Universidad Nororiental Privada "GRAN MARISCAL de AYACUCHO"

Rif- J-08023168-6

FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
INVESTIGACIÒN DE OPERCIONES II

GUÍA DE ESTUDIO

Profesor: Luis Hernández Salinas

Investigación de Operaciones II – Profesor Luis Hernández S.

La materia de **Investigación de operaciones II** consiste en formular, analizar e implementar modelos matemáticos aplicando técnicas deterministas y probabilistas a situaciones reales del entorno, interpretando las soluciones obtenidas expresadas en un lenguaje accesible al usuario **para la eficiente toma de decisiones.**

Objetivo Terminal de la Asignatura

Al finalizar el curso el estudiante aplicará las Técnicas de Investigación de Operaciones que mejor le resulten, en la solución de problemas que se derivan de su profesión, en especial en todo lo relacionado con la identificación de la factibilidad, localización, aprovechamiento y optimización de los procesos y sistemas de producción industrial de bienes o servicios.

Competencia Especifica N° 1

Introducción a la Teoría de Decisiones

Objetivos

1. Identificar y aplicar los tres componentes de una decisión.
2. Calcular e interpretar los valores esperados de una tabla de pagos.
3. Explicar e interpretar la pérdida de oportunidad.
4. Describir tres estrategias de la toma de decisiones.
5. Calcular y describir el valor esperado de la información perfecta.
6. Organizar los posibles resultados en un árbol de decisión e interpretar el resultado

Introducción

Al inicio de la década de 1950 se desarrolló una rama de la estadística denominada teoría estadística de decisiones, que se apoya en la probabilidad. Como su nombre lo indica, se enfoca en el proceso de toma de decisiones, e incluye de manera explícita los pagos monetarios que pueden resultar. En contraste, la estadística clásica se enfoca en estimar un parámetro, como la media de la población, determinar un intervalo de confianza o realizar una prueba de hipótesis. La estadística clásica no aborda las consecuencias financieras.

La teoría de las decisiones estadísticas se relaciona con determinar, a partir de un conjunto de alternativas posibles, cuál es la decisión óptima ante un conjunto particular de condiciones. Considere los siguientes ejemplos de problemas de la teoría de toma de decisiones.

- Ford Motor Company debe decidir si compra las cerraduras ensambladas para las puertas de la camioneta Ford F-150 Harley-Davidson modelo 2010 o fabricar y ensamblar las cerraduras en su planta en Sandusky, Ohio. Si las ventas de la camioneta continúan en aumento, sería más rentable fabricar y ensamblar las partes. Pero si se estabilizan o declinan, sería más rentable comprarlas para colocarlas en las puertas ensambladas. ¿Debe Ford fabricar o comprar las cerraduras?

- Banana Republic desarrolló una línea nueva de chamarras (chaquetas) muy populares en las regiones de clima frío del país. Le gustaría comprar tiempo de televisión comercial durante la final de basquetbol de la NCAA. Si los dos equipos que jueguen la final son de áreas cálidas del país, estima que sólo una proporción pequeña de los televidentes estará interesada en las chamarras. Sin embargo, un juego entre dos equipos de regiones con clima frío llegaría a una proporción grande de televidentes que usan chamarras. ¿Debe comprar tiempo de televisión comercial?
- General Electric (GE) considera tres opciones respecto de los precios de refrigeradores para el próximo año. GE puede 1) aumentarlos 5%, 2) incrementarlos 2.5% o 3) dejar los mismos precios. La decisión final tendrá como base las estimaciones de venta y el conocimiento que GE tenga en cuenta de lo que pueden hacer otros fabricantes de refrigeradores.

En cada uno de estos casos, la decisión se caracteriza por las distintas opciones y los diversos factores que no están bajo control de quien toma las decisiones. Por ejemplo, Banana Republic no tiene control sobre los equipos que llegarán a la final del campeonato de basquetbol de la NCAA. Estos casos caracterizan la naturaleza de la toma de decisiones. Es posible hacer una lista de las opciones, determinar sucesos futuros posibles e incluso establecer probabilidades, pero las decisiones se toman ante la incertidumbre

Elementos de una decisión
Objetivo 1. Identificar y aplicar los tres componentes de una decisión

Existen tres elementos que se deben considerar para tomar cualquier decisión: 1) las opciones disponibles; 2) los estados de la naturaleza, que no están bajo el control de quien toma la decisión, y 3) los pagos. Estos conceptos se explican en los siguientes párrafos.

Las opciones, o acciones, son las posibilidades de quien toma las decisiones. Ford puede tomar la decisión de fabricar y ensamblar las cerraduras para puertas en su planta en Sandusky o comprarlas. Para simplificar la presentación, suponga que quien toma las decisiones selecciona un pequeño número de resultados. Sin embargo, con ayuda de las computadoras, las opciones de decisión se amplían a una gran cantidad de posibilidades.

Los estados de la naturaleza son los sucesos futuros incontrolables. El estado de la naturaleza en realidad sucede fuera del control de quien toma la decisión. Ford no sabe si la demanda de su camioneta F-150 permanecerá alta. Banana Republic no puede determinar si equipos de clima cálido o frío jugarán la final de basquetbol de la NCAA.
Es necesario un **pago** para comparar las combinaciones entre la opción de decisión y el estado de la naturaleza. Ford puede estimar que si ensambla las cerraduras de las puertas en su planta en Sandusky y la demanda por las camionetas F-150 baja, el pago será de $40.000. Si, por lo contrario, compra las cerraduras ensambladas y la demanda es alta, el pago estimado es de $22.000.

Los elementos principales de una decisión en condiciones de incertidumbre se identifican de manera esquemática:

Suceso

- Incertidumbre respecto de la demanda futura.
- Estado de la naturaleza (demanda futura) desconocido.
- Quien toma la decisión no tiene control sobre el estado de la naturaleza.

Acción

- Dos o más cursos de acción abiertos para quien toma la decisión.
- Quien toma la decisión debe evaluar opciones.
- Quien toma la decisión selecciona un curso de acción con base en ciertos criterios.
- Según el conjunto de circunstancias, estos criterios pueden ser cuantitativos, psicológicos, sociológicos, etc.

Resultado
Pago
Consecuencia

- Ganancia
- Equilibrio
- Pérdida

En muchos casos es posible mejorar la toma de decisiones si se establecen probabilidades para los estados de la naturaleza, las cuales pueden tener como base datos históricos o estimaciones subjetivas. Ford puede estimar la probabilidad de continúe la demanda alta en 0,70. GE puede estimar que la probabilidad de que Amana y otros fabricantes aumenten los precios de sus refrigeradores será de 0,25.

UN CASO QUE SUPONE LA TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Desde ahora hay que destacar que esta descripción de caso sólo incluye los conceptos fundamentales de la toma de decisiones. El propósito de examinar el caso es explicar el procedimiento lógico. El primer paso es establecer una tabla de ganancias.

Tabla de ganancias

Bob Hill, un inversionista pequeño, tiene $1100 (dólares) que desea invertir, para lo cual estudió varias acciones comunes y redujo sus opciones a tres, que son Kayser Chemicals, Rim Homes y Texas Electronics. Bob estima que, si invirtiera sus $1100 en Kayser Chemicals y a fin del año se desarrolla un mercado fuerte al alza (es decir, que haya un aumento considerable de los precios de las acciones), el valor de sus acciones sería de más del doble, es decir, $2400. Sin embargo, si hubiera un mercado a la baja (es decir, si declinan los precios de las acciones), el valor de sus títulos de Kayser disminuiría a $1000 al final del año. Sus predicciones respecto del valor de su inversión de $1100 en las tres acciones en un mercado al alza y en un mercado a la baja aparecen en la tabla 1, que es la **tabla de ganancias**.

		Estados de la naturaleza	
		Mercado a la alza	Mercado a la baja
	Compra	S_1	S_2
Alternativas de decisión u opciones de decisión.	Kayser Chemicals (A_1)	$2400	$1000
	Rim Homes (A_2)	2200	1100
	Texas Electronics (A_3)	1900	1150

Tabla 1. Tabla de ganancias para tres acciones comunes en dos condiciones del mercado

Las diversas opciones se denominan alternativas de decisión u **opciones de decisión**. En esta situación hay tres. Sea A_1 la compra de acciones de Kayser Chemicals, A_2 la adquisición de títulos de Rim Homes y A_3 la compra de valores de Texas Electronics. Si el mercado sube o baja no está bajo el control de **Bob Hill**. Estos sucesos futuros e incontrolables son los estados de la naturaleza. Sea S_1 el mercado al alza y S_2 el mercado a la baja.

Ganancias esperadas

Objetivo 2. Calcular e interpretar los valores esperados de una tabla de ganancias

Si la tabla de ganancias esperadas es la única información disponible, el inversionista puede tomar una acción conservadora y comprar acciones de Texas Electronics para estar seguro de tener al menos $1150 al final del año (una ganancia pequeña). Sin embargo, una actitud especulativa (o aventurada) podría implicar la compra de acciones de Kayser Chemicals, con la posibilidad de ganar más del doble en su inversión de $1100.

Cualquier decisión de compra de una de las tres acciones comunes, tomada con base sólo en la tabla de ganancias, pasaría por alto los registros históricos de los valores que elaboran Moody's, Value Line y otros servicios de inversión acerca de los movimientos de los precios de acciones comunes en largos periodos. Por ejemplo, un estudio de estos registros reveló que, durante los últimos 10 años, los precios del mercado accionario aumentaron seis veces y sólo declinaron cuatro veces. De acuerdo con esta información, la probabilidad de un aumento en el mercado es de 0,60, y la de una disminución, de 0,40.

Si estas frecuencias históricas son confiables, la tabla la tabla de ganancias esperadas y las estimaciones de las probabilidades (0,60 y 0,40) se combinan para llegar a la **ganancia esperada** de comprar cada una de las acciones. La ganancia esperada también se denomina **valor monetario esperado**, abreviado EMV (por sus siglas en inglés). También se describe como **pago medio**. Los cálculos necesarios para determinar la ganancia esperada del suceso de comprar acciones de Kayser Chemicals aparecen en la tabla 2.

Estado de la naturaleza	Ganancias	Probabilidad del estado de la naturaleza	Valor esperado
Mercado al alza, S_1	$2400	0,60	$1440
Mercado a la baja, S_2	$1000	0,40	$400
			$1840

Tabla 2. Ganancia esperada de la acción de comprar valores de Kayser Chemicals, EMV (A_1)

Para explicar un cálculo del **valor monetario esperado**, observe que, si el inversionista hubiera comprado acciones de Kayser y los precios del mercado declinaran, el valor de las acciones sería de $1000 al final del año (de la tabla 1). Sin embargo, experiencias anteriores revelan que este suceso (una declinación del mercado) sólo ocurrió 40% de las veces. Por lo tanto, en el largo plazo, una declinación del mercado contribuiría con $400 a la ganancia total esperada de las acciones, determinado mediante $1000*0,40. Al sumar los $400 a los $1440 esperados en condiciones de mercado al alza se obtiene $1840, que es la **ganancia esperada total a largo plazo**.
Estos cálculos se resumen de la siguiente manera:

Valor monetario Esperado $$\boldsymbol{EMV(A_i) = \sum\left[P(S_j)\; x\; V(A_i, S_j)\right]} \qquad \text{Fórmula 1}$$

Dónde:

- EMV(A_i) se refiere al valor monetario esperado de la alternativa de decisión i. Puede haber muchas decisiones posibles. Se asigna 1 a la primera decisión, 2 a la segunda, etc. La letra minúscula i representa todo el conjunto de decisiones.
- P(S_j) se refiere a la probabilidad de los estados de la naturaleza. Puede haber un número ilimitado, entonces se asigna j a este resultado posible.
- V(A_i,Sj) se refiere al valor de las diversas ganancias esperadas. Observe que cada ganancia es el resultado de una combinación de una alternativa de decisión y un estado de la naturaleza.

EMV(A_1), el valor monetario esperado de la alternativa de decisión de comprar acciones de Kayser Electronics, se calcula mediante:

$$\boldsymbol{EMV(A_1) = [P(S_1)\; x\; V(A_1, S_1) + P(S_2)\; x\; V(A_1, S_2)] = 0,60 * 2400 + 0,40 * 1000}$$
$$\boldsymbol{= \$1840}$$

Comprar estas acciones es sólo una opción posible. Las ganancias esperadas de los sucesos de comprar acciones de Kayser Chemicals, Rim Homes y Texas Electronics aparecen en la tabla 3. (¡Usted mismo haga la comprobación de esos resultados!)

Compra	Ganancia esperada
Kayser Chemicals	$1840
Rim Homes	$1760
Texas Electronics	$1600

Tabla 3. Ganancias esperadas de tres acciones

Un análisis de las ganancias esperadas de la tabla 3 indica que comprar acciones de Kayser producirá la ganancia máxima esperada. Este resultado se basa en 1) la estimación del inversionista sobre el valor futuro de las acciones y en 2) la experiencia histórica acerca del alza y la baja de los precios accionarios. Cabe destacar que, aunque comprar acciones de Kayser Chemicals representa la mejor acción con el criterio del valor esperado, el inversionista aún puede decidir comprar acciones de **Texas Electronics** **a fin de minimizar el riesgo** de perder parte de su inversión de $1100.

Pérdida de oportunidad

Objetivo 3. Explicar e interpretar la pérdida de oportunidad

Otra forma de llegar a una decisión respecto a qué acciones se deben comprar es determinar la **ganancia que pudiera perderse** debido al estado exacto de la naturaleza (comportamiento del mercado) que no fuera conocido en el momento cuando el inversionista adquiere las acciones. Esta pérdida potencial se denomina **pérdida de oportunidad, o arrepentimiento (deploración)**. **Para ilustrar esta situación**, suponga que el inversionista compró las acciones comunes de Rim Homes y ocurre un **alza** en el mercado. Además, suponga que el valor de sus acciones de Rim Homes aumentó de $1100 a $2200, como se anticipó. Pero si el inversionista hubiera comprado acciones de Kayser Chemicals y aumentaran los valores del mercado, el valor de sus acciones de Kayser Chemicals sería $2400 (de la tabla 1). Por lo tanto, el inversionista perdió la oportunidad de obtener una ganancia adicional de **$200** al comprar acciones de Rim Homes en lugar de acciones de Kayser Chemicals. En otras palabras, **los $200 representan la pérdida de oportunidad** por no conocer el estado de la naturaleza correcto. Si los precios del mercado aumentan, el inversionista se arrepentiría de comprar acciones de Rim Homes. Sin embargo, si hubiese comprado acciones de Kayser Chemicals y los precios del mercado hubieran aumentado, no se habría arrepentido; es decir, no habría pérdida de oportunidad.

Las pérdidas de oportunidad de este ejemplo se dan en la tabla 4. Cada cantidad es resultado (pérdida de oportunidad) de una combinación particular de acciones y un estado de la naturaleza, es decir, la compra de acciones y la reacción del mercado.

Observe que las acciones de Kayser Chemicals serían una buena inversión en un mercado al alza, Texas Electronics sería la mejor compra en un mercado a la baja, mientras que Rim Homes, en cierto modo, representa un punto intermedio.

	Pérdida de oportunidad	
Compra	Mercado al alza	Mercado a la baja
Kayser Chemicals	$0	$150
Rim Homes	$200	**$50**
Texas Electronics	**$500**	$0

Tabla 4. Pérdidas de oportunidad para diversas combinaciones de compra de acciones y movimientos del mercado

Pérdida de oportunidad esperada

Las pérdidas de oportunidad de la tabla 4 pasan por alto la experiencia histórica de los movimientos del mercado. Recuerde que la probabilidad de un mercado al alza es 0,60, y la de un mercado a la baja, 0,40. Estas probabilidades y las pérdidas de oportunidad se combinan para determinar la pérdida de oportunidad esperada. En la tabla 5 se presentan los cálculos de la decisión de comprar acciones de Rim Homes. La pérdida de oportunidad esperada es de $140.

Estado de la naturaleza	Pérdida de oportunidad	Probabilidad del estado de la naturaleza	Pérdida esperada de oportunidad
Mercado al alza, S1	$200	0,60	$120
Mercado a la baja, S2	$50	0,40	$20
			$140

Tabla 5. Pérdida de oportunidad esperada del suceso de comprar acciones de Rim Homes

Si interpreta lo anterior (tabla 5), la pérdida de oportunidad esperada de $140 significa, en el largo plazo, que el inversionista perdería la oportunidad de obtener una ganancia adicional de $140 por comprar acciones de **Rim Homes**. Incurriría en esta pérdida esperada debido a que no predijo con precisión la tendencia del mercado de valores. En un mercado al alza, ganaría $200 adicionales si comprara acciones comunes de Kayser Chemicals, pero en un mercado a la baja, ganaría $50 adicionales si compra acciones de Texas Electronics. Cuando se ponderan con la probabilidad del suceso, la pérdida de oportunidad esperada es de **$140**.
Los cálculos se resumen en la ecuación siguiente:
Pérdida de Oportunidad Esperada

$$\boldsymbol{EOL(A_i) = \sum\left[P(S_j)xR(A_i, S_j)\right]}$$

Dónde:

- EOL (Ai) se refiere a la pérdida de oportunidad esperada con una decisión alternativa esperada.
- P (Sj) se refiere a la probabilidad asociada con los estados de la naturaleza j.
- R (Ai, Sj) se refiere al arrepentimiento o pérdida de una combinación particular de un estado de la naturaleza y una alternativa de la decisión.

EOL (A_2), el arrepentimiento o pérdida de oportunidad esperada, al seleccionar Rim Homes, se calcula como sigue:

$$\boldsymbol{EOL(A_i) = \sum\left[P(S_j)xR(A_i, S_j)\right] = [P(S_1)xR(A_2, S_1)] + [P(S_2)xr(A_2, S_2)]}$$

$$EOL(A_2) = 0{,}60(\$200) + 0{,}40(\$50) = \$140$$

Las pérdidas de oportunidad esperada de las tres alternativas de la decisión se dan en la tabla 6. La pérdida de oportunidad esperada menor es $60 ($200-$140), que significa que, en promedio, el inversionista se arrepentiría menos si compra acciones de Kayser Chemicals.

Compra	Pérdida esperada de oportunidad
Kayser Chemicals	\$60
Rim Homes	\$140
Texas Electronics	\$300

Tabla 6. Pérdidas de oportunidad esperada de las tres acciones

A propósito, observe que la decisión de comprar acciones de Kayser Chemicals, debido a que ofrece la pérdida de oportunidad esperada menor, refuerza la decisión tomada con anterioridad: al final, las acciones de Kayser darían como resultado la ganancia esperada mayor (\$1840). **Estos dos enfoques (pérdida de oportunidad esperada menor y ganancia esperada mayor) siempre conducirán a la misma decisión con respecto al curso de acción a seguirse**.

Estrategias maxi-min, maxi-max y mini-max de arrepentimiento

Objetivo 4. Describe tres estrategias de la toma de decisiones

Varios asesores financieros consideran demasiado riesgosa la compra de acciones de Kayser Chemicals. Hacen notar que la ganancia esperada quizá no sea de \$1840 (tabla 2), sino de sólo \$1000 (de la tabla 1). Con el argumento de que el mercado de valores es muy impredecible, recomiendan al inversionista tomar una posición más conservadora y comprar acciones de Texas Electronics. A esto se le denomina **estrategia maxi-min**: maximiza la ganancia mínima. Con base en la tabla de ganancias esperadas (tabla 1), su razonamiento es que el inversionista aseguraría al menos una retribución de \$1150, es decir, una ganancia pequeña. Quienes adoptan esta estrategia un tanto pesimista a veces se les llama **maximiners (maxiministas)**.

En el otro extremo se encuentran los optimistas o **maximaxers**, quienes seleccionarán las acciones que maximicen la ganancia máxima. Si se siguiera su **estrategia maxi-max**, el inversionista compraría acciones de Kayser Chemicals. Estos optimistas destacan la posibilidad de vender las acciones en el futuro por \$2400 en vez de sólo los \$1150 que defienden los maximiners.

Otra fórmula es la **estrategia mini-max de arrepentimiento**. Los asesores que defienden este enfoque examinarían las pérdidas de oportunidad en la tabla 4 y seleccionarían las acciones que minimicen el arrepentimiento máximo. En este ejemplo serían las acciones de Kayser Chemicals, con una pérdida de oportunidad máxima de \$150. Recuerde que usted quiere evitar pérdidas de oportunidad. Los arrepentimientos máximos fueron \$200 con Rim Homes y \$500 con Texas Electronics.

Valor de la información perfecta

Objetivo 5. Calcular y describir el valor esperado de la información perfecta

Antes de decidir comprar acciones, el inversionista tal vez quiera considerar maneras para predecir el movimiento del mercado de valores. Si supiera con precisión qué sucedería en el mercado, podría maximizar las ganancias al comprar siempre las acciones adecuadas. La pregunta es: **¿cuánto vale esta información anticipada?** El valor de esta información se denomina **valor esperado de la información perfecta**, que se escribe **EVPI** (de expected value of perfect information). En este ejemplo, significaría que Bob Hill sabría de antemano (conocimiento anticipado) si el mercado de valores estaría al alza o a la baja en un futuro cercano.

Un analista en una empresa grande de corretaje, conocido de Bob, le dijo que estaría dispuesto a proporcionarle información sobre lo que considera importante para predecir alzas y bajas del mercado. **Desde luego que esta información causaría honorarios**, aún indeterminados, sin importar si el inversionista la usa o no. ¿Cuál es la cantidad máxima que Bob debe pagar por este servicio especial? ¿$10? ¿$100? ¿$500?

El valor de la información del analista es, en esencia, el valor esperado de la información perfecta, debido a que el inversionista entonces estaría seguro de comprar las acciones más rentables.

VALOR DE LA INFORMACIÓN PERFECTA

El valor de la información se defina como la diferencia entre la ganancia esperada máxima bajo condiciones de certeza y la ganancia esperada máxima bajo condiciones de incertidumbre.

En el ejemplo anterior, este valor es la diferencia entre el valor máximo alcanzado por las acciones al final del año en condiciones de certeza y el valor asociado con la decisión óptima con el criterio del valor esperado.

Desde un punto de vista práctico, el valor esperado máximo en condiciones de certeza significa que el inversionista compraría acciones de Kayser Chemicals si se predice un mercado al alza, y de Texas Electronics si fuera inminente un mercado a la baja. La ganancia esperada a largo plazo en condiciones de certeza es $1900. (Consulte la tabla 7.)

Estados de la naturaleza	Decisión Comprar acciones de:	Ganancia	Probabilidad del estado de la naturaleza	Ganancia esperada
Mercado al alza, S_1	Kayser	$2400	0,60	$1140
Mercado a la Baja, S_2	Texas Electronics	$1150	0,40	$460
				$1900

Tabla 7. Cálculos de la ganancia esperada en condiciones de certidumbre

Recuerde que si no conociera el comportamiento actual del mercado bursátil (condiciones de incertidumbre), las acciones que debería comprar serían las de Kayser Chemicals; su valor esperado al final del periodo se calculó en $1840 (de la tabla 3). Por lo tanto, el valor de la información perfecta es de $60, determinado mediante:

$1900	Valor esperado de las acciones compradas en condiciones de certidumbre
-$1840	Valor esperado de la compra (Kayser) en condiciones de incertidumbre
$60	Valor esperado de la información perfecta

En general, el valor esperado de la información perfecta se calcula como sigue:

VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA (EVPI)

$$\begin{aligned}\mathbf{EVPI} = \mathbf{Valor\ esperado\ en\ condiciones\ de\ certeza} \\ - \mathbf{valor\ esperado\ en\ condiciones\ de\ incertidumbre}\end{aligned}$$

La información del analista financiero valdría hasta $60. En esencia, el analista “garantizaría” un precio de venta en promedio de $1900, y si el analista pidiera $40 por la información, el inversionista tendría seguridad de una ganancia de $1860, calculada por $1900 - $40. Por ello, valdría la pena que el inversionista aceptara esta tarifa ($40) debido a que el resultado esperado ($1860) sería mayor que el valor esperado en condiciones de incertidumbre ($1 840). Sin embargo, si su conocido pidiera honorarios de $100 por su servicio, el inversionista sólo obtendría $1800 en promedio, determinados mediante $1900 - $100. Es lógico que el servicio no valiera $100, porque el inversionista esperaría $1840 en promedio sin aceptar este acuerdo económico. Observe que el valor esperado de la información perfecta ($60) es el mismo que el mínimo de los arrepentimientos esperados (tabla 6). Eso no sucede al azar.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Recuérdese que en el problema anterior de selección de acciones financieras el conjunto de las probabilidades aplicadas a los valores de ganancias esperadas, se obtuvo de la experiencia histórica en condiciones similares del mercado. Puede objetarse, sin embargo, que el comportamiento futuro del mercado puede diferir de la experiencia. A pesar de estas diferencias, las ganancias esperadas no son demasiado sensibles a cualquier cambio dentro de un alcance aceptable. Como ejemplo, supóngase que el hermano del inversionista cree que en lugar de un 60% de posibilidad de alza en el mercado, y un 40% de posibilidad de baja, lo cierto es lo contrario; esto es, hay una probabilidad de 0,40 de alza de mercado y una probabilidad de 0,60 de baja. Además, el primo del inversionista cree que la probabilidad de alza del mercado es de 0,50, y la de baja, 0,50. En la tabla 8 se muestra una comparación de las ganancias esperadas originales (columna izquierda), las ganancias esperadas para el conjunto de probabilidades sugeridas por el hermano del inversionista (columna central), y las citadas por el primo (columna derecha). La decisión es la misma en los tres casos: comprar acciones de Kayser Chemicals.

	Ganancias esperadas		
Compra	Experiencia histórica (probabilidad de 0,60 para alza, 0,40 para baja)	Estimación del hermano (probabilidad de 0,40 para alza, 0,60 para baja)	Estimación del primo (probabilidad de 0,50 para alza, 0,50 para baja)
Kayser Chemicals	$1840	$1560	$1700
Rim Homes	1760	1540	1650
Texas Electronics	1600	1450	1525

Tabla 8. Ganancias esperadas para tres conjuntos de probabilidades

Una comparación de los tres conjuntos de ganancias esperadas en la tabla 8 revela que la mejor alternativa sigue igual: comprar en Kayser Chemicals. Como puede esperarse, hay algunas diferencias en los valores esperados futuros de cada compra de acciones.
En realidad, si hubiera cambios notables en las probabilidades asignadas, los valores esperados y la decisión óptima podrían cambiar. Como ejemplo, supóngase que el pronóstico de alza del mercado fue 0,20, y para la baja de 0,80. Las ganancias esperadas serían como se muestra en la tabla 9. A largo plazo, la mejor alternativa sería comprar acciones de Rim Homes

Compra	Ganancia esperada
Kayser Chemicals	\$1280
Rim Homes	\$1320
Texas Electronics	\$1300

Tabla 9. Valores esperados por la compra de las tres clases de acciones

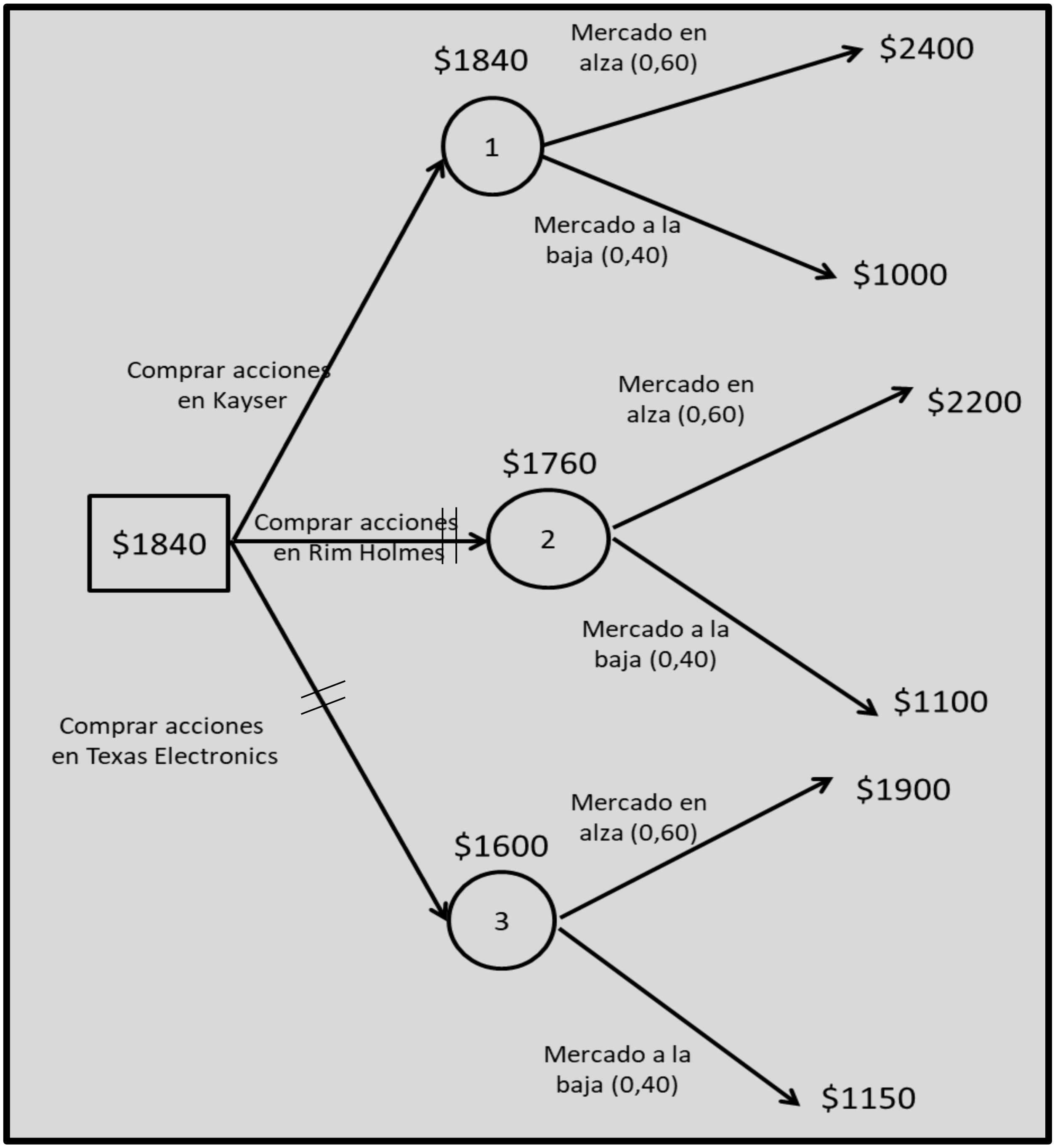
ARBOLES DE DECISIÓN

Objetivo 6. Organizar los posibles resultados en un árbol de decisión e interpretar el resultado

Una herramienta analítica (Diagrama en Árbol) que se presentó en Estadística I también útil para estudiar una situación de decisión es **el árbol de decisión (Diagrama de Árbol)**, una representación de todos los cursos de acción y resultados consecuentes posibles. Se indica en un cuadro el punto en el cual se debe tomar una decisión, y las ramas señalan las opciones que se deben considerar. Con referencia a la gráfica 1, a la izquierda aparece el cuadro con tres ramas, que representan los sucesos de comprar acciones de Kayser Chemicals, Rim Homes y Texas Electronics.

Los tres nodos, o círculos, numerados 1, 2 y 3, representan la ganancia esperada de la compra de las tres acciones. Las ramas que salen hacia la derecha de los nodos indican los eventos aleatorios (mercado al alza o a la baja) y sus probabilidades correspondientes entre paréntesis. Los números en los extremos finales de las ramas son los valores futuros estimados (Tabla 1) al terminar el proceso de decisión en estos puntos. A esto algunas veces se le llama **ganancia condicional**, para denotar que la ganancia esperada depende de una elección particular de acción y de un resultado particular de la elección. Por lo tanto, si el inversionista compra acciones de Rim Homes y el mercado sube, el valor condicional de las acciones sería de \$2200.

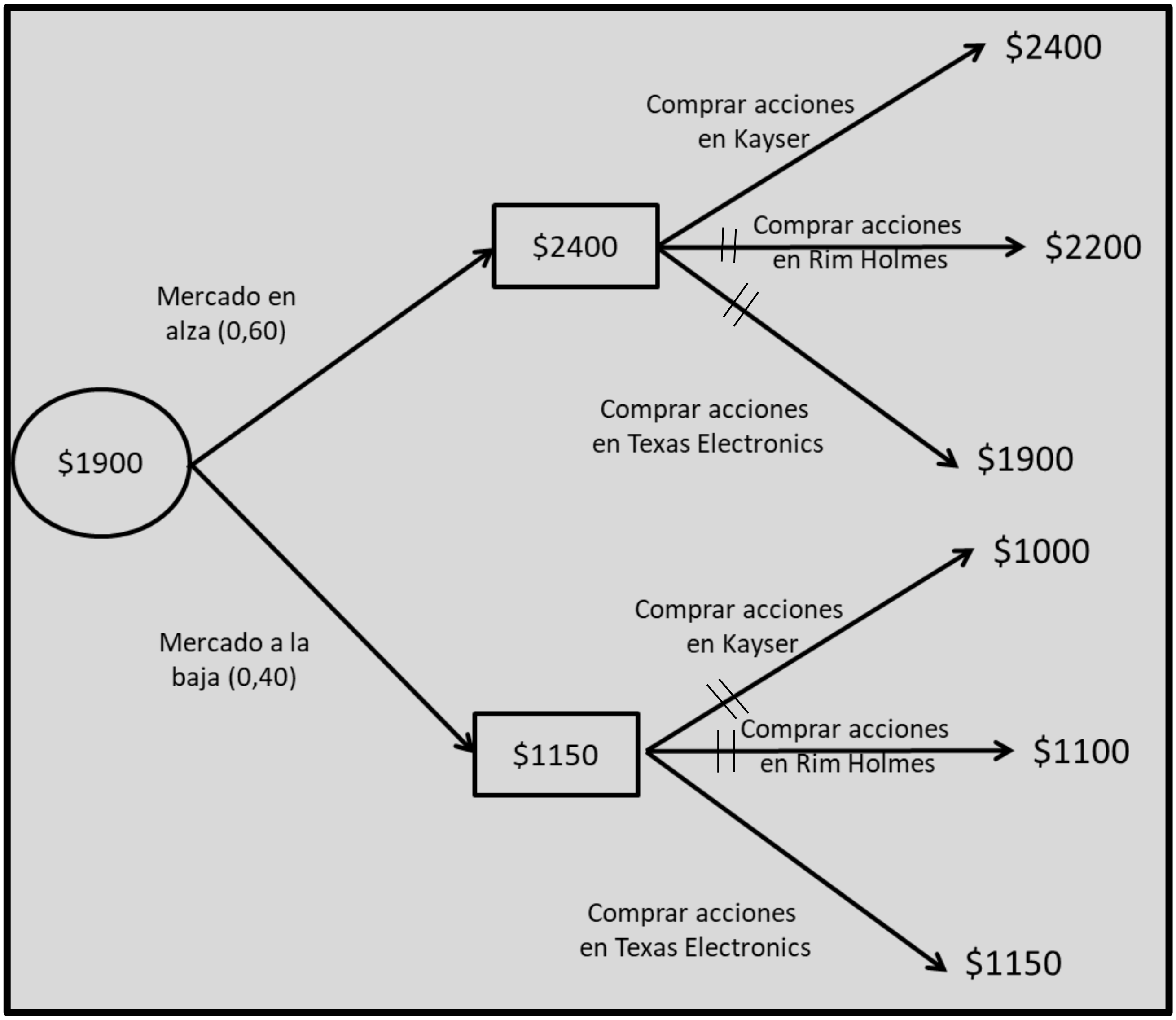
Con el árbol de decisiones se aprecia la mejor estrategia de decisión mediante lo que se conoce como **inducción inversa**. Por ejemplo, suponga que el inversionista considera comprar acciones de Texas Electronics. A partir del punto inferior derecho de la gráfica 1, con la ganancia esperada de un mercado al alza (\$1900) contra un mercado a la baja (\$1150) y hacia atrás (a la izquierda), se aplican las probabilidades correspondientes para dar una ganancia esperada de \$1600 [determinado mediante [0,60 (\$1900) + 0,40 (\$1150)]. El inversionista marcaría el valor esperado de \$1600 arriba del nodo 3 encerrado con un círculo, como aparece en la gráfica 1. De manera similar, determinaría los valores esperados de Rim Homes y Kayser Electronics.



Gráfica 1. Árbol de decisiones del inversionista

Si el inversionista quiere maximizar el valor esperado de su compra de acciones, preferiría $1840 a $1740 o $1600. Al continuar a la izquierda hacia el cuadro, trazaría una barra doble “||” a través de las ramas que representan las dos opciones que rechazó (los números 2 y 3, que representan Rim Homes y Texas Electronics). Es obvio que la rama sin la marca “||” que conduce al cuadro es el mejor suceso, que es comprar acciones de Kayser Chemicals.

El valor esperado en condiciones de certidumbre también se representa por medio de un análisis del árbol de decisión (vea la gráfica 2).



Gráfica 2. Árbol de decisión con información perfecta

Recuerde que, en condiciones de certidumbre, el inversionista sabría antes de comprar las acciones si el mercado de valores subirá o bajará. Entonces compraría acciones de Kayser Chemicals en un mercado al alza y de Texas Electronics en un mercado a la baja, y la ganancia esperada sería $1900, que se obtiene de 2400(0,60) + 1150(0,40). Una vez más, se utiliza la inducción inversa para llegar a la ganancia esperada de $1900.

La diferencia monetaria con base en la información perfecta de la gráfica 2 y la decisión basada en la información perfecta de la gráfica 1 es de $60, cantidad determinada mediante la resta $1900 - $1840. Recuerde que $60 es el valor esperado de la información perfecta.

El análisis del árbol de decisión ofrece otra forma de realizar los cálculos que se presentaron antes en este capítulo. Algunos administradores consideran útiles estos bocetos gráficos para seguir la lógica de decisión.

Resumen de esta competencia

I. La teoría de las decisiones estadísticas se enfoca en la toma de decisiones ante un conjunto de opciones.
   A. Los diversos cursos de acción se denominan acciones o alternativas.
   B. Los sucesos futuros incontrolables se denominan estados de la naturaleza. En general, las probabilidades se asignan a los estados de la naturaleza.
   C. La consecuencia de una alternativa de decisión particular y del estado de la naturaleza se denomina ganancia o pago.
   D. Todas las combinaciones posibles de las alternativas de decisión y de los estados de la naturaleza generan una tabla de ganancias o pagos.

II. Existen varios criterios para seleccionar la mejor alternativa de decisión.
   A. En el criterio del valor monetario esperado (EMV), se calcula el valor esperado de cada alternativa de decisión y se selecciona el óptimo (el mayor si son ganancias, el menor si son costos).
   B. Se puede elaborar una tabla de pérdida de oportunidad.
      1. Una tabla de pérdida de oportunidad se elabora con la diferencia entre la decisión óptima de cada estado de la naturaleza y las demás alternativas de decisión.
      2. La diferencia entre la decisión óptima y cualquier otra decisión es la pérdida de oportunidad o arrepentimiento a causa de una decisión distinta a la óptima.
      3. La pérdida de oportunidad esperada (EOL) es similar al valor monetario esperado. La pérdida de oportunidad se combina con las probabilidades de los diversos estados de la naturaleza en cada alternativa de decisión para determinar la pérdida de oportunidad esperada.
   C. A la estrategia de maximizar la ganancia mínima se le conoce como maxi-min.
   D. A la estrategia de maximizar la ganancia máxima se le denomina maxi-max.
   E. La estrategia que minimiza la pérdida máxima se designa arrepentimiento mini-max.

III. El valor esperado de la información perfecta (EVPI) es la diferencia entre el mejor pago esperado en condiciones de certidumbre y el mejor pago esperado en condiciones de incertidumbre.

IV. El análisis de sensibilidad examina los efectos de varias probabilidades de los estados de la naturaleza sobre los valores esperados.

V. Los árboles de decisión son útiles para estructurar las diversas opciones. Son representaciones de los cursos de acción y estados de la naturaleza posibles.

OTROS CRITERIOS DE TOMA DE DECISIONES (Material Complementario)
LA TOMA DE DECISIONES

El objetivo de la Toma de Decisiones es:

- Describir el proceso de toma de decisiones.
- Interpretar el marco mental en el que estas decisiones se toman.
- Utilizar métodos de valoración de los resultados de cada decisión en función de las condiciones en las que éstas se toman.

La toma de decisiones es una actividad inherente a la gestión de la empresa. De hecho, no es difícil encontrar profesionales que aseguren que "dirigir es decidir continuamente". Decidir es elegir entre diversos cursos de acción y, en la mayor parte de los casos esta decisión conlleva aparejadas otras muchas de las cuales van a depender los resultados finales de la actividad, grupo, proyecto, estrategia o empresa que acometamos.

Con este artículo, para el que no necesitas conocimientos previos, conocerás mejor el proceso de toma de decisiones y, lo que es más importante, conocerás y aprenderás a utilizar los métodos más sencillos de valoración de alternativas. El artículo está estructurado como sigue: en primer lugar, definimos el proceso de toma de decisiones desde la perspectiva de Simon. A continuación, se interpretan los diferentes grados de certeza que enmarcan la toma de decisiones. Por último, se proporcionan criterios para valorar las consecuencias económicas de cada alternativa considerada.

El proceso de toma de decisiones.

A la toma de decisiones se le ha dedicado una gran cantidad de trabajos y estudios siendo el más representativo, por su trascendencia, el trabajo de Herbert Simon, Premio Nobel de Economía. Para el profesor Simon, el proceso de toma de decisiones presenta cuatro etapas:

1. Identificación del problema o diagnóstico: aparece cuando hay una discrepancia entre una situación personal o empresarial que se desea y la que realmente se tiene, o entre lo que se podría obtener y lo que se ha obtenido. En cualquier caso, en esta fase lo importante es la información, ya que de la calidad de la información que dispongamos dependerá la calidad de la decisión que podamos tomar.
2. La elaboración y evaluación de alternativas es la segunda fase de la toma de decisiones. Implica no sólo creatividad para el diseño de los posibles cursos de acción a seguir, sino también la capacidad para evaluar las consecuencias de cada uno de los cursos de acción a seguir y la valoración conjunta de la evolución de los factores que les afectan.
3. La fase de elección supone de hecho la elección de una de los cursos de elección propuestos siendo la definición de los criterios adecuados su aspecto más relevante.
4. Por último, la fase de implementación y control de la decisión permite verificar si la alternativa elegida ha solucionado o no el problema y corregir esta situación en su caso.

El marco mental en la toma de decisiones

El proceso de decisión es un proceso mental de racionalidad limitada. Para que el proceso de decisión sea racional es necesario que se den dos condiciones: que se disponga de información perfecta, lo que supone disponer de toda la información relevante en todo momento en las mismas condiciones que la competencia, y, quizá más importante, racionalidad ilimitada, que nos permita valorar correctamente todas las alternativas y elegir la óptima.

Lamentablemente, estas condiciones rara vez se dan; en ocasiones se puede acudir a situaciones próximas a la racionalidad ilimitada, cuando el número de variables son pocas y están controladas, lo cual nos permite determinar la solución óptima. No obstante, lo normal en la vida real son más bien situaciones en las que no se dispone de toda la información relevante y, sobre todo, no es posible ni conocer todas las variables implicadas y sus interacciones ni definir correctamente las consecuencias de cada curso de acción. En estas situaciones el decisor debe abandonar la actitud optimizadora y adoptar una actitud satisfactoria, adoptando la primera solución de entre las alternativas posibles que satisface sus intereses, aún consciente de no estar tomando la decisión óptima. Muy probablemente el coste de evaluar el resto de alternativas hasta encontrar la óptima supere los beneficios adicionales que se pueden obtener de ella.

Además de lo aquí expuesto, otros condicionantes a la toma de decisiones actúan limitando los cursos de acción más allá de la racionalidad limitada del decisor; en muchas ocasiones los criterios políticos y estratégicos de la decisión, así como los personales de quién tiene que tomar la decisión juegan un papel más relevante que los estrictamente económicos de forma que los criterios para priorizar las alternativas no siempre son coincidentes.

Certeza, riesgo e incertidumbre. Criterios para la toma de decisiones.

En el momento de diseñar las decisiones, pero sobre todo a la hora de establecer criterios con los que adoptar un curso de acción, tres son las situaciones que se le pueden presentar al decisor:

- Certeza: Esta es la situación ideal para la toma de decisiones. Se tiene la total seguridad sobre lo que va a ocurrir en el futuro. Desde un punto de vista estrictamente económico se trata de elegir el curso de acción que va a proporcionar los mejores resultados de acuerdo con el criterio establecido (beneficios, rentabilidad, cifra de ventas…). No es, sin embargo, una situación habitual.
- Riesgo: Esta situación se aproxima bastante más que la anterior a las situaciones habituales en la empresa. El decisor, bien porque se ha procurado información, bien por su experiencia, puede asignar probabilidades a los estados de la naturaleza de los que depende la efectividad de su decisión. De esta forma, puede valorar, al menos asociándolos a una probabilidad, los resultados promedio de sus decisiones. Por supuesto, que eso sea suficiente para tomar una decisión depende de los criterios que se definan para tomarla.
- Incertidumbre: Al igual que con el riesgo, los decisores en muchas ocasiones se enfrentan a decisiones en las que no pueden efectuar suposiciones sobre las condiciones futuras en las que se desarrollarán los cursos de acción elegidos. Ni siquiera es posible asignar probabilidades razonables a dichos sucesos futuros. En estos casos la decisión, además de

por criterios políticos y económicos, se ve orientada por la orientación psicológica del decisor.

Independientemente de la situación a la que nos enfrentemos, lo que es cierto es que para todo conjunto de decisiones a tomar y sucesos futuros de los que depende el resultado de la decisión es posible definir una matriz de resultados (como la que se presenta a continuación, donde R_{ij} es el resultado de aplicar la alternativa i (A_i) y presentarse posteriormente el suceso j (S_j).

	Suceso 1	Suceso 2	Suceso 3	…	Suceso n
Alternativa 1	R11	R12	R13	…	R1n
Alternativa 2	R21	R22	R23	…	R2n
Alternativa 3	R31	R32	R33	…	R3n
…	…	…	…	…	…
Alternativa S	Rs1	Rs2	Rs3	…	Rsn

Tabla 1: Matriz de Resultados

Para ilustrar el resto de la explicación, utilizaremos el siguiente ejemplo.

Suponga que debe tomar una decisión sobre un nuevo modelo de equipo industrial a instalar en su organización. En concreto debe elegir entre tres equipos de distinta capacidad, funciones, facilidad de uso y precio. Usted, como responsable de la decisión final sabe que el rendimiento del equipo depende de la adaptación de los operarios a los mismos, ya que su instalación supone un cambio en los procesos de trabajo y el desarrollo de nuevas competencias. Usted puede estimar razonablemente el beneficio que dicho equipo proporcionará en base a la adaptación de los operarios, de forma que puede construir la siguiente matriz de decisión:

	No se adaptan	Se adaptan bien	Se adaptan muy bien
Alternativa 1	650	550	900
Alternativa 2	1000	650	400
Alternativa 3	500	800	950

Tabla 2: Matriz de resultados

Criterio de decisión en situaciones de certeza.

Si usted sabe qué situación se va a presentar en el futuro elegirá la alternativa que proporciona el máximo resultado para ese suceso futuro. En nuestro ejemplo, si usted sabe está completamente seguro que los operarios se adaptarán muy bien, elegirá la alternativa 3, que da el mayor resultado. Sin embargo, si piensa que no se van a adaptar y sabe que ello ocurrirá, elegiría la alternativa 2, pues en esa situación es la que da mejores resultados.

Puesto que sabemos que va a ocurrir, el criterio de decisión es elegir la alternativa que proporciona el mejor resultado.

Criterio de decisiones en situación de riesgo.

En este caso, como hemos comentado es posible asignar probabilidades (Pj) a los estados de la naturaleza o sucesos de los que depende la efectividad de la decisión. En este caso, podemos determinar el Valor Monetario Esperado (EMV) de cada alternativa como media ponderada de los posibles resultados. En nuestro caso si las probabilidades asignadas a los distintos sucesos fuesen 0.1, 0.4, 0.5 podemos determinar el EMV de cada alternativa como:

$$\boldsymbol{EMV(A_i)} = \sum [\boldsymbol{R(ij)\ x\ Pj}] \qquad \text{Fórmula 1}$$

	No se adaptan	Se adaptan bien	Se adaptan muy bien	EMV
Probabilidad	0,1	0,4	0,5	
Alternativa 1	650	550	900	735
Alternativa 2	1000	650	400	560
Alternativa 3	500	800	950	845

Tabla 3: Matriz de resultados para el criterio de EMV

Decantándonos en este caso por la alternativa 3 que es la que, por término medio proporciona un mayor resultado en función de las probabilidades que hemos asignado a cada situación.

Criterios de decisión en situaciones de incertidumbre.

Como ya hemos señalado, además de por diferentes causas como estratégicas, políticas o económicas, las decisiones pueden estar influidas por la orientación psicológica del decisor, influyendo cuestiones tales como la forma en la que asigna probabilidades a los sucesos, su optimismo o pesimismo respecto a los resultados de sus decisiones o su aversión al riesgo entre otras causas. Los criterios que se presentan a continuación (Criterio de Laplace, Criterio de Wald, Criterio Optimista, Criterio de Hurwicz, Criterio de Savage) abordan las situaciones especificadas en este párrafo y, a salvo de otras cuestiones, orientan la toma de decisiones desde una perspectiva estricta de resultados esperados.

1. Criterio de Laplace

El criterio está basado en el principio de razón insuficiente; como no podemos suponer una mayor probabilidad de ocurrencia a un suceso futuro que a otro, podemos considerar que todos los sucesos futuros son equiprobables. Así, cada suceso posible tiene una probabilidad asignada de 1/n para n sucesos posibles. A partir de aquí, la decisión a tomar será aquella que proporcione un mayor valor esperado según [Formula 2].

$$Valor\ esperado\ A_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{ij} \qquad Formula\ 2$$

Centrándonos en nuestro problema, si admitimos la equiprobabilidad de cada una de las situaciones posibles, la probabilidad de cada una será 1/3 y tendrá un valor esperado resultado de aplicar la expresión anterior. Así para la alternativa 1 será:

$$Valor\ esperado\ A_1 = \frac{1}{3} * 650 + \frac{1}{3} * 550 + \frac{1}{3} * 900 = 700$$

Operando igual con A2 y A3 podemos obtener la siguiente tabla de resultados:

Alternativa	Valor esperado de la decisión
A1	700
A2	683,3
A3	750

Tabla 4: Resultados para el criterio de Laplace

Por lo que el decisor debería elegir la alternativa 3 que es la que proporciona un mayor valor esperado ya que estamos operando con beneficios. Nótese que elegir esta alternativa no supone unos beneficios de 700. Los beneficios esperados para esta alternativa serán 650, 550 o 900 (siempre y cuando las estimaciones del decisor sean correctas en cuanto al conjunto de resultados).

Si operásemos con costes, obviamente elegiríamos aquella alternativa que resultase un coste esperado menor.

2. Criterio de Wald (maximin)

Es el criterio conservador ya que trata de obtener lo mejor en las peores condiciones posibles. Se le conoce como criterio pesimista ya que razona sobre la peor situación que se le puede presentar al decisor una vez elegida una alternativa.

El criterio establece que, elegida una alternativa, se presentará el peor resultado posible, de forma que el decisor debería elegir el mejor de estos resultados según [Formula 3]

$$Valor\ esperado\ A_i = Max\{minimo\ R_{ij}\} \quad Formula\ 3$$

En nuestro ejemplo, si atendemos a la matriz de resultados, corresponden para cada una de las alternativas los siguientes peores resultados:

Alternativa	Valor esperado de la decisión
A1	550
A2	400
A3	500

Tabla 5: Resultados para el criterio de Wald

Eligiéndose en este caso la Alternativa 1.

3. Criterio Optimista (maximax)

El criterio optimista será el complementario a éste. Según este criterio, si las cosas pueden ir bien, no hay motivo para que ello no sea así. El decisor que sigue este criterio identifica cada alternativa con el mejor resultado posible optando por la alternativa que corresponda con dicho valor. El criterio optimista a seguir será como se indica [Formula 4]:

$$Valor\ esperado\ A_i = Max\{maximo\ \ R_{ij}\} \quad Formula\ 4$$

Si aplicamos dicho criterio a nuestra matriz de resultados, optaríamos por la alternativa 2, que proporcionaría unos beneficios de 1000.

Alternativa	Valor esperado de la decisión
A1	900
A2	1000
A3	950

Tabla 6: Resultados para el criterio Optimista

4. Criterio de Hurwicz

Este criterio representa un abanico de actitudes, desde la más pesimista a la más optimista ponderando ambas situaciones por un índice de optimismo α. De esta forma el resultado de cada alternativa va a depender tanto de la tendencia al optimismo del decisor y de su resultado asociado, como de la tendencia al pesimismo y su resultado que se actúan como complementarios.

Para aplicar este criterio de decisión, el decisor debe definir su coeficiente de optimismo α entre el 0 y el 100% (entre 0 y 1). Consecuentemente el coeficiente de pesimismo será (1-α) y el valor de cada alternativa será la ponderación de los resultados optimista y pesimista por sus correspondientes coeficientes como se indica en [Formula 5]

$$Valor\ Esperado\ A_i = \{maxR_{ij} * \alpha + minR_{ij} * (1-\alpha)\} \quad Formula\ 5$$

Si calculamos los valores para cada una de las estrategias obtenemos los siguientes valores para un coeficiente de optimismo del 65% (α=0,65):

$$A_1 = 900 * 0{,}65 + 550(1 - 0{,}65) = 777{,}5$$

$$A_2 = 1000 * 0{,}65 + 400(1 - 0{,}65) = 790$$

$$A_3 = 950 * 0{,}65 + 500(1 - 0{,}65) = 792{,}5$$

De forma que el decisor, de acuerdo a este criterio y a ese coeficiente de optimismo elegiría la alternativa 3.

5. Criterio de Savage

El criterio de Savage transforma la matriz de beneficios (o de pérdidas en su caso) en una matriz de errores. De esta forma, el decisor puede evaluar fácilmente el coste de oportunidad en el que incurre por tomar una decisión equivocada.

En nuestra matriz de resultados, parece claro que si el decisor eligiese la alternativa 2 y se presentase la situación en la que los operarios se adaptasen mal a los nuevos equipos, la elección hubiese sido la mejor posible, ya que con las otras dos alternativas obtendría unos resultados peores. En este caso la alternativa 2 no tiene coste de oportunidad ya que proporciona el mejor resultado posible en esa situación, mientras que en la alternativa 1 el costo de oportunidad es de 350 (1000 que podría obtener – 650 que está obtendría por no haber acertado en la decisión) y en la alternativa 3 es de 500 (1000-500).

Si hacemos lo mismo para el caso en el que los operarios se adaptan bien a los nuevos equipos, la mejor elección, aquella que no nos haría incurrir en ningún coste sería la alternativa 3 con el máximo resultado posible (800) mientras que las alternativas 1 y 2 nos harían incurrir en unos costes de oportunidad de 250 y 150 respectivamente (800-550 y 800-650).

Representando todos los costes de oportunidad en una matriz de costes de oportunidad, obtenemos lo siguiente:

	No se adaptan	Se adaptan bien	Se adaptan muy bien
Alternativa 1	350	250	50
Alternativa 2	**0**	150	550
Alternativa 3	500	**0**	**0**

Tabla 7: Matriz de Costos de Oportunidad

Al ser este un criterio conservador en el que el decisor desea elegir aquella alternativa que le minimiza el costo del error, debemos fijarnos en el máximo error que se puede cometer con cada alternativa. En este caso estos valores son los siguientes:

Alternativa	Máximo error
A1	350
A2	550
A3	500

Tabla 8: Resultados para el Criterio de Savage

Por lo tanto, en vistas a minimizar el error de una mala elección, el decisor optaría, de acuerdo a este criterio, por la alternativa 1; la que minimiza el máximo error posible.

Resumen

Hemos visto como el proceso de toma de decisiones se constituye en diferentes fases: identificación del problema, búsqueda de alternativas, establecimiento de criterios, elección de una de ellas e implementación y control.

De igual forma hemos aprendido que en algunas situaciones concretas se pueden obtener soluciones óptimas, sin embargo, en el día a día de las empresas estas situaciones distan de lo que representan las tareas de dirección; estas se desarrollan esencialmente en situaciones de riesgo e incertidumbre.

Ante situaciones de riesgo e incertidumbre existen diversos criterios que pueden ayudar al decisor a decantarse por una alternativa u otra de entre las que tiene a su disposición; el valor monetario esperado en primer caso y los criterios de Laplace, Wald, optimista, pesimista y Savage en el caso de la incertidumbre.

Sin embargo, los resultados que estos criterios proporcionan para cada alternativa lo son a título orientativo. Los resultados que finalmente se obtendrán dependerán, en primer lugar, de lo acertadas que sean las previsiones de esos resultados en función de las situaciones que se puedan presentar y, en segundo, de la situación en la que la decisión se desarrolle finalmente.

Es importante recordar que los criterios aquí presentados son específicos para las situaciones descritas, pero es que además de estos criterios existen otros muchos factores (estratégicos, políticos, de recurrencia de la decisión, de complementariedad, de oportunidad…) que afectan a la toma de decisiones y también deben ser considerados.

Problema de Toma o Teoría de Daciones

1. Un fabricante produce dos modelos diferentes de lavavajillas. Si la economía está en recesión, el modelo de poco precio tendrá mejor mercado. Si se logra estabilidad, el modelo regular se venderá bien, en tanto que una economía floreciente permitirá a la compañía obtener mayores beneficios con el modelo de lujo. Sean a_1, a_2, y a_3 las decisiones de producir los modelos de bajo precio, regular y de lujo, y sean Θ_1, Θ_2 y Θ_3 la recesión, la estabilidad y la prosperidad respectivamente. Supóngase que la tabla de pago, o de u(Θ, a), para el fabricante, sea como sigue:

Alternativas	Estados de naturaleza		
	Recesión Θ_1	Estabilidad Θ_2	Prosperidad Θ_3
Modelo de bajo precio a_1	5	4	3
Modelo regular a_2	4	8	6
Modelo de lujo a_3	1	5	10

a) ¿Cuál es el valor esperado por modelo, si aplica el criterio de Laplace? ¿Cuál modelo seleccionaría y por qué?
b) ¿Cuál debería ser la actuación del fabricante de acuerdo con el criterio de maximax (Criterio Optimista)? ¿Cuál sería su pago?
c) ¿Cuáles serían su actuación y su pago si siguiese el criterio de maximin (Criterio de Wald)?
d) ¿Cuál es el valor esperado de cada modelo si aplicase el criterio de **Hurwicz? ¿**Cuál es su decisión? Utilice un coeficiente de optimismo α de 75%.

Si las probabilidades de ocurrencia de los estados de naturaleza Θ_1, Θ_2 y Θ_3 son 0,2; 0,5 y 0,3 respectivamente,

e) Determinar el pago esperado (o EMV) para cada una de los modelos.

f) Determinar las pérdidas de oportunidad para cada combinación de producción de modelos (Criterio de Savage).

g) Determine la perdida de oportunidad esperada (**EOL(A_I)**). ¿Cuál es su decisión y por qué?

2. La dirección de una empresa dedicada a la fabricación y venta de helados cremosos, se está planteando la compra de una nueva máquina para la fabricación de su nuevo helado de chocolate con el perfil de uno de los participantes en un famoso concurso. Tres son los modelos de la máquina que hay en el mercado en función de la calidad (tipo 1, tipo 2 y tipo 3). Si dicho concursante gana el concurso los beneficios que presume la dirección de la empresa que se alcanzarán son de 70.000, 75.000 y 80.000 euros para cada modelo de máquina, si por el contrario el concursante resulta finalista, pero no ganador del concurso, los beneficios estimados son 65.000, 70.000 y 75.000 euros, pero si dicho concursante es expulsado antes de llegar a la final, los beneficios esperados son tan solo de 55.000, 60.000 y 65.000 euros, respectivamente. La dirección de la empresa, tras una ronda de consultas con familiares, amigos, clientes, etc., estima que la probabilidad de que dicho concursante acabe ganando el concurso es del 10%, que llegue a finalista y no gane el concurso es también del 30%, y que lo expulsen del concurso antes de llegar a la final del 60%. Sugiera a la dirección de la empresa la máquina que debe adquirir.

Procedimiento:

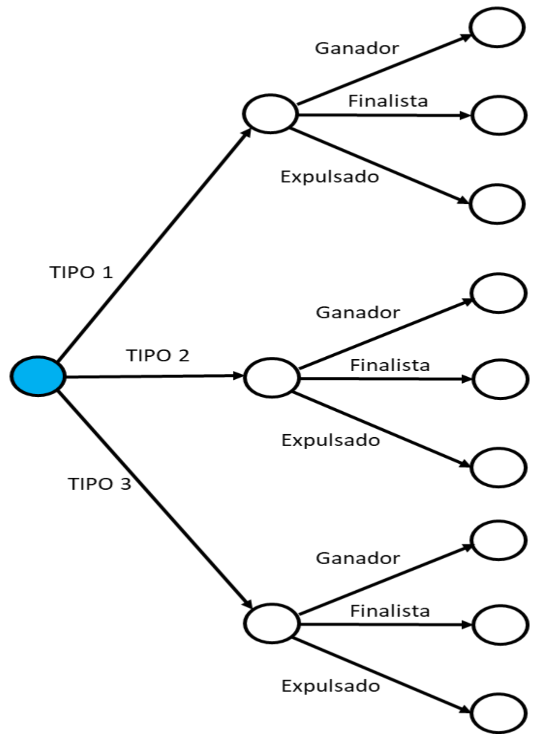
Paso 1: Enumere todas las alternativas de decisión

Comprar máquina Tipo 1
Comprar máquina Tipo 2
Comprar máquina Tipo 3

Paso 2: Enumere para cada una de las alternativas, los estados de la naturaleza asociados a las mismas y escriba las probabilidades a priori.

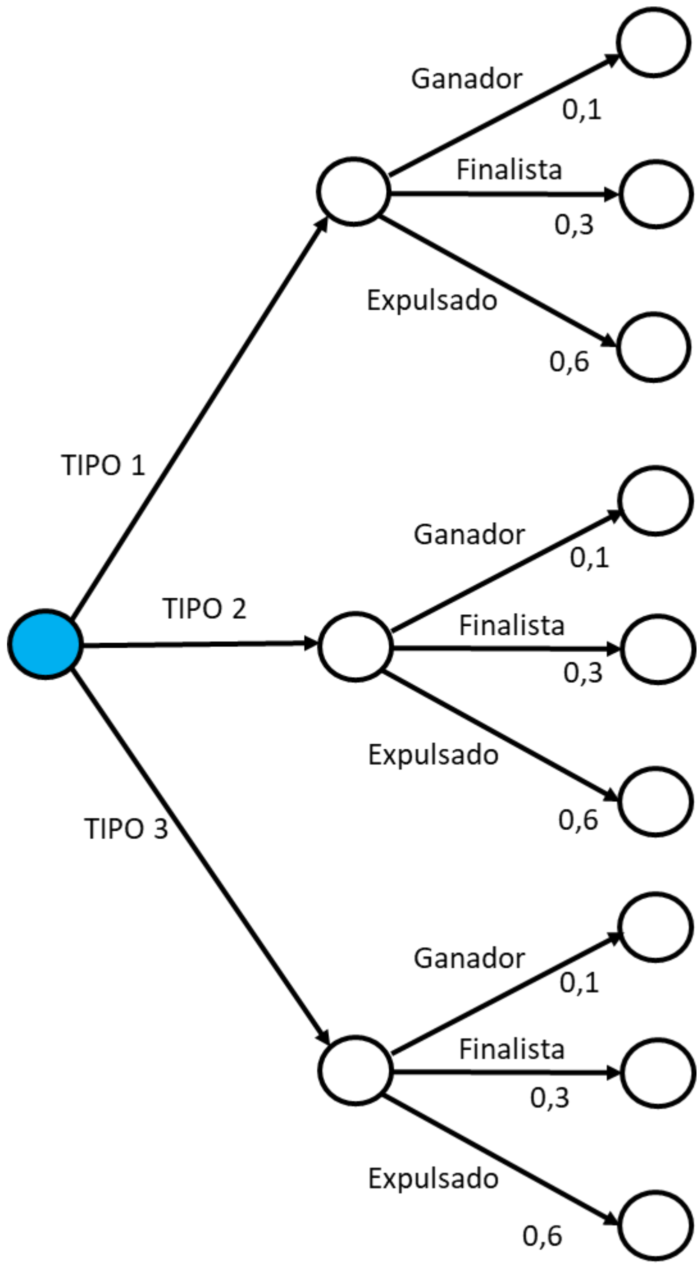
Alternativas	Estados de la naturaleza	Probabilidades a priori
Tipo 1	• Concursante ganador • Concursante finalista • Concursante expulsado	• 10% • 30% • 60%
Tipo 2	• Concursante ganador • Concursante finalista • Concursante expulsado	• 10% • 30% • 60%
Tipo 3	• Concursante ganador • Concursante finalista • Concursante expulsado	• 10% • 30% • 60%

Paso 3: Elabore el árbol de decisión

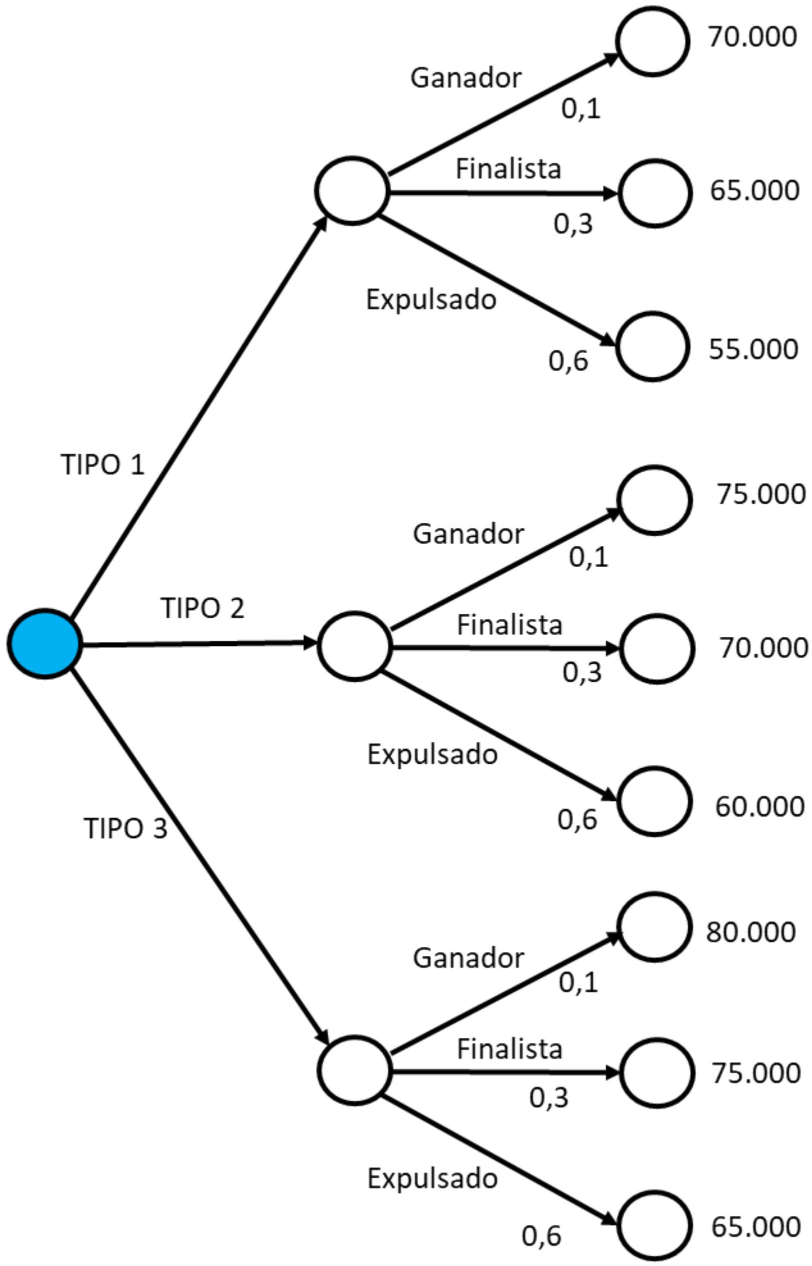


Paso 4: Asigne cada una de las probabilidades a priori a los estados de la naturaleza

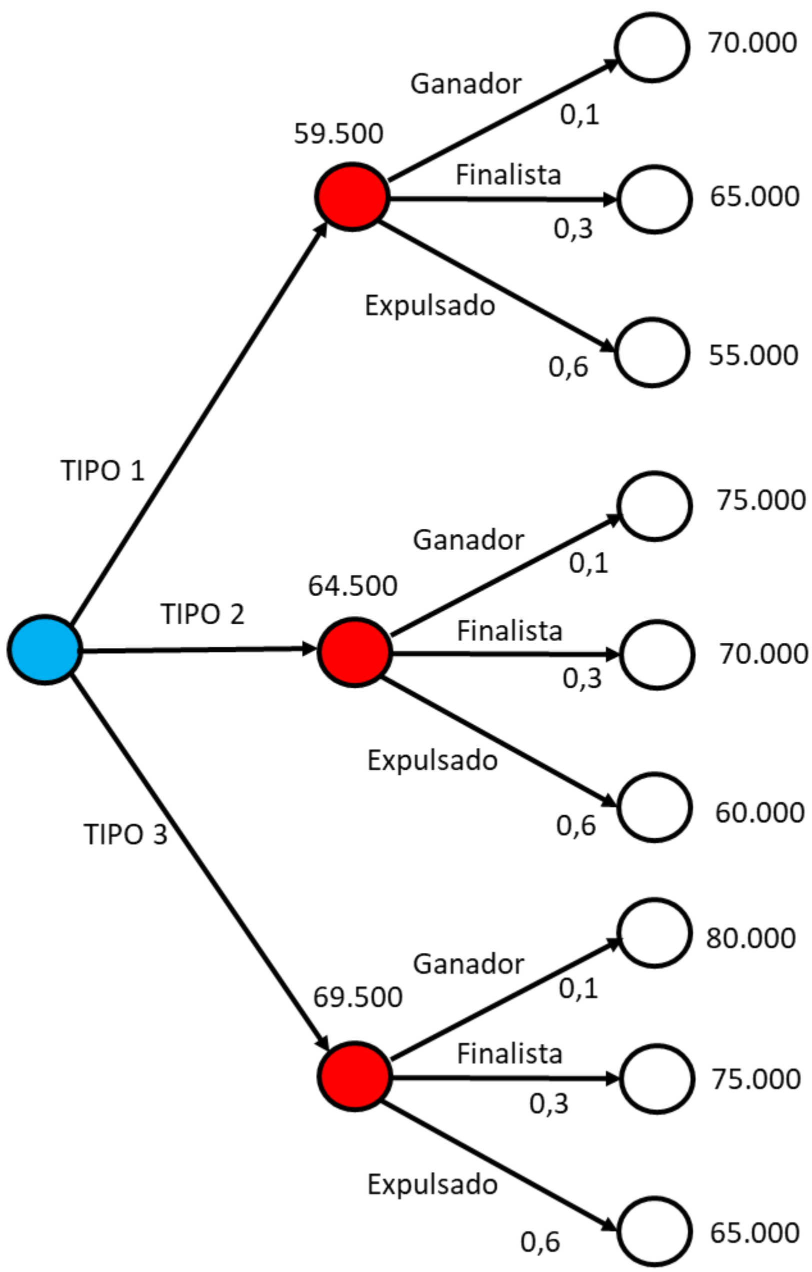
Las probabilidades a priori de cada estado de la naturaleza vienen dadas en el enunciado del ejercicio: probabilidad del 10% de que el concursante resulte ganador, probabilidad del 30% de que el concursante sea finalista, y probabilidad del 60% de que el concursante sea expulsado del concurso.


Ganador
0,1
Finalista
0,3
Expulsado
0,6
TIPO 1
Ganador
0,1
TIPO 2
Finalista
0,3
Expulsado
TIPO 3
0,6
Ganador
0,1
Finalista
0,3
Expulsado
0,6

Paso 5: Coloque el beneficio en cada un de las ramas



Paso 6: Resuelva el árbol de decisión de derecha a izquierda. Dado que la etapa final es probabilista debe aplicar el criterio de la esperanza matemática (EMV) con el objetivo de determinar el beneficio esperado.

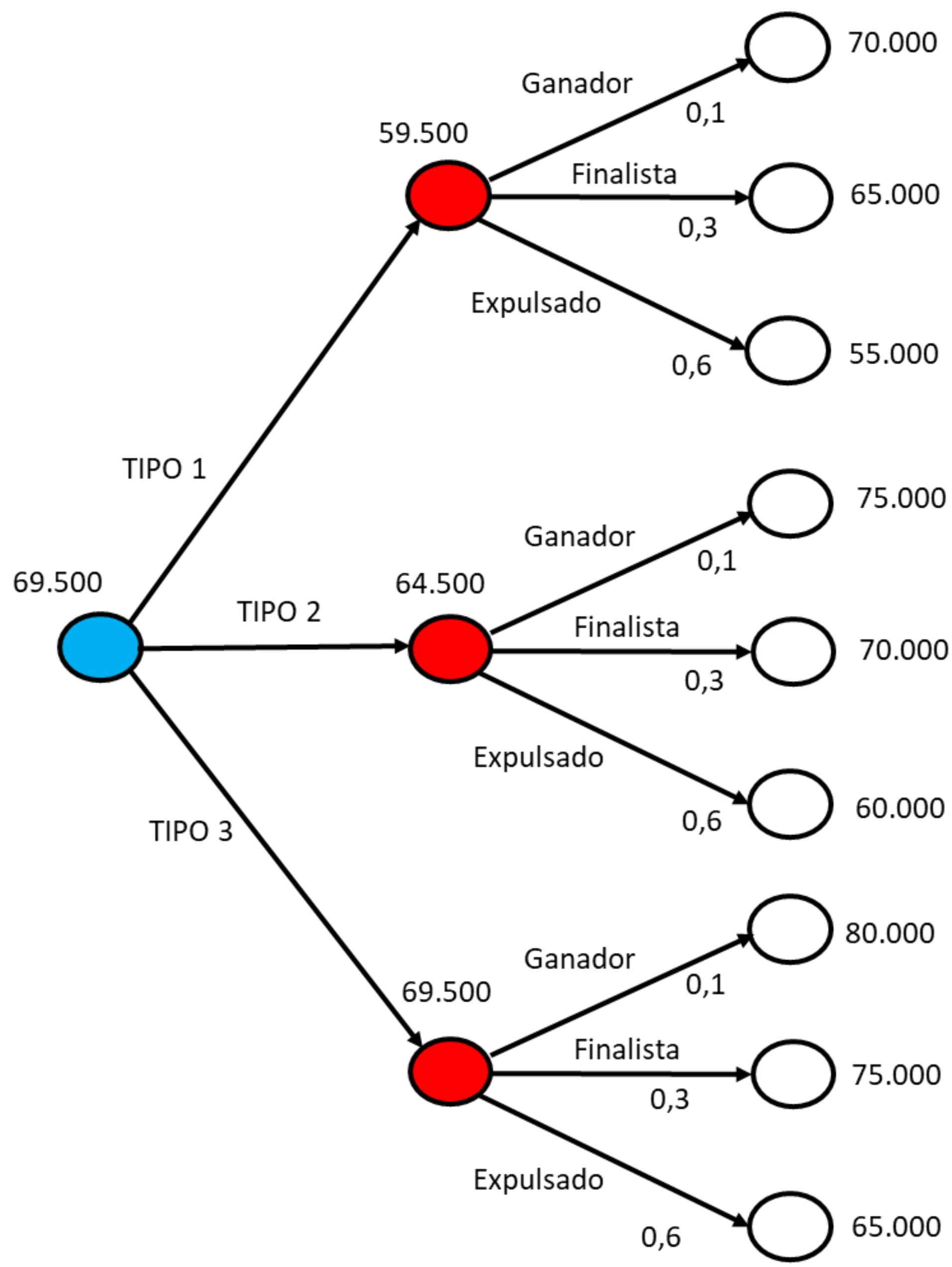


EMV (A_1) = (70.000 x 0,1) + (65.000 x 0,3) + (55.000 x 0,6) = 59.500 euros

EMV (A_2) = (75.000 x 0,1) + (70.000 x 0,3) + (60.000 x 0,6) = 64.500 euros

EMV (A_3) = (80.000 x 0,1) + (75.000 x 0,3) + (65.000 x 0,6) = 69.500 euros

Paso 7: Resuelva la etapa anterior. Dado que esta primera etapa es determinista y que los valores que ha calculado son beneficios, debe elegir la alternativa cuyo beneficio sea mayor y colocar el resultado encima del nudo correspondiente.



La decisión que debe tomar la empresa es la de comprar la máquina tipo 3, esperando alcanzar unos beneficios de 69.500 euros.

Tabla 9. Valores esperados por la compra de las tres clases de acciones

Competencia Especifica N° 2

Teoría de Juegos

A. TEORÍA DE JUEGOS

A.1. Introducción

La teoría de juegos ayuda a comprender las reglas de decisión que deben emplearse en situaciones conflictivas. Los participantes son competidores que emplean las técnicas matemáticas y el pensamiento lógico a fin de descubrir la mejor estrategia posible para vencer a su(s) oponente(s). El término "juegos" se refiere a condiciones de conflictos en:

- Negocios; Objetivo es ganar mercados al oponente
- Luchas; Objetivo es eliminar al oponente.
- Juegos; Objetivo es sacar ventaja al oponente
- Debate; Objetivo es convencer al oponente, etc.

Definición

Un juego es una situación competitiva entre N personas o grupos, denominados jugadores, que se realiza bajo un conjunto de reglas previamente establecidas con consecuencias conocidas. Tiene las siguientes características:

- Hay N ($N \geq 2$) tomadores de decisiones. Cuando $N = 2$ se dice juego de dos personas
- Hay un conjunto de reglas que especifican que estrategia se pueden seleccionar y los jugadores las conocen
- Estado final de la competencia (ganar, perder, empatar)
- Los pagos asociados se especifican a priori, cada jugador lo conoce

En todo juego donde las ganancias de los ganadores igualan a las pérdidas de los perdedores se llama **JUEGO DE SUMA CERO**. En caso contrario se llama juego de suma distinta de cero.

B. MATRIZ DE PAGOS

		Jugador B			
		1	2	...	n
Jugador A	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
	.	.			
	.	.	.	.	.
	.	.			
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

La herramienta para analizar el juego es la matriz de pagos. La posibilidad de ocurrencia de los eventos está controlada por el oponente. El tamaño de la matriz está determinado por el número de jugadores y el número de estrategias disponibles. Un juego de 2 X 4 tendrá dos jugadores y cuatro estrategias. Los juegos de dos jugadores con más de dos estrategias se llama juegos de 2 X M

Ejemplo: **JUEGO DE DOS CARTAS**
El jugador **R** tiene dos cartas; un dos (2) negro y un cuatro (4) rojo. El jugador **C** tiene también dos cartas; un dos (2) negro y un tres (3) rojo. Cada jugador selecciona secretamente una de sus cartas. Si las cartas seleccionadas por ambos son del mismo color, el jugador C le paga, al jugador R, la suma de los valores de esas cartas, en pesos. Sí las cartas son de diferente color, el jugador R le paga, al jugador C, la suma de los valores de esas cartas.

SOLUCION

Jugador R	Jugador C
A1: Dos negro	B1: Dos negro
A2: Cuatro rojo	B2: Tras rojo

Donde: Cartas del mismo color; C paga a R el equivalente de la suma de las cartas. Cartas de diferente color; R paga a C el equivalente de la suma de las cartas.
Matriz de pagos:

Matriz 1

		Jugador C	
		B1	B2
Jugador R	A1	4	-5
	A2	-6	7

Matriz 2

Jugador C	
B1	B2
-4	5
6	-7

La matriz 1 muestra la matriz de pagos a favor del jugador R, La matriz 2; negativo de la matriz 1.

$$\text{El pago} \qquad a_{22} = \begin{cases} Jugador\ R\ gana\ 7\ pesos \\ Jugador\ C\ pierde\ 7\ pesos \end{cases}$$

Analizando la matriz 1:
Para el jugador R:

- Su mejor estrategia es A2, siempre y cuando C elija la estrategia B2. Respondiendo a la competencia el jugador C debe elegir, la estrategia B1, para minimizar sus pérdidas.

Para el jugador C:

- Su mejor estrategia es B1, siempre y cuando R elija la estrategia A2. Respondiendo a la competencia el jugador R debe elegir, la estrategia A1 para maximizar sus ganancias.

¿Cómo se gana un juego? Se utilizan dos procedimientos para encontrar la solución del juego de suma cero:

- Estrategia Pura
- Estrategia Mixta

C. JUEGOS CON ESTRATEGIA PURA

Un juego de estrategia **pura** es aquel en el que cada jugador tiene una y solo una estrategia óptima. Estrategias que emplean todo el tiempo ambos competidores. Un punto en que cada jugador aplica su estrategia pura se llama **PUNTO DE SILLA** y ese es el valor del juego, cuando cada competidor tiene una estrategia pura.

C.1. PUNTO DE SILLA

En los juegos de suma cero, la estrategia optima se encuentra aplicando el criterio de MAXIMIN / MINIMAX. Las estrategias puras se conocen como estrategias optimas y se dice que el juego tiene un punto de silla.

A. CRITERIO MAXIMIN

El jugador elige su estrategia maximizando su ganancia mínima: $Maxi_i min_j\ a_{ij}$

B. CRITERIO MINIMAX

El jugador elige su estrategia minimizando su perdida máxima: $Mini_j max_i\ a_{ij}$

Punto de silla, si:

$$Maxi_i min_j\ a_{ij} = Mini_j max_i a_{ij}$$

C.2 VALOR DEL JUEGO

Promedio de ganancias / pérdidas a lo largo de múltiples jugadas. El valor del juego debe satisfacer:

$$Maximin \leq Punto\ de\ silla\ \leq Minimax$$

El valor del juego de la matriz 1, debe ser:

- Positivo: Favorece al jugador A
- Negativo: Favorece al jugador B
- Cero: El juego es equitativo

La optimalidad significa que ningún jugador está tentado a cambiar su estrategia ya que su oponente puede contraatacar, eligiendo otra estrategia que proporcione pagos menos atractivos.

EJEMPLO: ADQUISICION DE MOTOR

Una empresa fabrica maquinaria de construcción cuyo comportamiento depende de la confiabilidad de un motor de gasolina. La compañía puede comprar un motor costoso, garantizado plenamente, incluyendo costos del reemplazo a un precio de $500.

También podría comprar un motor de costo moderado por $400, garantizado por la mitad de su costo y el costo de reemplazo, de modo que una falla significa que la empresa pagará $600 por el motor; o bien la empresa podría adquirir un motor barato por $300, si comprara este motor barato, se tendría garantía por reemplazo para un costo total de $700, o pagar $50 para examinar el motor antes de su instalación, siendo el costo total de $650, si resultara defectuoso. ¿Qué debe hacer la empresa para minimizar los máximos costos esperados?

		Vendedor	
		B	F
	C	500	500
Comprador	M	400	600
	B	300	700

Solución:

Estrategias del comprador:

C: Motor costoso

M: Motor moderado

B: Motor barato

Estrategias del vendedor

B: Motor bueno

F: Motor fallado

Matriz de pagos a favor del comprador:

		Vendedor		
		B	F	Min aij
	C	500	500	500
Comprador	M	400	600	400
	B	300	700	300
Maxi aij		500	700	

Aplicando los criterios:

Comprador: $Min\ a_{ij} = \{500,\ 400, 300\} \rightarrow Maximin = \{500\}$

El comprador debe optar siempre por la alternativa C

Vendedor: $Max\ a_{ij}\ = \{500, 700\} \rightarrow Minimax\ =\ \{500\}$

El vendedor debe optar por la alternativa B

El vendedor debe esforzarse por vender por vender motores buenos (B)

Estrategias puras:

$$Maxi_i min_j\ a_{ij} =\ Mini_j max_i a_{ij}\ = 500$$

Punto de silla: 500 pesos

Valor del juego: 500 pesos

OBS: Un juego puede tener más de un punto de equilibrio, como el siguiente caso, que tiene dos puntos de equilibrio.

		Jugador B		
		A	M	B
	A	-2	1	4
Jugador A	M	1	1	3
	B	1	2	3

D. ESTRATEGIAS MIXTAS

Si un juego no tiene punto de silla, el valor del juego de suma cero se determina utilizando estrategias mixtas, que consiste en evaluar las estrategias en términos probabilísticos. Las estrategias mixtas no garantizan una ganancia mínima en una jugada cualquiera, en cambio busca asegurar en lo posible que el valor mínimo de la ganancia media o esperada sea tan grande como sea posible.

Ejemplo: JUEGO DE DOS CARTAS
Matriz de pagos a favor del jugador R:

		Jugador C		
		B1	B2	min
Jugador R	A1	4	-5	-5
	A2	-6	7	-6
	max	4	7	

Verificamos si hay juego de suma puro:
Maximin aij = Minimax aij   Max {-5, -6} = Min {4, 7}   -5 ≠ 4, como no son iguales, no existen estrategias puras.

¿Cuál es la ganancia esperada del jugador R, contra cada estrategia de su competidor?

- Si el competidor elige la estrategia B1; el jugador R recibe 4 con probabilidad p al usar la estrategia A1.
- Si el competidor elige la estrategia B1; el jugador R recibe –6 con probabilidad 1-p al usar la estrategia A2.

		Jugador C		
		B1	B2	
Jugador R	A1	4	-5	P
	A2	-6	7	1-p

Ganancia esperada del jugador R; cuando el competidor usa B1 y el jugador R A1 y A2:

V = 4 p + (-6)*(1-p) = 10 p – 6

Ganancia esperada del jugador R; cuando el competidor usa B2 y el jugador R A1 y A2:

V = -5 p + 7 (1-p) = -12 p + 7

Para graficar cada ganancia esperada se buscan dos puntos para cada ecuación de ganancia esperada:

V = 10 p – 6

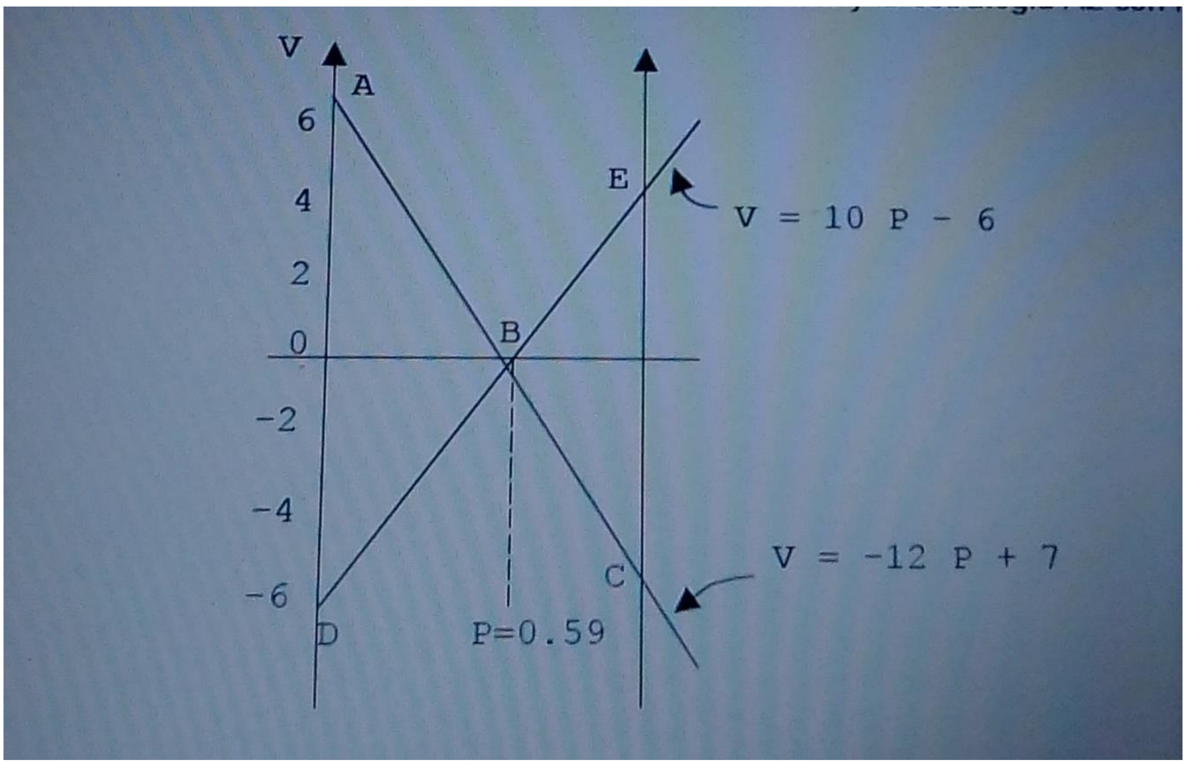
Si p = 0 V = -6 P(0; -6)

Si p = 1 V = 4 P(1; 4)

V = -12p +7

Si p = 0 V = 7 P(0; 7)

Si p=1 V = -5 P(1; -5)



El jugador R para elevar al máximo su ganancia debe escoger de p en el punto de equilibrio (B) del Gráfico:

10 p – 6 = -12 p + 7   10p + 12p = 7 + 6   22p = 13

donde p = 13/22 = 0.5909

entonces 1 – p = 0.4091

El jugador R; escoge la estrategia A1 con frecuencia 0.59 y la estrategia A2 con frecuencia 0.41.

Se aplica el mismo enfoque para el jugador C

			B1	B2
			Jugador C	
Jugador R	A1		4	-5
	A2		-6	7
			q	1-q

Ganancia esperada del jugador C: cuando el jugador R usa A1 y el jugador C: B1 y B2.
V = 4q + (-5)*(1-q)   V = 4q – 5 + 5q   V = 9q – 5

Ganancia esperada del jugador C: cuando el jugador R usa A2 y el jugador C: B1 y B2.
V = -6q + 7*(1-q)   V = -6q + 7 – 7q   V = -13q + 7

Se igualan ambos valores esperados para determinar q:
9q – 5 = -13q + 7   9q + 13q = 7 + 5   22q = 12
por lo tanto, q = 12/22 = 0,5455 y 1-q = 0,4545

D.1. **VALOR DEL JUEGO**

Reemplazando Los valore de p y 1 – p se tiene: si el oponente usa sólo la estrategia B2 y el jugador R usa la estrategia A1 con frecuencia 0.59 y la estrategia A2 con frecuencia 0.41:
V = -5(0,5909) + 7 (0,4091) = -0,0908 ≈ -0,09
Se puede verificar con el otro valor esperado de V
V = 4p + (-6)*(1-p) = 4(0,5909) -6(0,4091) = -0,0910 ≈ -0,09

D.2. ESTRATEGIAS MIXTAS: DOMINANCIA

Una estrategia en la matriz de pagos domina a otra, si todos los resultados posibles son preferentes al jugador. El jugador nunca escogerá una estrategia k cuando para una estrategia i cualquiera se cumple:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \; para \; todo \; j \;\Rightarrow\; P_k = 0$$

Por lo tanto, se elimina la estrategia k del proceso de decisión.

D.3. REGLA DE DOMINANCIA

- Cada elemento del renglón dominador debe ser mayor o igual al valor correspondiente del renglón dominado; Eliminar renglón dominado.
- Cada elemento de la columna dominada debe ser menor o igual al valor correspondiente de la columna dominante; Eliminar columna dominante.

Luego de aplicar la dominancia, la matriz resultante no necesariamente podría tener punto de silla, porque puede ser el más bajo de su fila o el valor más alto de su columna.

EJEMPLO: FABRICANTE DE AUTOMOVILES

A un fabricante de automóviles se le ha propuesto cinco diseños de los nuevos autos del próximo año. De éstos la elección del que pueda tener mejor venta, depende en gran parte de que el modelo estándar de su competidor sea; excedente (e), bueno (b), aceptable (a) o malo (m). Se da la siguiente tabla de pagos a favor del fabricante

		Competidor			
		e	b	a	m
Fabricante	1	100	80	150	50
	2	150	55	100	50
	3	50	55	100	25
	4	125	60	100	75
	5	90	70	125	80

Las utilidades están dadas en millones de dólares. ¿Qué criterio debe escoger el fabricante con el fin de maximizar la mínima utilidad que él espera?

SOLUCION

Búsqueda de las estrategias puras:

Para el fabricante: MAXIMIN

$$Min\ a_{ij} = \{50, 50, 25{,}60, 70\}\ luego\ Mximin\ a_{ij} = \{70\}$$

Para el competidor u oponente: MINIMAX

$$Max\ a_{ij} = \{150, 80{,}150, 80\} \quad luego\ Minimax\ a_{ij} = \{80\}$$

Entonces, no hay juego de suma cero, con estrategias puras; es decir:

- No existe punto de silla: punto de equilibrio.
- No existe una sola estrategia que puedan usar ambos jugadores durante todo el juego; sino varios.

$$Maximin\ a_{ij} \neq Minimax\ a_{ij}$$

Búsqueda de las estrategias mixtas:

Resolución de la matriz de pagos, utilizando la regla de dominancia

1. Fila 4 ≥ Fila 3 (se elimina la Fila 3)

	e	b	a	m
1	100	80	150	50
2	150	55	100	50
4	125	60	100	75
5	90	70	125	80

2. Columna e > Columna b (se elimina la columna e)

	b	a	m
1	80	150	50
2	55	100	50
4	60	100	75
5	70	125	80

.

3. Fila 1 ≥ Fila 2 (se elimina la fila 2)

	b	a	m
1	80	150	50
4	60	100	75
5	70	125	80

4. Fila 5 > Fila 4 (se elimina la fila 4)

	b	a	m
1	80	150	50
5	70	125	80

5. Columna a > Columna m (se elimina la columna a)

	b	m
1	80	50
5	70	80

Ya no se pueden hacer más reducciones aplicando dominancia, por lo tanto, utilizando los criterios de Maximin y Minimax a la matriz reducida e interpretando;

Para el fabricante

$Min\ a_{ij} = \{50; 70\}\ luego\ Maximin\ a_{ij} = \{70\}$ El fabricante puede asegurarse su ganancia a por lo menos 70 millones.

Para el oponente

$Max\ a_{ij} = \{80;\ 80\}\quad luego\ Minimax\ a_{ij} = \{80\}$ El oponente limita sus ganancias a 80 millones.

$$Maximin\ a_{ij} \neq Minimax\ a_{ij}$$

Es decir, se confirma que no existe estrategias puras.

Para determinar la mejor estrategia del fabricante:

		Competencia		
		b	m	
Fabricante	1	80	50	P
	5	70	80	1-p
		q	1-q	

¿Cuál es la ganancia esperada? Contra cada una de las estrategias del competidor:

Ganancia esperada del fabricante; cuando el competidor elige la estrategia b y el fabricante escoge indistintamente las estrategias 1 y 5:
V = 80 p + 70 (1 - p) = 10 p + 70.
También: Ganancia esperada del fabricante; él competidor elige la estrategia m y él fabricante elige indistintamente las estrategias 1 y 5:
V = 50 p + 80 (1 - p) = 80 - 30p
Se igualan las dos ganancias esperadas para determinar el valor de p:
10 p + 70 = 80 - 30 p   10p + 30p = 80-70   40p = 10   p = 10/40 = ¼
Luego 1 - p = 1 - ¼ = ¾

Se aplica el mismo enfoque para el competidor:
V = 80q + 50(1-q) = 30q + 50
V = 70 + 80(1 – q) = 80 – 10q
Se igualan las dos ganancias esperadas para determinar el valor de q:
30q + 50 = 80 - 10q   40q = 30   q = 30/40 = 3/4
Luego, 1 – q = 1- ¾ = ¼

Valor del juego:
Si el oponente usa sólo la estrategia BUENO y el fabricante usa la estrategia DISEÑO 1 con la frecuencia 1/4 y la estrategia diseño 5 con la frecuencia 3/4:
V = 80 (1/4) + 70 (3/4) = 72,50 u.m.
Valor del juego del competidor:
V = -80 (3/4) – 50 (1/4) = -72,50 u.m.
Valor del juego:

		Competencia		
		b	m	
Fabricante	1	80	50	P = 1/4
	5	70	80	1-p = 3/4
		q = 3/4	1-q = 1/4	

El razonamiento para determinar el valor del juego es: mientras el fabricante juega con la estrategia Diseño 1 ¼ parte del tiempo. El oponente elige la estrategia BUENO todo el tiempo.
V = ¼ (80) + 3/4(70) = 72,50 u.m.

Pero si el competidor elige la estrategia MALO todo el tiempo la ganancia esperada del fabricante es:

V = ¼ (50) + 80 (3/4) = 72,5 u.m.

El valor del juego es positivo 72,5 millones que favorece el fabricante. El valor del juego indica las ganancias normales de los jugadores durante muchas jugadas.

E. SOLUCION GRÀFICA

Otro método para determinar valores del juego es el gráfico. Este método se utiliza solo para el caso, en que uno de los jugadores tiene dos estrategias. Su aplicación es para juegos que tengan o no punto de silla de montar.

EJEMPLO; AUMENTO DE SALARIOS

El grupo de administración de la Ross Company, ha recibido el encargo de preparar una estrategia que pueda seguir la empresa durante las próximas negociaciones. En vista de su experiencia el grupo ha desarrollado las siguientes estrategias para la empresa Ross:

C1: Se esperan negociaciones muy difíciles con el sindicato

C2: Se considera que las peticiones del sindicato no son prácticas

C3: Se considera que las peticiones del sindicato son prácticas

C4: Amplias variaciones en las peticiones del sindicato

De acuerdo con la historia pasada, el sindicato sugiere que está considerando algunas de las siguientes estrategias:

U1: Peticiones muy costosas de parte del sindicato

U2: Peticiones normales de parte del sindicato

El problema es, qué estrategia debe emplear el grupo de administración de la empresa Ross, y depende de la estrategia que adopte el sindicato. Sin embargo, con ayuda de un mediador de afuera que ha traído en vista de las perspectivas de unas negociaciones muy difíciles con el sindicato y la posibilidad de una huelga prolongada.

El grupo de administración preparó una tabla de un aumento condicional, en favor del sindicato. En vista de estas cifras (utilidades) ¿qué harán los negociadores?

ROSS CIA.

		C1	C2	C3	C4
SINDICATO	U1	19	15	17	16
	U2	0	20	15	5

SOLUCION:

Investigar si hay estrategias puras:

ROSS CIA.

		C1	C2	C3	C4	Min
SINDICATO	U1	19	15	17	16	15
	U2	0	20	15	5	0
	Max	19	20	17	16	

Para el sindicato:

$$\min a_{ij} = \{15,0\} \qquad Luego\ Max_i min_j = Max\{15,0\} = 15$$

Para Ross Company:

$$\max a_{ij} = \{19, 20, 17, 16\} \qquad Luego\ Min_i max_j = Min\{19, 20, 17, 16\} = 16$$

No hay punto de silla porque $Maximin\ a_{ij}\ \neq\ Minimax\ a_{ij}$
Entonces, debemos determinar las estrategias mixtas; utilizando la dominancia, para reducir a una matriz de 2 x N o M x 2.
Valor de las estrategias mixtas para el sindicato:
Debemos graficar:
E(esperanza) contra $0 \leq p \leq 1$

ROSS CIA.

		C1	C2	C3	C4	
SINDICATO	U1	19	15	17	16	P
	U2	0	20	15	5	1-p

Valores esperados de las estrategias:
Para C1: $E1(p) = 19 * p + 0 * (1-p) = 19p$
Para C2: $E2(p) = 15 * p + 20 * (1-p) = -5p + 20$
Para C3: $E3(p) = 17 * p + 15 * (1-p) = 2p + 15$
Para C4: $E4(p) = 16 * p + 5 * (1-p) = 11p + 5$
Para graficar se localizan dos puntos para graficar cada valor esperado:

$$E1 = 19p$$

Si p = 0	E1(p) = 0	P(0; 0)
Si p = 1	E1(p) = 19	P(1; 19)

$$E2(p) = -5p + 20$$

Si p = 0	E2(p) = 0	P(0; 20)
Si p = 1	E2(p) = 15	P(1; 15)

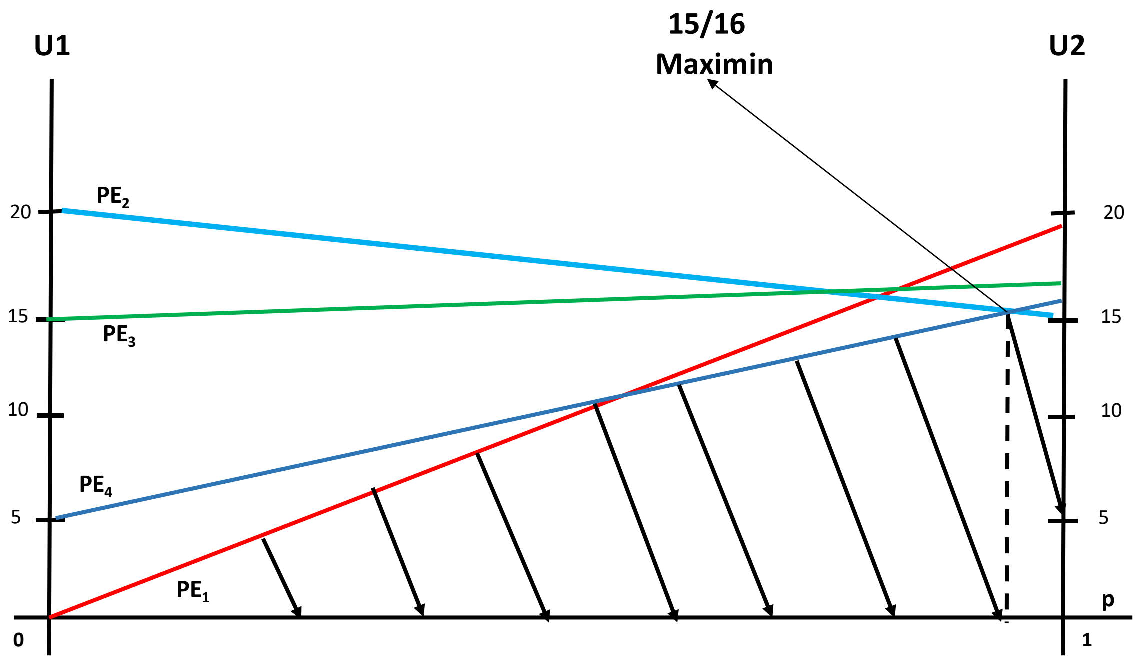
$$E3(p) = 2p + 15$$

Si p = 0	E3(p) = 15	P(0; 15)
Si p = 1	E3(p) = 17	P(1; 17)

$$E4(p) = 11p + 5$$

Si p = 0	E4(p) = 15	P(0; 5)
Si p = 1	E4(p) = 17	P(1; 16)

Graficando los pagos esperados, en una gráfica donde el eje horizontal representa los valores de probabilidad (de 0 a 1), y en el eje vertical representa los valores esperados.



Para el Sindicato se aplica la estrategia de maximin; maximiza su mínima esperanza E y esta se encuentra en la intersección de C2 (PE2) y C4 (PE4), por lo tanto, se igualan los dos pagos esperados y se encuentra el valor de p.

$$-5p + 20 = 11p + 5 \;\rightarrow luego - 16p = \; -15 \;\rightarrow p = \frac{15}{16}$$

Y $1 - p = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$

Las estrategias mixtas para el Sindicato son: $(p; 1 - p) = \left({}^{15}/_{16}; {}^{1}/_{16}\right)$

El valor del juego, se obtiene sustituyendo (p; 1-p) en los pagos esperados C2 o C4:

$$E(p) = 15p + 20(1 - p) = 15\left({}^{15}/_{16}\right) + 20\left(1 - {}^{15}/_{16}\right) = 15{,}31$$

Interpretando el juego (grafico):

a. Si p < 0,9375 el pago esperado será menor que 15,31, si la compañía ROSS escoge la estrategia C4.
b. Si p > 0,9375 el pago esperado del sindicato será menor que 15,31, si la compañía ROSS escoge la estrategia C2.

También:

Trabajando con el grafico, el valor del juego V está en la intersección de C2 y C4. Entonces la matriz de pago está dada por:

		ROSS CIA.		
		C2	C4	
SINDICATO	U1	15	16	P
	U2	20	5	1-p
		q	1-q	

Calculando las estrategias mixtas: SINDICATO

$$15p + 20(1 - p) = 20 - 5p \ \rightarrow p = {}^{15}\!/_{16} = 0{,}9375$$

Estrategias mixtas para la ROSS CIA.

$$E2(p) = 15q + 16(1 - q) = 16 - q$$
$$E4(p) = 20q + 5(1 - q) = 5 + 15q$$

Igualando ambos esperados, se encuentran las estrategias mixtas para ROSS CIA.

$$16 - q = 5 + 15q \ \rightarrow \ -q - 15q = 5 - 16 \ \rightarrow \ -16q = -11 \ \rightarrow q = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

Interpretando las estrategias mixtas para ROSS CIA.

a. Si q < 0,6875 el pago esperado de Ross será mayor que 15,31, si el sindicato escoge U1
b. Si q > 0,6875 el pago esperado de Ross será mayor que 15,31, si el sindicato escoge U2.

Competencia Especifica N° 3

Series de Tiempo y Proyección (Pronósticos)

Objetivos

1. Definir los componentes de una serie de tiempo.
2. Calcular un promedio móvil.
3. Determinar una ecuación de tendencia lineal.
4. Utilizar la ecuación de la tendencia para calcular proyecciones.
5. Calcular una ecuación de tendencia no lineal.
6. Determinar e interpretar un conjunto de índices estacionales.
7. Datos Desestacionalizados
8. Calcular proyecciones estacionalmente ajustadas

Introducción

En esta competencia específica se efectúa el análisis y la proyección de las series de tiempo. **Una serie de tiempo** es un grupo de datos registrados durante un periodo semanal, trimestral o anual. Dos ejemplos de las series de tiempo son las ventas de Microsoft Corporation por trimestre desde 1985, y la producción anual de ácido sulfúrico desde 1970.

Un análisis de la historia, que es una serie de tiempo, es útil para que la administración tome decisiones hoy y planee con base en una predicción, o proyección, de largo plazo. En general, se supone que los patrones pasados continuarán en el futuro. Las proyecciones de largo plazo se amplían a más de 1 año; son comunes las proyecciones de 2, 5 y 10 años. Las proyecciones de largo plazo son esenciales a fin de dar tiempo suficiente para que los departamentos de compras, manufactura, ventas, finanzas y otros de una compañía elaboren planes para construir nuevas plantas, solicitar financiamiento, desarrollar productos nuevos y métodos de ensamble innovadores.

En Estados Unidos, la proyección del nivel de ventas, tanto de corto como de largo plazos, se rige casi por la propia naturaleza de las organizaciones de negocios. La competencia por el dinero de los consumidores, la presión para obtener utilidades para los accionistas, el deseo de obtener una mayor participación de mercado y las ambiciones de los ejecutivos son algunas fuerzas de motivación en los negocios. Por lo tanto, se necesita una proyección (una declaración de los objetivos de la administración) para tener las materias primas, las instalaciones de producción y el personal para cumplir con la demanda.

Esta competencia trata del uso de los datos para proyectar eventos futuros. Primero se analizan los componentes de una serie de tiempo; luego, algunas técnicas para analizar los datos y, por último, se proyectan eventos futuros.

Componentes de una serie de tiempo

Objetivo 1. Definir los componentes de una serie de tiempo.

Una serie de tiempo consta de cuatro componentes: **tendencia secular**, **variación cíclica**, **variación estacional** y **variación irregular**.

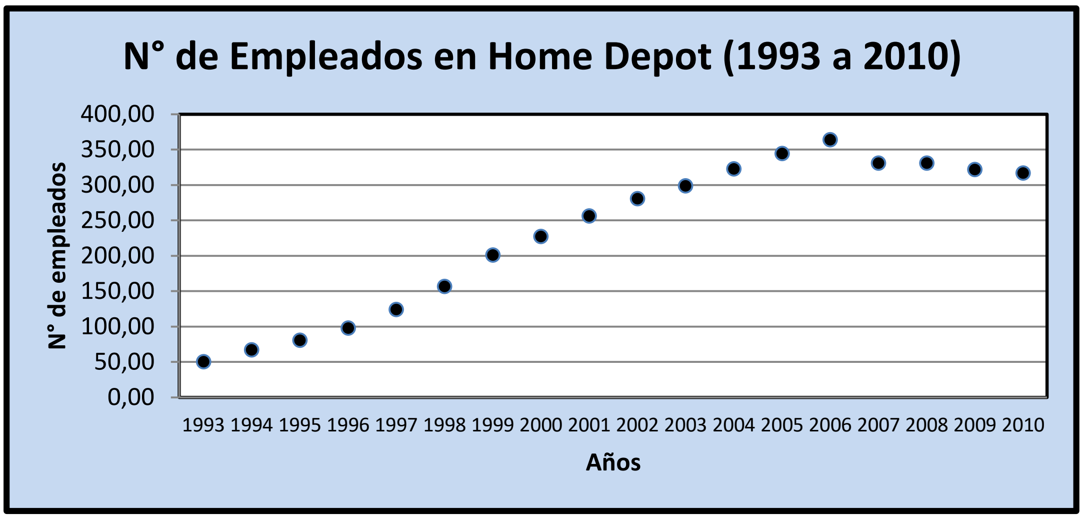
Tendencia secular

Las tendencias de largo plazo de las ventas, el empleo, los precios accionarios y de otras series de negocios y económicas siguen varios patrones. Algunas se mueven hacia arriba en forma uniforme, otras declinan y otras más permanecen iguales con el paso del tiempo.

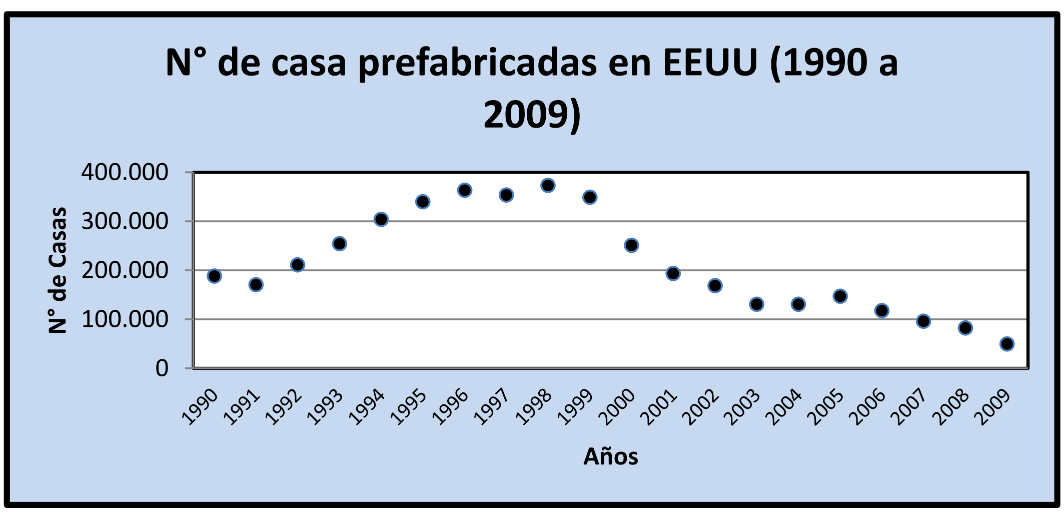
TENDENCIA SECULAR. Dirección uniforme de una serie de tiempo de largo plazo.

Los siguientes son varios ejemplos de una tendencia secular.

- Home Depot se fundó en 1978, y es el minorista más grande de Estados Unidos en artículos para mejorar el hogar. En la siguiente gráfica se muestra el número de empleados en Home Depot, Inc. Puede observar que este número aumentó con rapidez en los últimos 15 años. En 1993 había poco más de 50.000 empleados, mientras que en 2006 el número aumentó a más de 364.000. Desde entonces, el número de asociados ha disminuido a 317.000 en 2010.



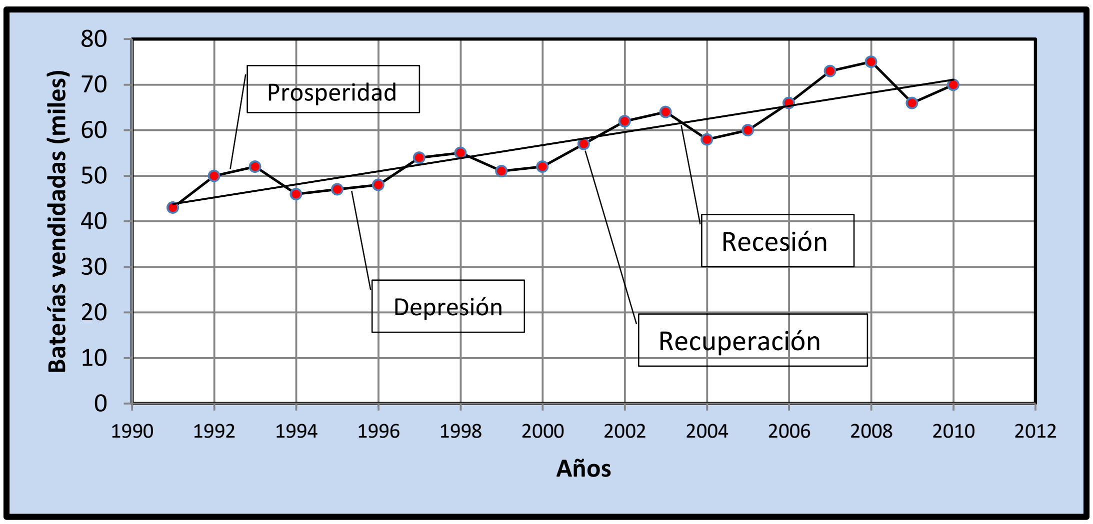
- El número de casas prefabricadas enviadas en Estados Unidos presentó un aumento uniforme de 1990 a 1996, luego permaneció casi igual hasta 1999, cuando el número empezó a declinar. En 2002, el número era menor al de 1990 y continuó declinando hasta 2009. Esta información se muestra en la siguiente gráfica.



Variación Cíclica

El segundo componente de una serie de tiempo es la variación cíclica. Un ciclo de negocios habitual consiste en un periodo de prosperidad, seguido por periodos de recesión, depresión y luego recuperación. Hay fluctuaciones considerables que se desarrollan durante más de un año, arriba y debajo de la tendencia secular. Por ejemplo, en una recesión, el empleo, la producción, el Promedio Industrial Dow Jones y muchas otras series tanto en los negocios como económicas se encuentran debajo de las líneas de las tendencias de largo plazo. Por el contrario, en periodos de prosperidad se encuentran arriba de ellas.

VARIACIÓN CÍCLICA. Aumento y reducción de una serie de tiempo durante periodos mayores de un año.



Gráfica 1. Baterías que vendió National Battery Retailers, Inc de 1991 a 2010

En la gráfica 1, se presentan las unidades anuales de baterías que vendió National Battery Retailers, Inc., desde 1991 hasta 2010. Se resalta el ciclo natural del negocio. Los periodos son de recuperación, seguidos por prosperidad, luego recesión y, por último, el ciclo desciende con depresión.

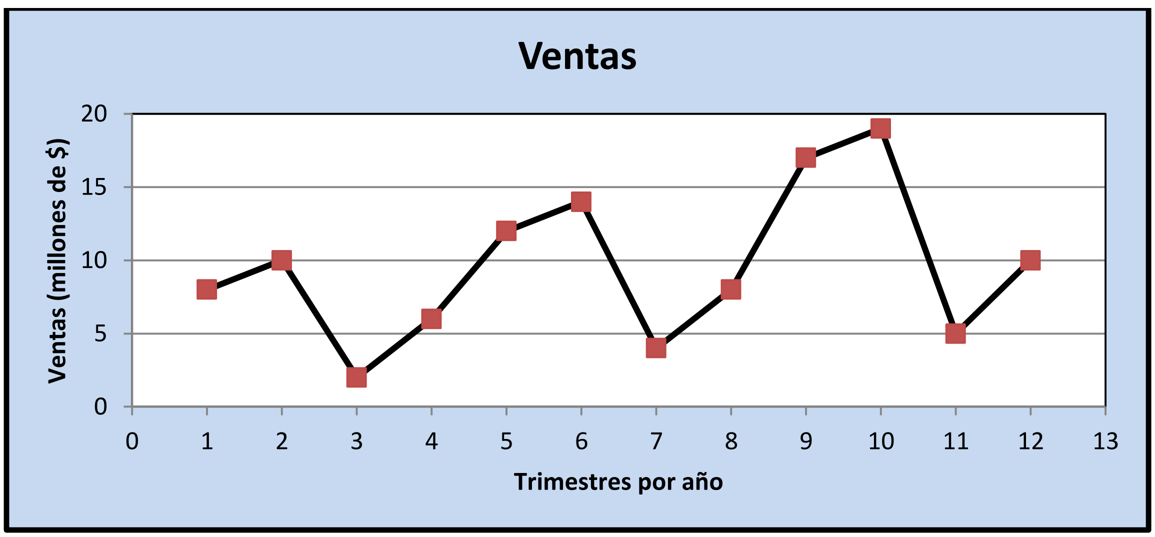
Variación Estacional

El tercer componente de una serie de tiempo es la variación estacional. Muchas series de ventas, de producción y de otro tipo fluctúan de acuerdo con las temporadas. La unidad de tiempo se reporta por trimestre o por mes.

VARIACIÓN ESTACIONAL Patrones de cambio en una serie de tiempo en un año. Estos patrones tienden a repetirse cada año.

Casi todos los negocios suelen tener patrones estacionales recurrentes. Por ejemplo, la ropa para caballeros y niños tiene ventas muy elevadas justo antes de Navidad, y relativamente bajas después de esa celebración y durante el verano. Las ventas de juguetes son otro ejemplo con un patrón estacional extremo. Más de la mitad de los negocios del año se realizan, en general, en noviembre y diciembre. El negocio de jardinería es estacional en los estados del noreste y del centro-norte de Estados Unidos. Muchos negocios tratan de equilibrar los efectos estacionales y se dedican a otras actividades de compensación estacional. En el noreste de Estados Unidos es posible ver al encargado de un negocio de jardinería con un equipo quitanieves al frente del camión, en un intento por obtener algún ingreso durante la temporada de invierno. Con frecuencia, en las cercanías de los centros de esquí de todo el país hay campos de golf. Los propietarios de los albergues tratan de rentarlos a esquiadores en el invierno y a golfistas en el verano. Éste es un método eficaz para repartir los gastos fijos en todo el año, en lugar de distribuirlos sólo en algunos meses.

En la gráfica 2 aparecen las ventas trimestrales, en millones de dólares, de Hercher Sporting Goods, Inc. Dicha compañía de artículos deportivos del área de Chicago se especializa en la venta de equipo de béisbol y softbol a preparatorias, universidades y ligas juveniles. También tiene varias tiendas de descuento en algunos de los centros comerciales más grandes. Para su negocio existe un patrón estacional distintivo. La mayoría de sus ventas son en el primero y segundo trimestres del año, cuando las escuelas y organizaciones compran equipo para la próxima temporada. Durante el verano se mantiene ocupada con la venta de equipo de reemplazo. Hace algunos negocios durante la temporada navideña (cuarto trimestre), mientras que las últimas semanas del verano (tercer trimestre) conforman su temporada baja.



Gráfica 2. Ventas de equipos de béisbol y softbol, Hercher Sporting Goods, 2008-2010 (por trimestre: cuatro por año)

Variación Irregular

Muchos analistas prefieren subdividir la variación irregular en variaciones episódicas y residuales. Las fluctuaciones episódicas son impredecibles, pero es posible identificarlas: por ejemplo, el efecto inicial de una huelga importante o de una guerra en la economía no se pueden predecir. Después de eliminar las fluctuaciones episódicas, la variación restante se denomina variación residual. Las fluctuaciones residuales, con frecuencia denominadas fluctuaciones azarosas, son impredecibles y no se pueden identificar. **Por supuesto, no es posible proyectar a futuro ni la variación episódica ni la residual**.

Promedio Móvil

Objetivo 2. Calcular un promedio móvil

Un promedio móvil es útil para suavizar una serie de tiempo y apreciar su tendencia. Además, es el método básico para medir la fluctuación estacional, que se describe más adelante en esta unidad. En contraste con el método de mínimos cuadrados, que expresa la tendencia en términos de una ecuación matemática ($\widehat{Y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bt}$), el método del promedio móvil sólo suaviza las fluctuaciones de los datos. Este objetivo se logra al "desplazar" los valores medios aritméticos en la serie de tiempo.

Para **aplicar el promedio móvil** a una serie de tiempo, los datos deben seguir una tendencia muy lineal y tener un patrón rítmico definido de las fluctuaciones (que se repita, por ejemplo, cada tres años). Los datos del siguiente ejemplo tienen tres componentes: tendencia, ciclo e irregularidad, abreviadas **T**, **C** e **I**. No hay variación estacional debido a que los datos se registran cada año. Lo que logra el promedio móvil es promediar **C** e **I**. Lo que queda es la tendencia.

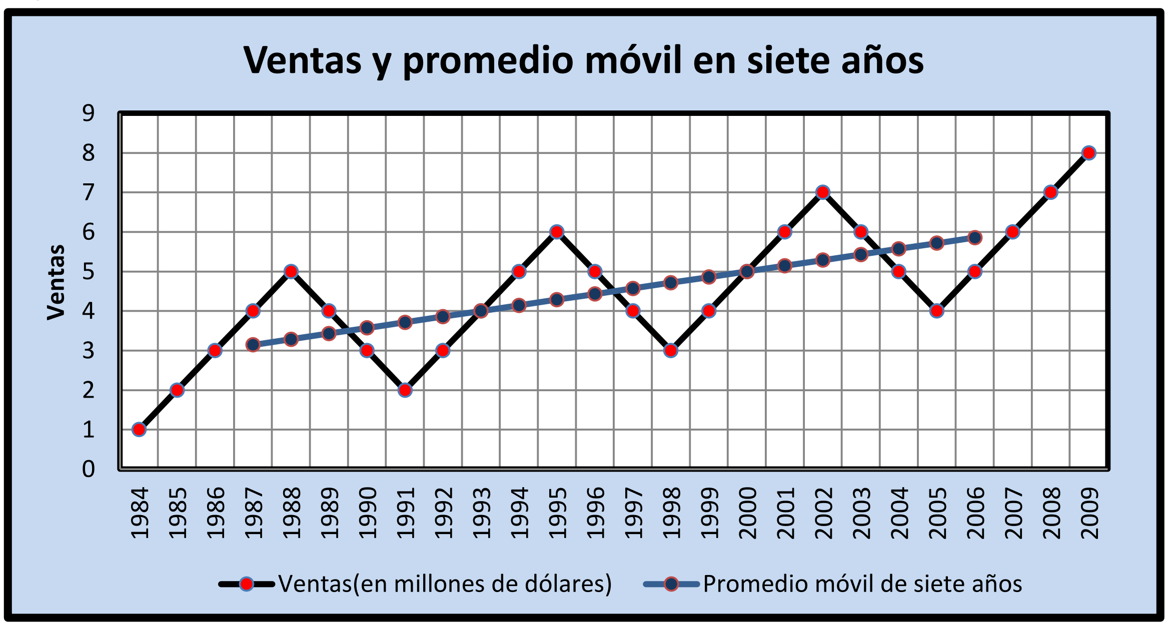
Si la duración de los ciclos es constante y las amplitudes de los ciclos son iguales, las fluctuaciones cíclica e irregular se eliminan por completo con el promedio móvil. El resultado es una recta. Por ejemplo, en la siguiente serie de tiempo, el ciclo se repite cada siete años y la amplitud de cada ciclo es 4; es decir, hay exactamente cuatro unidades desde el valle (el periodo más bajo) hasta el pico. Por lo tanto, el promedio móvil de siete años promedia a la perfección las fluctuaciones cíclicas e irregulares, y el residuo es una tendencia lineal.

Año	Ventas(en millones de dólares)	Total móvil de siete años	Promedio móvil de siete años
1984	**1**		
1985	**2**		
1986	**3**		
1987	**4**	22	3,143
1988	**5**	23	3,286
1989	**4**	24	3,429
1990	**3**	25	3,571
1991	**2**	26	3,714
1992	**3**	27	3,857
1993	**4**	28	4,000
1994	**5**	29	4,143
1995	**6**	30	4,286
1996	**5**	31	4,429
1997	**4**	32	4,571
1998	**3**	33	4,714
1999	**4**	34	4,857
2000	**5**	35	5,000
2001	**6**	36	5,143
2002	**7**	37	5,286
2003	**6**	38	5,429

2004	5	39	5,571
2005	4	40	5,714
2006	5	41	5,857
2007	6		
2008	7		
2009	8		

Tabla 1. Cálculos para determinar el promedio móvil de siete años

El primer paso para calcular el promedio móvil de siete años es determinar los totales móviles de siete años. Las ventas totales de los primeros siete años (1984-1990 inclusive) son $22 millones, determinadas por 1+2+3+4+5+4+3. (Consulte la tabla 1.) El total de $22 millones se divide entre 7 para determinar la media aritmética de las ventas anuales. El total de la suma de siete años (22) y la media de siete años (3.143) se colocan opuestos al año medio de ese grupo de siete, es decir, 1987, como indica la tabla 1. Luego se determinan las ventas totales de los siguientes siete años (1985-1991 inclusive). (Una forma conveniente para hacer este cálculo es restar las ventas de 1984 [$1 millón] al primer total de siete años [$22 millones] y sumar las ventas de 1991 [$2 millones], para obtener el nuevo total de $23 millones.). La media de este total, $3.286 millones, se coloca opuesta al año medio, 1988. Los datos de las ventas y el promedio móvil de siete años aparecen en la gráfica 3



Gráfica 3. Ventas y promedio móvil de siete años

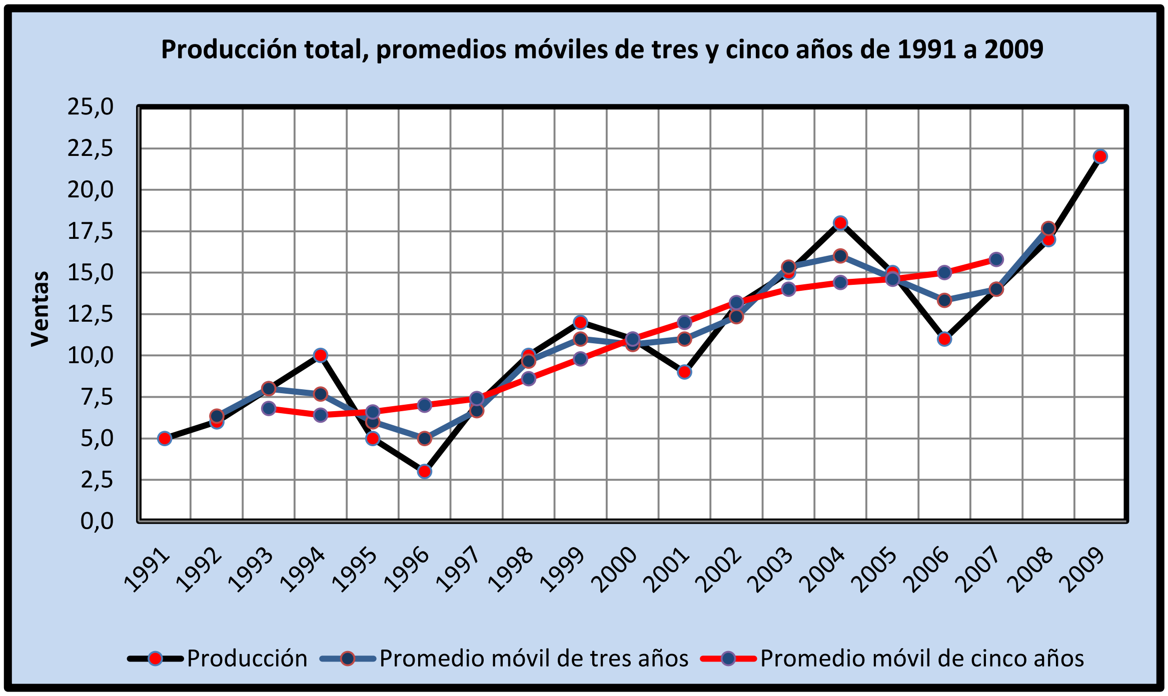
El número de valores de datos que se incluirán en un promedio móvil depende del carácter de los datos recopilados. Si son trimestrales, puesto que hay cuatro trimestres en un año, sería adecuado tener cuatro términos. Si los datos son diarios, como hay siete días en una semana, sería apropiado tener siete términos. También se puede emplear el método de prueba y error para determinar un número que nivele mejor las fluctuaciones debidas al azar.

Un promedio móvil se calcula muy fácil con Excel, pues sólo requiere un comando. Si los datos originales se encuentran en las ubicaciones D3 a D20 y se quiere obtener un promedio móvil con tres periodos, se puede ir a la posición E4 y escribir (D3+D4+D5)/3, y luego copiar la misma fórmula en la posición E19.

En la tabla 16-2 se muestran los promedios móviles de tres y cinco años de algunos datos de producción, y se ilustran en la gráfica 4.

Año	Producción Y	Total móvil de tres años	Promedio móvil de tres años	Total móvil de cinco años	Promedio móvil de cinco años
1991	5				
1992	6	19	6,3		
1993	8	24	8,0	34	6,8
1994	10	23	7,7	32	6,4
1995	5	18	6,0	33	6,6
1996	3	15	5,0	35	7,0
1997	7	20	6,7	37	7,4
1998	10	29	9,7	43	8,6
1999	12	33	11,0	49	9,8
2000	11	32	10,7	55	11,0
2001	9	33	11,0	60	12,0
2002	13	37	12,3	66	13,2
2003	15	46	15,3	70	14,0
2004	18	48	16,0	72	14,4
2005	15	44	14,7	73	14,6
2006	11	40	13,3	75	15,0
2007	14	42	14,0	79	15,8
2008	17	53	17,7		
2009	22				

Tabla 2. Promedio móvil de tres y cinco años



Gráfica 4. Promedio móvil de tres y cinco años de 1991 a 2009

Las ventas, la producción y otras series económicas y de negocios en general no tienen 1) periodos de oscilación con igual longitud ni 2) oscilaciones con amplitudes iguales. Por lo tanto, en la práctica, la aplicación de un promedio móvil no genera de manera precisa una recta. Por ejemplo, la serie de producción de la tabla 2 se repite casi cada cinco años, pero la amplitud de los datos varía de una oscilación a otra. La tendencia parece ser ascendente y un tanto lineal. Los dos promedios móviles, el de tres años y el de cinco, parecen adecuados para describir la tendencia en la producción desde 1991.

El promedio móvil de cuatro años, seis años y otros números de años pares presentan un problema menor respecto del centrado de los totales móviles y de los promedios móviles. Observe en la tabla 3 que no hay un periodo central, por lo que los totales móviles se colocan entre dos periodos. El total de los primeros cuatro años ($42) se coloca entre 2002 y 2003. El total de los siguientes cuatro años es $43. Se obtiene la media de los promedios de los primeros cuatro años y de los segundos cuatro años ($10.50 y $10.75, respectivamente), y la cifra resultante se centra en 2003. Este procedimiento se repite hasta calcular todos los promedios posibles de cuatro años.

Año	Ventas Y	Total móvil de cuatro años	Promedio móvil de cuatro años	Promedio móvil de cuatro años centrado
2001	8			
2002	11			
		42	10,50	
2003	9			10,625
		43	10,75	

2004	14			10,625
		42	10,50	
2005	9			10,625
		43	10,75	
2006	10			10,000
		37	9,25	
2007	10			9,625
		40	10,00	
2008	8			
2009	12			

Tabla 3. Promedio móvil de cuatro años

SUAVIZACION EXPONENCIAL

En la técnica de suavización exponencial se supone que el proceso es constante o que cambia con lentitud al paso del tiempo; es la misma hipótesis que la que se usa en la técnica del promedio móvil. Sin embargo, el objeto es compensar un inconveniente del método del promedio móvil. En forma específica, la suavización exponencial asigna un peso mayor a la observación más reciente. Esto contrasta con el método de promedio móvil, en el que a todas las observaciones se asignan pesos iguales.

Se define α ($0<\alpha<1$) como constante de suavización y se supone que los puntos de la serie de tiempo para los últimos t periodos son y_1, y_2,., y_t. Entonces y^*_{t+1}, el estimado para el periodo t+1, se calcula como sigue:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_1 + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \cdots$$

Como los coeficientes respectivos de y_p, y_{t-1}, y_{t-2}, … son progresivamente menores, el nuevo procedimiento asigna más peso a los puntos de los datos más recientes.

La fórmula para calcular y_{t+1}^* se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned} y_{t+1}^* &= \alpha y_1 + \alpha(1-\alpha)\{\alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t3} + \cdots\} \\ &= \alpha y_t + (1-\alpha)y_t^* \end{aligned}$$

De esta forma se puede calcular y_{t+1}^* a partir de y_t^*. En forma recursiva. La ecuación recursiva se inicia saltándose la estimación de y_1^* en t=1 y tomándose el estimado para t=2 como igual al dato real de para t=1: esto es, $y_2^* = y_1$. En realidad, cualquier razonamiento razonable se puede usar para iniciar los cálculos. Por ejemplo, hay quienes sugieren estimar a y_0^* como el promedio de una cantidad “razonable” de periodos al iniciar la serie de tiempo.

La selección de la constante de suavización α es básica para para estimar los pronósticos del futuro. Un valor mayor de α implica que las observaciones más recientes tienen mayor peso. En la práctica, el valor de α va de 0,01 a 0,30.

Ejemplo:

Aplicar la técnica de suavización exponencial a los datos de la demanda (en cantidades de unidades) de un artículo en inventario durante los últimos 24 meses, que se resumen en la siguiente tabla. Use $\alpha = 0{,}1$.

Mes, t	Demanda, y_t	Mes, t	Demanda, y_t
1	46	13	54
2	56	14	42
3	54	15	64
4	43	16	60
5	57	17	70
6	56	18	66
7	67	19	57
8	62	20	55
9	50	21	52
10	56	22	62
11	47	23	70
12	56	24	72

Los cálculos se hacen saltándose y_1^* y suponiendo que $y_2^* = y_1 = 46$ unidades. Para ilustrar los cálculos recursivos se tienen:

$$y_3^* = \alpha y_2 + (1-\alpha)y_2^* = 0{,}1 * 56 + 0.90 * 46 = 47$$

$$y_4^* = \alpha y_3 + (1-\alpha)y_3^* = 0{,}1 * 54 + 0{,}9 * 47 = 47{,}7$$

La tabla que se muestra a continuación se muestran los cálculos para suavización exponencial:

Mes, t	Demanda, y_t	y_t^*	error (e)	Valor Absoluto de e
1	46	N/A	-	-
2	56	46	10,00	10,00
3	54	47	7,00	7,00
4	43	47,70	-4,70	4,70
5	57	47,23	9,77	9,77
6	56	48,21	7,79	7,79
7	67	48,99	18,01	18,01
8	62	50,79	11,21	11,21
9	50	51,91	-1,91	1,91
10	56	51,72	4,28	4,28
11	47	52,15	-5,15	5,15
12	56	51,63	4,37	4,37
13	54	52,07	1,93	1,93
14	42	52,26	-10,26	10,26
15	64	51,24	12,76	12,76
16	60	52,51	7,49	7,49
17	70	53,26	16,74	16,74
18	66	54,93	11,07	11,07
19	57	56,04	0,96	0,96
20	55	56,14	-1,14	1,14
21	52	56,02	-4,02	4,02
22	62	55,62	6,38	6,38
23	70	56,26	13,74	13,74
24	72	57,63	14,37	14,37
		MAD	8,05	

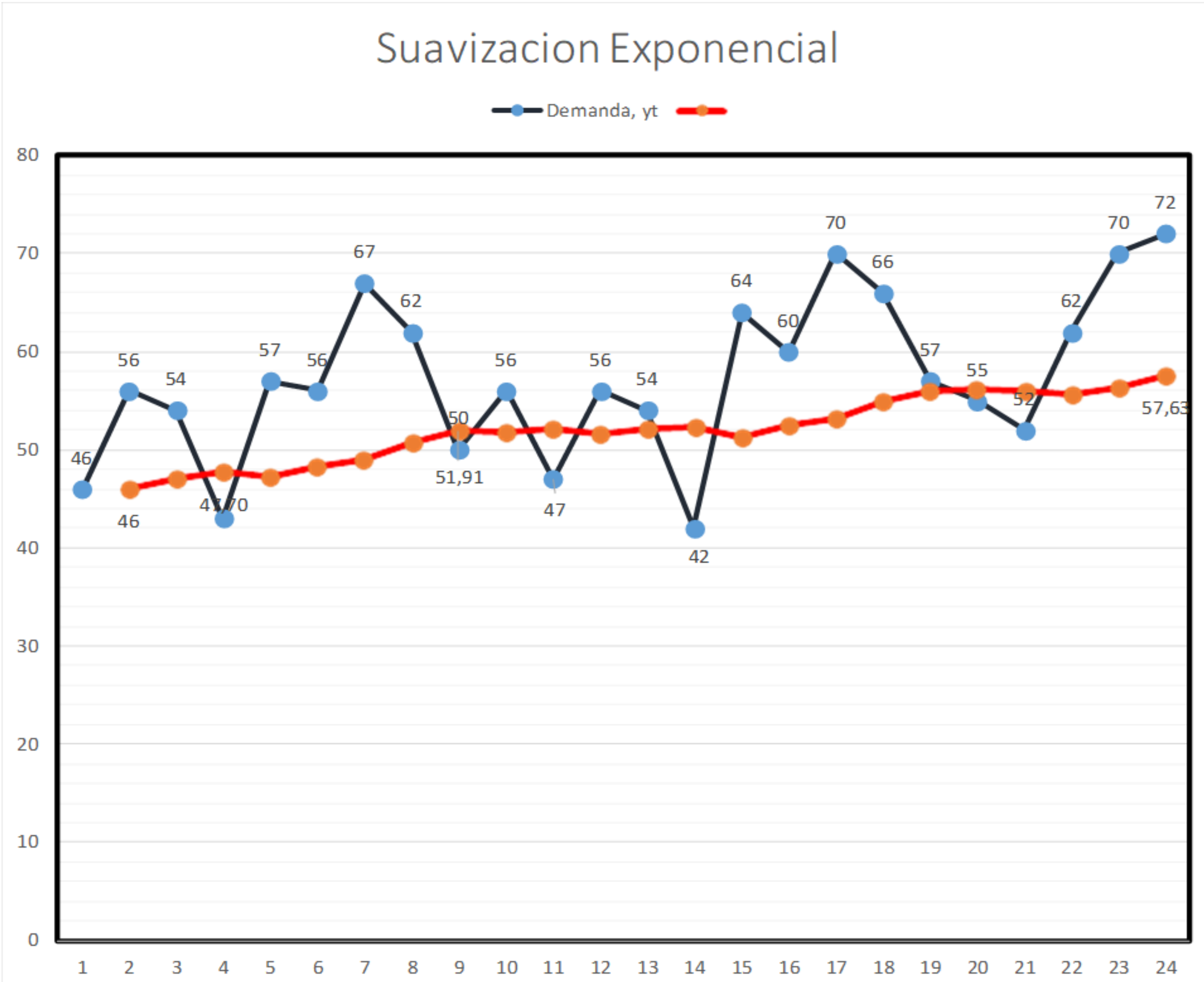
Con la columna del valor absoluto del error se puede calcular el MAD (error absoluto medio, que es un promedio de los errores) en este caso 8,05. Este indicador es muy útil para medir que tan bueno es un coeficiente de suavización para una serie de datos. A menor MAD mejor es el coeficiente de suavización para esa serie de datos.

De acuerdo con los cálculos, la estimación para t=25 es la siguiente:

$$y_{25}^* = \alpha y_{24} + (1-\alpha)y_{24}^* = 0{,}1 * 72 + 0{,}9 * 57{,}63 = 59{,}07\ unidades$$

Esta estimación es muy distinta de la que se obtuvo con promedio móvil (= 68 unidades). Un valor mayor de α producirá una estimación más cercana para t = 25.

Graficando los datos de la demanda versus y_t^* se puede observar que la línea de y_t^*es una curva muy suavizada, donde se atenúan los picos de la serie original, que es lo que se pretende demostrar.



Tendencia Lineal (Regresión)

Objetivo 3. Determinar una ecuación de tendencia lineal

La tendencia de largo plazo de muchas series de negocios, como ventas, exportaciones y producción, con frecuencia se aproxima a una recta. En este caso, la ecuación para describir este crecimiento es:

ECUACIÓN DE TENDENCIA LINEAL. $\hat{Y} = a + bt$ Ecuación 1

Dónde:

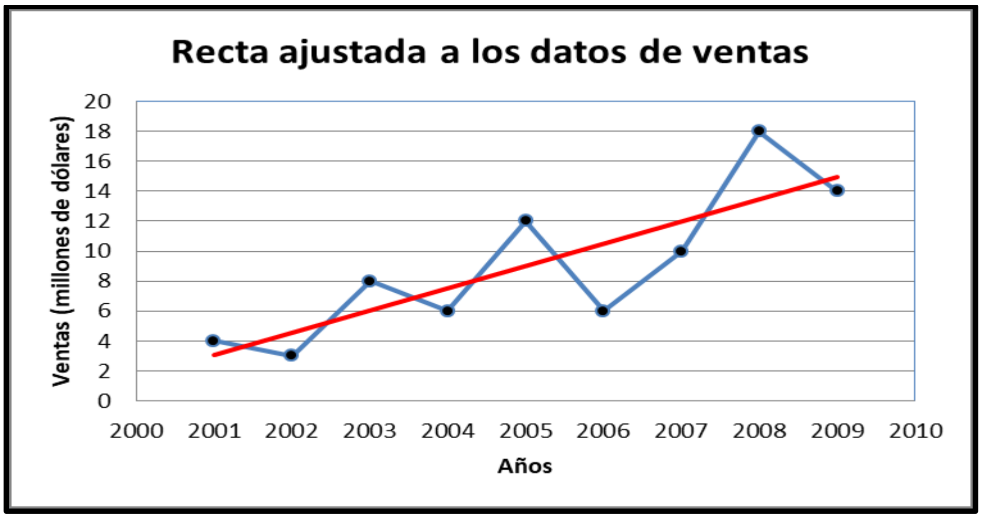
$\hat{Y}$: Que se lee Y testada o Y gorrito, es el valor proyectado de la variable Y de un valor seleccionado de t.

a: Es la intersección con el eje Y. Es el valor estimado de Y cuando t = 0. Otra forma de expresar esto es: a es el valor estimado de Y donde la línea cruza el eje Y cuando t es cero.

b: Es la pendiente de la recta, o el cambio promedio en $\hat{Y}$ por cada aumento de una unidad en t.

t: Es cualquier valor de tiempo seleccionado.

Para ilustrar el significado de $\hat{Y}$, a, b y t en un problema de serie de tiempo, en la gráfica 5 se traza una recta para representar la tendencia habitual de las ventas. Suponga que esta compañía inició sus operaciones en 2001. Este año inicial (2001) se designa de manera arbitraria como año 1. Observe que las ventas aumentaron $2 millones en promedio cada año; es decir, con base en la recta trazada por los datos de ventas, éstas aumentaron de $3 millones en 2001 a $5 millones en 2002, a $7 millones en 2003, a $9 millones en 2004, y así sucesivamente. Por lo tanto, la pendiente, o b, es 2. Además, observe que la recta interseca el eje Y (cuando t = 0) en $1 millón. Este punto es a. Otra manera de determinar b es ubicar el punto de partida de la recta en el año 1, que en este problema es 3 para 2001. Luego se ubica el valor en la recta del último año, que para 2009 es 19. Las ventas se incrementaron $19 millones - $3 millones = $16 millones, en ocho años (de 2001 a 2009). Por lo tanto, 16 / 8 = 2, que es la pendiente de la recta, o b.



Gráfica 5. Recta ajustada a los datos de ventas

La ecuación de la recta de la gráfica 5 es:

$$\hat{Y} = 1 + 2t$$

Dónde:

$\hat{Y}$: representa las ventas en millones de dólares.

1: es la intercepción con el eje Y. También representa las ventas en millones de dólares del año 0, o 2000.

t: se refiere al incremento de ventas anual.

En Estadística II, en el capítulo de Correlación y Regresión Lineal se trazó una recta por los puntos en un diagrama de dispersión para aproximar la recta de regresión. Sin embargo, cabe observar que este método para determinar la ecuación de regresión tiene una desventaja importante: la posición de la recta depende del criterio del individuo que la trace. Es probable que tres personas tracen tres rectas distintas de las gráficas de dispersión. De igual forma, la recta que se traza según los datos de ventas en la gráfica 5 quizá no sea la recta de mejor ajuste. Debido al criterio subjetivo, este método sólo se debe emplear cuando se necesite una aproximación rápida de la ecuación de la recta, o para verificar si la recta de mínimos cuadrados es razonable, tema que se analiza en seguida.

Método de los mínimos cuadrados

Objetivo 4. Utilizar la ecuación de tendencia para calcular proyecciones.

En el análisis de una regresión lineal simple (estudiado en Estadística II), se mostró el método de los mínimos cuadrados para determinar la mejor relación lineal entre dos variables. En los **métodos de proyección**, el tiempo es la variable independiente, y el valor de la serie de tiempo, la dependiente. Además, con frecuencia se codifica la variable independiente (tiempo), para facilitar la interpretación de las ecuaciones. En otras palabras, se hace que t sea 1 en el primer año, 2 en el segundo, y así en lo sucesivo. Si una serie de tiempo incluye las ventas de General Electric para cinco años iniciando en 2002 hasta 2006, se codifica el año 2002 como 1, 2003 como 2, y 2006 como 5.

Ejemplo

Las ventas de Jensen Foods, una pequeña cadena de abarrotes ubicada en el suroeste de Texas, desde 2005 son:

Año	Ventas (en millones de dólares)
2005	7
2006	10
2007	9
2008	11
2009	13

Determine la ecuación de regresión. ¿Cuál es el incremento anual de las ventas? ¿Cuál es la proyección de las ventas para 2012?

Para determinar la ecuación de la tendencia $\hat{Y} = a + bt$ puede utilizar las siguientes fórmulas para encontrar la pendiente, o el valor de b, y para ubicar la intercepción, o el valor de a.

Pendiente de la recta de regresión

$$b = r\frac{S_y}{S_x}$$

Dónde:

r es el coeficiente de correlación

Sy es la desviación estándar de Y (variable dependiente)

Sx es la desviación estándar de x (variable independiente)

Intercepción con el eje Y

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Dónde:

$\bar{Y}$ es la media de Y (la variable dependiente)

$\bar{x}$ es la media de X (la variable independiente)

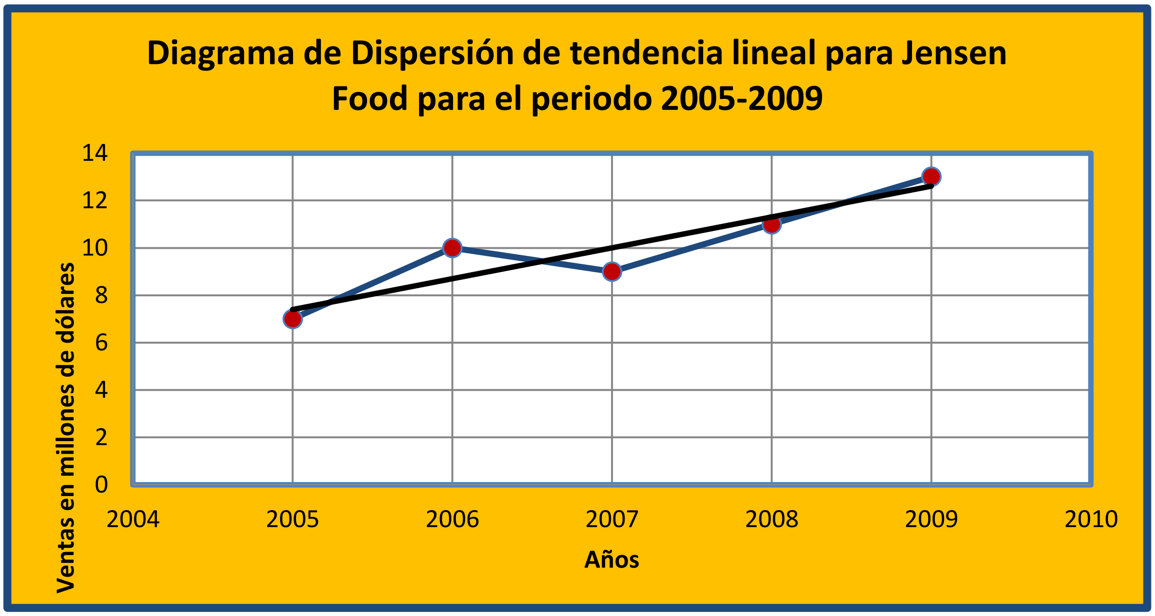
A continuación, se prepara la tabla para los cálculos de r, Sx, Sy, la media de X y la media de Y, y finalmente se sustituyen en la fórmula para encontrar la ecuación de regresión.

	X	Y
año	código	Ventas
2005	1	7
2006	2	10
2007	3	9

2008	4	11
2009	5	13
Promedio	3,00	10,00
Desv. Estándar	1,5811	2,2361
r	0,9192	
a	6,1	
b	1,3	

$$\hat{Y} = a + bt \qquad\qquad \boldsymbol{\hat{Y} = 6,1 + 1,3t}$$

Luego se grafican los datos en un Diagrama de Dispersión



A partir de la salida la ecuación de la tendencia es $\hat{Y} = 6,1 + 1,3t$. ¿Cómo se interpreta esta ecuación? Las ventas están en millones de dólares. Por lo tanto, el valor 1.3 indica que las ventas aumentaron a una tasa de 1,3 millones de dólares por año. El valor 6,1 es el valor estimado de las ventas en el año 0; es decir, la estimación de 2004, el cual se denomina año base. Por ejemplo, para determinar el punto en la recta de 2008, se sustituye el valor de t de 4 en la ecuación. Entonces $\hat{Y} = 6,1 + 1,3(4) = 11,3$.

Si las ventas, la producción u otros datos se aproximan a una tendencia lineal, se emplea la ecuación desarrollada mediante la técnica de mínimos cuadrados para estimar valores futuros. Es razonable que las ventas de Jensen Foods sigan una tendencia lineal. Por ello se utiliza la ecuación de la tendencia para proyectar las ventas futuras.

Consulte la tabla 4. El año 2005 se codifica como 1, el año 2007 como 3, y el año 2009 como 5. Es lógico codificar 2011 como 7 y 2012 como 8. Por lo tanto, se sustituye 8 en la ecuación de la tendencia y se despeja $\hat{Y}$.

$$\hat{Y} = 6,1 + 1,3(8) = 16,5$$

De esta manera, con base en las ventas pasadas, la estimación para 2012 es $16.5 millones.

Año	Ventas (en millones de dólares	t	$\widehat{Y}$	Determinado
2005	7	1	74	6,1+1,3(1)
2006	10	2	8,7	6,1+1,3(2)
2007	9	3	10	6,1+1,3(3)
2008	11	4	11,3	6,1+1,3(4)
2009	13	5	12,6	6,1+1,3(5)

Tabla4. Cálculos para determinar de la recta de mínimos cuadrados con los valores codificados

En este ejemplo de serie de tiempo, había cinco años de datos de ventas. Con base en estas cinco cifras de ventas, se estiman las ventas de 2012. Muchos investigadores sugieren que no se proyecten ventas, producción u otras series de negocios y económicas más que n/2 periodos de tiempo a futuro, donde n es el número de puntos de datos. Por ejemplo, si hay 10 años de datos, sólo se estiman hasta 5 años a futuro (n/2 = 10/2 = 5). Otros sugieren que la proyección no puede ser mayor que 2 años, en especial en tiempos de cambios económicos rápidos (como en Venezuela, que no se pueden hacer ningún tipo de proyección debido a la volatilidad de la economía).

TENDENCIAS NO LINEALES

Objetivo 5. Calcular una ecuación de tendencia no lineal.

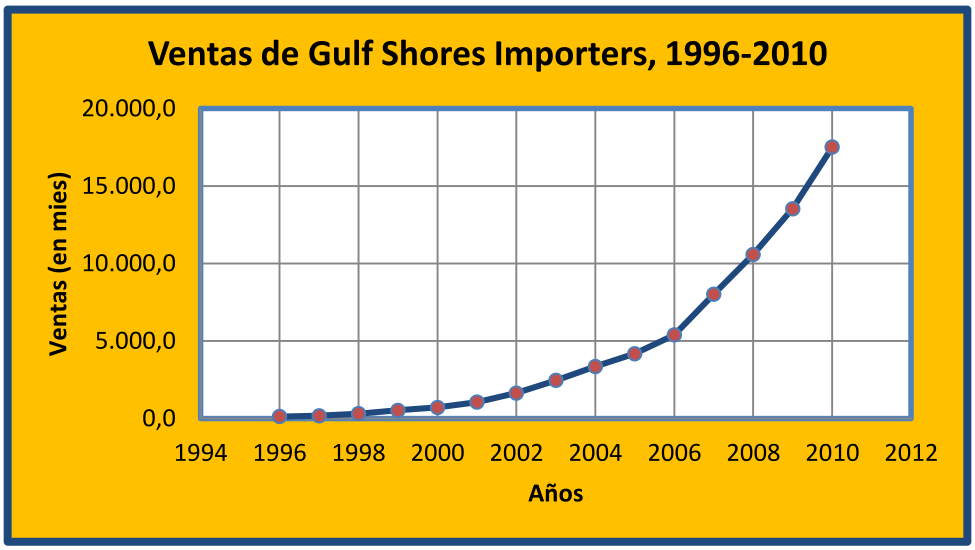
En el análisis anterior la atención se centró en una serie de tiempo cuyo crecimiento o declinación se aproximaban a una recta. Una ecuación de tendencia lineal se utiliza para representar la serie de tiempo cuando se considera que los datos aumentan (o disminuyen) en cantidades iguales, en promedio, de un periodo a otro. Los datos que aumentan (o disminuyen) en cantidades cada vez mayores durante un periodo aparecen curvilíneos cuando se trazan en una gráfica con escala aritmética. En otras palabras, los datos que aumentan (o disminuyen) en porcentajes o proporciones iguales durante un periodo aparecen curvilíneos sobre un papel cuadriculado. (Vea la gráfica 7.) La ecuación de la tendencia de una serie de tiempo que no se aproxime a una tendencia curvilínea, como la que se representa en la gráfica 7, se calcula con los logaritmos de los datos y el método de mínimos cuadrados. La ecuación general de la ecuación de la tendencia logarítmica es:

ECACIÓN DE TENDENCIA LOGARITMICA $\boldsymbol{log\,\widehat{Y} = \log a + \log b(t)}$ Ecuación 2

La ecuación de la tendencia logarítmica se puede determinar, con los datos de Gulf Shores Importers de la gráfica, utilizando Excel. El primer paso es capturar la información y después determinar el logaritmo base 10 de cada una de las importaciones del año. Por último, se utiliza el procedimiento de regresión para encontrar la ecuación de mínimos cuadrados. En otras palabras, se toma el logaritmo de cada uno de los datos del año, y luego se utilizan los logaritmos como la variable dependiente y el año codificado como la independiente.

Año	Ventas	Log-ventas	Código
1996	124,2	2,094122	1
1997	175,6	2,244525	2
1998	306,9	2,486997	3
1999	524,2	2,719497	4
2000	714,0	2,853698	5

2001	1.052,0	3,022016	6
2002	1.638,3	3,214393	7
2003	2.463,2	3,391500	8
2004	3.358,2	3,526107	9
2005	4.181,3	3,621311	10
2006	5.388,5	3,731468	11
2007	8.027,4	3,904575	12
2008	10.587,2	4,024781	13
2009	13.537,4	4,131535	14
2010	17.515,6	4,243425	15



Gráfica 7. Ventas de Gulf Shores Importers, 1996-2010

Para determinar la ecuación de tendencia logarítmica se utiliza el complemento de Excel análisis de datos: Regresión y se obtiene la siguiente pantalla:

Resumen				
Estadísticas de la regresión				
Coeficiente de correlación múltiple	0,9940			
Coeficiente de determinación R^2	0,9879			
R^2 ajustado	0,9870			
Error típico	0,0786			
Observaciones	15			
ANÁLISIS DE VARIANZA				
	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	1	6,585166291	6,585166291	1065,2279
Residuos	13	0,080365114	0,006181932	
Total	14	6,665531405		
	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	2,053805	0,0427	48,0741	0,0000
Variable X 1	0,153357	0,0047	32,6378	0,0000

La ecuación de regresión es $\boldsymbol{\hat{Y} = 2,053805 + 0,153357t}$, que es de la forma logarítmica. Ahora se tiene una ecuación de la tendencia en términos del porcentaje de cambio. Es decir, el valor 0.153357 es el porcentaje de cambio de $\hat{Y}$ por cada aumento unitario de t. Este valor es similar a la media geométrica descrita en la sección de medidas estadísticas. **El logaritmo de b** es 0.153357, y su antilogaritmo, o inverso, 1.423498. Si a este valor se le resta 1, como se hizo en la sección de medidas estadísticas, el valor **0.423498 indica la tasa anual de incremento de la media geométrica de 1996 a 2010**. La conclusión es que las importaciones aumentaron a una tasa de 42.35% al año durante el periodo. También se utiliza la ecuación de la tendencia logarítmica para hacer estimaciones de valores futuros. Suponga que desea estimar las importaciones de 2014. El primer paso es determinar el código de 2009, que es 19. Para explicar esto, el año 2010 tiene un código de 15 y el año 2014 es cuatro años más tarde; en consecuencia, 15+4=19. El logaritmo de las importaciones de 2014 es:

$$\hat{Y} = 2{,}053805 + 0{,}153357t = 2.053805 + 0{,}153357(19) = 4{,}967588$$

Para encontrar las importaciones estimadas de 2014, necesita el antilogaritmo de 4,967588, que es 92.809. Éste es la estimación del número de importaciones de 2014. Recuerde que los datos se dieron en miles de dólares, por lo que la estimación es $92.809.000.

Variación Estacional

Con anterioridad se mencionó que la variación estacional es otro componente de una serie de tiempo. Las series de negocios, como las ventas de automóviles, los embarques de botellas de bebidas de cola y la construcción residencial, tienen periodos de actividad superior e inferior al promedio cada año. En el área de producción, una razón para analizar las fluctuaciones estacionales es contar con un abastecimiento suficiente de materias primas que permita cumplir con la cambiante demanda estacional. La división de recipientes de vidrio de una compañía importante del sector, por ejemplo, fabricar botellas de cerveza no retornables, frascos para yodo, frascos para aspirina, botellas para cemento plastificado, etc. El departamento de programación de producción necesita saber cuántas botellas debe producir y cuándo de cada tipo. Una corrida de demasiadas botellas de un tipo puede ocasionar un problema grave de almacenamiento. La producción no se puede basar por completo en los pedidos existentes, pues muchos pedidos se hacen por teléfono para su embarque inmediato. Como la demanda de muchas botellas varía de acuerdo con la temporada, una proyección con una anticipación de un año o dos, por mes, es esencial para lograr una programación adecuada.

Un análisis de las fluctuaciones estacionales durante un periodo de años también puede ayudar para evaluar las ventas actuales. Las ventas habituales de tiendas departamentales en Estados Unidos, salvo las ventas por correo, aparecen como índices en la tabla 5. Cada índice representa las ventas promedio de un periodo de varios años. Las ventas reales de algunos meses estuvieron arriba del promedio (representado por un índice mayor que 100), y las ventas de los demás meses, debajo del promedio. El índice de 126,8 de diciembre indica que, por lo regular, las ventas de diciembre son 26,8% superiores al mes promedio; el índice de 86,0 de julio indica que las ventas departamentales de este mes casi siempre son 14% menores a las de un mes promedio.

Enero	87,0	Julio	86,0
Febrero	83,2	Agosto	99,7
Marzo	100,5	Septiembre	101,4
Abril	106,5	Octubre	105,8
Mayo	101,6	Noviembre	111,9
Junio	89,6	Diciembre	126,8

Tabla 5. Índices estacionales habituales de ventas en tiendas departamentales en Estados Unidos, incluyendo las ventas por correo.

Suponga que un gerente de tienda emprendedor, en un esfuerzo por estimular las ventas durante diciembre, introdujo diversas promociones únicas, como coros de villancicos por toda la tienda, exhibiciones mecánicas y dependientes vestidos con trajes de Santa Claus. Cuando se calculó el índice de ventas de ese mes, fue 150,0. En comparación con las ventas de diciembre habituales de 126,8, se concluyó que el programa de promoción fue un gran éxito.

Determinación de un índice estacional

Objetivo 6. Determinar e interpretar un conjunto de índices estacionales.

Un conjunto habitual de índices mensuales consta de 12 índices representativos de los datos de un periodo de 12 meses. Es lógico que haya cuatro índices estacionales habituales con los datos reportados en el trimestre. Cada índice es un porcentaje, cuyo promedio anual es igual a 100,0; es decir, cada índice mensual indica el nivel de ventas, producción u otra variable en relación con el promedio anual de 100,0. Un índice habitual de 96,0 en enero indica que las ventas (o cualquier otra variable) están, en general, 4% debajo del promedio del año. Un índice de 107,2 en octubre significa que la variable está, en general, 7,2% arriba de él.

Hay varios métodos para medir las fluctuaciones estacionales habituales en una serie de tiempo. El método más común para calcular el patrón estacional habitual se denomina método de la **razón con el promedio móvil**. Este método elimina los componentes de tendencia, cíclicos e irregulares de los datos originales (Y). En el siguiente análisis, T se refiere a la tendencia, S a la variación estacional, C a la variación cíclica e I a la variación irregular. Los números que resultan se conocen como índice estacional habitual.

Se estudiarán con detalle los pasos para obtener los índices estacionales habituales con el método de la **razón con el promedio móvil**. Para ilustrar este método, se eligen las ventas trimestrales de Toys International. Primero, se muestran los pasos necesarios para llegar al conjunto de índices estacionales habituales. Luego se utiliza el software MegaStat Excel y Minitab para calcular los índices estacionales.

Ejemplo

En la tabla 6 aparecen las ventas trimestrales de Toys International de 2004 a 2009. Las ventas se reportan en millones de dólares. Determine un índice estacional trimestral con el método de la razón con el promedio móvil.

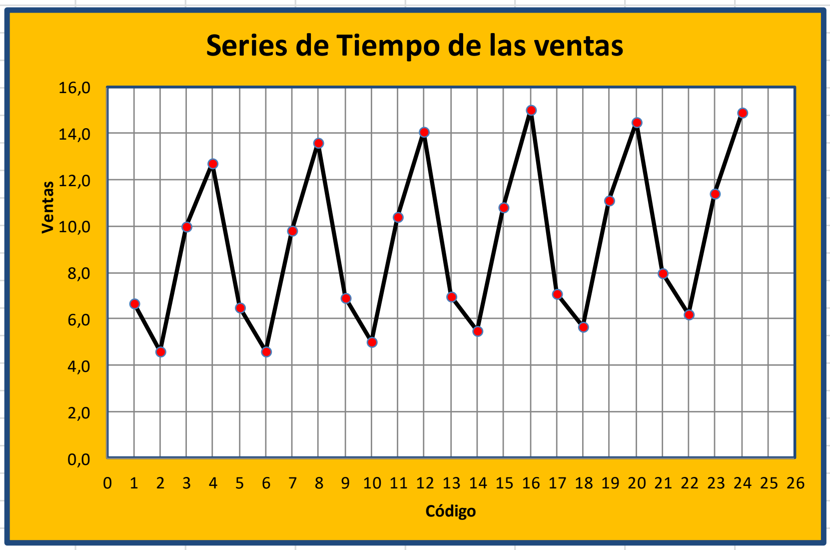
Año	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
2004	6,7	4,6	10,0	12,7
2005	6,5	4,6	9,8	13,6

2005	6,9	5,0	10,4	14,1
2007	7,0	5,5	10,8	15,0
2008	7,1	5,7	11,1	14,5
2009	8,0	6,2	11,4	14,9

Tabla 6. Ventas trimestrales de Toys International (millones de dólares)

En la gráfica 8 aparecen las ventas trimestrales de Toys International durante el periodo de seis años. Observe la naturaleza estacional de las ventas. En cada año, las ventas del cuarto trimestre son las mayores, y las del segundo trimestre, las menores. Además, hay un aumento moderado de las ventas de un año al siguiente. Para detectar esta característica basta observar los valores de las ventas de todos los cuartos trimestres. Durante el periodo de seis años, las ventas en el cuarto trimestre aumentaron. Si une estos puntos en su mente, visualizará el incremento de las ventas en el cuarto trimestre de 2010.

Año	Cuartil	Código	Ventas
2004	1	1	6,7
2004	2	2	4,6
2004	3	3	10,0
2004	4	4	12,7
2005	1	5	6,5
2005	2	6	4,6
2005	3	7	9,8
2005	4	8	13,6
2006	1	9	6,9
2006	2	10	5,0
2006	3	11	10,4
2006	4	12	14,1
2007	1	13	7,0
2007	2	14	5,5
2007	3	15	10,8
2007	4	16	15,0
2008	1	17	7,1
2008	2	18	5,7
2008	3	19	11,1
2008	4	20	14,5
2009	1	21	8,0
2009	2	22	6,2
2009	3	23	11,4
2009	4	24	14,9



Gráfica 8. Ventas trimestrales de Toys International, 2004-2009

Para determinar los índices estacionales trimestrales se deben dar seis pasos.

Paso 1: Para el siguiente análisis consulte la tabla 7. El primer paso es determinar el total móvil del cuarto trimestre de 2004. Inicie con el trimestre invernal de 2004, sume $6,7, $4,6, $10,0 y $12,7. El total es $34,0 (millones). El total del cuarto trimestre "se desplaza" al sumar las ventas de primavera, verano y otoño de 2004 a las ventas de invierno de 2005. El total es $33,8 (millones), determinado por 4,6+10,0+12,7+6,5. Este procedimiento se aplica a las ventas trimestrales de cada uno de los seis años. En la columna 2 de la tabla 7 aparecen los totales móviles. Observe que el total móvil, 34,0, se coloca entre las ventas de primavera y verano de 2004; el siguiente total móvil, 33,8, se coloca entre las ventas del verano y otoño de 2004, etc. Verifique los totales con frecuencia para evitar errores aritméticos.

Paso 2: Cada total móvil trimestral en la columna 2 se divide entre 4 para obtener el promedio móvil trimestral. (Vea la columna 3.) Todos los promedios móviles aún están colocados entre los trimestres. Por ejemplo, el primer promedio móvil (8,500) se coloca entre la primavera y el verano de 2004.

Paso 3: Se centran los promedios móviles. El primer promedio móvil centrado se determina mediante (8,500+8,450)/2 = 8,475, y se centra en oposición al verano de 2004. El segundo promedio móvil se determina mediante (8,450+8,450)/2 = 8,450. Los otros se determinan de manera similar. Observe en la columna 4 que cada promedio móvil centrado se coloca en un trimestre en particular

Año	Trimestre	(1) Ventas	(2) Total del cuarto trimestre	(3) Promedio móvil del cuarto trimestre	(4) Promedio móvil centrado	(5) Estacional específico
2004	Invierno	6,7				
	Primavera	4,6				
			34,0	8,500		
	Verano	10,0			8,475	1,180
			33,8	8,450		
	Otoño	12,7			8,450	1,503
			33,8	8,450		
2005	Invierno	6,5			8,425	0,772
			33,6	8,400		
	Primavera	4,6			8,513	0,540
			34,5	8,625		
	Verano	9,8			8,675	1,130
			34,9	8,725		
	Otoño	13,6			8,775	1,550
			35,3	8,825		
2006	Invierno	6,9			8,900	0,775
			35,9	8,975		
	Primavera	5,0			9,038	0,553
			36,4	9,100		
	Verano	10,4			9,113	1,141
			36,5	9,125		
	Otoño	14,1			9,188	1,535
			37,0	9,250		
2007	Invierno	7,0			9,300	0,753
			37,4	9,350		
	Primavera	5,5			9,463	0,581
			38,3	9,575		
	Verano	10,8			9,588	1,126
			38,4	9,600		
	Otoño	15,0			9,625	1,558
			38,6	9,650		
2008	Invierno	7,1			9,688	0,733
			38,9	9,725		
	Primavera	5,7			9,663	0,590
			38,4	9,600		
	Verano	11,1			9,713	1,143
			39,3	9,825		
	Otoño	14,5			9,888	1,466
			39,8	9,950		
2009	Invierno	8,0			9,988	0,801
			40,1	10,025		
	Primavera	6,2			10,075	0,615
			40,5	10,125		
	Verano	11,4				
	Otoño	14,9				

Tabla 7. Cálculos necesarios para índices estacionales específicos

Paso 4: Luego calcule el **índice estacional específico** por cada trimestre dividiendo las ventas en la columna 1 entre el promedio móvil centrado en la columna 4. El índice estacional específico reporta la razón del valor de la serie de tiempo original con el promedio móvil. Para explicar esta cuestión un poco más, si representa la serie de tiempo con TSCI y el promedio móvil con TC, de manera algebraica, si calcula TSCI/TC, el resultado es el componente estacional específico SI. El índice estacional específico del trimestre del verano de 2004 es 1,180, determinado por 10,0/8,475.

Paso 5: Los índices estacionales específicos aparecen organizados en la tabla 8. Esta tabla ayuda a ubicar los estacionales específicos de los trimestres correspondientes. Los valores 1,180, 1,130, 1,141, 1,126 y 1,143 representan estimaciones del índice estacional habitual del trimestre de verano. Un método razonable para encontrar un índice estacional habitual es promediar estos valores a fin de eliminar el componente irregular. Por lo tanto, el índice habitual del trimestre de verano se determina mediante (1,180+1,130+1,141+1,126+1,143)/5 = 1,144. Se utilizó la media aritmética, aunque también pudo emplear la mediana o una media modificada.

Año	Invierno	Primavera	Verano	Otoño	
2004			1,180	1,503	
2005	0,772	0,540	1,130	1,550	
2006	0,775	0,553	1,141	1,535	
2007	0,753	0,581	1,126	1,558	
2008	0,733	0,590	1,143	1,466	
2009	0,801	0,615			
Total	3,834	2,879	5,720	7,612	
Media	0,767	0,576	1,144	1,522	4,009
Ajustado	0,765	0,575	1,141	1,519	4,000
Índice	76,5%	57,5%	114,1%	151,9%	

Tabla 8. Cálculos necesarios para determinar índices trimestrales habituales

Paso 6. En teoría, las cuatro medias trimestrales (0,767, 0,576, 1,144 y 1,522) deberán totalizar 4,00, pues el promedio se fija en 1,0. El total de las cuatro medias trimestrales quizá no sea exactamente igual a 4,00 debido al redondeo. En este problema, el total de las medias es 4,009. Por lo tanto, se aplica un **factor de corrección** a cada una de las cuatro medias para que sumen 4,00.

FACTOR DE CORRECCION PARA AJUSTAR MEDIAS TRIMESTRALES

$$Factor\ de\ correcc\acute{o}n\ = \frac{4{,}00}{Total\ de\ cuatro\ medias} \qquad \text{Formula 3}$$

En este ejemplo,

$$\boldsymbol{Factor\ de\ correcci\acute{o}n\ = \frac{4{,}00}{4{,}009} = 0{,}997755}$$

Por lo tanto, el índice trimestral ajustado de invierno es 0,767(0,997755) = 0,765. Cada una de las medias se ajusta hacia abajo de modo que el total de nuestras medias trimestrales sea 4,00. En general, los índices se reportan como porcentajes, por lo que cada valor en la última fila de la tabla 8 se multiplica por 100. Así, el índice del trimestre de invierno es 76,5%, y del verano, 151,9%. ¿Cómo se interpretan estos valores? Las ventas del trimestre de otoño están 51.9% (1,519-1=0,519=51,9%) por arriba de un trimestre habitual, y del invierno, 23,5% por debajo (100,0 – 76,5). Estos resultados no deben sorprender. En el periodo anterior a Navidad (el trimestre de otoño) son más altas las ventas de juguetes. Después de Navidad (el trimestre de invierno), las ventas de juguetes declinan de forma drástica.

Como se dijo antes, hay software para realizar los cálculos con salida en pantalla de los resultados. La captura de pantalla de MegaStat Excel se muestra en seguida. El uso de software reducirá en gran medida el tiempo de cómputo y la posibilidad de cometer un error en los cálculos aritméticos, pero debe comprender los pasos del proceso. Puede haber diferencias ligeras en las respuestas, debido al número de dígitos manejados en los cálculos.

Datos Desestacionalizados

Objetivo 7. Datos Desestacionalizados

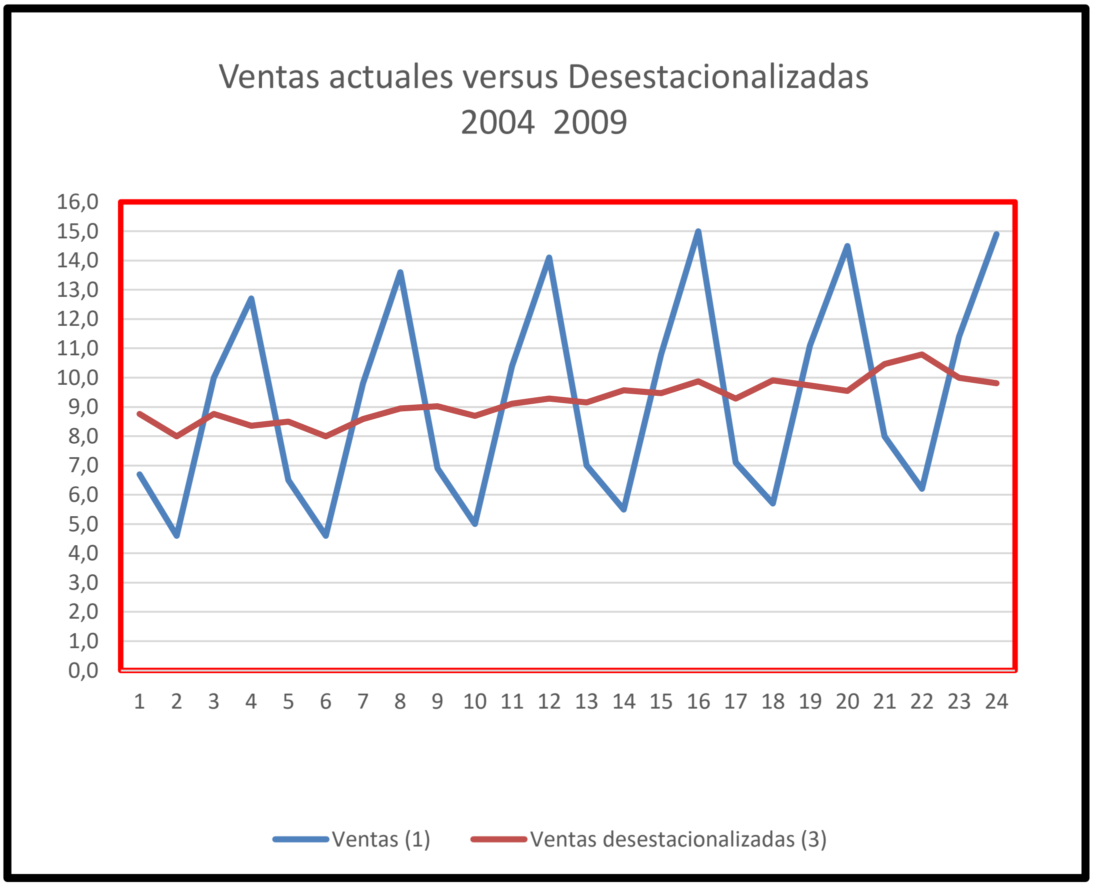
Por ejemplo, un conjunto de índices habituales es muy útil para ajustar las series de ventas de fluctuaciones estacionales. La serie de ventas resultantes se denominan ventas desestacionalizadas o estacionalmente ajustadas. **La razón para desestacionalizar la serie de ventas es eliminar las fluctuaciones estacionales de modo que sea posible estudiar la tendencia y el ciclo**. Para ilustrar el procedimiento, los totales de las ventas trimestrales de Toys International de la tabla 9 aparecen en la columna 1 de la tabla 9.

Año	Trimestre	Ventas (1)	Índice estacional 2)	Ventas desestacionalizadas (3)
2004	Invierno	6,7	0,765	8,76
	Primavera	4,6	0,575	8,00
	Verano	10,0	1,141	8,76
	Otoño	12,7	1,519	8,36
2005	Invierno	6,5	0,765	8,50
	Primavera	4,6	0,575	8,00
	Verano	9,8	1,141	8,59
	Otoño	13,6	1,519	8,95
2006	Invierno	6,9	0,765	9,02
	Primavera	5,0	0,575	8,70
	Verano	10,4	1,141	9,11
	Otoño	14,1	1,519	9,28
2007	Invierno	7,0	0,765	9,15
	Primavera	5,5	0,575	9,57
	Verano	10,8	1,141	9,47
	Otoño	15,0	1,519	9,87
2008	Invierno	7,1	0,765	9,28
	Primavera	5,7	0,575	9,91
	Verano	11,1	1,141	9,73
	Otoño	14,5	1,519	9,55
2009	Invierno	8,0	0,765	10,46
	Primavera	6,2	0,575	10,79
	Verano	11,4	1,141	9,99
	Otoño	14,9	1,519	9,81

Tabla 9: Ventas reales y desestacionalizadas de Toys International

Para eliminar el efecto de la variación estacional, la cantidad de ventas en cada trimestre (con los efectos de tendencia, cíclicos, irregulares y estacionales) se divide entre el índice estacional de ese trimestre, es decir, TSCI/s. por ejemplo, las ventas reales del primer trimestre de 2004 fueron de $6,7 millones. El índice estacional del trimestre de invierno es 76,5%, indica que las ventas del primer trimestre están habitualmente 23,5% debajo del promedio de un trimestre típico. Al dividir las ventas reales $6,7 millones entre 76,5, y multiplicar el resultado por 100, se obtiene las ventas

desestacionalizadas, es decir, se elimina el efecto estacional sobre las ventas, del primer trimestre de 2004. Este es $8.758.170, determinado mediante ($6.700.000/76,5)100.
Continúe este proceso con los demás trimestres en la columna 3 de la tabla 9, con los resultados reportados en millones de dólares. Como se ha eliminado (cancelado) el componente estacional de las ventas trimestrales, la cifra de las ventas desestacionalizadas sólo contiene los componentes de la tendencia (T) cíclica (C) e irregular (I). al analizar las ventas desestacionalizadas en la columna 3 de la tabla 9, observe que las ventas de juguetes mostraron un aumento moderado durante el periodo de seis años. En la gráfica 9 aparecen tanto las ventas reales como las desestacionalizadas. Es claro, que eliminar el factor estacional permite enfocarse en la tendencia general de largo plazo de las ventas. También puede determinar la ecuación de regresión de los datos de la tendencia y con ella proyectar ventas futuras.



Grafica 9: Ventas reales y desestacionalizadas de Toys International 2004 - 2009

Uso de datos Desestacionalizados para proyección

Objetivo 8. Uso de datos Desestacionalizados para proyección

El procedimiento para identificar la tendencia y los ajustes estacionales se combina para producir proyecciones estacionalmente ajustadas. Para identificar la tendencia, determine la ecuación de la tendencia de mínimos cuadrados en los datos históricos Desestacionalizados. Luego proyecte esta tendencia en periodos futuros, y después ajuste las tendencias de los valores para calcular los factores estacionales. El siguiente ejemplo lo aclara.

Toys Internacional quiere proyectar sus ventas de cada trimestre de 2010. Con la información de la tabla 9.

Los datos Desestacionalizados, que se ilustran en la gráfica 9, parecen seguir una línea recta. De aquí que sea razonable desarrollar una ecuación de tendencia lineal con base en estos datos. La ecuación de tendencia desestacionalizada es:

$$\hat{Y} = a + bt$$

En donde:

$\hat{Y}$ es el valor de la tendencia estimado de las ventas de Toys International durante el periodo y.

a es la intersección de la recta de la tendencia en el tiempo 0.

b es la pendiente de la recta.

t es el periodo de tiempo codificado.

El trimestre de invierno de 2004 es el primer trimestre, por lo cual se codifica como 1, el trimestre de primavera de 2004 se codifica como 2, etc. El último trimestre de 2009 se codifica como 24. Estos valores de los códigos aparecen en la siguiente tabla:

Año	Tiempo codificado	Trimestre	Ventas (1)	Índice estacional 2)	Ventas desestacionalizadas (3)
2004	1	Invierno	6,7	0,765	8,76
2004	2	Primavera	4,6	0,575	8,00
2004	3	Verano	10,0	1,141	8,76
2004	4	Otoño	12,7	1,519	8,36
2005	5	Invierno	6,5	0,765	8,50
2005	6	Primavera	4,6	0,575	8,00
2005	7	Verano	9,8	1,141	8,59
2005	8	Otoño	13,6	1,519	8,95
2006	9	Invierno	6,9	0,765	9,02
2006	10	Primavera	5,0	0,575	8,70
2006	11	Verano	10,4	1,141	9,11
2006	12	Otoño	14,1	1,519	9,28
2007	13	Invierno	7,0	0,765	9,15
2007	14	Primavera	5,5	0,575	9,57
2007	15	Verano	10,8	1,141	9,47
2007	16	Otoño	15,0	1,519	9,87
2008	17	Invierno	7,1	0,765	9,28
2008	18	Primavera	5,7	0,575	9,91
2008	19	Verano	11,1	1,141	9,73
2008	20	Otoño	14,5	1,519	9,55
2009	21	Invierno	8,0	0,765	10,46
2009	22	Primavera	6,2	0,575	10,79
2009	23	Verano	11,4	1,141	9,99
2009	24	Otoño	14,9	1,519	9,81

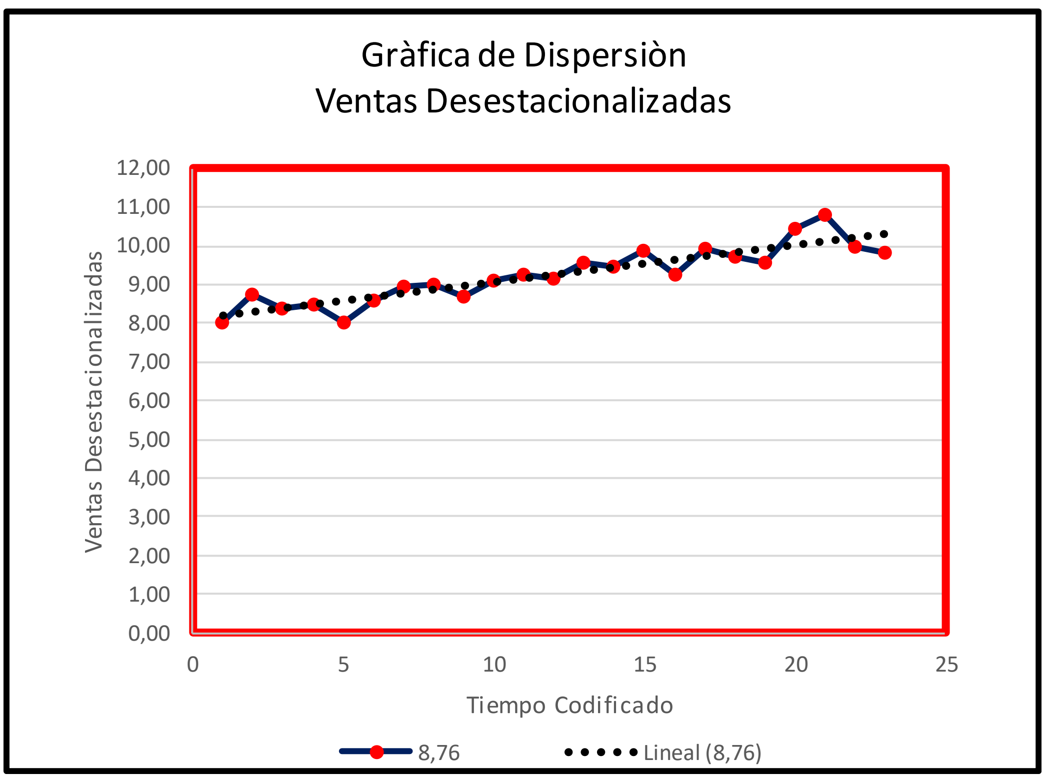
Se emplea Minitab o una calculadora científica para encontrar la ecuación de regresión. A continuación, se muestra la ecuación de regresión y la gráfica en un diagrama de dispersión de los periodos de tiempo codificados y las ventas desestacionalizadas, así como la recta de regresión.
La ecuación de la recta de regresión es:

$$\hat{Y} = 8,109 + 0,0900t$$

La pendiente de la recta de tendencia es 0,0900. Esto indica que durante los 24 trimestres las ventas desestacionalizadas aumentaron a una tasa de 0,0900 (millones de dólares) por trimestre u $90.000 por trimestre. El valor de 8,109 es la intersección de la recta de tendencia con el eje Y (es decir, para t=0).
Se supone que los últimos 24 periodos son un buen indicador de las ventas futuras, utilice la ecuación de la tendencia para estimar las ventas futuras. Por ejemplo, el valor de t en el trimestre de invierno de 2010 es 25. Por lo tanto, las ventas estimadas de ese periodo suman 10,3590, determinadas mediante

$$\hat{Y} = 8,109 + 0,0900(25) = 10,3590$$

Las ventas desestacionalizadas estimadas del trimestre invierno de 2010 alcanzan $10.359.000. esta es la proyección de ventas antes de considerar los efectos de las temporadas.



Utilice el mismo procedimiento y una hoja de cálculo de Excel para determinar la proyección de cada uno de los trimestres de 2010. Una captura parcial de la pantalla de Excel es la siguiente:

Trimestre	Valor codificado	Ventas Estimadas	Indice estacional	ventas desestacionalizadas
Invierno	25	10,359	0,765	7,925
Primavera	26	10,449	0,575	6,008
Verano	27	10,539	1,141	12,025
Otoño	28	10,629	1,519	16,145

Ahora que ya tienen las predicciones de los cuatro trimestres de 2010, la puedes ajustar a las temporadas. El índice de un trimestre de invierno es 0,765. Por ende, puede ajustar por temporada la proyección del trimestre de invierno de 2010 mediante 10,359*(0,765) = 7,925. Las estimaciones de cada uno de los cuatro trimestres de 2010 aparecen en la columna derecha de la captura de pantalla de Excel. Observe cómo los ajustes estacionales aumentan de forma drástica las estimaciones de ventas de los dos últimos trimestres del año.

Competencia Especifica N° 4

Teoría de Colas o de Líneas de Espera

Modelos de Colas y líneas de espera (Principios de administración de operaciones Barry Render / Jay Heizer)

El conjunto de conocimientos acerca de las líneas de espera, llamada a menudo teoría de colas, es una parte importante de la administración de producción / operaciones y una herramienta valiosa para el administrador de operaciones. Las líneas de espera son una situación común – pueden, por ejemplo, tomar la forma de automóviles esperando una reparación en un centro de servicio automotriz, trabajos de impresión esperando ser terminados en una imprenta o estudiantes esperando una asesoría con su profesor.

El análisis de colas en términos de longitud de la línea de espera, tiempo promedio de espera y otros factores, nos ayudan a entender los sistemas de servicios (tales las estaciones de cajeros de banco), actividades de servicio (para reparar máquinas descompuestas), y tareas de control en el piso del taller. De hecho, los pacientes que aguardan al médico en su consultorio y los taladros descompuestos que esperan en una instalación de reparaciones tienen mucho en común desde una reparación de P/OM. Ambas utilizan recursos humanos de equipos para mantener los valiosos de producción (gente y maquinas) en buenas condiciones.

Los administradores desean que las filas de espera sean lo suficientemente cortas, de tal forma que los clientes no se sientan descontentos y se vayan sin comprar, que compren pero nunca regresen. Sin embargo, los administradores están dispuestos a permitir alguna espera, si esta es proporcional a un ahorro significativo en los costos de servicio.

Una forma de evaluar una instalación de servicio es observar el costo total esperado, que se ilustra en la figura 1. El costo total es la suma de los costos de servicio esperados más los costos de esperar.

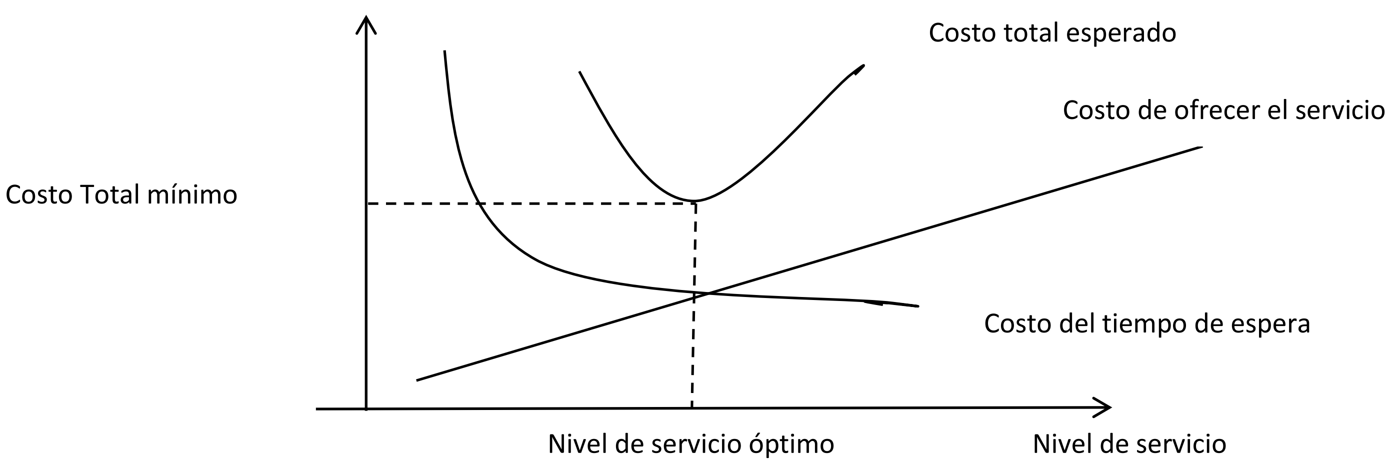


Figura 1. El intercambio entre los costos de espera y los costos de servicio.

CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA DE LÍNEAS DE ESPERA

En esta sección, se revisarán las tres partes de un sistema de líneas de espera o de colas:

1. Llegadas o entradas al sistema;
2. Disciplina de la cola o línea de espera;
3. Instalación de servicio.

Estos tres componentes tienen ciertas características que deben sr examinadas antes de que se puedan desarrollar modelos matemáticos de colas.

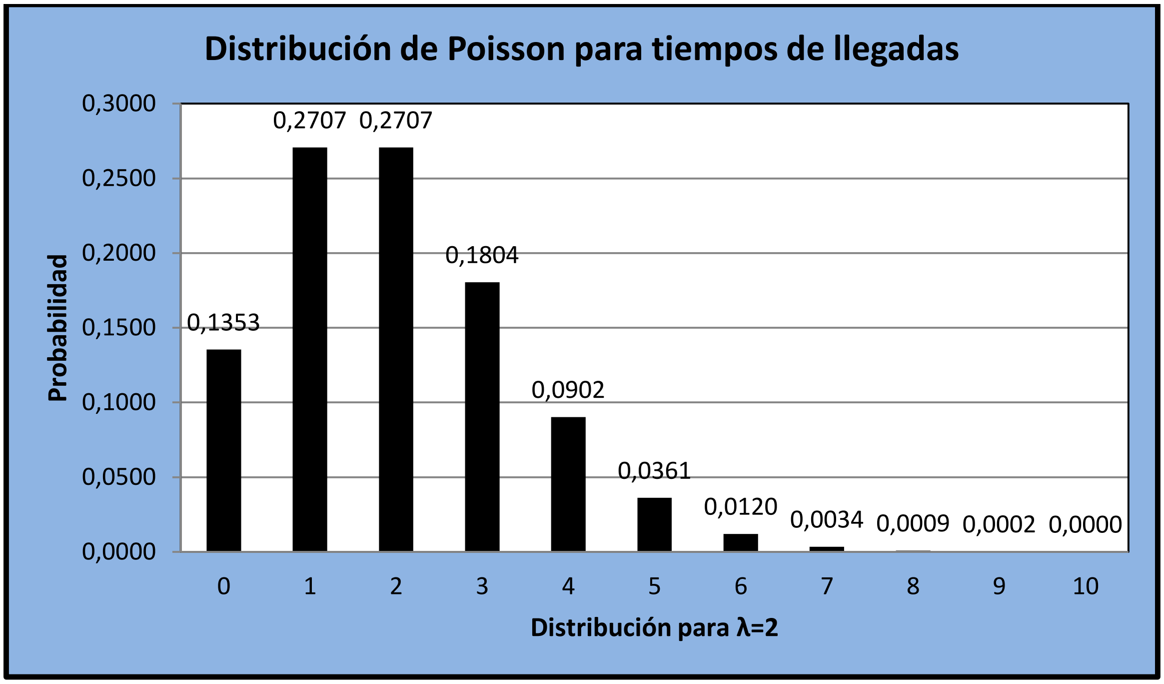
Características de las llegadas

La fuente de entrada que genera las llegadas o clientes para el sistema de servicio tiene tres características principales. Estas tres características importantes son el tamaño de la población de llegada, el patrón de la llegada al sistema de colas y el comportamiento de las llegadas.

Tamaño de la población fuente. Los tamaños de la población pueden ser ilimitados (esencialmente infinitos) o limitados (finitos). Cuando el número de clientes o de llegadas disponibles en cualquier momento dado es únicamente una pequeña porción de las llegadas potenciales, se considera a la población de llegada como ilimitada o infinita. Para propósitos prácticos, los ejemplos de poblaciones ilimitadas incluyen la llegada de automóviles a las casetas de pago en las carreteras, los compradores que llegan a un supermercado y los estudiantes que llegan a registrarse para las clases en una universidad grande. Un ejemplo de una población limitada o finita, es una tienda de copiado con únicamente ocho maquinas copiadoras, las cuales se pueden descomponer y requerir servicio de reparación.

Patrón de llegadas al sistema. Los clientes llegan, o bien a una instalación de servicio de acuerdo a algún programa (por ejemplo, un paciente cada quince minutos o un estudiante para asesoría cada media hora) o bien aleatoriamente. Las llegadas se consideran aleatorias cuando son independientes una de la otra y su ocurrencia no puede ser predicha con exactitud. Frecuentemente en los patrones de colas, el número de llegadas por unidad de tiempo se puede estimar por una distribución de probabilidad como **distribución de Poisson**.

La figura 2 ilustra la distribución de Poisson para λ = 2 y λ = 4. Esto significa que si la tasa promedio de llegadas es de λ = 2 clientes por hora, la probabilidad de que 0 clientes lleguen en cualquier hora aleatoria es de aproximadamente 13%, la probabilidad de 1 cliente es del 2%, 2 clientes el 27%, 3 clientes el 18%, 4 clientes el 9%, y así sucesivamente. Las probabilidades de que lleguen 9 o más son virtualmente nulas. Las llegadas, desde luego, no son siempre Poisson (pueden seguir alguna otra distribución) y se deben examinar para asegurarse de que la aproximación es adecuada y corresponde a la distribución de Poisson, antes de aplicarla.



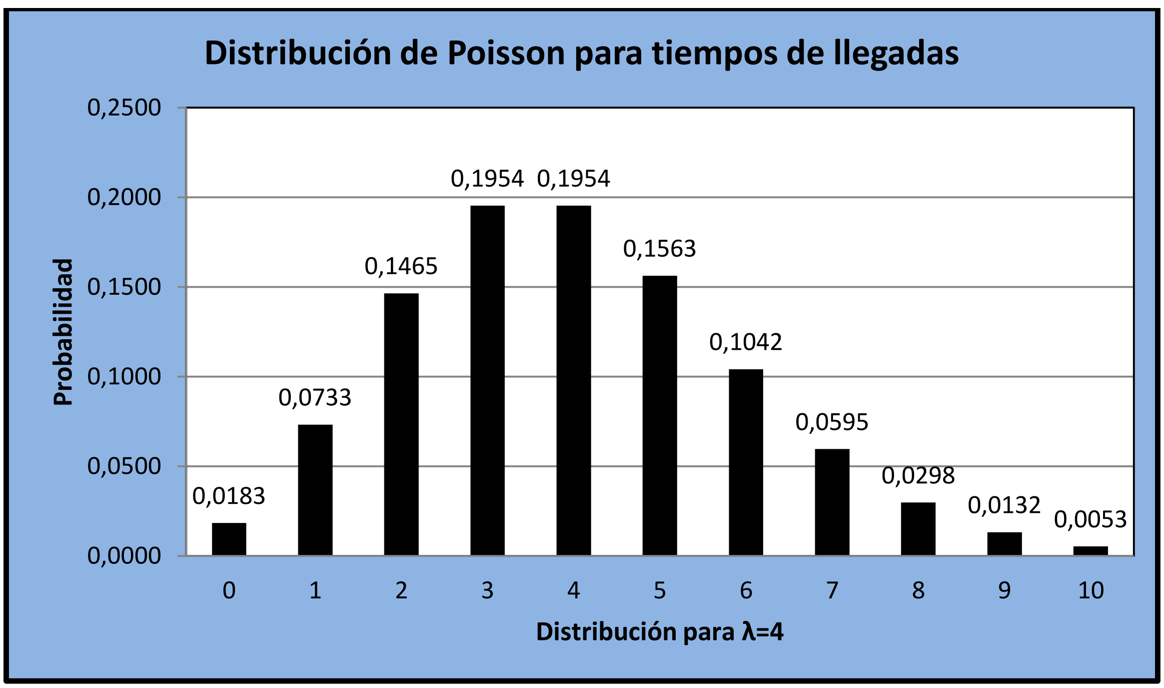


Figura 2. Dos ejemplos de distribución de Poisson para tiempos de llegada.

Comportamiento de las llegadas.

La mayoría de los modelos de colas asumen que un cliente que llega es un cliente tolerante. Los clientes tolerantes son gente o máquinas que esperan su turno para recibir el servicio y no se intercambian entre las líneas. Desafortunadamente, la vida se complica por el hecho de que se sabe que la gente se frustra o deserta. Los clientes que se rustran se niegan a unirse a la línea de espera debido a que es demasiado larga y no se adaptan a sus necesidades o intereses. Los clientes desertores son aquellos que entran a la fila, pero se vuelven impacientes y la dejan sin completar su transacción. En realidad, ambas situaciones únicamente sirven para acentuar la necesidad de la teoría de cola y el análisis de las líneas de espera.

Características de la línea de espera

La línea de espera por sí misma es el segundo componente de un sistema de colas. La longitud de una línea puede ser limitada o ilimitada. Una cola es limitada cuando no puede, por leyes o restricciones físicas, crecer a una longitud infinita. Este puede ser el caso en una pequeña peluquería que tiene únicamente un número limitado de sillones de espera. Los modelos de colas analíticos son tratados en este capítulo bajo la suposición de que son colas de longitud ilimitadas. Se dice que una cola es ilimitada cuando su tamaño no está restringido, tal como es el caso de la caseta de cobro que sirve a los automóviles que llegan.

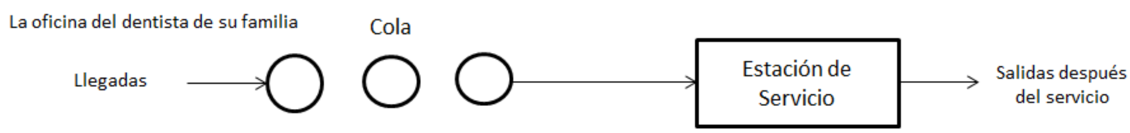
Otra característica de la línea de espera tiene que ver con la disciplina de la cola. Esto se refiere a la regla por la cual los clientes en una línea deben ser atendidas. La mayoría de los sistemas utilizan una disciplina de colas conocida como primero en entrar, primero en salir (FIFO) (por sus siglas en inglés: First-In, First-Out). En una sala de emergencia de un hospital o en una línea de salida express en un supermercado, sin embargo, varias prioridades asignadas pueden ser preferentes a FIFO. Los pacientes que se encuentran con lesiones críticas se adelantaran en prioridad de atención sobre los pacientes con dedos o narices rotas. Los compradores con menos de 10 artículos son permitidos en la entrada de la cola de salida express (pero son atendidos después como primera entrada, primer servicio). Las corridas de programas son otro ejemplo de los sistemas de colas que operan bajos programas de prioridad. Por ejemplo, en la mayoría de las grandes compañías, se deben hacer los cheques producidos por computadoras en una fecha específica, el programa de nómina tiene la prioridad más alta sobre otras corridas.

Características de las instalaciones de servicio

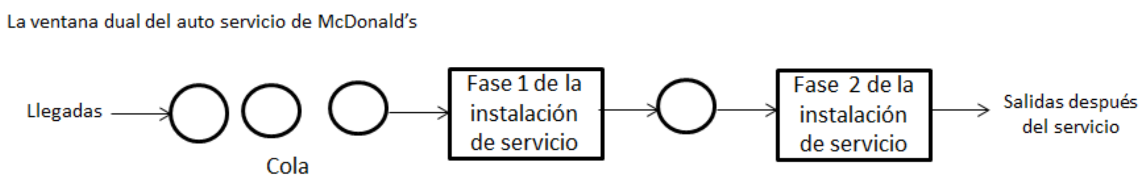
La tercera parte de cualquier sistema de colas es la instalación de servicio. Son importantes dos propiedades básicas: (1) la configuración del sistema de servicio y (2) el patrón de los tiempos de servicio.

Configuraciones básicas del sistema de colas. Los sistemas de servicios están clasificados generalmente en términos de sus números de canales (como el número de servidores) y el número de fases (el número de detenciones de servicio que se deben hacer). Un **sistema de colas de canal sencillo, con un servido**r, es tipificado por el auto-banco que tiene abierto únicamente un cajero, o por el servicio en auto de un restaurante de comida rápida. Por otro lado, si el banco tuviera varios cajeros de guardia y cada cliente esperara en una línea común para el primer cajero disponible, entonces se tendría un **sistema de colas multicanales** trabajando. La mayoría de los bancos hoy en día son sistemas de servicio multicanales, así como la mayoría de las peluquerías grandes, mostradores de boletos de aerolíneas y oficinas de correos.

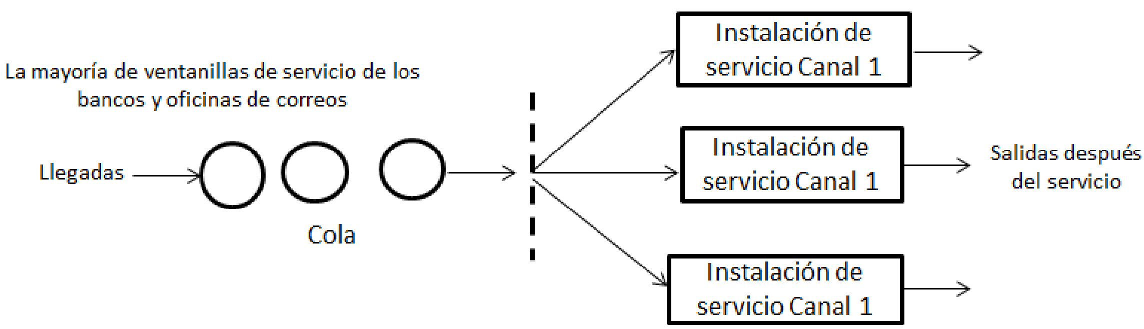
Un **sistema de colas de fase sencilla** es aquel donde el cliente recibe el servicio de una sola estación y después abandona el sistema. En un restaurante de comida rápida la persona que toma la orden también trae la comida y toma el dinero, éste es un sistema de una sola ase; así como lo es una agencia de licencias de conducir, donde la persona que toma la solicitud también califica el examen y recolecta el pago de la licencia. Pero si el restaurante requiere que se coloque la orden en una estación, se pague en la segunda y se recoja la comida en una tercera parada de servicio, se convierte un **sistema multifase**. De la misma manera, si la agencia de licencias para conducir es grande o está ocupada, probablemente se tendrá que esperar en una línea para completar la solicitud (la primera parada de servicio), luego hacer la cola una vez más para obtener la calificación del examen (la segunda parada de servicio) y finalmente ir a un tercer mostrador de servicio para pagar los derechos. Para ayudar a relacionar los conceptos de canales y ases, la figura 3 presenta cuatro configuraciones posibles.



Sistemas de un canal y una fase



Sistemas de un canal y multifase



Sistemas multicanal y una fase

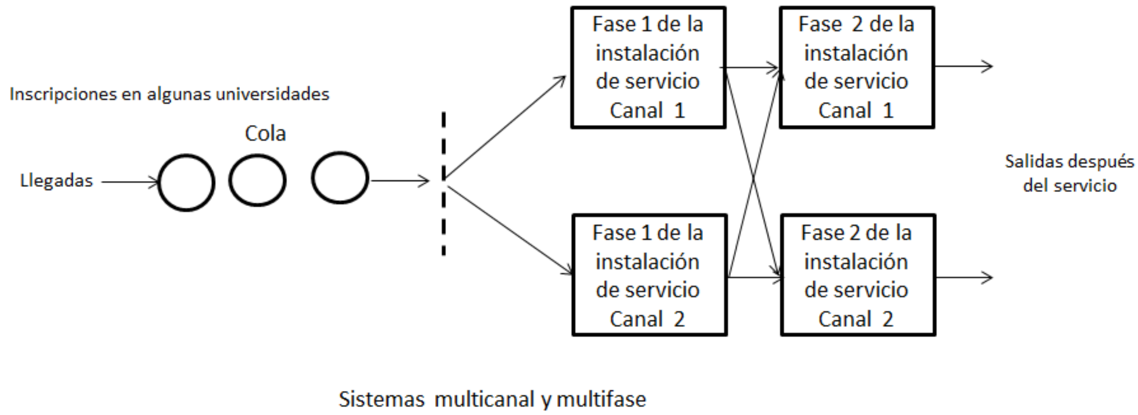


Figura 3. Configuraciones básicas del sistema de colas.

Distribución del tiempo de servicio. Los patrones de servicio son como los patrones de llegada, pueden ser constantes o aleatorios. Si el tiempo de servicio es constante, toma la misma cantidad de tiempo atender a cada cliente. Es el caso en una operación de servicio realizada por una máquina, tal como en un lavado automático de automóviles. Con mayor frecuencia, los tiempos de los servicios están distribuidos aleatoriamente. En muchos casos, se puede asumir que los tiempos aleatorios de los servicios están descritos por la distribución de probabilidad exponencial negativa. La figura 4 ilustra que si los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial, la probabilidad de permanecer en la instalación un tiempo de servicio muy largo es baja. Por ejemplo, cuando un tiempo promedio de servicio es de 20 minutos, rara vez, si no es que nunca, un cliente requerirá más de 90 minutos en las instalaciones de servicio. Si el tiempo medio de servicio es de una hora, la probabilidad de requerir más de 90 minutos en el servicio es virtualmente cero.

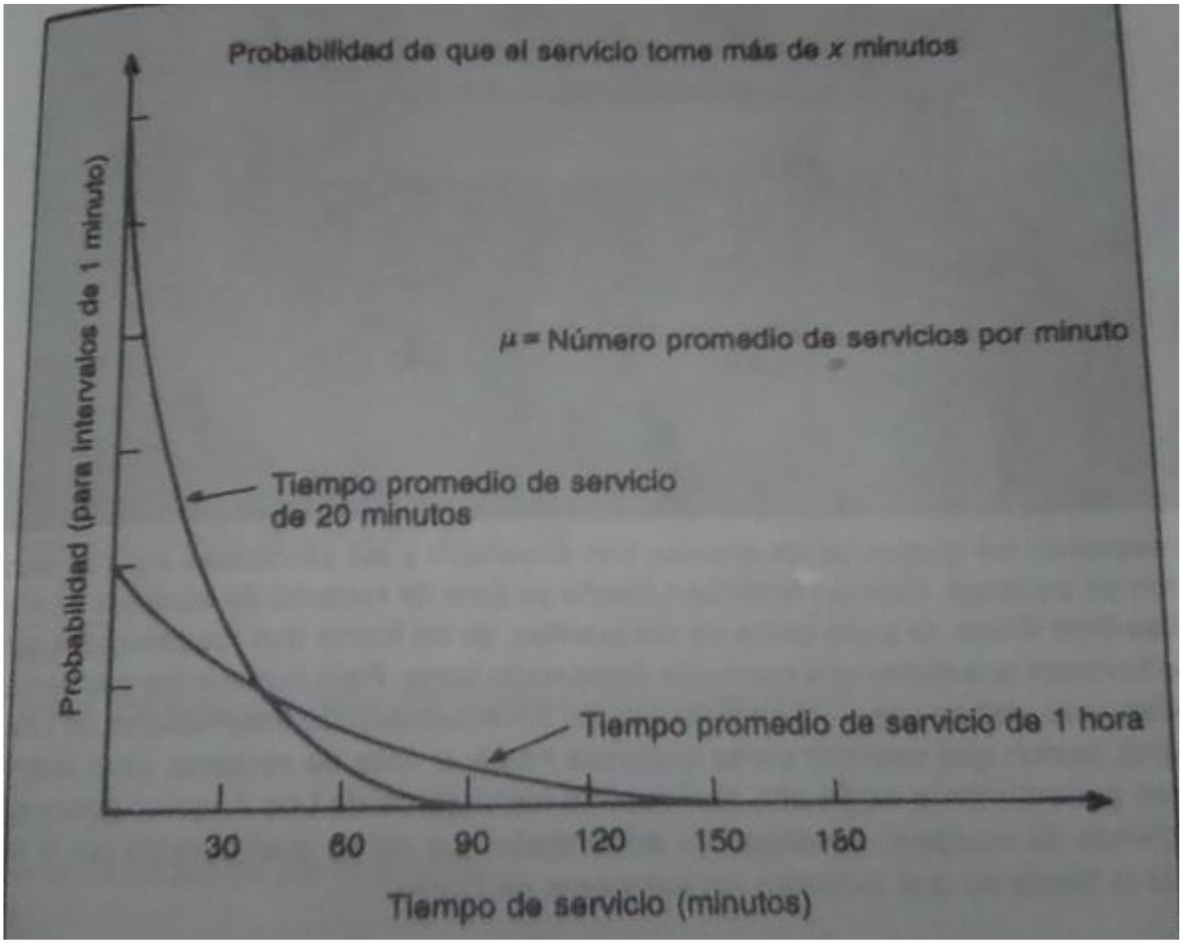


Figura 4. Dos ejemplos de la distribución exponencial negativa para tiempos de servicio

Medición del rendimiento en el sistema de cola

Los modelos de colas ayudan a los administradores que toman decisiones a balancear los costos deseables de los servicios con los costos de espera de la línea. En un análisis de cola se obtienen comúnmente varias medidas del rendimiento en el sistema de línea de espera; a continuación se describen algunas de ellas:

1. El tiempo promedio que cada cliente u objeto pasa en la cola
2. La longitud promedio de la cola
3. El tiempo promedio que cada cliente pasa en el sistema (el tiempo de espera más el tiempo de servicio)
4. El numero promedio de clientes en el sistema
5. La probabilidad de que la instalación de servicio esté ociosa
6. El factor de utilización del sistema
7. La probabilidad de un número específico de clientes en el sistema.

VARIEDAD DE LOS MODELOS DE COLAS

Se puede aplicar una amplia variedad de modelos de colas en la administración de operaciones. Sin embargo, en vez de ir al detalle acerca de todos ellos, se presentarán los cuatro modelos utilizados más ampliamente. Estos se delinean en la tabla 1, y los ejemplos de cada uno de ellos continúan en las próximas secciones.

Observe que los cuatro modelos de colas se enlistan en la tabla 1, el sistema simple, el multicanal, el de servicio constante y el de población limitada, tienen tres características en común. Todos suponen:

1. Las llegadas con distribución de Poisson
2. La disciplina de FIFO
3. Una fase de servicio única

Modelo	Nombre (con el nombre técnico entre paréntesis)	Ejemplo	Número de canales	Número de fases	Patrón de tasa de llegada	Patrón del tiempo de servicio	Tamaño de la población	Disciplina de la cola
A	Sistema simple (M/M/1)	Mostrador de información en una tienda departamental	Sencillo	Sencillo	Poisson	Exponencial	Ilimitado	FIFO
B	Multicanal (M/M/S)	Mostrador de boletos de una aerolínea	Multicanal	Sencillo	Poisson	Exponencial	Ilimitado	FIFO
C	Servicio constante (M/D/1)	Lavado automático de automóviles	Sencillo	Sencillo	Poisson	Constante	Ilimitado	FIFO
D	Población limitada (población finita)	Taller con sólo una docena de máquinas que se pueden descomponer	sencillo	sencillo	Poisson	Exponencial	Limitado	FIFO

Adicionalmente, describen los sistemas de servicios que operan bajo condiciones estables, hacia adelante. Esto significa que la llegada y las tasas de servicio permanecen estables durante el análisis.

Modelo A: Modelo de colas de canal sencillo con llegadas de Poisson y tiempos exponenciales de servicio

El caso más común de los problemas de cola involucra el canal sencillo o línea de espera con servidor sencillo. En esta situación, las llegadas desde una sola línea se deben servir desde una estación sencilla (figura 3). Se asume que existen las siguientes condiciones en este tipo de sistema:

1. Las llegadas son atendidas sobre la base de primero en entrar, primero en salir, (FIFO), y cada una espera el servicio, haciendo caso omiso de la longitud de la línea o cola.
2. Cada entrada es independiente de la anterior, pero el número promedio de llegadas (tasa de llegadas) no cambia a través del tiempo.
3. Las llegadas son descritas por una distribución de probabilidades de Poisson y provienen de una población infinita (o muy grande).

4. Los tiempos de servicio varían de un cliente al siguiente y son independientes unos de los otros, pero la tasa promedio se conoce.
5. Los tiempos de servicio ocurren de acuerdo con la distribución de probabilidad exponencial negativa.
6. La tasa de servicio es más rápida que la tasa de llegadas.

Cuando se cumplen estas condiciones, se pueden desarrollar las series de ecuaciones mostradas en la tabla 2. Los ejemplos 1 y 2 ilustran cómo se pueden utilizar el modelo A (el cual en las revistas técnicas es conocido como el modelo M/M/1)

Tabla 2. Fórmulas para colas para el modelo A. sistema simple también llamada M/M/1.

Ls = Número promedio de unidades (clientes en el sistema)	$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Ws = Tiempo promedio que tarda una unidad en el sistema (tiempo de espera más tiempo de servicio)	$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$
Lq = Número promedio de unidades en la cola	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Wq = Tiempo promedio que tarda una unidad esperando en la cola	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
ρ = Factor de utilización por el sistema	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
P_0 = Probabilidad de 0 unidades en el sistema (esto es, la unidad de servicio esta ociosa)	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
$P_{n>k}$= Probabilidad de más de k unidades en el sistema, donde n es el número de unidades en el sistema de k unidades	$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$

λ = Número medio de llegadas por periodo de tiempo.

µ = Número medio de gente o artículos servidos por periodo de tiempo.

Ejemplo 1

Jones, el mecánico de Golden Muffler Shop, es capaz de instalar mofles nuevos a una tasa promedio de tres por hora (aproximadamente uno cada 20 minutos), de acuerdo con una distribución de probabilidad exponencial negativa. Los clientes que buscan este servicio llegan al taller a un promedio de dos por hora, siguiendo una distribución de Poisson. Los clientes son atendidos sobre una base de primero en entrar, primero en salir, y proceden de una población muy grande (casi infinita) de posibles compradores.

A partir de esta descripción, existe la posibilidad de obtener las características de operación del sistema de colas de Golden Muffler Shop:

Datos:

λ = Llegada de 2 automóviles por hora

µ = 3 automóviles servidos por hora

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3 - 2} = 2\ automóviles\ en\ el\ sistema, como\ promedio$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1\ hora\ de\ tiempo\ de\ espera\ en\ el\ sistema$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ automóviles\ en\ promedio\ esperan\ en\ la\ línea$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3} = 40\ minutos\ de\ tiempo\ promedio\ de\ espera\ por\ automóvil$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} \quad el\ mecánico\ está\ ocupado\ el\ 66{,}67\%\ del\ tiempo$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3} = 0{,}33\ de\ probabilidad\ de\ que\ haya\ cero\ automóviles\ en\ el\ sistema$$

Probabilidad de más de k automóviles en el sistema

K	$\boldsymbol{P_{n>k} = \left(2/3\right)^{k+1}}$	
0	0,6667	Obsérvese que 1-P0= 1,-0,33= 0,667
1	0,4444	
2	0,296	
3	0,198	Indica que hay un 19,8% de posibilidad de que haya más tres automóviles en el sistema
4	0,132	
5	0,088	
6	0,058	
7	0,039	

Una vez que se han calculado las características de operación de un sistema de colas, es importante hacer un estudio económico de si impacto. El modelo de línea de espera descrito anteriormente es valioso para predecir los tiempos potenciales de espera, las longitudes de las colas, los tiempos ociosos, y así sucesivamente; sin embargo, este modelo no identifica las decisiones óptimas ni tampoco considera los actores de costo. Como se estableció anteriormente, la solución de un problema de colas puede requerir que la administración equilibre entre el incremento del costo al orecer un mejor servicio y la disminución de los costos por la espera, ambos se derivan al orecer ese servicio. Consideremos los costos involucrados en el ejemplo 1.

Ejemplo 2

El dueño de Golden Muffler Shop estima que el costo del tiempo de espera del cliente, en términos de la insatisfacción y la pérdida de la buena voluntad, es de 10 dólares por hora de tiempo que pasan esperando en la línea. Dado que el automóvil promedio tiene una espera de 2/3 horas (Wq) se atiende un promedio aproximado de 16 automóviles por día (dos por hora, en una jornada de 8 horas diariamente), el número total de horas que los clientes esperan, mientras se instalan los mofles del auto es:

$$\frac{2}{3}(16) = \frac{32}{2} = 10\frac{2}{3} horas$$

Por lo tanto, en este caso:

Costo del tiempo de espera del cliente = $\$10\left(10\frac{2}{3}\right) = 107\ dólares\ por\ día$

El único costo importante que el dueño de Golden puede identificar en la situación de colas en el salario de Jones, el mecánico, que gana 7 dólares por hora, o 56 dólares por día. Entonces:

$$Costos\ totales\ esperados = \$107 + \$56 = \$163\ por\ día.$$

Modelo B: Modelo de colas multicanales

El siguiente paso lógico es revisar un sistema de colas con múltiples canales, en el cual dos o más servidores están disponibles para manejar a los clientes que llegan. Si se sigue asumiendo que los clientes esperan el servicio desde una sola línea y después acuden al primer servidor disponible. Este ejemplo de línea de espera multicanal, de fase sencilla, se encuentra en muchos bancos hoy en día. Una línea común se forma y el cliente a la cabeza de la línea acude al primer cajero disponible (refiérase a la figura 3 para una configuración multicanal típica).

El sistema multicanal, presentado nuevamente asume que las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson y que los tiempos de servicio son exponencialmente distribuidos, el servicio es primera entrada, primer servicio, y se supone que todos los servidores se desempeñan a la misma tasa. Otras suposiciones enlistadas anteriormente para el modelo de canal sencillo se aplican de la misma manera.

Tabla 3. Fórmulas de la teoría de colas para el modelo B – Sistema Multicanal – también llamado M/M/S.

M = Número de canales abiertos o servidores

λ = Tasa promedio de llegadas

μ = Tasa promedio de servicio en cada canal

La probabilidad de que haya cero gente o unidades en el sistema es:	$P_0 = \dfrac{1}{\left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu - \lambda}}\ para\ M\mu > \lambda$ o $P_0 = \dfrac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}\right\} + \left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^M}{M!}\left(\frac{M\mu}{M\mu-\lambda}\right)\right]}$ o $P_0 = \dfrac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}\right\} + \left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^M}{M!}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\right]}$
Probabilidad que una persona (gente) o unidades tenga que esperar para ser atendido	$P_w = \left(\frac{1}{M!}\right) * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M * \left(\frac{M\mu}{(M\mu - \lambda)}\right) * P_0$
Factor de utilización del sistema	$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$
El número promedio de gente o unidades en el sistema es:	$L_s = \dfrac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$ 0 Ecuación de Flujo de Little $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ o

	la formula alterna $L_s = \lambda W_s$
El tiempo promedio que tarda una unidad esperando en la línea para ser atendida (es decir, en el sistema) es:	$W_s = \dfrac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2} P_0 + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{L_s}{\lambda}$ o Ecuación de Flujo de Little $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu}$
El número promedio de gente o unidades en la línea de espera para servicio es:	$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$ o $L_q = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^M \lambda\mu}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2} P_0$ o Ecuación de flujo de Little $L_q = \lambda W_q$
El tiempo promedio que una persona o unidad pasa esperando en la cola por el servicio es (tiempo promedio en la línea):	$W_q = W_s - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{L_q}{\lambda}$ $W_q = \dfrac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2} P_0$

Las ecuaciones de la teoría de colas para el Modelo B (el cual tiene el nombre técnico de M/M/S) se muestran en la figura 3. Estas ecuaciones son obviamente más complejas que aquellas utilizadas en el modelo de canal sencillo; no obstante, son utilizadas exactamente en la misma manera y ofrecen el mismo tipo de información que el modelo más simple. El software de computadora AB: POM demuestra su utilidad en la solución de problemas de cola multicanales, así como otros.

Ejemplo 3

La Golden Muffler Shop ha decidido abrir un segundo puesto de garaje y de contratar a un segundo mecánico que maneje la instalación de mofles. Los clientes, que llegan a una tasa de aproximadamente λ = 2 por hora, esperan en una sola línea hasta que uno de los mecánicos está libre. Cada mecánico instala mofles a la tasa de aproximadamente μ = 3 por hora.

Para encontrar la comparación entre este sistema y el sistema de línea de espera de canal sencillo, se calcularan varias características de operación para el sistema de canales M = 2; posteriormente se deberán comparar contra los resultados del ejemplo 1.

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{M!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \frac{M\mu}{M\mu-\lambda}} \; para\; M\mu > \lambda$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_0^1 \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{2(3)}{2(3)-2}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{6}{6-2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

= 0,5 de probabilidad de cero automóviles en el sistema.

Entonces:

$$L_s = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(2)(3)\left(\frac{2}{3}\right)^2}{(2-1)!\,[(2)(3)-2]^2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{\frac{8}{3}}{16}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

= 0,75 es número promedio de automóviles en el sistema.

$$W_s = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!\,(M\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}3753\ horas$$

= 22,5 minutos es el tiempo promedio que un automóvil pasa en el sistema

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$$

= 0,0833 el número promedio de automóviles en la cola.

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{1}{12}}{2} = 0{,}0417\ horas$$

= 2,5 minutos de tiempo promedio que un automóvil pasa en la cola.

Estas características se pueden resumir y comparar con las del modelo de canal sencillo de la siguiente manera:

Características	Canal Sencillo	Dos Canales
Po	0,33	0,5
Ls	2 automóviles	0,75 automóviles
Ws	60 minutos	22,5 minutos
Lq	1,33 automóviles	0,0833 automóviles
Wq	40 minutos	2,5 minutos

El incremento en el servicio tiene su efecto dramático en casi todas las características. En particular, el tiempo que transcurre esperando en la línea, desciende de 40 minutos a solo 2,5 minutos.

Modelo C: Modelo de tiempo constante de servicio

Algunos sistemas de servicio tienen tiempos constantes de servicio en lugar de tiempos distribuidos exponencialmente. Cuando los clientes o el equipo son procesados de acuerdo con ciclo fijo, tal como es el caso de un lavado automático de automóviles o un viaje en un parque de diversiones, son adecuados los tiempos constantes de servicio. Debido a que las tasas constantes son seguras, los valores para Lq, Wq, Ls y Ws, son siempre menores de lo que serían en el modelo A, el cual tiene tasas variables de servicio. De hecho, tanto la longitud promedio de la cola como el tiempo promedio de espera en la misma son la mitad del modelo C. Las fórmulas para el modelo de servicio constante están dadas en la tabla 4. El modelo C también tiene el nombre técnico de M/D/1 en la literatura de teoría de colas.

Tabla 4. Fórmulas de teoría de colas para el modelo C – Servicio constante, también llamado modelo M/D//1.

Características	Fórmulas
Longitud promedio de la cola	$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$
Tiempo promedio de espera en la cola	$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$
Número promedio de clientes en el sistema	$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$
Tiempo promedio de espera en el sistema	$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

Ejemplo 4

Garcia-Golding Recycling, Inc., recolecta y compacta latas de aluminio y botellas de vidrio en la ciudad de Nueva York. Sus choferes de camiones, que llegan a descargar estos materiales para su reciclaje, normalmente esperan un promedio de 15 minutos antes de vaciar sus cargas. El costo del chofer y el tiempo del camión, mientras permanecen en la cola, están valuado en 60 dólares la hora. Se puede adquirir un nuevo compactador automatizado que procesará la carga de camión a una tasa constante de 12 camiones por hora (esto es, 5 minutos por camión). Los camiones llegan de acuerdo con la distribución de Poisson a una tasa promedio de 8 por hora. Si el nuevo compactador se pone en práctica, su costo será amortizado a razón de 3 dólares por camión descargado. La empresa contrata a un estudiante universitario para que lleve a cabo el siguiente análisis y evalúe los costos contra los beneficios de la compra:

Costo actual de la espera/viaje = (15 minutos = 1/4 hora de espera ahora)*($60/costo por hora) = $15/viaje

Sistema nuevo: λ = 8 camiones/hora de llegada μ = 12 camiones/hora de servicio

Tiempo promedio de espera en la cola:

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{8}{2(12)(12 - 8)} = \frac{1}{12} horas$$

Costo de espera/viaje con el nuevo compactador = (1/12 horas de espera)*($60/costo por hora) = $5/viaje

Ahorros con el equipo nuevo = $15 (sistema actual) - $5 (sistema nuevo) = $10/viaje

Costo de la amortización del nuevo equipo $3/viaje

Ahorros netos $7/viaje

Modelo D: Modelo de población limitada

Cuando hay una población limitada de los clientes potenciales para una instalación de servicio, se necesita considerar un modelo diferente de colas. Este modelo sería utilizado, por ejemplo, si se estuviera considerando la reparación de equipos en una fábrica que tiene cinco máquinas, y se estuviera a cargo del mantenimiento de una flota de 10 aviones para vuelos cortos, o si se administrara una sala de hospital que tiene 20 camas. El modelo de población limitada permite que se considere cualquier cantidad de gente de mantenimiento (servidores).

La razón por la que este modelo difiere de los tres anteriores modelos de colas es que ahora hay una relación dependiente, entre la longitud de la cola y la tasa de llegada. Para ilustrar la relación extrema, si la fábrica tiene cinco máquinas y todas estuvieran descompuestas y esperando ser reparadas, la tasa de llegada descendería a cero. En general, a medida que crece la línea de espera en el modelo de población limitada, la tasa de llegadas de clientes o máquinas disminuye.

La tabla 5 despliega las fórmulas de la teoría de colas para el modelo de población limitada. Obsérvese que se emplea una notación diferente al que se usó en los modelas A, B y C. para simplificar y reducir el tiempo en los cálculos se han desarrollado las tablas de colas finitas, en las que se puede determinar D y F representa la probabilidad de que una máquina necesite reparación y tenga que esperar en la línea. F es el factor de eficiencia del tiempo de espera. D y F son necesarios para calcular la mayoría de las fórmulas de los otros modelos finitos.

Una pequeña parte de las tablas de colas finitas publicadas se muestran en esta sección. Se ofrece la tabla 6 para una población de N = 5[2].

Tabla 5. Fórmulas de teoría de colas y notación para el modelo D – población limitada.

Característica	Fórmula
Factor de servicio	$X = \dfrac{T}{T+U}$
Número promedio de espera	$L = N(1-F)$
Tiempo promedio de espera	$W = \dfrac{L(T+U)}{N-L} = \dfrac{T(1-F)}{XF}$
Número promedio corriendo	$J = NF(1-X)$
Número promedio que está siendo atendido	$H = FNX$
Número de la población	$N = J + L + H$

Notación	
D	Probabilidad de que una unidad tendrá que esperar en la cola
F	Factor de eficiencia
H	Número promedio de unidades que están siendo atendidas
J	Número promedio de unidades que no están en la cola o en la estación de servicio
L	Número promedio de unidades que están esperando servicio
M	Número de canales de servicio
N	Número de clientes potenciales
T	Tiempo promedio de servicio
U	Tiempo promedio entre requerimientos de servicio de las unidades
W	Tiempo promedio que una unidad espera en la línea
X	Factor de servicio

Fuente: L. G. Peck y R. N. Hazelwood, Finite Queuing Tables, Nueva York: John Wiley & Sons, 1958.

Ejemplo 5

Los registros anteriores indican que cada una de las cinco impresoras láser para computadora en el U. S. Department of Energy, en Washington, D.C., necesita reparación después de aproximadamente 20 horas de uso. Sea determinado que las descomposturas corresponden a una distribución de

Poisson. El único técnico en turno puede dar servicio a una impresora en un tiempo promedio de dos horas, siguiendo una distribución exponencial. El tiempo de descompostura cuesta 120 dólares por hora. A los técnicos se les paga 25 dólares por hora. ¿Debe contratar el DOE a un segundo técnico?

Suponiendo que el segundo técnico puede reparar una impresora en un tiempo promedio de dos horas, se puede utilizar la tabla 6 (en esta población limitada, se tiene n = 5 máquinas) para comparar los costos de un solo técnico contra dos.

1. Primero se observa que T = 2 horas y U = 20 horas.
2. Luego, $X = \frac{T}{T+U} = \frac{2}{2+20} = \frac{2}{22} = 0{,}091\ (Cerca\ de\ \ 0{,}090)$.
3. Para M = 1 servidor, D = 0,350 y F = 0,960 (vea tabla 8)
4. Para M = 2 servidores, D = 0,044 y F = 0,998
5. El número promedio de impresoras trabajando es J = NF(1 – X)
   Para M = 1 es J = (5)(0,960)(1-0,091) = 4,36
   Para M = 2 es J = (5)(0,998)(1-0,091) = 4,54
6. Sigue el análisis de costos:

Número de técnicos	Número promedio de impresoras descompuestas (N-J)	Costo/hora promedio para el tiempo de descompostura (N-J)($120/hora)	Costo/hora de los técnicos (a 25 dólares/hora)	Costo total/hora
1	0,64	$76,80	$25,00	$101,80
2	0,46	$55,20	$50,00	$105,20

Este análisis sugiere que teniendo solamente un técnico en servicio ahorrará unos cuantos dólares por hora ($105,20 - %101,80 = 3,40 dólares).

Tabla 6. Tablas para colas finitas para una población de n = 5.

X	M	D	F	X	M	D	F	X	M	D	F	X	M	D	F	X	M	D	F
				0.100	1	0.386	0.950	0.200	2	0.194	0.976	0.330	4	0.012	0.999	0.520	2	0.779	0.728
				0.105	2	0.059	0.997		1	0.689	0.801		3	0.112	0.986		1	0.988	0.384
0.012	1	0.048	0.999		1	0.404	0.945	0.210	3	0.032	0.998		2	0.442	0.904	0.540	4	0.085	0.989
0.019	1	0.076	0.998	0.110	2	0.065	0.996		2	0.211	0.973		1	0.902	0.583		3	0.392	0.917
0.025	1	0.100	0.997		1	0.421	0.938		1	0.713	0.783	0.340	4	0.013	0.999		2	0.806	0.708
0.030	1	0.120	0.996	0.115	2	0.071	0.995	0.220	3	0.036	0.997		3	0.121	0.985		1	0.991	0.370
0.034	1	0.135	0.995		1	0.439	0.933		2	0.229	0.969		2	0.462	0.896	0.560	4	0.098	0.986
0.036	1	0.143	0.994	0.120	2	0.076	0.995		1	0.735	0.765		1	0.911	0.569		3	0.426	0.906
0.040	1	0.159	0.993		1	0.456	0.927	0.230	3	0.041	0.997	0.360	4	0.017	0.998		2	0.831	0.689
0.042	1	0.167	0.992	0.125	2	0.082	0.994		2	0.247	0.965		3	0.141	0.981		1	0.993	0.357
0.044	1	0.175	0.991		1	0.473	0.920		1	0.756	0.747		2	0.501	0.880	0.580	4	0.113	0.984
0.046	1	0.183	0.990	0.130	2	0.089	0.933	0.240	3	0.046	0.996		1	0.927	0.542		3	0.461	0.895
0.050	1	0.198	0.989		1	0.489	0.914		2	0.265	0.960	0.380	4	0.021	0.998		2	0.854	0.670
0.052	1	0.206	0.988	0.135	2	0.095	0.993		1	0.775	0.730		3	0.163	0.976		1	0.994	0.345
0.054	1	0.214	0.987		1	0.505	0.907	0.250	3	0.052	0.995		2	0.540	0.863	0.600	4	0.130	0.981
0.056	2	0.018	0.999	0.140	2	0.102	0.992		2	0.284	0.955		1	0.941	0.516		3	0.497	0.883
	1	0.222	0.985		1	0.521	0.900		1	0.794	0.712	0.400	4	0.026	0.977		2	0.875	0.652
0.058	2	0.019	0.999	0.145	3	0.011	0.999	0.260	3	0.058	0.944		3	0.186	0.972		1	0.996	0.333
	1	0.229	0.984		2	0.109	0.991		2	0.303	0.950		2	0.579	0.845	0.650	4	0.179	0.972
0.060	2	0.020	0.999		1	0.537	0.892		1	0.811	0.695		1	0.952	0.493		3	0.588	0.850
	1	0.237	0.983	0.150	3	0.012	0.999	0.270	3	0.064	0.994	0.420	4	0.031	0.997		2	0.918	0.608
0.062	2	0.022	0.999		2	0.115	0.990		2	0.323	0.944		3	0.211	0.966		1	0.998	0.308
	1	0.245	0.982		1	0.553	0.885		1	0.827	0.677		2	0.616	0.826	0.700	4	0.240	0.960
0.064	2	0.023	0.999	0.155	3	0.013	0.999	0.280	3	0.071	0.993		1	0.961	0.471		3	0.678	0.815
	1	0.253	0.981		2	0.123	0.989		2	0.342	0.938	0.440	4	0.037	0.996		2	0.950	0.568
0.066	2	0.024	0.999		1	0.568	0.877		1	0.842	0.661		3	0.238	0.960		1	0.999	0.286
	1	0.260	0.979	0.160	3	0.015	0.999	0.290	4	0.007	0.999		2	0.652	0.807	0.750	4	0.316	0.944
0.068	2	0.026	0.999		2	0.130	0.988		3	0.079	0.992		1	0.969	0.451		3	0.763	0.777
	1	0.268	0.978		1	0.582	0.869		2	0.362	0.932	0.460	4	0.045	0.995		2	0.972	0.532
0.070	2	0.027	0.999	0.165	3	0.016	0.999		1	0.856	0.644		3	0.266	0.953	0.800	4	0.410	0.924
	1	0.275	0.977		2	0.137	0.987	0.300	4	0.008	0.999		2	0.686	0.787		3	0.841	0.739
0.075	2	0.031	0.999		1	0.597	0.861		3	0.086	0.990		1	0.975	0.432		2	0.987	0.500
	1	0.294	0.973	0.170	3	0.017	0.999		2	0.382	0.926	0.480	4	0.053	0.994	0.850	4	0.522	0.900
0.080	2	0.035	0.998		2	0.145	0.985		1	0.869	0.628		3	0.296	0.945		3	0.907	0.702
	1	0.313	0.969		1	0.611	0.853	0.310	4	0.009	0.999		2	0.719	0.767		2	0.995	0.470
0.085	2	0.040	0.998	0.180	3	0.021	0.999		3	0.094	0.989		1	0.980	0.415	0.900	4	0.656	0.871
	1	0.332	0.965		2	0.161	0.983		2	0.402	0.919	0.500	4	0.063	0.992		3	0.957	0.666
0.090	2	0.044	0.998		1	0.638	0.836		1	0.881	0.613		3	0.327	0.936		2	0.998	0.444
	1	0.350	0.960	0.190	3	0.024	0.998	0.320	4	0.010	0.999		2	0.750	0.748	0.950	4	0.815	0.838
0.095	2	0.049	0.997		2	0.117	0.980		3	0.103	0.988		1	0.985	0.399		3	0.989	0.631
	1	0.368	0.955		1	0.665	0.819		2	0.422	0.912	0.520	4	0.073	0.991				
0.100	2	0.054	0.997	0.200	3	0.028	0.998		1	0.892	0.597		3	0.359	0.927				

Fuente: De L. G. Peck y R. N. Hazelwood, *Finite Queuing Tables*, Nueva York: John Wiley & Sons, 1958, p. 4 © 1985, John Wiley & Sons, Inc.

Otros sistemas de colas

Muchos problemas prácticos de líneas de espera que ocurren en los sistemas de servicios de producción y operaciones, tienen características como los cuatro modelos matemáticos descritos anteriormente. Sin embargo, con frecuencia se pueden encontrar variaciones de este caso específico en un análisis. Los tiempos de servicio en un taller de reparación de automóviles, por ejemplo, tienden a seguir la distribución normal de probabilidad en lugar de la exponencial. El sistema de registro en una universidad donde los estudiantes más antiguos tienen la prioridad de elegir cursos y oras sobre todos los demás estudiantes, es un ejemplo de un modelo de primera entrada, primer servicio, prioridad característica de disciplina en la teoría de colas. Un examen médico para reclutas militares es un ejemplo de un sistema de multifases; éste difiere de los modelos de fase sencilla discutidos en esta unidad. Un recluta primero se forma para una muestra de sangre en la primera estación; luego espera para tomar un examen de la vista en la siguiente estación; platica con el psiquiatra en la tercera y es examinado por un médico para problemas generales en la cuarta. En cada fase, el recluta debe entrar en otra cola y esperar su turno. Muchos modelos, algunos muy complejos, se han desarrollado para manejar situaciones como éstas. Estos modelos matemáticos más complejos se resuelven utilizando técnicas de simulación de Monte Carlo.

Examen Teórico
Examen Práctico