

Mecanica Clasica - o1-mini nuevo

1. Si un proyectil es disparado desde el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad v_0 y en una dirección tal que el ángulo con la horizontal es α , calcule el tiempo requerido para que el proyectil cruce una línea que pasa a través del origen y hace un ángulo $\beta < \alpha$ con la horizontal.

Para resolver este problema, consideremos el movimiento del proyectil en dos dimensiones: horizontal (x) y vertical (y).

Datos iniciales:

- Velocidad inicial: v_0
- Ángulo de lanzamiento con la horizontal: α
- Ángulo de la línea objetivo con la horizontal: β (donde $\beta < \alpha$)
- Aceleración debido a la gravedad: g

Ecuaciones del movimiento:

1. Posición horizontal:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$$

2. Posición vertical:

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

La línea objetivo que el proyectil debe cruzar tiene una pendiente determinada por el ángulo β , es decir:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \tan(\beta)$$

Sustituyendo las ecuaciones de $x(t)$ y $y(t)$ en esta relación:

$$\frac{v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2}{v_0 \cos(\alpha) \cdot t} = \tan(\beta)$$

Simplificando:

$$v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \cdot \tan(\beta)$$

Reorganizando términos:

$$v_0(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\beta)) \cdot t = \frac{1}{2}gt^2$$

Dividiendo ambos lados por t (asumiendo $t \neq 0$):

$$v_0(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\beta)) = \frac{1}{2}gt$$

Resolviendo para t :

$$t = \frac{2v_0(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\beta))}{g}$$

Simplificación adicional:

Observemos que:

$$\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\beta) = \sin(\alpha) - \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)}$$

Sustituyendo esto en la expresión de t :

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\beta)}$$

Respuesta Final:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\beta)}$$

Interpretación: El tiempo requerido para que el proyectil cruce la línea con ángulo β es directamente proporcional a la componente de la velocidad inicial en la dirección perpendicular a la línea objetivo y está inversamente relacionado con la gravedad y la componente horizontal determinada por β .

\text{2. Un proyectil es disparado con una velocidad inicial } v_0 \text{ tal que pasa por dos puntos ambos } \\ \text{a una distancia } h \text{ de la horizontal. Demuestre que si la pistola se ajusta para un alcance } \\ \text{máximo, la separación de los dos puntos es } \\ d = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}

Para resolver este problema, consideremos el movimiento del proyectil bajo las siguientes condiciones:

1. Datos iniciales:

- Velocidad inicial: v_0
- Ángulo de lanzamiento con la horizontal: θ
- Altura de los puntos de cruce: h
- Aceleración debido a la gravedad: g

2. Condición de máximo alcance:

El alcance máximo de un proyectil lanzado desde el origen al suelo se logra cuando el ángulo de lanzamiento es $\theta = 45^\circ$. Aunque en este caso el proyectil no está regresando al nivel del suelo sino que pasa por dos puntos a una altura h , asumiremos que la configuración óptima para maximizar la separación d entre los dos puntos también corresponde a un ángulo cercano a 45° .

Para simplificar, procederemos a utilizar $\theta = 45^\circ$ en nuestro análisis.

3. Ecuaciones del movimiento:

Descomponemos el movimiento en direcciones horizontal (x) y vertical (y):

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta) \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Con $\theta = 45^\circ$, las ecuaciones se simplifican a:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot t \\ y(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

4. Determinar los tiempos de cruce por la línea $y = h$:

Igualamos la posición vertical a h :

$$\frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

Reorganizamos la ecuación:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t + h = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en términos de t . Resolviendo para t :

$$t = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2gh}}{g}$$

Simplificando:

$$t = \frac{v_0}{\sqrt{2}g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, los dos tiempos de cruce son:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_0}{\sqrt{2}g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g\sqrt{2}} \\ t_2 &= \frac{v_0}{\sqrt{2}g} + \frac{\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g\sqrt{2}} \end{aligned}$$

5. Calcular la separación horizontal d entre los dos puntos:

La separación horizontal es la diferencia entre las posiciones $x(t_2)$ y $x(t_1)$:

$$d = x(t_2) - x(t_1) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(t_2 - t_1)$$

Calculamos $t_2 - t_1$:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g\sqrt{2}}$$

Sustituyendo en la expresión de d :

$$d = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{v_0^2 - 4gh}}{g\sqrt{2}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

6. Resultado final:

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que cuando el proyectil se lanza con un ángulo óptimo de 45° (ajustado para un alcance máximo en condiciones estándar), la separación horizontal d entre los dos puntos a una altura h es:

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

\text{3. Considere un proyectil que es disparado verticalmente en un
campo gravitacional constan-} \\\

\text{te, para la misma velocidad inicial, compare los tiempos requeridos
para que el proyectil} \\\

\text{alcance su altura máxima en} \\\

\\

\text{a) Para una fuerza de resistencia cero.} \\\

\\

\text{b) Para una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad
instantánea del proyectil.}

Para resolver el **Problema 3**, analizaremos el movimiento de un proyectil lanzado verticalmente bajo dos condiciones diferentes: sin resistencia del aire y con una resistencia proporcional a la velocidad instantánea. Compararemos los tiempos requeridos para que el proyectil alcance su altura máxima en cada caso.

Datos Iniciales Comunes

- **Velocidad inicial:** v_0 (hacia arriba)
- **Aceleración debida a la gravedad:** g (constante, dirigida hacia abajo)
- **Masa del proyectil:** m (si es necesario considerar la resistencia del aire)
- **Constante de proporcionalidad de la resistencia:** k (para el caso b)

a) Para una fuerza de resistencia cero

Cuando no hay resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la gravedad. El movimiento es unidimensional vertical bajo aceleración constante.

Ecuación del Movimiento

La velocidad del proyectil en cualquier instante t está dada por:

$$v(t) = v_0 - gt$$

Condición para Alcanzar la Altura Máxima

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad del proyectil se reduce a cero:

$$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - gt = 0$$

Resolviendo para t

$$t_a = \frac{v_0}{g}$$

Interpretación

El tiempo t_a es directamente proporcional a la velocidad inicial y inversamente proporcional a la aceleración gravitacional.

b) Para una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad instantánea del proyectil

En este caso, la fuerza de resistencia del aire F_r es proporcional a la velocidad instantánea $v(t)$ del proyectil:

$$F_r = -kv(t)$$

Donde:

- k es la constante de proporcionalidad.
- El signo negativo indica que la fuerza de resistencia actúa en sentido opuesto al movimiento.

Ecuación del Movimiento

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv(t)$$

Dividiendo ambos lados por m :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v(t) = -g$$

Esta es una **ecuación diferencial lineal de primer orden** que podemos resolver usando factores integrantes.

Resolución de la Ecuación Diferencial

1. Forma estándar:

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t)$$

Donde:

- $P(t) = \frac{k}{m}$
- $Q(t) = -g$

2. Factor integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

3. Multiplicando la ecuación por $\mu(t)$:

$$e^{\frac{k}{m}t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{k}{m}t} \frac{k}{m} v = -g e^{\frac{k}{m}t}$$

4. Simplificación:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{k}{m}t} v \right) = -g e^{\frac{k}{m}t}$$

5. Integración:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{k}{m}t} v \right) dt &= -g \int e^{\frac{k}{m}t} dt \\ e^{\frac{k}{m}t} v &= -g \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C \end{aligned}$$

6. Despejando $v(t)$:

$$v(t) = -\frac{gm}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}$$

7. Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0$:

$$v(0) = -\frac{gm}{k} + C = v_0 \quad \Rightarrow \quad C = v_0 + \frac{gm}{k}$$

8. Solución general:

$$v(t) = -\frac{gm}{k} + \left(v_0 + \frac{gm}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

Condición para Alcanzar la Altura Máxima

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad del proyectil se reduce a cero:

$$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{gm}{k} + \left(v_0 + \frac{gm}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} = 0$$

Resolviendo para t

1. Reorganizando la ecuación:

$$\left(v_0 + \frac{gm}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{gm}{k}$$

2. Dividiendo ambos lados por $v_0 + \frac{gm}{k}$:

$$e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{\frac{gm}{k}}{v_0 + \frac{gm}{k}} = \frac{gm}{kv_0 + gm}$$

3. Aplicando el logaritmo natural:

$$-\frac{k}{m}t = \ln\left(\frac{gm}{kv_0 + gm}\right)$$

4. Despejando t :

$$t_b = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_0 + gm}{gm}\right) = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{gm}\right)$$

Expresión Final para t_b :

$$t_b = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{gm}\right)$$

Interpretación

El tiempo t_b depende de la masa del proyectil m , la constante de resistencia k , la velocidad inicial v_0 y la aceleración gravitacional g . A medida que aumenta la resistencia del aire (mayor k) o la masa del proyectil, el tiempo para alcanzar la altura máxima disminuye.

Comparación de los Tiempos t_a y t_b

- Sin Resistencia del Aire (t_a):

$$t_a = \frac{v_0}{g}$$

- Con Resistencia Proporcional a la Velocidad (t_b):

$$t_b = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{gm}\right)$$

Análisis Comparativo

Para comparar t_a y t_b , consideremos la relación entre ambas expresiones.

1. Caso en que la resistencia es insignificante ($k \rightarrow 0$):

$$\lim_{k \rightarrow 0} t_b = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{gm}\right) \approx \frac{m}{k} \cdot \frac{kv_0}{gm} = \frac{v_0}{g} = t_a$$

Es consistente con el caso sin resistencia.

2. Para $k > 0$:

Dado que la función $\ln(1+x) < x$ para $x > 0$, entonces:

$$t_b = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{gm} \right) < \frac{m}{k} \cdot \frac{kv_0}{gm} = \frac{v_0}{g} = t_a$$

Conclusión:

$$t_b < t_a$$

Es decir, cuando hay una resistencia proporcional a la velocidad, el tiempo requerido para que el proyectil alcance su altura máxima es menor que en el caso sin resistencia del aire.

Interpretación Física

La presencia de resistencia del aire disipa energía del proyectil, haciendo que pierda velocidad más rápidamente y, por ende, alcance la altura máxima en un menor tiempo comparado con el caso sin resistencia.

Resumen Final

- Sin Resistencia del Aire:

$$t_a = \frac{v_0}{g}$$

- Con Resistencia Proporcional a la Velocidad:

$$t_b = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{gm} \right) < t_a$$

Por lo tanto, el proyectil alcanza su altura máxima más rápidamente cuando existe una resistencia proporcional a su velocidad instantánea en comparación con el caso sin resistencia.

5. Se lanza un bloque hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial v_0 . Si el plano forma un ángulo θ con la horizontal y el coeficiente de rozamiento (deslizante) μ , entre el plano y el bloque es μ , hállese el tiempo que tarda el bloque en volver a la base del plano inclinado. ¿Cuál será el valor mínimo del coeficiente de rozamiento en reposo μ_s para que el bloque se detenga en el plano inclinado?

Para resolver el **Problema 5**, analizaremos el movimiento de un bloque que es lanzado hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial v_0 . Consideraremos dos aspectos:

1. Calcular el tiempo que tarda el bloque en volver a la base del plano inclinado.

2. Determinar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático μ_s para que el bloque se detenga en el plano inclinado.

Datos Iniciales

- Velocidad inicial del bloque: v_0 (hacia arriba del plano)
- Ángulo de inclinación del plano: θ con respecto a la horizontal
- Coeficiente de rozamiento deslizante (cinético): μ
- Aceleración debida a la gravedad: g

1. Tiempo para que el Bloque Vuelva a la Base del Plano Inclinado

Análisis del Movimiento

El bloque es lanzado hacia arriba del plano inclinado con una velocidad inicial v_0 . A medida que sube, experimenta dos fuerzas que actúan en dirección opuesta al movimiento:

1. Componente de la gravedad a lo largo del plano: $mg \sin \theta$
2. Fuerza de rozamiento cinético: $F_r = \mu mg \cos \theta$

La **aceleración total** que actúa sobre el bloque mientras sube es:

$$a_{\text{subida}} = -(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)$$

El signo negativo indica que la aceleración es opuesta al movimiento hacia arriba.

Tiempo para Alcanzar la Altura Máxima (t_{subida})

La velocidad final en la altura máxima es cero ($v = 0$). Utilizando la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 + at$$

$$0 = v_0 - (g \sin \theta + \mu g \cos \theta)t_{\text{subida}}$$

Resolviendo para t_{subida} :

$$t_{\text{subida}} = \frac{v_0}{g \sin \theta + \mu g \cos \theta}$$

Distancia Recorrida hacia Arriba (s_{subida})

Utilizamos la ecuación de desplazamiento:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$s_{\text{subida}} = v_0 t_{\text{subida}} - \frac{1}{2}(g \sin \theta + \mu g \cos \theta) t_{\text{subida}}^2$$

Sustituyendo t_{subida} :

$$s_{\text{subida}} = \frac{v_0^2}{g \sin \theta + \mu g \cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin \theta + \mu g \cos \theta} = \frac{v_0^2}{2(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)}$$

Tiempo para Descender desde la Altura Máxima hasta la Base (t_{descenso})

Durante el descenso, el bloque parte del reposo y acelera hacia abajo. La aceleración en este tramo es:

$$a_{\text{descenso}} = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

Utilizamos la ecuación de desplazamiento para el descenso:

$$s_{\text{subida}} = \frac{1}{2} a_{\text{descenso}} t_{\text{descenso}}^2$$

Despejando t_{descenso} :

$$t_{\text{descenso}} = \sqrt{\frac{2s_{\text{subida}}}{a_{\text{descenso}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{v_0^2}{2(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)}}{g \sin \theta - \mu g \cos \theta}} = \frac{v_0}{\sqrt{(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)(g \sin \theta - \mu g \cos \theta)}}$$

Tiempo Total para el Viaje Completo (t_{total})

$$t_{\text{total}} = t_{\text{subida}} + t_{\text{descenso}} = \frac{v_0}{g \sin \theta + \mu g \cos \theta} + \frac{v_0}{\sqrt{(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)(g \sin \theta - \mu g \cos \theta)}}$$

Simplificación del Tiempo Total

Factorizamos g :

$$t_{\text{total}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} + \frac{v_0}{g \sqrt{(\sin \theta + \mu \cos \theta)(\sin \theta - \mu \cos \theta)}}$$

Para una presentación más compacta, se puede expresar como:

$$t_{\text{total}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right)^2}} \right]$$

Sin embargo, para propósitos prácticos, la expresión inicial es suficientemente clara.

Respuesta Final

$$t_{\text{total}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} + \frac{v_0}{\sqrt{g^2(\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)}}$$

O de manera más simplificada:

$$t_{\text{total}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta}} \right)$$

2. Valor Mínimo del Coeficiente de Rozamiento Estático μ_s para que el Bloque se Detenga en el Plano Inclinado

Análisis de Fuerzas en la Posición de Detención

Cuando el bloque alcanza su altura máxima y se detiene momentáneamente, las fuerzas que actúan sobre él son:

1. Componente de la gravedad a lo largo del plano: $mg \sin \theta$ (hacia abajo)
2. Fuerza de rozamiento estático máximo: $F_r = \mu_s mg \cos \theta$ (opuesta al movimiento)

Para que el bloque se detenga en el plano inclinado y no vuelva a deslizarse hacia abajo, la fuerza de rozamiento estático debe ser al menos igual a la componente de la gravedad que tiende a hacer que el bloque deslice hacia abajo. Es decir:

$$\mu_s mg \cos \theta \geq mg \sin \theta$$

Despejando μ_s

$$\mu_s \geq \frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \tan \theta$$

Respuesta Final

$$\mu_s \geq \tan \theta$$

Por lo tanto, el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático necesario para que el bloque se detenga en el plano inclinado es $\mu_s = \tan \theta$.

Resumen Final

1. Tiempo total para que el bloque vuelva a la base del plano inclinado:

$$t_{\text{total}} = \frac{v_0}{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} + \frac{v_0}{\sqrt{g^2(\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)}}$$

2. Valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el bloque se detenga en el plano:

$$\mu_s \geq \tan \theta$$

Interpretación Física

- **Tiempo Total (t_{total}):** Este tiempo representa el intervalo completo desde que el bloque es lanzado hacia arriba del plano inclinado hasta que regresa a la base. Incluye el tiempo de ascenso y el tiempo de descenso, ambos afectados por la gravedad y el rozamiento.
- **Coeficiente de Rozamiento Estático Mínimo (μ_s):** Este valor asegura que la fuerza de rozamiento estático es suficiente para contrarrestar la componente de la gravedad que tiende a hacer que el bloque deslice hacia abajo. Si μ_s es menor que $\tan \theta$, el bloque no podrá detenerse en el plano y deslizará de regreso a la base.

Nota: Es importante que el coeficiente de rozamiento cinético μ sea mayor que el mínimo requerido para la detención estática μ_s si se desea evitar que el bloque deslice nuevamente. Además, se asume que $\sin \theta > \mu \cos \theta$ para que el bloque efectivamente deslice hacia abajo después de alcanzar la altura máxima.

\text{6. Encontrar la posición en un tiempo } t \text{ de una partícula de masa } m, \text{ cuando la fuerza } F \text{ aplicada es } F = 2mg \cos(\omega t) \text{ y } x = 8 \text{ a } t = 0 \text{ y } x = b \text{ a } t = \frac{\pi}{2\omega}.

Para resolver el **Problema 6**, determinaremos la posición $x(t)$ de una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza $F(t) = 2mg \cos(\omega t)$, dadas las condiciones iniciales:

- **Condiciones Iniciales:**
 - En $t = 0$, $x = 8$.
 - En $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $x = b$.

Nuestro objetivo es encontrar la expresión de $x(t)$ que satisfaga estas condiciones.

1. Análisis del Movimiento

a) Aplicando la Segunda Ley de Newton

La fuerza aplicada sobre la partícula es:

$$F(t) = 2mg \cos(\omega t)$$

Según la segunda ley de Newton:

$$F(t) = ma(t) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{F(t)}{m} = 2g \cos(\omega t)$$

donde:

- $a(t)$ es la aceleración de la partícula en función del tiempo.
- g es la aceleración debida a la gravedad.

b) Integrando para Obtener la Velocidad

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2g \cos(\omega t)$$

Integrando con respecto al tiempo para obtener la velocidad $v(t)$:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int 2g \cos(\omega t) dt = \frac{2g}{\omega} \sin(\omega t) + C_1$$

donde C_1 es la constante de integración que representa la velocidad inicial.

c) Integrando para Obtener la Posición

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2g}{\omega} \sin(\omega t) + C_1$$

Integrando con respecto al tiempo para obtener la posición $x(t)$:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{2g}{\omega} \sin(\omega t) + C_1 \right) dt = -\frac{2g}{\omega^2} \cos(\omega t) + C_1 t + C_2$$

donde C_2 es la constante de integración que representa la posición inicial.

2. Determinación de las Constantes de Integración

a) Condición Inicial en $t = 0$

Dado que en $t = 0$, $x = 8$:

$$x(0) = -\frac{2g}{\omega^2} \cos(0) + C_1 \cdot 0 + C_2 = -\frac{2g}{\omega^2} \cdot 1 + C_2 = 8$$

Resolviendo para C_2 :

$$C_2 = 8 + \frac{2g}{\omega^2}$$

b) Condición en $t = \frac{\pi}{2\omega}$

Dado que en $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $x = b$:

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = -\frac{2g}{\omega^2} \cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega}\right) + C_1 \cdot \frac{\pi}{2\omega} + C_2 = -\frac{2g}{\omega^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_1 \cdot \frac{\pi}{2\omega} + \left(8 + \frac{2g}{\omega^2}\right)$$

Simplificando:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 0 + C_1 \cdot \frac{\pi}{2\omega} + 8 + \frac{2g}{\omega^2} = b$$

Resolviendo para C_1 :

$$C_1 \cdot \frac{\pi}{2\omega} = b - 8 - \frac{2g}{\omega^2}$$

$$C_1 = \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right)$$

3. Expresión Final de la Posición $x(t)$

Sustituyendo las constantes C_1 y C_2 en la expresión de $x(t)$:

$$x(t) = -\frac{2g}{\omega^2} \cos(\omega t) + \left(\frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right) \right) t + \left(8 + \frac{2g}{\omega^2} \right)$$

Para mayor claridad, podemos reorganizar los términos:

$$x(t) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right) t$$

Forma Compacta:

$$x(t) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right) t$$

4. Resumen de la Solución

La posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo t está dada por:

$$x(t) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right) t$$

Donde:

- g es la aceleración debida a la gravedad.
- ω es la frecuencia angular de la fuerza aplicada.
- b es la posición en el tiempo $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Esta expresión satisface las condiciones iniciales proporcionadas y describe completamente la posición de la partícula en cualquier tiempo t .

Verificación de las Condiciones Iniciales

1. En $t = 0$:

$$x(0) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} (1 - 1) + \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2} \right) \cdot 0 = 8$$

Cumple con la condición $x(0) = 8$.

2. En $t = \frac{\pi}{2\omega}$:

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{2\omega}{\pi} \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2}\right) \cdot \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 8 + \frac{2g}{\omega^2} + \left(b - 8 - \frac{2g}{\omega^2}\right) = b$$

Cumple con la condición $x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = b$.

Conclusión

La posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo t está completamente determinada por la fuerza aplicada $F(t) = 2mg \cos(\omega t)$ y las condiciones iniciales proporcionadas. La solución encontrada garantiza que las condiciones en $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2\omega}$ se cumplen de manera consistente.

\text{7. Determinar el movimiento de una partícula de masa } m \text{ a la que se le aplica la fuerza } \mathbf{F} = F_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \hat{i}

Para resolver el **Problema 7**, determinaremos el movimiento $x(t)$ de una partícula de masa m a la que se le aplica una fuerza variable en el tiempo dada por:

$$\mathbf{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \hat{i}$$

Donde:

- F_0 es la magnitud inicial de la fuerza.
- α es la constante de decaimiento exponencial.
- ω es la frecuencia angular de la fuerza.
- \hat{i} es el vector unitario en la dirección x .

Nuestro objetivo es encontrar la posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo t .

1. Aplicación de la Segunda Ley de Newton

La segunda ley de Newton establece que:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Dado que la fuerza está en la dirección x , podemos escribir la ecuación escalarmente:

$$F(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Sustituyendo la fuerza dada:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

Dividiendo ambos lados por m :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

2. Integración para Obtener la Velocidad $v(t)$

La aceleración $a(t)$ es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

Integrando ambos lados respecto a t :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t) dt + C_1 \\ v(t) &= \frac{F_0}{m} \int e^{-\alpha t} \sin(\omega t) dt + C_1 \end{aligned}$$

Resolución de la Integral

Utilizamos la siguiente fórmula de integración para funciones exponenciales multiplicadas por funciones trigonométricas:

$$\int e^{pt} \sin(qt) dt = \frac{e^{pt}(p \sin(qt) - q \cos(qt))}{p^2 + q^2} + C$$

En nuestro caso, $p = -\alpha$ y $q = \omega$. Aplicando la fórmula:

$$\int e^{-\alpha t} \sin(\omega t) dt = \frac{e^{-\alpha t}(-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t))}{\alpha^2 + \omega^2} + C$$

Por lo tanto, la velocidad es:

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} + C_1$$

Simplificando:

$$v(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} (-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + C_1$$

3. Integración para Obtener la Posición $x(t)$

La velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Integrando ambos lados respecto a t :

$$x(t) = \int v(t) dt + C_2$$

Sustituyendo la expresión de $v(t)$:

$$x(t) = \int \left[\frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} (-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + C_1 \right] dt + C_2$$

Separando la integral:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \int (-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} dt + C_1 t + C_2$$

Resolución de la Integral

Consideremos la integral:

$$I = \int (-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} dt$$

Reconocemos que:

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} \cos(\omega t)) = -\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega t) - \omega e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

Comparando con la expresión dentro de la integral:

$$-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) = \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} \sin(\omega t)) \cdot (-1)$$

Sin embargo, para evitar confusiones, utilizaremos una combinación lineal adecuada.

Utilizando la fórmula de integración previamente mencionada, la integral se resuelve como:

$$I = \frac{e^{-\alpha t} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t))}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} + C$$

Expresión Final de la Posición

Sustituyendo de nuevo en $x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \cdot \frac{(\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)}{(\alpha^2 + \omega^2)} e^{-\alpha t} + C_1 t + C_2$$

Simplificando los denominadores:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + C_1 t + C_2$$

4. Determinación de las Constantes de Integración C_1 y C_2

Para determinar las constantes C_1 y C_2 , necesitamos condiciones iniciales. En ausencia de condiciones explícitas, consideraremos condiciones iniciales comunes:

- **Condición Inicial 1:** En $t = 0$, la posición $x(0) = x_0$.
- **Condición Inicial 2:** En $t = 0$, la velocidad $v(0) = v_0$.

Aplicando las Condiciones Iniciales

1. Para $t = 0$, $x(0) = x_0$:

$$x(0) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(0) + 2\alpha\omega \cos(0)) e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$x(0) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} (0 + 2\alpha\omega \cdot 1) + C_2 = \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} + C_2$$

Resolviendo para C_2 :

$$C_2 = x_0 - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

2. Para $t = 0$, $v(0) = v_0$:

Recordemos que la velocidad está dada por:

$$v(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} (-\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + C_1$$

En $t = 0$:

$$v(0) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)} (-\alpha \cdot 0 - \omega \cdot 1) e^0 + C_1 = -\frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} + C_1$$

Resolviendo para C_1 :

$$C_1 = v_0 + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)}$$

5. Expresión Final de la Posición $x(t)$

Sustituyendo C_1 y C_2 en la expresión de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + \left(v_0 + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \right) t + \left(x_0 - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} \right)$$

Simplificando términos constantes:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + \left(v_0 + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \right) t + x_0 - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

Esta es la expresión general para la posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo t , considerando las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$.

6. Interpretación de la Solución

- **Término Transitorio:**

$$\frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t}$$

Este término representa la respuesta transitoria del sistema debido a la fuerza aplicada. Dado que está multiplicado por $e^{-\alpha t}$, su influencia disminuye con el tiempo, especialmente si $\alpha > 0$.

- **Término Lineal:**

$$\left(v_0 + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \right) t$$

Este término indica un movimiento rectilíneo uniforme incrementado por una contribución constante derivada de la fuerza aplicada.

- **Término Constante:**

$$x_0 - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

Este término ajusta la posición inicial x_0 de la partícula.

7. Caso Particular: Condiciones Iniciales Nulas

Si consideramos condiciones iniciales sin desplazamiento ni velocidad inicial, es decir:

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = 0$$

La expresión para $x(t)$ se simplifica a:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} t - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

8. Resumen de la Solución

La posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo t , bajo la fuerza aplicada $\mathbf{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \hat{i}$, está dada por:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\alpha\omega \cos(\omega t)) e^{-\alpha t} + \left(v_0 + \frac{F_0\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)} \right) t + \left(x_0 - \frac{2F_0\alpha\omega}{m(\alpha^2 + \omega^2)^2} \right)$$

Donde:

- x_0 es la posición inicial en $t = 0$.
- v_0 es la velocidad inicial en $t = 0$.

Esta expresión incorpora tanto la respuesta transitoria debido a la fuerza aplicada como el movimiento constante inducido por la fuerza sostenida.

Conclusión

Hemos determinado el movimiento de una partícula de masa m sometida a una fuerza variable en el tiempo de la forma $\mathbf{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \hat{i}$. La posición $x(t)$ se expresa en función del tiempo t , incorporando las constantes de integración que pueden ser determinadas mediante condiciones iniciales específicas.

8. a) Si la velocidad límite de caída de un hombre de 80kg, con paracaídas, es la misma que tendría al caer libremente 0.75m, hallar el valor de esta velocidad límite y la constante de amortiguamiento κ (supóngase $F_{\text{amort}} = -m\kappa v$).

b) Supongamos ahora que el hombre cae libremente (partiendo del reposo) durante 5 segundos y que después abre su paracaídas. Luego de 5 segundos, ¿Cuál sería su velocidad?

Para resolver el **Problema 8**, abordaremos las dos partes de manera sistemática:

1. **Parte a):** Determinar la velocidad límite de caída y la constante de amortiguamiento κ .

2. **Parte b):** Calcular la velocidad del hombre después de caer libremente durante 5 segundos antes de abrir el paracaídas.

Parte a) Velocidad Límite y Constante de Amortiguamiento κ

Datos Iniciales

- Masa del hombre (m): 80 kg
- Distancia de caída libre equivalente (s): 0.75 m
- Aceleración debida a la gravedad (g): 9.81 m/s^2
- Fuerza de amortiguamiento (F_{amort}): $F_{\text{amort}} = -m\kappa v$, donde κ es la constante de amortiguamiento.

Objetivos

1. Determinar la velocidad límite (v_t) del hombre al caer con el paracaídas.
2. Calcular la constante de amortiguamiento (κ).

Paso 1: Determinación de la Velocidad Límite (v_t)

La velocidad límite con el paracaídas es la misma que la velocidad que alcanzaría al caer libremente una distancia de 0.75 m.

Velocidad en Caída Libre Sin Resistencia

En caída libre sin resistencia, la velocidad alcanzada después de caer una distancia s se calcula mediante la ecuación de la cinemática:

$$v = \sqrt{2gs}$$

Donde:

- v es la velocidad final.
- g es la aceleración debida a la gravedad.
- s es la distancia caída.

Sustituyendo los valores:

$$v_t = \sqrt{2 \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.75 \text{ m}} = \sqrt{14.715} \approx 3.83 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la velocidad límite es aproximadamente 3.83 m/s.

Paso 2: Cálculo de la Constante de Amortiguamiento (κ)

En equilibrio, cuando el hombre alcanza la velocidad límite (v_t), la fuerza de gravedad es contrarrestada por la fuerza de amortiguamiento:

$$mg = m\kappa v_t$$

Simplificando (la masa m se cancela):

$$g = \kappa v_t \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{g}{v_t}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\kappa = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{3.83 \text{ m/s}} \approx 2.56 \text{ s}^{-1}$$

Por lo tanto, la constante de amortiguamiento es aproximadamente 2.56 s^{-1} .

Parte b) Velocidad Después de 5 Segundos de Caída Libre

Datos Iniciales

- Tiempo de caída libre (t): 5 segundos
- Condición inicial: Partiendo del reposo ($v_0 = 0$)

Objetivo

Calcular la velocidad del hombre después de caer libremente durante 5 segundos antes de abrir el paracaídas.

Análisis

Durante la caída libre sin resistencia del aire, la velocidad de un objeto que parte del reposo se calcula mediante la siguiente ecuación de la cinemática:

$$v(t) = v_0 + gt$$

Donde:

- $v(t)$ es la velocidad en el tiempo t .
- v_0 es la velocidad inicial.
- g es la aceleración debida a la gravedad.
- t es el tiempo transcurrido.

Dado que el hombre parte del reposo ($v_0 = 0$):

$$v(t) = gt$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$v(5 \text{ s}) = 9.81 \text{ m/s}^2 \times 5 \text{ s} = 49.05 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la velocidad del hombre después de caer libremente durante 5 segundos es de aproximadamente 49.05 m/s .

Resumen de las Soluciones

1. Parte a):

- Velocidad Límite (v_t): 3.83 m/s
- Constante de Amortiguamiento (κ): 2.56 s^{-1}

2. Parte b):

- Velocidad después de 5 segundos de caída libre: 49.05 m/s

Interpretación Física

- **Velocidad Límite (v_t):** Es la velocidad constante que el hombre alcanza cuando la fuerza de gravedad es balanceada por la fuerza de amortiguamiento proporcionada por el paracaídas. En este caso, es relativamente baja (3.83 m/s), lo que indica una caída controlada y segura.
- **Constante de Amortiguamiento (κ):** Indica cuán eficazmente el paracaídas puede reducir la velocidad de caída del hombre. Un valor de 2.56 s^{-1} sugiere que la fuerza de amortiguamiento responde rápidamente para contrarrestar la gravedad.
- **Velocidad después de Caída Libre:** La alta velocidad de 49.05 m/s alcanzada después de 5 segundos de caída libre subraya la importancia de desplegar el paracaídas a tiempo para reducir la velocidad a un nivel seguro.

Nota: En situaciones reales, otros factores como la resistencia del aire, la masa efectiva del paracaídas y cambios en la constante de amortiguamiento con la velocidad pueden influir en los resultados. Sin embargo, para este problema, hemos asumido condiciones ideales para simplificar los cálculos.

\text{9. Una partícula de masa } m \text{ tiene aplicada una fuerza } F = -kx^2. \text{ Si } \dot{x} = v_0 \text{ cuando } x = 0, \\ \text{hállese:} \\ \\ \text{(a) La ecuación de la energía.} \\ \\ \text{(b) El punto de retorno y} \\ \\ \text{(c) La velocidad en cualquier posición.}

Para resolver el **Problema 9**, analizaremos las tres partes solicitadas:

1. **Parte a):** Determinar la ecuación de la energía.

2. **Parte b):** Encontrar el punto de retorno.
 3. **Parte c):** Calcular la velocidad en cualquier posición.
-

Datos Iniciales

- Masa de la partícula (m): m
 - Fuerza aplicada (F): $F = -kx^2$
 - Condición inicial: $\dot{x} = v_0$ cuando $x = 0$
-

Parte a) La Ecuación de la Energía

1. Definición de la Energía Mecánica

La energía mecánica total (E) de una partícula es la suma de su **energía cinética** (K) y su **energía potencial** (U):

$$E = K + U$$

Donde:

- **Energía Cinética:**

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- **Energía Potencial:**

Para determinar $U(x)$, utilizamos la relación entre la fuerza y la energía potencial:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Dada la fuerza $F = -kx^2$, integramos para encontrar $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx} = kx^2 \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int kx^2 dx = \frac{k}{3}x^3 + C$$

Donde C es la constante de integración. Podemos elegir $C = 0$ para simplificar, definiendo la energía potencial cero en $x = 0$.

Por lo tanto:

$$U(x) = \frac{k}{3}x^3$$

2. Ecuación de la Energía Total

Sustituyendo las expresiones de K y U en la ecuación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{3}x^3$$

3. Determinación de la Constante de Energía

Utilizando la condición inicial $\dot{x} = v_0$ cuando $x = 0$:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{3}(0)^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Por lo tanto, la ecuación de la energía es:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{3}x^3 = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

Parte b) El Punto de Retorno

1. Concepto del Punto de Retorno

El **punto de retorno** es la posición máxima x_{\max} que alcanza la partícula antes de comenzar a regresar. En este punto, la velocidad es cero ($v = 0$).

2. Aplicación de la Ecuación de la Energía

En el punto de retorno:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{3}x^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dado que $v = 0$ en $x = x_{\max}$:

$$\frac{k}{3}x_{\max}^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

3. Resolución para x_{\max}

Despejamos x_{\max} :

$$x_{\max}^3 = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{k}{3}} = \frac{3mv_0^2}{2k}$$

$$x_{\max} = \left(\frac{3mv_0^2}{2k} \right)^{1/3}$$

Por lo tanto, el **punto de retorno** es:

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{3mv_0^2}{2k} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Parte c) La Velocidad en Cualquier Posición

1. Partiendo de la Ecuación de la Energía

La ecuación de la energía es:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{3}x^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

2. Despeje de la Velocidad v

Isolamos v^2 :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{3}x^3$$

Multiplicamos ambos lados por 2:

$$mv^2 = mv_0^2 - \frac{2k}{3}x^3$$

Dividimos por m :

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3$$

Finalmente, despejamos v :

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3}$$

Por lo tanto, la **velocidad en cualquier posición x** es:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3}$$

Nota: Esta expresión es válida siempre que $v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3 \geq 0$, es decir, para posiciones x tales que la energía cinética permanece no negativa.

Resumen de las Soluciones

1. **Parte a):** La ecuación de la energía es

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{3}x^3 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

2. **Parte b):** El punto de retorno está dado por

$$x_{\max} = \left(\frac{3mv_0^2}{2k} \right)^{\frac{1}{3}}$$

3. **Parte c):** La velocidad en cualquier posición x es

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{3m}x^3}$$

Interpretación Física

- **Ecuación de la Energía:** Muestra la conservación de la energía mecánica, donde la energía cinética y la potencial se intercambian a lo largo del movimiento de la partícula bajo la fuerza no lineal $F = -kx^2$.
- **Punto de Retorno:** Representa la máxima distancia que alcanza la partícula antes de invertir su dirección de movimiento. Está determinado por el balance entre la energía cinética inicial y el trabajo realizado por la fuerza no lineal.
- **Velocidad en Cualquier Posición:** Indica cómo varía la velocidad de la partícula en función de su posición, reflejando el intercambio entre energía cinética y potencial debido a la fuerza aplicada.

Conclusión: Hemos determinado la ecuación de la energía, el punto de retorno y la velocidad en cualquier posición para una partícula sometida a una fuerza no lineal $F = -kx^2$, partiendo de una velocidad inicial v_0 en $x = 0$.

10. Una partícula se mueve en el campo de energía potencial $U(x) = a \ln x + \frac{b}{x^2}$. Donde x es la distancia de la partícula al origen (el centro de fuerzas) y a y b son constantes positivas. Hállese la expresión de la fuerza en función de la posición e indíquese en qué punto se anula la fuerza. ¿Es este punto de equilibrio estable? Si lo es determínese el periodo de las oscilaciones pequeñas respecto del mismo.

Para resolver el **Problema 10**, analizaremos las siguientes partes:

1. Determinar la expresión de la fuerza $F(x)$ en función de la posición x .
2. Encontrar el punto donde la fuerza se anula.
3. Evaluar la estabilidad de este punto de equilibrio.
4. Si es estable, determinar el período de las oscilaciones pequeñas alrededor de este punto.

Datos Iniciales

- Energía Potencial ($U(x)$):

$$U(x) = a \ln x + \frac{b}{x^2}$$

Donde:

- $a > 0$
- $b > 0$
- x es la distancia al origen (centro de fuerzas).

a) Expresión de la Fuerza en Función de la Posición

1. Relación entre Fuerza y Energía Potencial

La fuerza $F(x)$ está relacionada con la energía potencial $U(x)$ mediante la siguiente relación:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Esta relación indica que la fuerza es la derivada negativa de la energía potencial respecto a la posición.

2. Cálculo de la Derivada de $U(x)$

Derivamos $U(x)$ respecto a x :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx} \left(a \ln x + \frac{b}{x^2} \right) = \frac{a}{x} - \frac{2b}{x^3}$$

3. Expresión de la Fuerza $F(x)$

Sustituyendo la derivada en la relación de la fuerza:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{a}{x} - \frac{2b}{x^3} \right) = -\frac{a}{x} + \frac{2b}{x^3}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x}}$$

b) Punto de Anulación de la Fuerza y su Estabilidad

1. Determinación del Punto de Equilibrio

El punto de equilibrio ocurre donde la fuerza se anula:

$$F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x} = 0$$

$$\frac{2b}{x^3} = \frac{a}{x}$$

Multiplicando ambos lados por x^3 (asumiendo $x \neq 0$):

$$2b = ax^2$$

Despejando x :

$$x^2 = \frac{2b}{a} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2b}{a}}$$

$$x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2b}{a}}$$

2. Evaluación de la Estabilidad del Punto de Equilibrio

Para determinar la **estabilidad** del punto de equilibrio, examinamos la segunda derivada de la energía potencial $U(x)$ en x_{eq} .

a) Segunda Derivada de $U(x)$

Primero, calculamos la segunda derivada de $U(x)$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x} - \frac{2b}{x^3} \right) = -\frac{a}{x^2} + \frac{6b}{x^4}$$

b) Evaluación en x_{eq}

Sustituyendo $x = x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2b}{a}}$:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{eq}}} = -\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{2b}{a}} \right)^2} + \frac{6b}{\left(\sqrt{\frac{2b}{a}} \right)^4}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} &= -\frac{a}{\frac{2b}{a}} + \frac{6b}{\left(\frac{2b}{a} \right)^2} \\ &= -\frac{a^2}{2b} + \frac{6ba^2}{4b^2} \\ &= -\frac{a^2}{2b} + \frac{3a^2}{2b} = \frac{2a^2}{2b} = \frac{a^2}{b} > 0 \end{aligned}$$

c) Conclusión sobre la Estabilidad

Dado que:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{eq}}} = \frac{a^2}{b} > 0$$

Esto indica que el punto de equilibrio es un **mínimo de la energía potencial**, lo que significa que es un **punto de equilibrio estable**.

c) Período de las Oscilaciones Pequeñas alrededor del Punto de Equilibrio

1. Aproximación para Oscilaciones Pequeñas

Para oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio x_{eq} , podemos aproximar la energía potencial $U(x)$ mediante una expansión en serie de Taylor hasta el segundo orden:

$$U(x) \approx U(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{eq}}} (x - x_{\text{eq}})^2$$

Esta aproximación corresponde a un **oscilador armónico simple** con frecuencia angular:

$$\omega_{\text{osc}} = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=x_{\text{eq}}}} = \sqrt{\frac{a^2}{mb}}$$

El período de las oscilaciones es entonces:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{osc}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mb}{a^2}} = 2\pi \frac{\sqrt{mb}}{a}$$

$$T = \frac{2\pi\sqrt{mb}}{a}$$

2. Expresión Final del Período

El período de las oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio x_{eq} es:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{mb}}{a}$$

Resumen de las Soluciones

1. Expresión de la Fuerza en Función de la Posición:

$$F(x) = \frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x}$$

2. Punto donde la Fuerza se Anula:

$$x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2b}{a}}$$

3. Estabilidad del Punto de Equilibrio:

- El punto $x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2b}{a}}$ es un **punto de equilibrio estable**.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{mb}}{a}$$

Interpretación Física

- **Fuerza $F(x)$:** La fuerza aplicada depende de la posición x de manera no lineal. El término $\frac{2b}{x^3}$ domina para x pequeños, mientras que $-\frac{a}{x}$ domina para x grandes.
- **Punto de Equilibrio x_{eq} :** Es la posición donde las fuerzas contrarias se balancean. En este caso, es proporcional a la raíz cuadrada de la relación $\frac{b}{a}$.
- **Estabilidad:** La positividad de la segunda derivada de la energía potencial en x_{eq} indica que cualquier pequeña perturbación resultará en fuerzas restauradoras que tienden a devolver la partícula al punto de equilibrio, caracterizando la estabilidad.
- **Período T :** El período de las oscilaciones depende directamente de la masa m y del parámetro b , e inversamente de a . Un aumento en la masa o en b incrementa el período, mientras que un aumento en a lo reduce.

Conclusión: Hemos determinado la expresión de la fuerza en función de la posición, identificado el punto de equilibrio donde la fuerza se anula, evaluado la estabilidad de este punto y calculado el período de las oscilaciones pequeñas alrededor de él para una partícula sometida a una energía potencial dada por $U(x) = a \ln x + \frac{b}{x^2}$.

\text{11. Repetir el problema anterior con los siguientes campos de energía potencial} \\

\text{a) } U(x) = a \cos(x) + \frac{b}{\text{sen}^2(x)}, \quad 0 \leq x \leq \pi \\

\text{b) } U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}} \\

\text{c) } U(x) = ax^2 - bx^4 \\

\text{d) } U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}

Para resolver el **Problema 11**, repetiremos el análisis realizado en el **Problema 10** para diferentes campos de energía potencial $U(x)$. Para cada caso, seguiremos los siguientes pasos:

1. **Determinar la expresión de la fuerza $F(x)$ en función de la posición x .**
2. **Encontrar el punto donde la fuerza se anula (punto de equilibrio).**
3. **Evaluar la estabilidad de este punto de equilibrio.**
4. **Si es estable, determinar el período de las oscilaciones pequeñas alrededor de este punto.**

Parte a) $U(x) = a \cos(x) + \frac{b}{\sin^2(x)}$, donde $0 \leq x \leq \pi$

1. Expresión de la Fuerza $F(x)$

La fuerza se obtiene derivando negativamente la energía potencial respecto a x :

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Calculamos la derivada de $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx} = -a \sin(x) + \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{\sin^2(x)} \right) = -a \sin(x) - \frac{2b \cos(x)}{\sin^3(x)}$$

Por lo tanto, la fuerza es:

$$F(x) = - \left(-a \sin(x) - \frac{2b \cos(x)}{\sin^3(x)} \right) = a \sin(x) + \frac{2b \cos(x)}{\sin^3(x)}$$

Simplificando:

$$F(x) = a \sin(x) + \frac{2b \cos(x)}{\sin^3(x)}$$

2. Punto de Anulación de la Fuerza (Punto de Equilibrio)

Encontramos x_{eq} tal que $F(x_{eq}) = 0$:

$$a \sin(x_{eq}) + \frac{2b \cos(x_{eq})}{\sin^3(x_{eq})} = 0$$

Multiplicamos ambos lados por $\sin^3(x_{eq})$ para eliminar el denominador:

$$a \sin^4(x_{eq}) + 2b \cos(x_{eq}) = 0$$

Reorganizando:

$$a \sin^4(x_{eq}) = -2b \cos(x_{eq})$$

$$\sin^4(x_{eq}) = -\frac{2b}{a} \cos(x_{eq})$$

Dado que $\sin^4(x) \geq 0$ y $b, a > 0$, la única forma de que la igualdad sea válida es que $\cos(x_{eq}) \leq 0$.

Observamos que en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, $\cos(x) \leq 0$ para $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

Esta ecuación generalmente no tiene una solución analítica sencilla y requiere métodos numéricos para encontrar x_{eq} . Sin embargo, para propósitos de análisis, consideremos que existe un único punto de equilibrio x_{eq} en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

3. Estabilidad del Punto de Equilibrio

Para evaluar la estabilidad, calculamos la segunda derivada de $U(x)$ en x_{eq} :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -a \cos(x) - \frac{2b}{\sin^3(x)} (-\sin(x)) + \frac{6b \cos^2(x)}{\sin^4(x)}$$

Simplificando:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -a \cos(x) + \frac{2b}{\sin^2(x)} + \frac{6b \cos^2(x)}{\sin^4(x)}$$

En $x = x_{eq}$, sustituimos x por x_{eq} :

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} = -a \cos(x_{eq}) + \frac{2b}{\sin^2(x_{eq})} + \frac{6b \cos^2(x_{eq})}{\sin^4(x_{eq})}$$

Dado que x_{eq} es donde la fuerza se anula, es necesario verificar si $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0$ para estabilidad.

Conclusión: Si $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0$, el punto de equilibrio es **estable**.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas

Si el punto de equilibrio es estable, el período T de las oscilaciones pequeñas se calcula usando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{eff}}}$$

Donde $k_{eff} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}}$.

Por lo tanto:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}}}}$$

Parte b) $U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$

1. Expresión de la Fuerza $F(x)$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{6a}{x^7} - \frac{12b}{x^{13}}\right) = -\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}$$

Simplificando:

$$F(x) = \frac{12b}{x^{13}} - \frac{6a}{x^7}$$

2. Punto de Anulación de la Fuerza (Punto de Equilibrio)

$$\frac{12b}{x^{13}} - \frac{6a}{x^7} = 0$$

$$\frac{12b}{x^{13}} = \frac{6a}{x^7}$$

Multiplicando ambos lados por x^{13} :

$$12b = 6ax^6$$

$$x^6 = \frac{12b}{6a} = \frac{2b}{a}$$

$$x_{\text{eq}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$$

$$\boxed{x_{\text{eq}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}}$$

3. Estabilidad del Punto de Equilibrio

Calculamos la segunda derivada de $U(x)$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{42a}{x^8} - \frac{156b}{x^{14}}$$

En $x = x_{\text{eq}}$:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{\text{eq}}} = \frac{42a}{x_{\text{eq}}^8} - \frac{156b}{x_{\text{eq}}^{14}}$$

Sustituyendo $x_{\text{eq}}^6 = \frac{2b}{a}$:

$$x_{\text{eq}}^8 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{8}{6}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$x_{\text{eq}}^{14} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{14}{6}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{7}{3}}$$

Reemplazando:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{\text{eq}}} = \frac{42a}{\left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{4}{3}}} - \frac{156b}{\left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{7}{3}}} = 42a \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{4}{3}} - 156b \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{7}{3}}$$

Factorizando:

$$= 42a \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{4}{3}} - 156b \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{7}{3}} = \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{4}{3}} \left(42a - 156b \left(\frac{a}{2b}\right)\right)$$

Simplificando:

$$= \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{4}{3}} (42a - 78a) = -36a \left(\frac{a}{2b}\right)^{\frac{4}{3}} < 0$$

Conclusión: Dado que $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{\text{eq}}} < 0$, el punto de equilibrio es **inestable**.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas

No aplica, ya que el punto de equilibrio es inestable.

Parte c) $U(x) = ax^2 - bx^4$

1. Expresión de la Fuerza $F(x)$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -(2ax - 4bx^3) = -2ax + 4bx^3$$

Simplificando:

$$F(x) = 4bx^3 - 2ax$$

2. Punto de Anulación de la Fuerza (Punto de Equilibrio)

$$4bx^3 - 2ax = 0$$

Factorizando:

$$2x(2bx^2 - a) = 0$$

Soluciones:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2bx^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{2b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{2b}}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio son:

$$x_{\text{eq}} = 0 \quad \text{y} \quad x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{\frac{a}{2b}}$$

3. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Calculamos la segunda derivada de $U(x)$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2a - 12bx^2$$

Evaluamos en cada punto de equilibrio:

1. Para $x_{\text{eq}} = 0$:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a - 12b(0)^2 = 2a > 0$$

Conclusión: $x = 0$ es un mínimo de $U(x)$, es decir, un punto de equilibrio estable.

2. Para $x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{\frac{a}{2b}}$:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=\pm\sqrt{\frac{a}{2b}}} = 2a - 12b\left(\frac{a}{2b}\right) = 2a - 6a = -4a < 0$$

Conclusión: $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2b}}$ son máximos de $U(x)$, es decir, puntos de equilibrio inestables.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas alrededor de $x_{\text{eq}} = 0$

Dado que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable, calculamos el período T de las oscilaciones pequeñas usando:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}}$$

Donde $k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a$.

Por lo tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2a}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2a}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{a}}$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{a}}$$

Parte d) $U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$

1. Expresión de la Fuerza $F(x)$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3}\right) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2b}{x^3}$$

Simplificando:

$$F(x) = \frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x^2}$$

2. Punto de Anulación de la Fuerza (Punto de Equilibrio)

$$\frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x^2} = 0$$

Multiplicando ambos lados por x^3 :

$$2b - ax = 0$$

$$x = \frac{2b}{a}$$

$$x_{\text{eq}} = \frac{2b}{a}$$

3. Estabilidad del Punto de Equilibrio

Calculamos la segunda derivada de $U(x)$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{2a}{x^3} - \frac{6b}{x^4}$$

Evaluamos en $x = x_{\text{eq}} = \frac{2b}{a}$:

$$\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=\frac{2b}{a}} = \frac{2a}{\left(\frac{2b}{a}\right)^3} - \frac{6b}{\left(\frac{2b}{a}\right)^4} = \frac{2a^4}{8b^3} - \frac{6ba^4}{16b^4} = \frac{a^4}{4b^3} - \frac{3a^4}{8b^3} = \frac{2a^4 - 3a^4}{8b^3} = -\frac{a^4}{8b^3} < 0$$

Conclusión: Dado que $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=\frac{2b}{a}} < 0$, el punto de equilibrio es **inestable**.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas

No aplica, ya que el punto de equilibrio es inestable.

Resumen de las Soluciones

Parte a) $U(x) = a \cos(x) + \frac{b}{\sin^2(x)}$

1. Fuerza:

$$F(x) = a \sin(x) + \frac{2b \cos(x)}{\sin^3(x)}$$

2. Punto de Equilibrio:

$$x_{\text{eq}} \text{ resuelto numéricamente en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

3. Estabilidad:

- Si $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_{\text{eq}}} > 0$, el punto es **estable**.

4. Período de Oscilaciones:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_{\text{eq}}}}}$$

Parte b) $U(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$

1. Fuerza:

$$F(x) = \frac{12b}{x^{13}} - \frac{6a}{x^7}$$

2. Punto de Equilibrio:

$$x_{\text{eq}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$$

3. Estabilidad:

- $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_{\text{eq}}} < 0 \Rightarrow$ **Inestable**

4. Período de Oscilaciones:

- No aplica

Parte c) $U(x) = ax^2 - bx^4$

1. Fuerza:

$$F(x) = 4bx^3 - 2ax$$

2. Puntos de Equilibrio:

$$x_{\text{eq}} = 0 \quad \text{y} \quad x_{\text{eq}} = \pm \sqrt{\frac{a}{2b}}$$

3. Estabilidad:

- $x = 0 \Rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} = 2a > 0 \Rightarrow \text{Estable}$
- $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2b}} \Rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{Inestable}$

4. Período de Oscilaciones alrededor de $x = 0$:

$$T = \pi \sqrt{\frac{2m}{a}}$$

Parte d) $U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$

1. Fuerza:

$$F(x) = \frac{2b}{x^3} - \frac{a}{x^2}$$

2. Punto de Equilibrio:

$$x_{\text{eq}} = \frac{2b}{a}$$

3. Estabilidad:

- $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{\text{eq}}} = -\frac{a^4}{8b^3} < 0 \Rightarrow \text{Inestable}$

4. Período de Oscilaciones:

- No aplica

Interpretación Física

- **Fuerza $F(x)$:** En cada caso, la fuerza es derivada de la energía potencial y puede presentar diferentes comportamientos según la forma de $U(x)$.
- **Punto de Equilibrio:** Es la posición donde la fuerza neta sobre la partícula es cero. Su existencia y naturaleza (estable o inestable) dependen de la forma de $U(x)$.

- **Estabilidad:** Determina si pequeñas perturbaciones alrededor del punto de equilibrio conducirán a oscilaciones (estable) o a desviaciones crecientes (inestable).
- **Período de Oscilaciones:** Solo aplica para puntos de equilibrio estables y proporciona una medida del tiempo de un ciclo completo de oscilación alrededor de dicho punto.

Nota: Para algunos casos, especialmente en la Parte a), la solución exacta del punto de equilibrio puede requerir métodos numéricos debido a la complejidad de la ecuación resultante. Además, en aplicaciones reales, otros factores como fuerzas externas, fricción o condiciones iniciales pueden influir en el comportamiento del sistema.

12. Considere una partícula que se mueve en una región $x > 0$ bajo la influencia de un potencial $U(x)$ dado por:

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right)$$

Donde $U_0 = 1 \text{ J}$ y $a = 2 \text{ m}$. Grafique el potencial, encuentre los puntos de equilibrio y determine si son máximos y mínimos.

Para resolver el **Problema 12**, seguiremos una metodología estructurada que incluye:

1. **Graficar el potencial $U(x)$.**
2. **Encontrar los puntos de equilibrio** donde la fuerza neta sobre la partícula se anula.
3. **Determinar la naturaleza** de estos puntos de equilibrio, es decir, si son máximos o mínimos del potencial.

Datos Iniciales

- **Energía Potencial $U(x)$:**

$$U(x) = U_0(x) \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right)$$

Donde:

- $U_0(x) = 1 \text{ J}$ (constante)
- $a = 2 \text{ m}$
- Dominio: $x > 0$

Por lo tanto, la expresión del potencial se simplifica a:

$$U(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2} \right) \text{ J}$$

1. Graficar el Potencial $U(x)$

a) Expresión Simplificada de $U(x)$

Sustituyendo $a = 2 \text{ m}$ y $U_0(x) = 1 \text{ J}$:

$$U(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} \quad (\text{en unidades de energía: J})$$

b) Comportamiento Asintótico

- Cuando $x \rightarrow 0^+$:

$$U(x) \rightarrow \infty$$

Debido al término $\frac{2}{x}$, el potencial tiende a infinito cuando x se aproxima a cero desde la derecha.

- Cuando $x \rightarrow \infty$:

$$U(x) \rightarrow \infty$$

Debido al término $\frac{x}{2}$, el potencial también tiende a infinito cuando x crece indefinidamente.

c) Cálculo de Valores Intermedios

Para obtener una representación gráfica adecuada, calculamos $U(x)$ en varios puntos dentro del dominio $x > 0$:

$x \text{ (m)}$	$U(x) \text{ (J)}$
0.5	$\frac{2}{0.5} + \frac{0.5}{2} = 4 + 0.25 = 4.25$
1	$\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = 2 + 0.5 = 2.5$
2	$\frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$
3	$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \approx 0.6667 + 1.5 = 2.1667$
4	$\frac{2}{4} + \frac{4}{2} = 0.5 + 2 = 2.5$
5	$\frac{2}{5} + \frac{5}{2} = 0.4 + 2.5 = 2.9$

d) Representación Gráfica

A continuación, se presenta una gráfica aproximada del potencial $U(x)$:

Descripción de la Gráfica:

- El potencial $U(x)$ presenta un mínimo en algún punto $x = x_{\min}$.
- A medida que x se acerca a cero, $U(x)$ tiende a infinito.
- A medida que x aumenta indefinidamente, $U(x)$ también tiende a infinito.
- El comportamiento sugiere la existencia de un punto de equilibrio estable en $x = x_{\min}$.

2. Encontrar los Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se encuentran donde la fuerza neta sobre la partícula se anula. Dado que:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Puntos de Equilibrio: Soluciones de $F(x) = 0$, es decir, donde:

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

a) Cálculo de la Derivada de $U(x)$ respecto a x

$$U(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$$

Derivando con respecto a x :

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}$$

b) Encontrar x tal que $\frac{dU}{dx} = 0$

$$-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

Resolviendo para x :

$$-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}$$

Multiplicando ambos lados por x^2 :

$$\frac{1}{2}x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Sin embargo, dado que el dominio es $x > 0$, descartamos $x = -2$.

$$\boxed{x_{\text{eq}} = 2 \text{ m}}$$

3. Determinar la Naturaleza del Punto de Equilibrio

Para determinar si el punto de equilibrio es un máximo, mínimo o punto de inflexión, examinamos la segunda derivada de $U(x)$ en $x = x_{\text{eq}}$.

a) Cálculo de la Segunda Derivada de $U(x)$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}$$

Derivando nuevamente con respecto a x :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4}{x^3}$$

b) Evaluación en $x = x_{\text{eq}} = 2 \text{ m}$

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=2} = \frac{4}{(2)^3} = \frac{4}{8} = 0.5 \text{ J/m}^2 > 0$$

c) Conclusión sobre la Naturaleza del Punto de Equilibrio

Dado que:

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=2} = 0.5 > 0$$

Esto indica que $x = 2 \text{ m}$ es un **mínimo local** de $U(x)$, lo que implica que es un **punto de equilibrio estable**.

4. Período de las Oscilaciones Pequeñas alrededor del Punto de Equilibrio

Cuando una partícula oscila alrededor de un punto de equilibrio estable y las oscilaciones son pequeñas, el movimiento puede aproximarse al de un oscilador armónico simple. El período T de dichas oscilaciones se determina mediante:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}}$$

Donde k_{eff} es la constante elástica efectiva, dada por la segunda derivada de $U(x)$ evaluada en el punto de equilibrio.

a) Cálculo de k_{eff}

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=2} = 0.5 \text{ J/m}^2$$

b) Expresión del Período T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{0.5}} = 2\pi \sqrt{2m} = 2\pi \sqrt{2} \sqrt{m}$$

Sin embargo, para una expresión más general y explícita, podemos mantener k_{eff} :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} = 2\pi \sqrt{2m}$$

c) Interpretación Física

El período de las oscilaciones depende directamente de la masa m de la partícula y de la curvatura del potencial en el punto de equilibrio (representada por k_{eff}). Un mayor k_{eff} implica oscilaciones más rápidas (menor período), mientras que una mayor masa m implica oscilaciones más lentas (mayor período).

Resumen Final

1. Expresión del Potencial:

$$U(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} \quad (\text{en unidades de J})$$

2. Gráfica del Potencial:

- Presenta un mínimo en $x = 2 \text{ m}$.
- Tiende a infinito tanto cuando $x \rightarrow 0^+$ como cuando $x \rightarrow \infty$.

3. Punto de Equilibrio:

$x_{\text{eq}} = 2 \text{ m}$

4. Naturaleza del Punto de Equilibrio:

- $x = 2 \text{ m}$ es un **mínimo local** de $U(x)$, es decir, un **punto de equilibrio estable**.

5. Período de las Oscilaciones Pequeñas:

$T = 2\pi\sqrt{2m} \quad (\text{en unidades de segundos si } m \text{ está en kg})$

Nota: La expresión exacta del período requiere conocer la masa m de la partícula.

Conclusión

Hemos:

- **Graficado el potencial $U(x)$** y observado su comportamiento asintótico.
- **Identificado el punto de equilibrio** en $x = 2 \text{ m}$.
- **Determinado que este punto es estable** al ser un mínimo local del potencial.
- **Calculado el período de las oscilaciones pequeñas** alrededor de este punto de equilibrio, mostrando cómo depende de la masa de la partícula y de la curvatura del potencial en dicho punto.

Este análisis proporciona una comprensión completa del comportamiento dinámico de la partícula en el campo de energía potencial dado.

`\text{13. Una paracaidista de } 60\text{kg. \text{ salta de una altitud de } 3000m. \text{ Antes de abrir el paracaídas} \\ \text{alcanza una velocidad terminal de } 30\text{m/s. \\`

`\text{a) Asumiendo que la fuerza de fricción con el aire es proporcional a la velocidad, ¿cuánto} \\ \text{tiempo transcurrió para alcanzar dicha velocidad terminal?} \\`

`\text{b) ¿Qué distancia recorrió hasta alcanzar la velocidad terminal?}`

Para resolver el **Problema 13**, abordaremos las dos partes solicitadas:

1. **Parte a):** Determinar el tiempo transcurrido para que el paracaidista alcance la velocidad terminal.
2. **Parte b):** Calcular la distancia recorrida hasta alcanzar dicha velocidad terminal.

Datos Iniciales

- Masa del paracaidista (m): 60 kg
- Altitud de salto: 3000 m (aunque no es directamente necesario para estas partes del problema)
- Velocidad terminal antes de abrir el paracaídas (v_t): 30 m/s
- Aceleración debida a la gravedad (g): 9.81 m/s^2
- Fuerza de fricción con el aire ($F_{\text{fricción}}$): $F_{\text{fricción}} = -kv$, donde k es la constante de amortiguamiento que debemos determinar.

Parte a) Tiempo Transcurrido para Alcanzar la Velocidad Terminal

1. Modelado del Movimiento

Cuando el paracaidista salta, las fuerzas que actúan sobre él son:

- Fuerza de gravedad: $F_{\text{gravedad}} = mg$ (dirigida hacia abajo).
- Fuerza de fricción con el aire: $F_{\text{fricción}} = -kv$ (opuesta al movimiento).

Aplicando la **segunda ley de Newton**:

$$F_{\text{neto}} = m \frac{dv}{dt} = F_{\text{gravedad}} + F_{\text{fricción}} = mg - kv$$

2. Ecuación Diferencial del Movimiento

La ecuación diferencial resultante es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Dividiendo ambos lados por m :

$$\frac{dv}{dt} + \left(\frac{k}{m} \right) v = g$$

Esta es una **ecuación diferencial lineal de primer orden** que podemos resolver utilizando un **factor integrante**.

3. Resolución de la Ecuación Diferencial

a) Determinación del Factor Integrante

La forma estándar de la ecuación es:

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t)$$

Donde:

- $P(t) = \frac{k}{m}$
- $Q(t) = g$

El factor integrante ($\mu(t)$) se calcula como:

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

b) Multiplicando la Ecuación por el Factor Integrante

Multiplicamos toda la ecuación diferencial por $\mu(t)$:

$$e^{\frac{k}{m}t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{k}{m}t} \frac{k}{m} v = g e^{\frac{k}{m}t}$$

Esto simplifica a:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{k}{m}t} v \right) = g e^{\frac{k}{m}t}$$

c) Integración de Ambos Lados

Integrando ambos lados respecto a t :

$$\int \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{k}{m}t} v \right) dt = \int g e^{\frac{k}{m}t} dt$$

$$e^{\frac{k}{m}t} v = \frac{gm}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C$$

Donde C es la constante de integración.

d) Despejando $v(t)$

Dividiendo ambos lados por $e^{\frac{k}{m}t}$:

$$v(t) = \frac{gm}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}$$

4. Aplicación de Condiciones Iniciales

Para determinar la constante C , necesitamos una condición inicial. Asumimos que al momento del salto ($t = 0$), el paracaidista parte del reposo ($v(0) = 0$).

$$v(0) = \frac{gm}{k} + C e^0 = \frac{gm}{k} + C = 0$$

Resolviendo para C :

$$C = -\frac{gm}{k}$$

5. Solución Completa para $v(t)$

Sustituyendo C en la expresión de $v(t)$:

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

5. Velocidad Terminal (v_t)

La velocidad terminal se alcanza cuando $t \rightarrow \infty$:

$$v_t = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{k}$$

Dado que $v_t = 30 \text{ m/s}$, podemos despejar k :

$$k = \frac{gm}{v_t}$$

Sustituyendo los valores:

$$k = \frac{9.81 \text{ m/s}^2 \times 60 \text{ kg}}{30 \text{ m/s}} = \frac{588.6 \text{ N}}{30 \text{ m/s}} = 19.62 \text{ kg/s}$$

6. Determinación del Tiempo para Alcanzar la Velocidad Terminal

Como la velocidad terminal se alcanza asintóticamente, nunca se alcanza exactamente. Sin embargo, podemos determinar el **tiempo característico** (τ) que representa el tiempo necesario para que la velocidad alcance aproximadamente el 63% de la velocidad terminal.

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{60 \text{ kg}}{19.62 \text{ kg/s}} \approx 3.06 \text{ s}$$

Por lo tanto, **aproximadamente 3.06 segundos** es el tiempo característico para que el paracaidista alcance el 63% de la velocidad terminal.

Sin embargo, si el problema requiere determinar el tiempo necesario para que la velocidad se acerque de manera significativa a la velocidad terminal (por ejemplo, 99%), podemos calcularlo de la siguiente manera:

$$v(t) = v_t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Queremos encontrar t tal que $v(t) = 0.99v_t$:

$$0.99v_t = v_t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$0.99 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.01$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.01) \Rightarrow t = -\tau \ln(0.01) \approx 3.06 \times 4.605 \approx 14.07 \text{ s}$$

Por lo tanto, **aproximadamente 14.07 segundos** es el tiempo necesario para que el paracaidista alcance el 99% de la velocidad terminal.

Conclusión de la Parte a)

- Constante de Amortiguamiento (k): 19.62 kg/s
- Tiempo Característico (τ): $\approx 3.06 \text{ s}$
- Tiempo para 63% de v_t : $\approx 3.06 \text{ s}$
- Tiempo para 99% de v_t : $\approx 14.07 \text{ s}$

Parte b) Distancia Recorrida hasta Alcanzar la Velocidad Terminal

1. Expresión de la Velocidad en Función del Tiempo

Ya hemos determinado que:

$$v(t) = v_t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde:

- $v_t = 30 \text{ m/s}$
- $\tau = \frac{m}{k} \approx 3.06 \text{ s}$

2. Cálculo de la Posición $x(t)$

La posición se obtiene integrando la velocidad respecto al tiempo:

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t v_t (1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) d\tau$$

Simplificando:

$$x(t) = v_t t + v_t \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - v_t \tau$$

$$x(t) = v_t \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_t t - v_t \tau$$

$$x(t) = v_t t - v_t \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Por lo tanto, la expresión de la posición es:

$$x(t) = v_t t - v_t \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

3. Determinación de la Distancia hasta el 99% de la Velocidad Terminal

Utilizando el tiempo calculado en la Parte a) para 99% de v_t ($t \approx 14.07 \text{ s}$):

$$x(14.07) = 30 \text{ m/s} \times 14.07 \text{ s} - 30 \text{ m/s} \times 3.06 \text{ s} \times \left(1 - e^{-\frac{14.07}{3.06}}\right)$$

Calculando:

$$e^{-\frac{14.07}{3.06}} = e^{-4.605} \approx 0.01$$

$$x(14.07) \approx 30 \times 14.07 - 30 \times 3.06 \times (1 - 0.01) \approx 422.1 - 30 \times 3.06 \times 0.99$$

$$= 422.1 - 30 \times 3.06 \times 0.99 \approx 422.1 - 90.918 \approx 331.182 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida hasta alcanzar el 99% de la velocidad terminal es aproximadamente 331.18 metros.

4. Cálculo General de la Distancia hasta un Tiempo t

Para una expresión más general, utilizando $x(t)$:

$$x(t) = v_t t - v_t \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donde:

- $v_t = 30 \text{ m/s}$
- $\tau = 3.06 \text{ s}$

Conclusión de la Parte b)

- Expresión de la Distancia Recorrida:

$$x(t) = 30 \text{ m/s} \times t - 30 \text{ m/s} \times 3.06 \text{ s} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{3.06 \text{ s}}}\right)$$

- Distancia hasta el 99% de v_t (~14.07 s):

$$x(14.07 \text{ s}) \approx 331.18 \text{ m}$$

Resumen Final

1. Parte a):

- Constante de Amortiguamiento (k): 19.62 kg/s
- Tiempo Característico (τ): $\approx 3.06 \text{ s}$
- Tiempo para 63% de v_t : $\approx 3.06 \text{ s}$
- Tiempo para 99% de v_t : $\approx 14.07 \text{ s}$

2. Parte b):

- Expresión de la Distancia Recorrida:

$$x(t) = 30t - 30 \times 3.06 \times \left(1 - e^{-\frac{t}{3.06}}\right) \text{ m}$$

- Distancia hasta el 99% de v_t : $\approx 331.18 \text{ m}$

Interpretación Física

- **Constante de Amortiguamiento (k):** Representa la relación entre la fuerza de fricción con el aire y la velocidad del paracaidista. Un valor de 19.62 kg/s indica cuán rápidamente la fricción contrarresta la aceleración debida a la gravedad.
- **Tiempo Característico (τ):** Es el tiempo necesario para que la velocidad del paracaidista alcance aproximadamente el 63% de su velocidad terminal. En este caso, $\tau \approx 3.06 \text{ s}$.

- **Velocidad Terminal (v_t):** Es la velocidad constante que el paracaidista alcanza cuando la fuerza de fricción iguala exactamente la fuerza de gravedad, resultando en una aceleración neta cero.
- **Distancia Recorrida:** La expresión general muestra cómo la distancia recorrida incrementa linealmente con el tiempo, pero con una corrección exponencial debido a la aceleración inicial que disminuye conforme se aproxima a la velocidad terminal.
- **Aplicación Práctica:** Estos cálculos son esenciales para entender el comportamiento del paracaidista antes de abrir el paracaídas, permitiendo diseñar sistemas de seguridad que aseguren una caída controlada y segura.

Nota: En situaciones reales, factores adicionales como cambios en la constante de amortiguamiento con la velocidad, variaciones en la masa (por ejemplo, debido a la vestimenta del paracaidista), y condiciones ambientales podrían influir en los resultados. Sin embargo, para este problema, hemos asumido condiciones ideales para simplificar los cálculos.

14. Si la fuerza que actúa sobre una partícula está dada por $F(t) = A - Bt$, donde A y B son constantes positivas, determine la velocidad y la posición de la partícula (movimiento unidimensional sobre el eje X) en términos de A , B , v_0 , x_0 , y m . Grafique la Fuerza, la velocidad y la posición y analice el movimiento (suponga que $x_0 > 0$ y $v_0 = 0$).

Para resolver el **Problema 14**, seguiremos una metodología sistemática que incluye:

1. **Determinación de la velocidad $v(t)$ de la partícula en función del tiempo.**
2. **Determinación de la posición $x(t)$ de la partícula en función del tiempo.**
3. **Representación gráfica de la fuerza $F(t)$, la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.**
4. **Análisis del movimiento basado en las gráficas obtenidas.**

Datos Iniciales

- **Fuerza aplicada:** $F(t) = A - Bt$
 - Donde A y B son constantes positivas.
- **Masa de la partícula:** m
- **Condiciones iniciales:**
 - Posición inicial: $x(0) = x_0 > 0$
 - Velocidad inicial: $v(0) = 0$

1. Determinación de la Velocidad $v(t)$

a) Aplicación de la Segunda Ley de Newton

La **segunda ley de Newton** establece que la fuerza neta aplicada a una partícula es igual al producto de su masa y su aceleración:

$$F(t) = ma(t)$$

Donde:

- $F(t)$ es la fuerza aplicada en el tiempo t .
- $a(t)$ es la aceleración de la partícula en el tiempo t .

Dado que el movimiento es unidimensional a lo largo del eje X , podemos expresar la aceleración como la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Sustituyendo en la segunda ley:

$$A - Bt = m \frac{dv}{dt}$$

b) Resolución de la Ecuación Diferencial para $v(t)$

Reorganizamos la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{m} - \frac{B}{m}t$$

Esta es una **ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden** que se puede integrar directamente.

Integrando ambos lados respecto a t :

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int \left(\frac{A}{m} - \frac{B}{m}t \right) dt$$
$$v(t) = \frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2 + C_1$$

Donde C_1 es la constante de integración.

c) Aplicación de las Condiciones Iniciales para Determinar C_1

Dado que $v(0) = 0$:

$$v(0) = \frac{A}{m} \cdot 0 - \frac{B}{2m} \cdot 0^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Por lo tanto, la **velocidad en función del tiempo** es:

$$v(t) = \frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2$$

2. Determinación de la Posición $x(t)$

a) Relación entre Velocidad y Posición

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Por lo tanto, podemos integrar la expresión de $v(t)$ para obtener $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2$$

b) Integración para Obtener $x(t)$

Integrando ambos lados respecto a t :

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(\frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2 \right) dt$$

$$x(t) = \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{6m}t^3 + C_2$$

Donde C_2 es otra constante de integración.

c) Aplicación de las Condiciones Iniciales para Determinar C_2

Dado que $x(0) = x_0$:

$$x(0) = \frac{A}{2m} \cdot 0^2 - \frac{B}{6m} \cdot 0^3 + C_2 = x_0 \Rightarrow C_2 = x_0$$

Por lo tanto, la **posición en función del tiempo** es:

$$x(t) = \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{6m}t^3 + x_0$$

3. Representación Gráfica

A continuación, se presentan las gráficas de la fuerza $F(t)$, la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$ en función del tiempo t .

a) Gráfica de la Fuerza $F(t) = A - Bt$

Descripción:

- La fuerza $F(t)$ es una función lineal decreciente.
- En $t = 0$, $F(0) = A$.
- La fuerza se reduce de manera constante con el tiempo debido al término $-Bt$.

b) Gráfica de la Velocidad $v(t) = \frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2$

Descripción:

- La velocidad comienza en $v(0) = 0$.
- Incrementa linealmente al inicio debido al término $\frac{A}{m}t$.
- Eventualmente, el término cuadrático $-\frac{B}{2m}t^2$ domina, causando que la velocidad alcance un máximo y luego disminuya.
- La velocidad puede llegar a ser cero nuevamente si $v(t)$ se hace negativa, indicando un cambio de dirección.

c) Gráfica de la Posición $x(t) = \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{6m}t^3 + x_0$

Descripción:

- La posición comienza en $x(0) = x_0$.
- Inicialmente, la posición incrementa de manera cúbica debido a los términos t^2 y t^3 .
- Dependiendo de los valores de A , B y m , la posición puede alcanzar un máximo antes de estabilizarse o continuar incrementándose.

4. Análisis del Movimiento

a) Comportamiento de la Fuerza $F(t)$

- La fuerza $F(t) = A - Bt$ disminuye linealmente con el tiempo.
- Inicialmente, la fuerza es positiva, impulsando a la partícula en la dirección positiva del eje X .
- Eventualmente, la fuerza puede volverse negativa si $t > \frac{A}{B}$, actuando como una fuerza opuesta que desacelera y eventualmente invierte la dirección de la partícula.

b) Comportamiento de la Velocidad $v(t)$

- La velocidad aumenta inicialmente debido a la fuerza positiva.
- Al pasar de $t = \frac{A}{B}$, la fuerza $F(t)$ se vuelve negativa, causando que la velocidad disminuya.
- La velocidad alcanza un máximo en algún tiempo t_{\max} , luego decrece hasta eventualmente convertirse en negativa, indicando un cambio de dirección.
- **Tiempo para alcanzar la velocidad máxima t_{\max} :**

Para encontrar t_{\max} , derivamos $v(t)$ y lo igualamos a cero:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{m} - \frac{B}{m}t = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{A}{B}$$

En $t = \frac{A}{B}$, la velocidad alcanza su máximo:

$$v_{\max} = \frac{A}{m} \cdot \frac{A}{B} - \frac{B}{2m} \left(\frac{A}{B} \right)^2 = \frac{A^2}{mB} - \frac{A^2}{2mB} = \frac{A^2}{2mB}$$

c) Comportamiento de la Posición $x(t)$

- La posición inicial es x_0 .
- La posición aumenta cúbicamente al principio debido a los términos t^2 y t^3 .
- Al pasar de $t = \frac{A}{B}$, donde la fuerza cambia de signo, la partícula comienza a desacelerarse.
- Dependiendo de la magnitud de A , B y m , la posición puede alcanzar un punto máximo y luego disminuir si la velocidad se vuelve negativa.
- En ausencia de fuerzas adicionales, la partícula puede continuar moviéndose indefinidamente en la dirección negativa si la fuerza negativa persiste.

d) Resumen del Movimiento

1. Inicio ($t = 0$):

- Posición: $x(0) = x_0$

- Velocidad: $v(0) = 0$
- Fuerza: $F(0) = A$ (positiva)

2. Aumento de la Velocidad:

- La fuerza positiva impulsa a la partícula, aumentando su velocidad de manera lineal inicialmente.

3. Tiempo de Cambio de Fuerza ($t = \frac{A}{B}$):

- La fuerza $F(t) = 0$, alcanzando su valor mínimo.
- La velocidad alcanza su máximo $v_{\max} = \frac{A^2}{2mB}$.

4. Después de $t = \frac{A}{B}$:

- La fuerza se vuelve negativa, desacelerando a la partícula.
- La velocidad disminuye, eventualmente llegando a cero y volviéndose negativa, indicando un cambio de dirección.

5. Movimiento Posterior:

- La partícula se mueve hacia atrás bajo la influencia de la fuerza negativa.
- Sin fuerzas adicionales, la partícula podría continuar acelerando en la dirección negativa.

5. Conclusión

Hemos determinado las expresiones para la velocidad y la posición de la partícula bajo la influencia de una fuerza $F(t) = A - Bt$ con las condiciones iniciales dadas. Las gráficas y el análisis del movimiento muestran cómo la fuerza afecta el comportamiento dinámico de la partícula, incluyendo el aumento inicial de la velocidad, el cambio de dirección y el movimiento posterior bajo la influencia de una fuerza negativa.

6. Expresiones Resumidas

- Velocidad en función del tiempo:

$$v(t) = \frac{A}{m}t - \frac{B}{2m}t^2$$

- Posición en función del tiempo:

$$x(t) = \frac{A}{2m}t^2 - \frac{B}{6m}t^3 + x_0$$

7. Análisis Adicional: Tiempo y Distancia para Alcanzar la Velocidad Terminal

Aunque la velocidad terminal se alcanza asintóticamente ($t \rightarrow \infty$), podemos considerar tiempos característicos para evaluar el acercamiento a una velocidad cercana a la terminal.

- Velocidad Terminal Teórica:

Dado que $F(t) = A - Bt$, la velocidad terminal no es constante ya que la fuerza no se estabiliza. En este caso, la fuerza decrece linealmente con el tiempo, lo que significa que la aceleración de la partícula también cambia con el tiempo.

Sin embargo, si interpretamos "velocidad terminal" como la velocidad máxima alcanzada antes de que la fuerza empiece a actuar en sentido opuesto, entonces:

$$v_{\max} = \frac{A^2}{2mB}$$

- **Distancia Recorrida hasta $t = \frac{A}{B}$:**

Sustituyendo $t = \frac{A}{B}$ en la expresión de $x(t)$:

$$x\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{A}{2m} \left(\frac{A}{B}\right)^2 - \frac{B}{6m} \left(\frac{A}{B}\right)^3 + x_0 = \frac{A^3}{2mB^2} - \frac{A^3}{6mB^2} + x_0 = \frac{A^3}{3mB^2} + x_0$$

Por lo tanto, la **distancia adicional recorrida** durante el tiempo hasta alcanzar la velocidad máxima es:

$$\Delta x = \frac{A^3}{3mB^2}$$

8. Consideraciones Finales

- **Signo de la Fuerza:**
 - La fuerza $F(t) = A - Bt$ inicialmente es positiva, impulsando a la partícula hacia adelante.
 - Eventualmente, la fuerza se vuelve negativa, actuando como una fuerza de fricción o resistencia que desacelera a la partícula y puede incluso invertir su dirección de movimiento.
- **Comportamiento Asintótico:**
 - A medida que $t \rightarrow \infty$, la fuerza $F(t) \rightarrow -\infty$, lo que sugiere que la aceleración negativa domina indefinidamente. Sin embargo, en la realidad física, otros factores podrían limitar este comportamiento.
- **Control de Parámetros:**
 - Los valores de A , B , y m determinan la rapidez con la que la fuerza cambia y cómo afecta la velocidad y posición de la partícula.

Este análisis proporciona una comprensión completa del comportamiento dinámico de la partícula bajo una fuerza linealmente decreciente en el tiempo, considerando las condiciones iniciales especificadas.

\text{15. Una partícula parte del reposo, desde la posición } x_0 \text{ (} x_0 > 0 \text{), en campo de fuerzas atractivas} \\

\text{dada por} \\

$$F(x) = -\frac{k}{x^3}$$

\text{Donde } k \text{ una constante positiva. Muestre que el tiempo que tarda en llegar al origen es} \\

$$T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$$

Para resolver el **Problema 15**, determinaremos el tiempo T que tarda una partícula de masa m en moverse desde una posición inicial $x_0 > 0$ hasta el origen bajo la influencia de una fuerza atractiva $F(x) = -\frac{k}{x^3}$, donde k es una constante positiva. Se nos indica que la partícula parte del reposo ($v_0 = 0$).

El objetivo es demostrar que:

$$T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$$

1. Planteamiento del Problema

a) Fuerza y Segunda Ley de Newton

La fuerza aplicada sobre la partícula está dada por:

$$F(x) = -\frac{k}{x^3}$$

Según la **segunda ley de Newton**, la fuerza neta es igual al producto de la masa por la aceleración:

$$F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^3}$$

b) Condiciones Iniciales

- Posición inicial: $x(0) = x_0$
 - Velocidad inicial: $v(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$
-

2. Conservación de la Energía Mecánica

Para simplificar la resolución, utilizaremos el **principio de conservación de la energía mecánica**. La energía mecánica total E es la suma de la energía cinética K y la energía potencial U :

$$E = K + U$$

a) Energía Cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Donde $v = \frac{dx}{dt}$ es la velocidad de la partícula.

b) Energía Potencial

La energía potencial $U(x)$ está relacionada con la fuerza mediante:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Integrando para encontrar $U(x)$:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{k}{x^3} \Rightarrow U(x) = -\frac{k}{2x^2} + C$$

Donde C es una constante de integración que podemos determinar usando condiciones iniciales. Definimos $U(x_0) = 0$ para simplificar:

$$0 = -\frac{k}{2x_0^2} + C \Rightarrow C = \frac{k}{2x_0^2}$$

Por lo tanto:

$$U(x) = \frac{k}{2x_0^2} - \frac{k}{2x^2}$$

c) Conservación de la Energía

La energía total se conserva, por lo que:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{k}{2x_0^2} - \frac{k}{2x^2} \right) = \frac{k}{2x_0^2}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2x_0^2} - \frac{k}{2x^2}$$

Multiplicando por $2/m$:

$$v^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Tomando la raíz cuadrada (considerando $v < 0$ ya que la partícula se mueve hacia el origen):

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right)}$$

3. Integración para Determinar el Tiempo T

Para encontrar el tiempo T que tarda la partícula en llegar al origen ($x = 0$), integramos la expresión anterior.

a) Separación de Variables

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2}}}$$

b) Cambio de Variables

Para simplificar la integral, realizamos un cambio de variable. Definamos:

$$u = \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = ux_0 \Rightarrow dx = x_0 du$$

Sustituyendo en la integral:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_1^\infty \frac{x_0 du}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{(ux_0)^2}}}$$

Simplificando dentro de la raíz:

$$\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{(ux_0)^2} = \frac{1}{x_0^2} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = \frac{1 - u^{-2}}{x_0^2} = \frac{u^2 - 1}{u^2 x_0^2}$$

Así,

$$\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2 x_0^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{ux_0}$$

Sustituyendo en la integral:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_1^\infty \frac{x_0 du}{\frac{\sqrt{u^2 - 1}}{ux_0}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_1^\infty \frac{x_0 u x_0}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^2 \int_1^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

c) Evaluación de la Integral

Consideramos la integral:

$$\int_1^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

Realizamos una sustitución trigonométrica:

$$w = \sqrt{u^2 - 1} \Rightarrow u = \sqrt{w^2 + 1} \Rightarrow du = \frac{w}{\sqrt{w^2 + 1}} dw$$

Sin embargo, una forma más directa es reconocer que:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{d}{du} \sqrt{u^2 - 1}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \sqrt{u^2 - 1} + C$$

Evaluando los límites:

$$\int_1^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \left[\sqrt{u^2 - 1} \right]_1^\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{u^2 - 1} - \sqrt{1^2 - 1} = \infty - 0 = \infty$$

Sin embargo, esto indica que la integral diverge, lo que sugiere que el tiempo para llegar exactamente al origen es infinito. Sin embargo, esto contradice la afirmación del problema que sugiere que $T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$.

Revisemos el enfoque.

d) Método Alternativo: Conservación de la Energía y Cambio de Variable

Reescribimos la expresión para $v(t)$:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)}$$

Multipliquemos ambos lados por dt y reacomodamos:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)}}$$

Multiplmando numerador y denominador por xx_0 :

$$dt = \frac{xx_0 dx}{\sqrt{\frac{k}{m} (x_0^2 - x^2)}}$$

Esto no simplifica directamente. Intentemos un cambio de variable que permita resolver la integral.

e) Cambio de Variable: Potencia de x

Podemos intentar una sustitución que simplifique la integral. Observemos que:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} = \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}$$

Entonces,

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}} = -\sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{\sqrt{x_0^2 - x^2}}{xx_0}$$

Rearranging:

$$dt = \frac{xx_0}{\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_0^2 - x^2}} dx = \sqrt{\frac{m}{k}} x x_0 \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

Integrando de x_0 a 0:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{x_0} \frac{x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} dx$$

Realizamos una sustitución trigonométrica:

$$x = x_0 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad dx = x_0 \cos \theta d\theta$$

Cuando $x = 0$, $\theta = 0$,

Cuando $x = x_0$, $\theta = \pi/2$

Sustituyendo:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{\pi/2} \frac{x_0 \sin \theta}{\sqrt{x_0^2 - x_0^2 \sin^2 \theta}} x_0 \cos \theta d\theta$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{\pi/2} \frac{x_0 \sin \theta}{x_0 \cos \theta} x_0 \cos \theta d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^3 [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^3 (-0 + 1) = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^3$$

Sin embargo, esto no coincide con la expresión que se busca demostrar ($T = \sqrt{\frac{m x_0^4}{k}}$). Parece que hay un error en el cambio de variable.

Revisemos el cálculo nuevamente.

Regresemos a la expresión anterior:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{x_0} \frac{x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} dx$$

Hacemos la sustitución:

$$x = x_0 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad dx = x_0 \cos \theta d\theta$$

Reemplazando:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{\pi/2} \frac{x_0 \sin \theta}{\sqrt{x_0^2 (1 - \sin^2 \theta)}} x_0 \cos \theta d\theta$$

Simplificando el denominador:

$$\sqrt{x_0^2 (1 - \sin^2 \theta)} = x_0 \cos \theta$$

Así:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{\pi/2} \frac{x_0 \sin \theta}{x_0 \cos \theta} x_0 \cos \theta d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0 \int_0^{\pi/2} x_0 \sin \theta d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

Calculando la integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1$$

Por lo tanto:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} x_0^2 \times 1 = \sqrt{\frac{m x_0^4}{k}}$$

Finalmente, llegamos a la expresión deseada:

$$T = \sqrt{\frac{m x_0^4}{k}}$$

3. Resumen de la Solución

1. Fuerza Aplicada:

$$F(x) = -\frac{k}{x^3}$$

2. Ecuación de la Segunda Ley de Newton:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{x^3}$$

3. Conservación de la Energía Mecánica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2x_0^2} - \frac{k}{2x^2}$$

4. Expresión de la Velocidad en Función de la Posición:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right)}$$

5. Tiempo para Llegar al Origen:

$$T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$$

4. Interpretación Física

- Fuerza Atractiva $F(x) = -\frac{k}{x^3}$:

- Esta fuerza es proporcional a $1/x^3$ y siempre dirigida hacia el origen ($x = 0$).
- Es más intensa cuando la partícula está cerca del origen y disminuye rápidamente a medida que se aleja.

- Tiempo $T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$:

- Indica que el tiempo para alcanzar el origen aumenta con la masa de la partícula y con la cuarta potencia de la posición inicial.
- Disminuye con el aumento de la constante k , lo que implica que una fuerza más intensa acelera la partícula hacia el origen.

- Dimensiones Correctas:

- $[T] = \sqrt{\frac{kg \cdot m^4}{N \cdot m^{-3}}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^4}{kg \cdot m/s^2 \cdot m^{-3}}} = \sqrt{m^4 \cdot m^3/m \cdot s^2} = \sqrt{m^6/m \cdot s^2} = \sqrt{m^5/s^2}$
- Parece haber una inconsistencia dimensional. Revisemos:

La fuerza $F(x) = -k/x^3$, tiene dimensiones de fuerza $[F] = kg \cdot m/s^2$.

Entonces,

$$[k] = [F] \cdot [x^3] = (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2) \cdot \text{m}^3 = \text{kg} \cdot \text{m}^4/\text{s}^2$$

Entonces,

$$T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^4/\text{s}^2}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$$

Lo cual es correcto.

5. Conclusión

Hemos demostrado que el tiempo T que tarda una partícula de masa m en moverse desde una posición inicial $x_0 > 0$ hasta el origen bajo la influencia de una fuerza atractiva $F(x) = -\frac{k}{x^3}$ es:

$$T = \sqrt{\frac{mx_0^4}{k}}$$

Esta expresión muestra cómo el tiempo depende de la masa de la partícula, la posición inicial y la constante de la fuerza atractiva.

Nota Adicional: Es importante considerar que esta solución asume que la fuerza sigue exactamente la ley $F(x) = -\frac{k}{x^3}$ en todo el recorrido hasta el origen. En situaciones reales, otros factores como resistencias adicionales, limitaciones físicas cerca del origen o efectos relativistas podrían influir en el comportamiento de la partícula.