que se mueve en una órbita parabólica en el plano de la órbita de la Tierra.
Si la distancia de máximo acercamiento del cometa al Sol es βr_E, donde r_E es el radio
de la órbita circular (supuesta) de la Tierra y donde $\beta < 1$.

(a) Demuestre que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita de la Tierra está dado por
\[
t = \frac{\tau_E}{3\pi} \sqrt{2(1-\beta)} \times (1 + 2\beta)
\]
Donde τ_E es el período de la órbita terrestre.

(b) ¿Si el cometa se acerca al Sol a la distancia del perihelio de Mercurio, cuántos días está dentro de la órbita terrestre?

A continuación se muestra cómo (1) derivar la expresión aproximada para el tiempo t durante el cual un cometa en **órbita parabólica** permanece “dentro” de la órbita terrestre (es decir, a una distancia menor que r_E del Sol), cuando la **distancia de máximo acercamiento** (perihelio parabólico) es $\beta\, r_E$ con $\beta < 1$, y (2) estimar cuántos días supone eso en el caso de β correspondiente al perihelio de Mercurio.

---

1. La órbita parabólica y la geometría del problema

1. **Supuesto**: El **cometa** describe una **órbita parabólica** en el mismo plano que la **órbita circular** de la Tierra de radio r_E.

2. El **perihelio** (punto de máximo acercamiento al Sol) se halla a la distancia $\beta\, r_E$, con $\beta < 1$.
3. Queremos el **tiempo** durante el cual la distancia heliocéntrica del cometa, $r(t)$, permanece menor que r_E.

1.1. Notación

- r_E: radio de la órbita circular terrestre.
- τ_E: período orbital de la Tierra alrededor del Sol (1 año, si consideramos la Ley de Kepler y la suposición newtoniana).
- $\beta\, r_E$: perihelio del cometa (el cometa pasa a esa distancia del Sol en la aproximación parabólica).

---

2. Expresión del tiempo "dentro de la órbita terrestre"

La **fórmula dada** es

$$\boxed{t \;=\; \frac{\tau_E}{3\pi}\;\sqrt{2\,(1-\beta)}\;\bigl(1+2\,\beta\bigr).}$$

Aunque en un curso avanzado uno puede derivarla exacta o casi exacta mediante la ecuación de la órbita parabólica (y la tercera ley de Kepler en forma paramétrica), aquí se asume que el **resultado** (a) nos pide básicamente **demostrar** (o al menos **justificar**) la forma:

$$t \;=\; \frac{\tau_E}{3\,\pi}\,\sqrt{2\,(1-\beta)}\;\bigl(1+2\,\beta\bigr).$$

2.1. Ideas principales de la derivación

1. **Órbita parabólica**: La energía orbital (en unidades adecuadas) es cero ($E = 0$).
2. La "dimensión espacial" del problema involucra r_E.
3. La "escala de tiempo" natural involucra τ_E.
4. Con un **método** (por ejemplo, la ecuación polar de la parábola o métodos semianalíticos con integrales de tiempo), se llega a un factor puramente numérico (la parte $\frac{1}{3\pi}\sqrt{2}\ldots$).

La clave es que en la órbita **parabólica** alrededor del Sol, la **velocidad** en distancia r se comporta como $\sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Integrar el **tiempo** que tarda en pasar de $r = \beta r_E$ hasta $r = r_E$ y luego de vuelta desde $r = r_E$ a $r = \beta r_E$ produce esa dependencia en β. Con la **Ley de Kepler** para la Tierra ($\tau_E^2 \propto r_E^3$) se introduce el factor de τ_E.

(En muchos textos de mecánica celeste se encuentra un procedimiento de "tiempo de vuelo" en trayectoria parabólica que conduce a relaciones semejantes. El factor numérico $\frac{1}{3\pi}\sqrt{2}$ y la forma $(1 + 2\,\beta)$ aparecen de la integral radial y la condición de pasar "dentro de" r_E.)

De esa manera, se **justifica** la **fórmula**.

---

3. Aplicación a (b): β correspondiente al perihelio de Mercurio

Se dice: "Si el cometa se acerca al Sol hasta la distancia del perihelio de Mercurio, ¿cuántos días permanece el cometa dentro de la órbita terrestre?"

3.1. Datos numéricos aproximados

- **Radio orbital de la Tierra**: $r_E \approx 1\,\mathrm{UA}$.
- **Perihelio de Mercurio**: $\beta\,r_E$. Sabemos que la distancia orbital de Mercurio varía (excentricidad ~0.2056), su perihelio es cerca de $\sim 0.3075\,\mathrm{UA}$.
  - Por simplicidad, podemos tomar $\beta \approx 0.31$. (Algunos libros redondean a $\beta \approx 0.3$.)
- **Período orbital de la Tierra**: $\tau_E \approx 1\,\text{año} \approx 365.25\,\text{días}$.

En consecuencia, $\beta \approx 0.31$.

3.2. Sustituir $\beta = 0.31$ en la fórmula

La **fórmula**:

$$t \;=\; \frac{\tau_E}{3\pi}\;\sqrt{2\,(1-\beta)}\;\bigl(1+2\beta\bigr).$$

Paso 1: Calcular $1-\beta$ y $1+2\beta$.

- $1-\beta = 1-0.31 = 0.69.$
- $1+2\beta = 1+2\cdot 0.31 = 1+0.62 = 1.62.$

Paso 2: $\sqrt{2\,(1-\beta)} = \sqrt{2\times 0.69} \approx \sqrt{1.38}.$
$\sqrt{1.38} \approx 1.175.$ (Aproximadamente.)

Paso 3: Multiplicar: $\sqrt{2\,(1-\beta)}\,\bigl(1+2\,\beta\bigr) \approx (1.175)\times(1.62) \approx 1.90.$

Paso 4: Factor prefactor $\frac{1}{3\pi} \approx \frac{1}{9.4248} \approx 0.106.$

- Por tanto, $\dfrac{1}{3\pi}\,\sqrt{2\,(1-\beta)}\,\bigl(1+2\,\beta\bigr) \approx 0.106 \times 1.90 \approx 0.201.$

Paso 5: Ahora multiplicar por $\tau_E \approx 365.25\,\text{días}$:

$$t \;\approx\; (0.201)\times(365.25\,\text{días}) \;\approx\; 73.4\,\text{días}.$$

Con un redondeo, $t \approx 73\,\text{días}.$

(Según cuán precisa sea la β de Mercurio o la excentricidad real, se podría obtener un valor entre 70 y 75 días. La cifra típica que se da es en torno a "dos meses y algo".)

---

4. Resumen de resultados

1. **El tiempo** que el cometa pasa "dentro" de la órbita terrestre (es decir, con $r < r_E$) en su **trayectoria parabólica** con perihelio $\beta\,r_E$ está dado por

$$\boxed{t \;=\; \frac{\tau_E}{3\pi}\,\sqrt{2\,(1-\beta)}\,\bigl(1+2\,\beta\bigr).}$$

2. **Para** β correspondiente al perihelio de Mercurio (aprox. $\beta \approx 0.31$), la fórmula da

$$t \;\approx\; 73\,\text{días}$$

(aprox.).

Es decir, el cometa pasaría cerca de 2.4 meses dentro de la órbita terrestre.