Mathematik (I und II)
im Studiengang Game Design

Mike Scherfner

Literatur

M. Scherfner und T. Volland: *Mathematik für das erste Semester* (Springer-Spektrum Verlag)

Prüfungsform

- Am Ende der Veranstaltung Game Development I und II (GD 4.1 und GD 4.2) gibt es jewels eine Klausur mit 90 Min. Dauer, bei der 50 Prozent der Punkte erreicht werden müssen.

Bemerkungen

- Der Stoff ist wie folgt angeordnet: Zuerst Mathematik I und II, dann Informatik I und II.
- Programmieren II schließt sich an (Teil I war bereits).
- Die Folien sind nicht vollständig – es wird weitere Dinge geben (z. B. etwas Statistik am Ende und Grundlagen am Anfang), die sich nicht auf den Folien finden.

Einschub (an der Tafel)

Einfaches Rechnen, Gleichungen, ...

Griechisches Alphabet

alpha	α	A	iota	ι	I	rho	ρ, ϱ	P
beta	β	B	kappa	κ	K	sigma	σ, ς	Σ
gamma	γ	Γ	lambda	λ	Λ	tau	τ	T
delta	δ	Δ	my	μ	M	ypsilon	υ	Υ
epsilon	ϵ, ε	E	ny	ν	N	phi	ϕ, φ	Φ
zeta	ζ	Z	xi	ξ	Ξ	chi	χ	X
eta	η	H	omikron	o	O	psi	ψ	Ψ
theta	θ, ϑ	Θ	pi	π	Π	omega	ω	Ω

Regeln bei Bezeichnungen

Teils werden ähnliche mathematische Objekte auf einmal verwendet.

In solchen Fällen wird die Ähnlichkeit durch die Verwendung gleicher Buchstaben, die allerdings in verschiedenen Ausführungen vorkommen, ausgedrückt.

So könnten beispielsweise a, $\tilde{a}$, $\hat{a}$ drei reelle Zahlen bezeichnen.

Regeln bei Bezeichnungen

Ist bei den Objekten eine Reihenfolge wichtig, werden Indizes verwendet:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\ ,$$

wobei n eine natürliche Zahl sein soll.

Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein sprach-schriftlicher Satz in umgangssprachlicher oder mathematischer Formulierung, der einen Sachverhalt beschreibt, dem als *Wahrheitswert* stets „1“ (wahr) oder „0“ (falsch) zugeordnet werden kann.

Eine Aussage kann dabei stets nur einen Wahrheitswert annehmen.

Es gibt eine Reihe von Verknüpfungen zwischen Aussagen:

Und

Wenn wir in Zukunft ein „*und*“ zwischen zwei Aussagen verwenden — als Zeichen $\wedge$ — so ist unsere Grundlage die folgende Wahrheitstabelle, in der A_1 und A_2 Aussagen sind:

A_1	A_2	A_1 und A_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Oder

„*Oder*“ — als Symbol $\vee$ — hat folgende Werte:

A_1	A_2	A_1 oder A_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Implikation

Die „*Implikation*“ ($\rightarrow$) genügt der Tabelle:

A_1	A_2	A_1 impliziert A_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

Für die Implikation verwenden wir auch das Synonym „es folgt“ und das Symbol $\Rightarrow$.

Äquivalenz

Ferner gibt es auch die „Äquivalenz“ ($\leftrightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$):

A_1	A_2	A_1 äquivalent A_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

Negation

Als letztes Symbol führen wir die „*Negation*“ ($\neg$) ein, die den Wahrheitswert einer Aussage einfach in das Gegenteil ändert:

A	nicht A
wahr	falsch
falsch	wahr

Beispiel

i) $x = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$

ii) $x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1.$

Was ist richtig? Natürlich nur i), denn $x^2 = 1$ wird auch von $x = -1$ erfüllt.

Beispiel

A_1	A_2	$\neg A_1$	$\neg A_2$	$\neg A_1 \wedge \neg A_2$	$A_1 \leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$
wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	falsch

Beweis und Satz

Ein *Beweis* in der Mathematik ist die gültige Herleitung der Wahrheit (oder Falschheit) einer Aussage aus einer Menge von *Axiomen* (nicht weiter beweisbarer Grundtatsachen) und bereits bewiesener Aussagen mithilfe logischer Regeln.

Solche bewiesenen Aussagen werden *Sätze* genannt.

Definition

Viele Aussagen in der Mathematik sind allerdings auch nicht zu beweisende Namensgebungen oder Abkürzungen, die man *Definitionen* nennt.

Mengen

Definition

Eine Menge ist die Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen.

Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Ist ein Objekt x ein Element einer Menge M, so schreiben wir:

$$x \in M \ .$$

Ist x kein Element von M, dann

$$x \notin M.$$

Mengen

Mengen lassen sich durch explizite Aufzählung definieren, z. B.

$$M := \{0, 2, 1008\} \ .$$

Mengen (Bemerkung)

Das Symbol „$:=$“ deutet immer an, dass es sich um eine Definition handelt.

Mengen

Mengen lassen sich auch durch eine Eigenschaft E für die Elemente der Menge angeben:

$$M := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\} \ .$$

Lies: „M ist die Menge aller x für die gilt: x hat die Eigenschaft E."

Mengen (Beispiel)

$G := \{x \mid x$ ist eine ganze Zahl (mehr dazu später) zwischen -2 und $4\}$.

Dies liefert

$$G = \{-1,0,1,2,3\} ;$$

hier ist das reine Gleichheitszeichen gerechtfertigt.

Mengen (Bemerkung)

Für die Elemente einer Menge ist keine Reihenfolge ausgezeichnet.

Z. B. gilt

$$\{2,10,16\} = \{10,16,2\}\ .$$

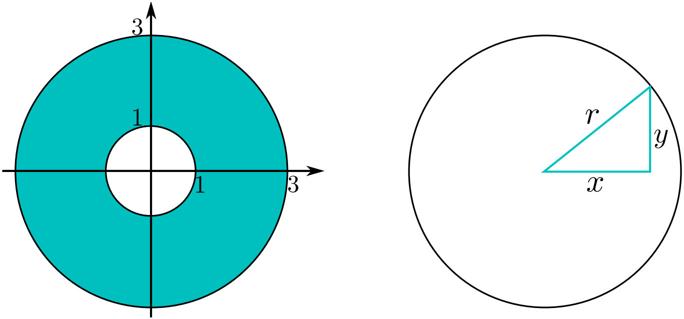
Mengen (Beispiel)

Es sei die folgende Menge gegeben:

$$R := \{(x, y) \text{ in der Ebene} \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9;\ x,\ y \text{ reell}\}$$

Wie sieht das in einer Skizze aus?

Skizze



Mengen (die häufig verwendet werden)

- $\emptyset$: *Leere Menge*. Sie enthält keine Elemente, also $\emptyset = \{\}$.
- $\mathbb{N}$: *Menge der natürlichen Zahlen*, also $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$: *Menge der ganzen Zahlen*, also $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3,\ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$: *Menge der rationalen Zahlen*, also derjenigen, die sich als Bruch $\frac{p}{q}$ mit p, $q \in \mathbb{Z}$ darstellen lassen. ($q \neq 0$)
- $\mathbb{R}$: *Menge der reellen Zahlen*, also der rationalen und irrationalen.Die irrationalen Zahlen sind die Zahlen, die sich nicht als Bruch (wie bei den rationalen Zahlen angegeben) darstellen lassen. Beispiele dafür sind $\sqrt{2}$ oder π.

Intervalle

Zusammenhängende Teilabschnitte der reellen Zahlen heißen Intervalle. Es gibt folgende Typen, wobei hier stets $a \leq b$ gilt für a, $b \in \mathbb{R}$:

Intervalle

- *offene Intervalle*: $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- *abgeschlossene Intervalle*: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- *halboffene Intervalle:* $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- *halboffene Intervalle:*$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Intervalle

Es gibt auch sog. uneigentliche Intervalle:

$$
\begin{aligned}
]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
[a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
]a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty, +\infty[&:= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Intervalle (Bemerkung)

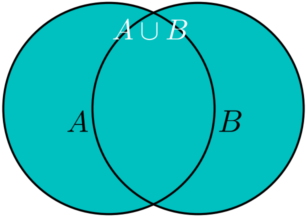
Anstelle der vom Element weg zeigenden eckigen Klammern werden manchmal zum Element zeigende runde Klammern verwendet.

Z. B. ist $(a, b] = \,]a, b]$ und $[a, b) = [a, b[$.

Mengen

Aus bekannten Mengen können neue gebildet werden:

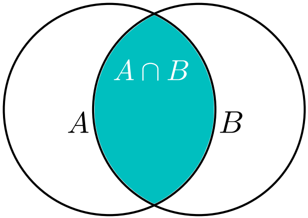
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \quad (\textit{Vereinigung}),$$



Mengen

Aus bekannten Mengen können neue gebildet werden:

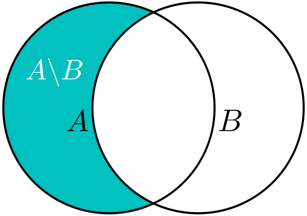
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \quad (\textit{Schnitt}),$$



Mengen

Aus bekannten Mengen können neue gebildet werden:

$$A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} \quad (\textit{Differenz}),$$



Mengen

Definition

Es ist $A \subseteq B$ (gelesen: „A ist Teilmenge von B“), wenn aus $x \in A$ folgt, dass $x \in B$ ist.

Mengen (Bemerkung)

Es gilt $A \subseteq A$.

Wir sprechen von einer *echten* Teilmenge A einer Menge B, wenn A nicht B ist und schreiben dann $A \subset B$.

Mengen (Beispiel)

Seien $M_1 := \{2,10,16\}$, $M_2 := \{2,10,15,16,21\}$ und $M_3 := \{0,2,4,6,\ldots\}$.

Dann:

$$M_1 \subset M_2 \ , \quad M_1 \subset M_3, \quad M_2 \not\subset M_3,$$

$$M_1 \cap M_2 = M_1 \ , \quad M_2 \setminus M_3 = \{15,21\}. \quad M_1 \cup M_2 = M_2.$$

Mengen (Bemerkung)

Manchmal steht $\subset$ einfach für Teilmenge (ohne „echt“ sein zu müssen), und das Symbol $\subsetneq$ bezeichnet echte Teilmengen.

Mengen (Bemerkung)

Vereinigen und schneiden lassen sich natürlich auch mehr als zwei Mengen. Wie $A \cup B \cup C$ gebildet wird, oder gar $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)$, sollte klar sein.

Mengen (Bemerkung)

Die Gleichheit zweier Mengen beweisen wir, indem wir zeigen, dass jedes Element der ersten Menge auch in der zweiten enthalten ist und jedes Element der zweiten in der ersten. Dann gibt es nämlich kein Element, worin sich die beiden Mengen unterscheiden und folglich sind sie gleich.

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ stellen eine Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dar.

Während wir rationale Zahlen stets als Bruch ganzer Zahlen schreiben können, ist dies bei den nicht rationalen reellen Zahlen, also denen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, den sog. *irrationalen Zahlen*, nicht möglich.

Reelle Zahlen (Beispiel: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl)

Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl. Dann ist sie als Bruch $\frac{p}{q}$ teilerfremder, ganzer Zahlen $p,\ q \in \mathbb{Z}$ darstellbar.

Somit wäre $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, bzw. $2q^2 = p^2$.

Die letzte Gleichung besagt, dass p^2 und damit auch p gerade Zahlen sind.

Wenn p durch 2 teilbar ist, muss p^2 durch 4 teilbar sein.

Wiederum nach letzter Gleichung folgt dann, dass auch q durch 2 teilbar ist. Also sind p und q durch 2 teilbar und damit nicht teilerfremd, wie vorausgesetzt.

Widerspruch!

Summen und Produkte

Definition

Summe (Summenzeichen):

$$\sum_{k=m}^{n} x_k := x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n \,.$$

Produkt (Produktzeichen):

$$\prod_{k=m}^{n} x_k := x_m x_{m+1} \ldots x_n \;.$$

Wir betrachten ganze Zahlen m und n mit $n \geq m$.

Summen und Produkte (Bemerkung)

Der Fall $m = n$:

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{m} x_k = x_m$$

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \prod_{k=m}^{m} x_k = x_m \ .$$

Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition

Fakultät

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \ldots n \quad \textit{für } n \in \mathbb{N},\ n > 0,$$

$$0! := 1$$

Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \textit{für } n,\ k \in \mathbb{N},\ n \geq k.$$

gelesen: „n über k“.

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Zahlen aus n auszuwählen.

Fakultät und Binomialkoeffizient

Es gilt der sog. binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ .$$

Fakultät und Binomialkoeffizient (Beispiel)

Sei $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k \\
&= \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2 \\
&= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\
&= 1 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \ .
\end{aligned}
$$

Abbildungen und Funktionen

Definition

Eine Abbildung f *von einer Menge* A *in eine Menge* B *(wir schreiben* $f: A \to B$*) ordnet jedem Element* $x \in A$ *genau ein Element* $y \in B$ *zu.*

Wir schreiben hierfür $f(x) = y$ *oder* $f: x \mapsto y$*.*

A *heißt Definitionsbereich,* B *heißt Wertebereich der Abbildung.*

Abbildungen und Funktionen (Bemerkung)

Für $B \subseteq \mathbb{R}$ sprechen wir auch von einer *Funktion* (auf A).

Abbildungen und Funktionen (Beispiel)

Einige Abbildungen, die Funktionen sind:

$f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$f_1(x) := x + 12,$

$f_2(x) := 3x + x^2,$

$f_3(x) := \cos(1 - x).$

Können Sie sich Abblidungen denken, die keine Funktionen sind?

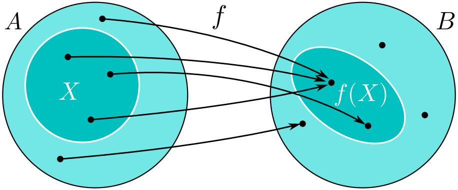
Abbildungen und Funktionen

Definition

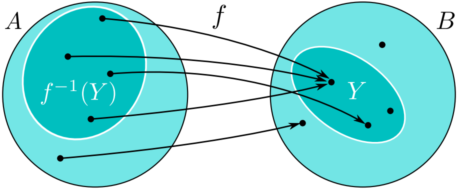
Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für Teilmengen $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ definieren wir:

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B \quad \textit{(Bildmenge)}\ ,$$
$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A \quad \textit{(Urbildmenge)}\ .$$

Abbildungen und Funktionen



Bildmenge



Urbildmenge

Umkehrabbildung

Definition

Sei $f\colon A \to B$ *eine (injektive) Abbildung. Die Abbildung*

$$f^{-1}\colon f(A) \to A$$

mit

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

für alle $y \in f(A)$ *und* $x \in A$ *heißt Umkehrabbildung oder Inverse von* f*.*

Umkehrabbildung (Bemerkung)

Die Umkehrabbildung ist nicht zu verwechseln mit der Urbildmenge, obwohl dasselbe Formelzeichen verwendet wird!

Umkehrabbildung (Beispiel)

Die Umkehrfunktion (wie Umkehrabbildungen von Funktionen auch genannt werden) von

$$f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[\,, \quad x \mapsto x^2$$

ist die Quadratwurzel

$$f^{-1}\colon [0,\infty[\to [0,\infty[\,, \quad x \mapsto \sqrt{x} \,.$$

Komposition von Abbildungen

Manche Abbildungen sind über einen „Umweg“ erklärt, d. h. wir haben zwei Abbildungen

$f\colon A \to X$ und $g\colon X \to B$,

und suchen die Abbildung h, bei der wir auf ein $x \in A$ zunächst f und anschließend g „loslassen“, sodass $h(x) = g(f(x))$.

Das Ergebnis ist die *Komposition* $h = g \circ f$, eine Abbildung, die von A nach B abbildet:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h=g\circ f"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Komposition von Abbildungen

Definition

Seien $f\colon A \to X$ *und* $g\colon Y \to B$ *Abbildungen mit* $f(A) \subseteq Y$.

Wir definieren die Komposition von f *und* g *als die Abbildung*

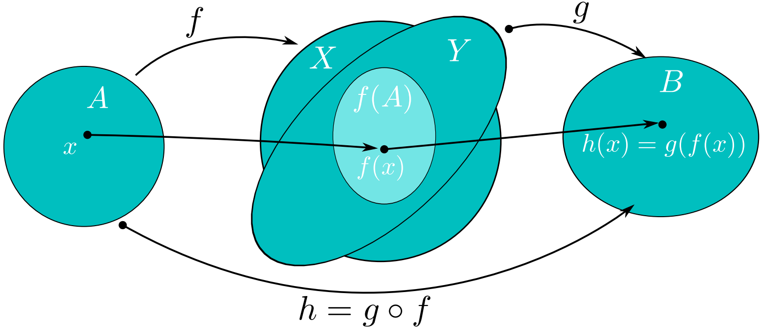
$$(g \circ f)\colon A \to B$$

mit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

für alle $x \in A$.

Komposition von Abbildungen



Komposition von Abbildungen (Beispiel)

Was geschieht, wenn wir eine Abbildung mit ihrer Umkehrabbildung verketten? Jene war definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Es kommt bei der Komposition also wieder der Startpunkt heraus:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

bzw.

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y\ .$$

Komposition von Abbildungen (Bemerkung)

Die Komposition wird auch Hintereinanderausführung oder Verkettung genannt.

Gelesen wird $(g \circ f)\colon A \to B$ als „g Kringel f“ oder „g nach f“.

Komposition von Abbildungen (Beispiel)

Seien die Abbildungen

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto 1 - x^2$$

und

$$g\colon [0,\infty[\ \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

gegeben.

Es gilt $f([-1,1]) = [0,1] \subseteq [0,\infty[$; damit ist die Hintereinanderausführung von g nach f erklärt:

$$g \circ f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}\ .$$

Beschränkte Funktionen

Definition

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ *heißt beschränkt, wenn es Zahlen* M, $N \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass für alle* $x \in D$

$$M \leq f(x) \leq N$$

gilt.

In diesem Fall heißen M *untere Schranke und* N *obere Schranke von* f.

Gibt es solch ein M *oder* N *nicht, nennen wir* f *unbeschränkt.*

Beschränkte Funktionen (Beispiel)

Die Funktion $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := konst$, ist beschränkt mit $M = N = konst$.

Die Funktion $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := x$ ist unbeschränkt.

Auf dem Definitionsbereich $D := [0, \pi]$ ist f_2 beschränkt mit der unteren Schranke $M = 0$ und der oberen Schranke $N = \pi$.

Monotone Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt monoton wachsend, wenn für alle* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt*

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

und f *heißt monoton fallend, wenn für alle* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 < x_2$ *gilt*

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

und f *heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn statt* $\leq$ *bzw.* $\geq$ *sogar* $<$ *bzw.* $>$ *gilt.*

Monotone Funktionen (Beispiel)

Die Funktion $f(x) := x^2$ ist auf $D_1 := \,]-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $D_2 := [0, \infty[$ streng monoton wachsend.

Gerade und ungerade Funktionen

Definition

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ *heißt gerade, wenn für alle* $x \in D$ *auch* $-x \in D$ *ist und gilt*

$$f(-x) = f(x)$$

und f *heißt ungerade, wenn für alle* $x \in D$ *auch* $-x \in D$ *ist und gilt*

$$f(-x) = -f(x) \ .$$

Gerade und ungerade Funktionen (Beispiel)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist gerade.

Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x$ ist ungerade.

Periodische Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt periodisch, wenn es eine Zahl* $p \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

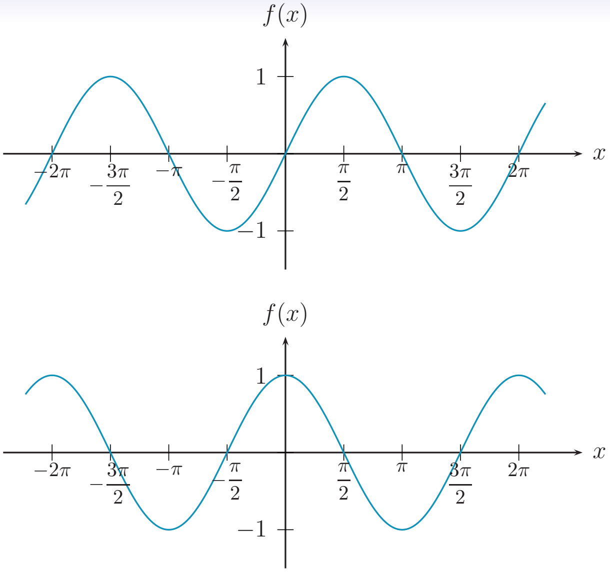
$$f(x + p) = f(x) \ .$$

Die kleinste dieser Zahlen p *heißt Periodenlänge oder einfach Periode von* f*.*

Periodische Funktionen (Beispiel)

Die bereits aus der Schule bekannten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \cos x$ sind beide periodisch mit der Periode 2π, kurz 2π-periodisch.

(Wir betrachten diese Funktionen später genauer.)



Oben der Sinus, unten der Kosinus

Einige wichtige Funktionen: Polynome

Definition

Polynome sind Funktionen der Form

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Dabei sind die Koeffizienten a_k *reelle Zahlen.*

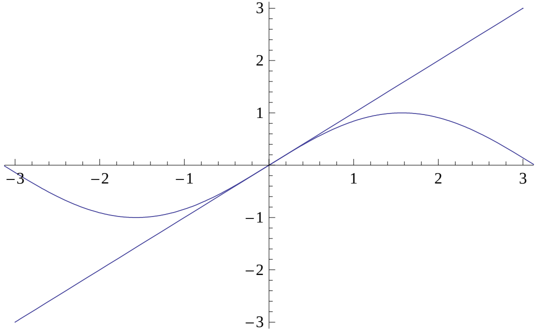
Einige wichtige Funktionen: Polynome (Bemerkung)

Als Bausteine von Polynomen können wir die so genannten *Monome* x^k betrachten.

Der höchste auftretende Exponent (hier n, falls $a_n \neq 0$) wird als der *Grad* von p bezeichnet.

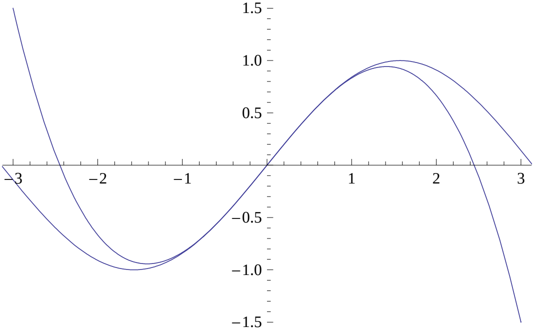
Zur Bedeutung von Polynomen (Beispiel)

Sinus und ein Polynom ersten Grades



Zur Bedeutung von Polynomen (Beispiel)

Sinus und ein Polynom dritten Grades



Einige wichtige Funktionen: Rationale Funktionen

Definition

Der Bruch zweier Polynome $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ *mit* $q(z) \neq 0$ *heißt rationale Funktion.*

Einige wichtige Funktionen: Rationale Funktionen (Bemerkung)

Die Nullstellen von f sind identisch mit denen des Zählerpolynoms p.

An den Nullstellen des Nennerpolynoms q hingegen ist f nicht definiert. Solche Punkte nennen wir *Pole*.

In vielen Fällen ist die Darstellung einer rationalen Funktion unnötig kompliziert, denn ähnlich wie zwei reelle Zahlen können wir auch Polynome dividieren (Polynomdivision).

Einige wichtige Funktionen: Rationale Funktionen (Beispiel)

Wir führen eine Polynomdivision durch:

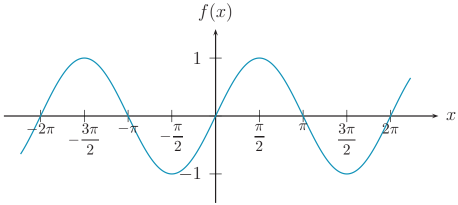
$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) : (x - 1) = x^2 + 3x + 6 + \dfrac{10}{x-1} \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\phantom{-(x^3 +{}} 3x^2 + 3x + 4 \\
 \underline{-(3x^2 - 3x)} \\
\phantom{-(x^3 + 3x^2 +{}} 6x + 4 \\
 \underline{-(6x - 6)} \\
\phantom{-(x^3 + 3x^2 + 6x +{}} 10
\end{array}
$$

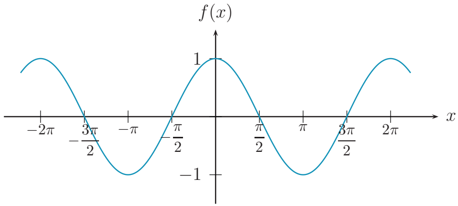
Sinus, Kosinus und Tangens

Schwingungsprozesse tauchen besonders in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften sehr häufig auf. Grund genug, die sie beschreibenden Funktionen mit eigenen Namen — Sinus und Kosinus (sin und cos) — zu versehen und näher zu untersuchen.

Sinus, Kosinus und Tangens

Funktionsgraphen:





Oben der Sinus, unten der Kosinus

Sinus, Kosinus und Tangens

Sinus und Cosinus gehen durch Verschieben (um $\frac{\pi}{2}$) ineinander über, sind 2π-periodisch und haben folgende Nullstellen:

- $\sin t = 0$ für $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\cos t = 0$ für $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sinus, Kosinus und Tangens (Bemerkung)

Teils schreiben wir $\sin(t)$ bzw. $\cos(t)$, um das Argument t noch deutlicher zu machen, was aber zumeist nur sinnvoll ist, wenn das Argument etwas länger ist, z. B. bei $\sin(4\pi t - 2)$.

Sinus, Kosinus und Tangens

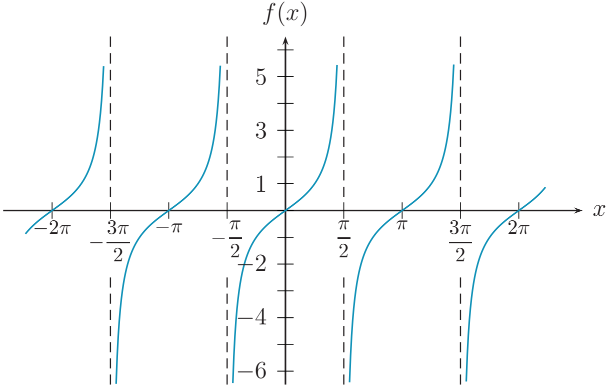
Aus den behandelten Funktionen können wir eine neue konstruieren, den Tangens:

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Dieser hat die gleichen Nullstellen wie der Sinus.

Sinus, Kosinus und Tangens

Funktionsgraph:

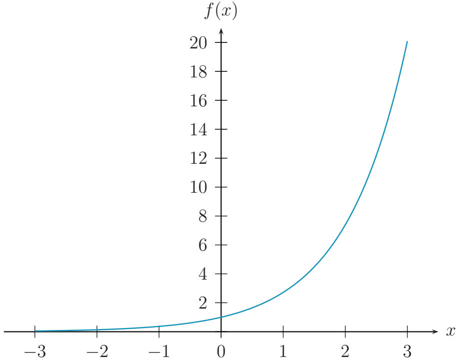


Tangens

Das „gestückelte“ Bild beim Tangens ergibt sich aus den bekannten Nullstellen des Kosinus.

Exponentialfunktion und Logarithmus

Mit der *Exponentialfunktion* haben Sie vermutlich bereits in der Schule gerechnet, und damit war dort e^x mit einem reellen Exponenten x gemeint und $e = 2{,}71828\ldots$ ist die Eulersche Zahl.

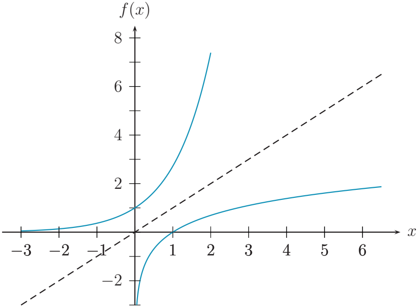


Exponentialfunktion

Exponentialfunktion und Logarithmus (Bemerkung)

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) := e^x$ ist der so genannte *natürliche Logarithmus* $f^{-1}(x) = \ln x$, es gilt also

$$e^{\ln x} = x \quad \text{und} \quad \ln e^x = x \ .$$



Exponential- und Logarithmusfunktion

Folgen

Wir werden Folgen wesentlich dafür verwenden, um uns über die Begriffe Konvergenz und Divergenz zu kümmern und Konsequenzen daraus abzuleiten.

Wächst also z. B. eine Folge gegen einen Wert, der nicht überschritten wird? Kommt Sie einem Wert beliebig nahe? Ist sie eventuell immer gleich einem festen Wert? Was heißt es eigentlich, dass eine Folge von Zahlen einem Wert beliebig nahe kommt?

Folgen

Später werden Folgen Hilfsmittel sein, um sich an bestimmte Werte „anzuschleichen“. Folgen werden wir als Grundlage erkennen, die wir z. B. für Begriffe wie den der Differenzierbarkeit benötigen.

Folgen

Definition

Eine reelle Folge (x_n) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Jedem Index $n \in \mathbb{N}$ wird dabei eine reelle Zahl x_n zugeordnet.

Folgen (Bemerkung)

Wir schreiben eine Folge gewöhnlich nicht in der für Funktionen typischen Schreibweise, also z. B.

$$f(n) := 1 - \frac{1}{n}$$

auf, sondern dann in der Form

$$x_n := 1 - \frac{1}{n}.$$

Der Zahl $n = 1$ wird hier $x_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$ zugeordnet, der Zahl 2 der Wert $x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ usw.

Das ergibt eine Auflistung: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}\ldots$

Folgen (Bemerkung)

Wir müssen noch beachten, dass die Folge an sich in Klammern geschrieben wird, also wie in der Definition, beispielsweise $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Schreiben wir diese ohne Klammern, meinen wir gewöhnlich die einzelnen Folgenglieder, also die x_n selbst.

Es ist egal, ob wir als Index n, k oder z. B. auch i verwenden, also (x_n), (x_k), ...

Folgen

Definition

Eine Folge (x_n) heißt konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle Indizes $n \geq N$ die Ungleichung $|x_n - a| < \varepsilon$ gilt.

Wir schreiben in diesem Fall

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

(gelesen: „Limes von x_n für n gegen unendlich.“) oder auch

$$x_n \to a \ .$$

Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Folgen (Bemerkung)

Die Ungleichung $|x_n - a| < \varepsilon$ können wir im Reellen umformulieren zu

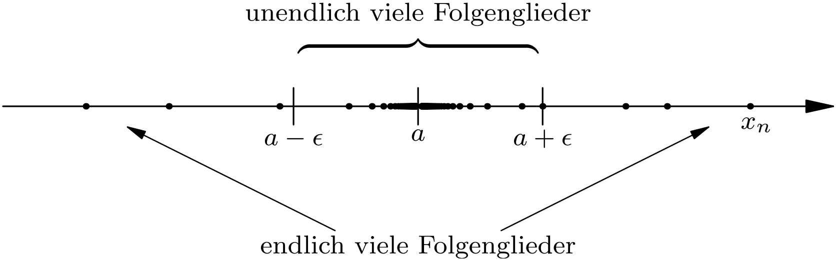
$$x_n \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ ,$$

denn der Betrag gibt den Abstand zwischen x_n und a an.

Eine Folge ist demnach konvergent gegen a, wenn sich in jedem noch so kleinen Intervall um a fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder befinden.

Folgen (Bemerkung)

Veranschaulichung zu Konvergenz:



Folgen (Bemerkung)

- Wir sprechen bei $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ von einer $\varepsilon-$Umgebung des Punktes a. (Dabei ist stets $\varepsilon > 0$.)
- Ist eine Folge konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig.

Folgen (Beispiel)

Standardbeispiel: $x_n := \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge. Es gilt also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Zum Beweis sei ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen für $N \in \mathbb{N}$ aus der Definition eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{\varepsilon}$.

Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \ .$$

Somit ist 0 der Grenzwert von $\frac{1}{n}$.

Folgen (Beispiel)

Das N können wir auch direkt berechnen:

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

woraus folgt

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \; .$$

Nun müssen wir N nur noch dazwischen setzen: $n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Folgen (Bemerkung)

Natürlich sind nicht alle Folgen konvergent.

Beispielsweise wächst die Folge $x_n := n$ immer weiter an, sodass es keinen Grenzwert geben kann, in dessen Umgebung sich fast alle Folgenglieder versammeln.

Nicht konvergente Folgen heißen auch *divergent*.

Folgen (Bemerkung)

Die Folge $x_n := (-1)^n$ hat zwei sog. *Häufungspunkte*: -1 und $+1$.

Unter den divergenten Folgen gibt es solche wie die durch $x_n := n^2$ definierte, welche betraglich über jede noch so hohe Grenze wachsen.

Dann wird gerne die Notation

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty \quad \text{oder} \quad |x_n| \to \infty$$

verwendet, bei reellen Folgen ggf. auch ohne Betrag und mit Vorzeichen vor dem ∞: $x_n := -n \to -\infty$.

Folgen (Beispiel)

Die Folge

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

ist aus der konstanten Folge (1) und der Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)$ zusammengesetzt. Deren Grenzwerte kennen wir: 1 und 0.

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1\ .$$

Folgen (Beispiel)

Bei der Folge

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

gilt zuerst Vorsicht; so ist (n) keine konvergente Folge.

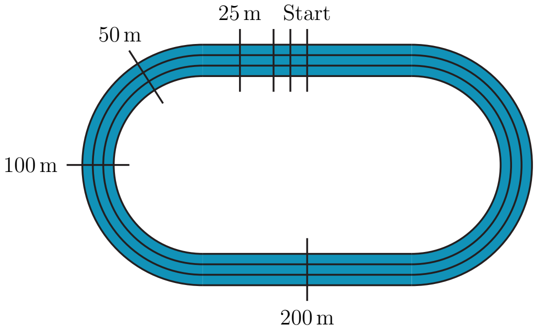
Wir behelfen uns, indem wir n im Bruch kürzen:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

(Kennen wir!)

Reihen

Wir betrachten das folgende Bild eines Stadions:

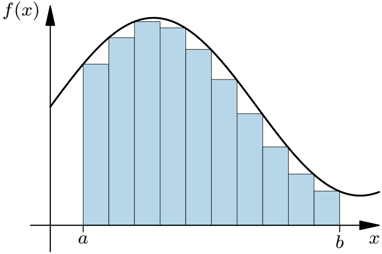


Ein Läufer, der vom Start in das Ziel kommen will, muss alle Teilabschnitte durchlaufen.

Erreicht er jemals das Ziel?

Reihen

Wollen wir die Fläche unter dem Graphen einer Funktion berechnen, so ergibt sich – unter Verwendung von Rechtecken zur Approximation des wirklichen Flächeninhaltes – folgendes Bild:



Verkleinern der Grundseiten der Rechtecke mit jeweiliger Fläche F_k macht die Annäherung an die Fläche unter dem Graphen von f von a bis b immer besser und unter bestimmten Voraussetzungen erhalten wir im Grenzwert den Flächeninhalt unter f: $\sum_{k=0}^{n} F_k \to \sum_{k=0}^{\infty} F_k$. Grenzwerte dieser Form nennen wir *unendliche Reihen* oder einfach nur *Reihen*.

Differenzierbarkeit

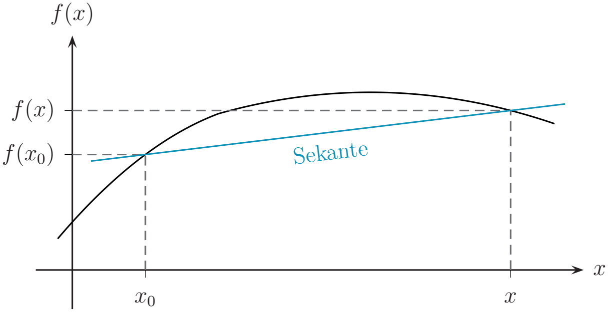
Die Variable in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist die Zeit.

Beschreibt die Funktion f einen Prozess in Abhängigkeit von der Zeit t, so bleibt der Ablauf des Prozesses nur dann konstant ($f(t) = \mathrm{konst}$), wenn keine Veränderungen auftreten.

Treten allerdings Änderungen auf (steigt oder fällt die Funktion), so weiß man durch deren Bestimmung auch, was für zukünftige Zeiten passiert. Die Änderungen sind es ja gerade, die das Geschehen widerspiegeln.

Differenzierbarkeit

Um diese zu verstehen, betrachten wir das folgende Bild, welches die Sekante zwischen zwei Punkten an einem Funktionsgraphen darstellt, deren Steigung wir einfach berechnen können.



Differenzierbarkeit

Gleichung der Sekante:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} x + b$$

mit

$$\Delta f := f(x) - f(x_0)$$

und

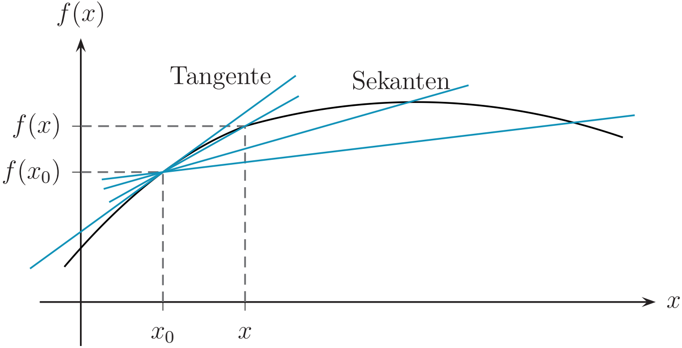
$$\Delta x := x - x_0.$$

Die Steigung $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ der Sekante gibt die Änderung von f pro Δx an.

Möchten wir aber nun nicht die Steigung der Sekante wissen, sondern die Steigung der Tangente in x_0, so muss Δx immer kleiner werden.

Differenzierbarkeit

Wir müssen daher den Grenzwert $x \to x_0$ betrachten und kommen dadurch zum eigentlichen Kern des Differenzierens:



Die auftretenden Sekanten gehen also im Laufe des Grenzwertprozesses in die Tangente über.

Differenzierbarkeit

Definition

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$; f ist in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \textit{(Differenzialquotient)}$$

existiert, $f'(x_0)$ heißt dann Ableitung von f in x_0.

Die Funktion f heißt differenzierbar auf I, wenn f in allen $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

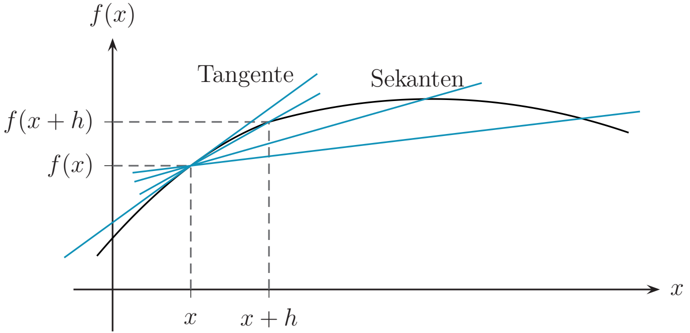
Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Nach unseren Überlegungen gibt die Ableitung also die Steigung von f im betrachteten Punkt an und beschreibt somit die lokale Änderung von f.

Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Eine alternative Schreibweise – mit der sich zumeist etwas besser rechnen lässt – ist

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad :$$



Differenzierbarkeit (Bemerkung)

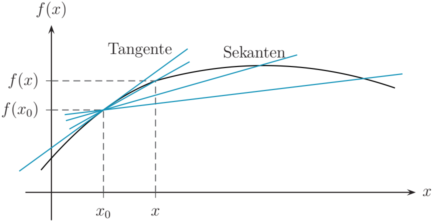
Was hat sich zu unserem vorherigen Bild verändert?

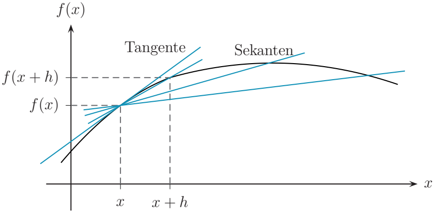
Nichts von Substanz. Der betrachtete Punkt heißt diesmal einfach x anstatt x_0.

Ferner wurde der Abstand von unserem hier untersuchten Punkt x einfach h genannt. Alles bleibt also gleich, nur die Bezeichnungen sind etwas bequemer geworden.

Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Nochmals im Bild:





Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Häufig schreiben wir statt $f'(x)$ auch $\frac{df(x)}{dx}$ oder, wenn f von der Zeit abhängt, $\dot{f}(t)$ (diese Schreibweise wird von den Physikern sehr gerne verwendet).

In der Definition wird alles auf einem Intervall I betrachtet. Zumeist wird dies als offen angenommen bzw. gewählt, weil das in der Theorie Vorteile bringt.

Differenzierbarkeit (Beispiel)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

Es gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

und somit ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \; .$$

Differenzierbarkeit (Beispiel)

Die Funktion $f(x) := |x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, denn

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

ist für $h \to 0$ nicht konvergent.

Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Die von uns behandelten Funktionen – wie Exponentialfunktion, Polynome, Sinus, ... – sind differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich.

Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Wenn f und g differenzierbar sind, so sind auch die folgenden Funktionen – wo die Ausdrücke definiert sind – differenzierbar und deren Ableitungen sehen folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x) \\ (c\cdot f)'(x) &= c\cdot f'(x) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Linearität)}$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Hierbei ist c eine konstante reelle Zahl.

Wichtige Ableitungen (zum Merken)

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$
x^s	$s \cdot x^{s-1} \ (s \in \mathbb{R})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$	$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Bitte beachten Sie die jeweiligen Definitionsbereiche!

Differenzierbarkeit (Beispiel)

Für die Ableitung der Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^x\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x^x)}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\right) \\
&= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}\left(x\ln x\right) \\
&= x^x\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) \\
&= x^x\left(\ln x + 1\right)
\end{aligned}
$$

Differenzierbarkeit (Bemerkung)

Anschaulich gesehen haben differenzierbare Funktionen keine "Ecken" bzw. "Kanten" (bitte erinnern Sie sich an das Beispiel zur Betragsfunktion).

Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion f differenzierbar, und ist ihre Ableitung f' wiederum differenzierbar, so erhält man durch erneutes Differenzieren die so genannte *zweite Ableitung*:

$$f'' := (f')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Höhere Ableitungen

Ist die zweite Ableitung wieder differenzierbar, so können wir die dritte Ableitung bilden und so fort.

Falls die Funktion insgesamt k-mal ableitbar (anders gesagt: k-mal differenzierbar) ist, erhalten wir die *k-te Ableitung*

$$f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Höhere Ableitungen (Bemerkung)

Achtung: Es kommt häufig vor, dass f^k anstatt $f^{(k)}$ geschrieben wird (zumeist in Prüfungen). Das ist aber grob verwirrend, denn die Klammern um das k herum sind gerade deshalb da, um Verwechselungen mit der k-ten Potenz zu vermeiden.

Es bleibt die Frage, was die 0-te Ableitung ist?

Sie wird als

$$f^{(0)} := f$$

definiert, also als die Funktion selbst.

Höhere Ableitungen (Bemerkung)

Hat man in einer physikalischen Anwendung eine zweimal differenzierbare Funktion für die Position eines Teilchens $x(t)$ von der Zeit t gegeben — auch als Ortsfunktion bezeichnet — so nennen wir die erste Ableitung die *Geschwindigkeit* des Teilchens

$$v(t) = \dot{x}(t).$$

Die zweite Ableitung heißt *Beschleunigung*:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t).$$

Die üblichen Formelzeichen ergeben sich durch *v*elocity und *a*cceleration.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Recht schnell können wir den Finger auf „höchste“ bzw. „tiefste“ Stellen eines Funktionsgraphen halten. Dabei gibt es aber z. B. folgende Probleme:

- Ist der Graph in einer Skalierung gezeichnet, die wirklich alle Stellen dieser Art zeigt?
- Könnte nicht bei allen gewählten Skalierungen etwas übersehen werden und reicht die Auflösung überhaupt für das Aufzeigen solcher Stellen?
- Muss überhaupt ein Graph gezeichnet werden?

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Definition

Sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *gegeben.*

- *Wir sagen* f *nimmt in* $\tilde{x} \in D$ *das (globale) Maximum an, wenn gilt:*

  $$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

  Schreibweise: $f(\tilde{x}) = \max_{x \in D} f(x)$.

- *Wir sagen* f *nimmt in* $\tilde{x} \in D$ *das lokale Maximum an, falls ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, sodass gilt:*

  $$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - \tilde{x}| < \varepsilon.$$

  Analog dazu werden Minimum und lokales Minimum definiert.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *nimmt ihr Maximum und Minimum an.*

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Bemerkung)

Ein lokales Maximum muss allerdings kein globales Maximum sein, denn es können (jenseits der in der Definition beschriebenen ε-Umgebung) noch größere Werte vorkommen. Entsprechende Überlegungen gelten natürlich auch für Minima.

Nicht jede Funktion nimmt ein Maximum oder Minimum an, was wir z. B. an der auf den gesamten reellen Zahlen definierten Funktion $f(x) = x$ sehen.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Welche Eigenschaften müssen Punkte haben, die als Kandidaten für Extremwerte taugen? Wir gehen hier davon aus,dass eine betrachtete Funktion in x_0 ein lokales Maximum annimmt. Dann gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Dadurch erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0.$$

Für ein Minimum verläuft alles analog.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $O \subseteq D$ eine ε-Umgebung von x_0. Hat f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt die Gleichung $f'(x_0) = 0$.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in O$ (O wie im vorigen Satz) mit

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- *Ist n gerade, so gilt:*
  a) *f nimmt an der Stelle x_0 ein lokales Maximum an, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
  b) *f nimmt an der Stelle x_0 ein lokales Minimum an, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *Ist n ungerade, so nimmt f an der Stelle x_0 weder ein Minimum noch ein Maximum an.*

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Beispiel)

Sei $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Für die Ableitungen gilt: $f'(x) = 2x - 2$, $f''(x) = 2$.

Die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion ist $x = 1$ und $f''(1) = 2 > 0$.

Also liegt dort ein lokales Minimum mit $f(1) = 4$ vor.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Beispiel)

An den Punkten $x = \pm 2$ gilt $f(-2) = 13$ und $f(2) = 5$.

Da die Funktion auf dem Intervall $[-2,1[$ streng monoton fällt ($f'(x) < 0$) und auf dem Intervall $]1,2]$ streng monoton steigt ($f'(x) > 0$), muss die Funktion an den Stellen $x = \pm 2$ ein lokales Maximum annehmen.

Ein Vergleich der Funktionswerte liefert, dass die Funktion f bei $x = 1$ das globale Minimum $y = 4$ und bei $x = -2$ das globale Maximum $y = 13$ annimmmt.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Bemerkung)

Achtung: In der Schule wurden die Kriterien häufig etwas reduziert gelehrt. Man sollte über die Nullstellen der ersten Ableitung die kritischen Stellen finden und diese dann in die zweite Ableitung einsetzen.

Je nach Vorzeichen des Ergebnisses lag dann ein Maximum oder Minimum vor.

Das funktioniert manchmal, aber ist nach Obigem nicht die ganze Weisheit.

Wir betrachten als weiteres Beispiel daher $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$ (an der Tafel).

Taylor-Polynome

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0, x \in I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R^n_{f,x_0}(x).}$$

- Gesamte Gleichung: *Taylor-Formel*
- Summe: *Taylor-Polynom n-ter Ordnung* T^n_{f,x_0} von f mit *Entwicklungspunkt* x_0
- Restglied: R^n_{f,x_0}

Taylor-Polynom (Bemerkung)

Das Taylor-Polynom stellt eine Approximation (d. h. Näherung) einer geeigneten Funktion durch Polynome dar.

Das Restglied gibt dabei den Fehler an, der bei dieser Näherung gemacht wird.

Taylor-Polynom (Beispiel)

Wir betrachten $f(x) = e^x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Beim Ableiten ändert sich die Funktion nicht:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x = f(x),$$

$$f''(x) = (e^x)'' = (e^x)' = e^x = f(x), \ldots$$

Daher ist $f^{(i)}(0) = f(0) = e^0 = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$T_{f,0}^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i.$$

Taylor-Polynom (Beispiel)

Interessieren wir uns für das Taylor-Polynom von $f(x) = \sin x$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, müssen wir zuerst die Ableitungen des Sinus in x_0 berechnen:

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(0) &= \sin 0 = 0, \\
f^{(1)}(0) &= \cos 0 = 1, \\
f^{(2)}(0) &= -\sin 0 = 0, \\
f^{(3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \\
f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Bei weiteren Ableitungen wiederholt sich dies immer wieder, also entfällt beim Taylor-Polynom hier jeder zweite Summand:

$$
T^n_{f,0} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \; .
$$

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Recht schnell können wir den Finger auf „höchste“ bzw. „tiefste“ Stellen eines Funktionsgraphen halten. Dabei gibt es aber z. B. folgende Probleme:

- Ist der Graph in einer Skalierung gezeichnet, die wirklich alle Stellen dieser Art zeigt?
- Könnte nicht bei allen gewählten Skalierungen etwas übersehen werden und reicht die Auflösung überhaupt für das Aufzeigen solcher Stellen?
- Muss überhaupt ein Graph gezeichnet werden?

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Definition

Sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

- *Wir sagen f nimmt in $\tilde{x} \in D$ das (globale) Maximum an, wenn gilt:*

  $$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$

  Schreibweise: $f(\tilde{x}) = \max_{x \in D} f(x)$.

- *Wir sagen f nimmt in $\tilde{x} \in D$ das lokale Maximum an, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass gilt:*

  $$f(\tilde{x}) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - \tilde{x}| < \varepsilon.$$

  Analog dazu werden Minimum und lokales Minimum definiert.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *nimmt ihr Maximum und Minimum an.*

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Bemerkung)

Ein lokales Maximum muss allerdings kein globales Maximum sein, denn es können (jenseits der in der Definition beschriebenen ε-Umgebung) noch größere Werte vorkommen. Entsprechende Überlegungen gelten natürlich auch für Minima.

Nicht jede Funktion nimmt ein Maximum oder Minimum an, was wir z. B. an der auf den gesamten reellen Zahlen definierten Funktion $f(x) = x$ sehen.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Welche Eigenschaften müssen Punkte haben, die als Kandidaten für Extremwerte taugen? Wir gehen hier davon aus,dass eine betrachtete Funktion in x_0 ein lokales Maximum annimmt. Dann gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0.$$

Dadurch erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0.$$

Für ein Minimum verläuft alles analog.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare Funktion und* $O \subseteq D$ *eine* ε*-Umgebung von* x_0*. Hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt die Gleichung* $f'(x_0) = 0$*.*

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in O$ (O wie im vorigen Satz) mit

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- *Ist n gerade, so gilt:*
  a) *f nimmt an der Stelle x_0 ein lokales Maximum an, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
  b) *f nimmt an der Stelle x_0 ein lokales Minimum an, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.*
- *Ist n ungerade, so nimmt f an der Stelle x_0 weder ein Minimum noch ein Maximum an.*

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Beispiel)

Sei $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Für die Ableitungen gilt: $f'(x) = 2x - 2$, $f''(x) = 2$.

Die einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion ist $x = 1$ und $f''(1) = 2 > 0$.

Also liegt dort ein lokales Minimum mit $f(1) = 4$ vor.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Beispiel)

An den Punkten $x = \pm 2$ gilt $f(-2) = 13$ und $f(2) = 5$.

Da die Funktion auf dem Intervall $[-2{,}1[$ streng monoton fällt ($f'(x) < 0$) und auf dem Intervall $]1{,}2]$ streng monoton steigt ($f'(x) > 0$), muss die Funktion an den Stellen $x = \pm 2$ ein lokales Maximum annehmen.

Ein Vergleich der Funktionswerte liefert, dass die Funktion f bei $x = 1$ das globale Minimum $y = 4$ und bei $x = -2$ das globale Maximum $y = 13$ annimmmt.

Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen (Bemerkung)

Achtung: In der Schule wurden die Kriterien häufig etwas reduziert gelehrt. Man sollte über die Nullstellen der ersten Ableitung die kritischen Stellen finden und diese dann in die zweite Ableitung einsetzen.

Je nach Vorzeichen des Ergebnisses lag dann ein Maximum oder Minimum vor.

Das funktioniert manchmal, aber ist nach Obigem nicht die ganze Weisheit.

Wir betrachten als weiteres Beispiel daher $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$ (an der Tafel).

Taylor-Polynome

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0, x \in I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R^n_{f,x_0}(x).}$$

- Gesamte Gleichung: *Taylor-Formel*
- Summe: *Taylor-Polynom n-ter Ordnung* T^n_{f,x_0} von f mit *Entwicklungspunkt* x_0
- Restglied: R^n_{f,x_0}

Taylor-Polynom (Bemerkung)

Das Taylor-Polynom stellt eine Approximation (d. h. Näherung) einer geeigneten Funktion durch Polynome dar.

Das Restglied gibt dabei den Fehler an, der bei dieser Näherung gemacht wird.

Taylor-Polynom (Beispiel)

Wir betrachten $f(x) = e^x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Beim Ableiten ändert sich die Funktion nicht:

$$f'(x) = (e^x)' = e^x = f(x),$$

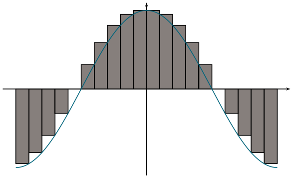
$$f''(x) = (e^x)'' = (e^x)' = e^x = f(x), \ldots$$

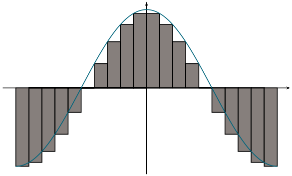
Daher ist $f^{(i)}(0) = f(0) = e^0 = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$T_{f,0}^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i.$$

Integration: Grundlagen

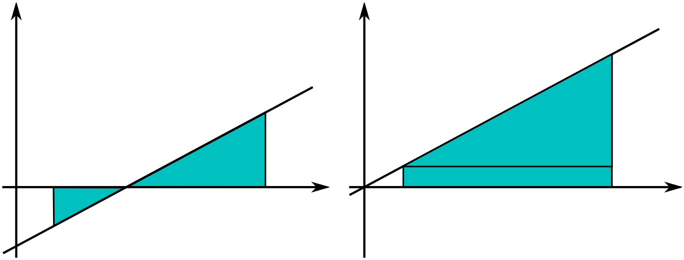
Die Grundidee ist, die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse von oben und unten durch Rechtecke zu approximieren, was in den folgenden Bildern exemplarisch gezeigt wird:





Grundlagen

Wie berechnet man die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen einer Funktion? Ist der Graph eine Gerade, so lässt sich die Fläche einfach durch Dreiecke und Rechtecke zusammensetzen.



Bei komplizierteren Funktionen ist dies nicht so einfach!

Grundlagen

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ in n gleich große Teile mit Randpunkten a und b:

$$a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_n := b.$$

Die Grundseiten der Rechtecke sind jeweils

$$\Delta x := \frac{b-a}{n} \ ,$$

die Randpunkte

$$x_k = a + k\Delta x \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

und die Flächen der n Rechtecke

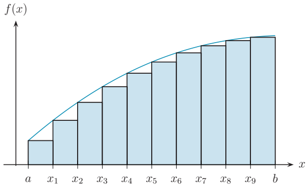
$$F_k = f(x_{k-1})\Delta x \ .$$

Grundlagen

Es gilt für die gesamte durch die Rechtecke gebildete Fläche

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} F_k \ .$$

Zur Verdeutlichung des Vorgehens noch das folgende Bild:



Grundlagen

Für differenzierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert von $F(n)$ und es ist

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} F(n)$$

das Integral von f über $[a,b]$.

Grundlagen

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}\right\} \quad \text{Linearität}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ , \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in \,]a, b[$$

Grundlagen

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}\right\} \quad \text{Linearität}$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\ , \quad \text{falls } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in\ ]a,b[$$

Grundlagen

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn gilt:

$$F' = f.$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann auch $F + c$ für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$, denn $(F + c)' = F' + 0 = F'$.

Grundlagen

Um sich nicht auf eine bestimmte Stammfunktion einigen zu müssen, wird auch

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ohne Grenzen am Integralsymbol geschrieben; wir nennen $\int f(x)\,dx$ *unbestimmtes Integral* von f.

Anders ausgedrückt: Das unbestimmte Integral bezeichnet die Gesamtheit aller Stammfunktionen.

Bemerkung

Die Konstante c wird oft gleich Null gesetzt, was ohne Schaden allerdings nur dann passieren sollte, wenn lediglich Interesse an einer möglichen Stammfunktion besteht.

Für physikalische Anwendungen z. B. hat die Konstante große Bedeutung!

Bemerkung

Wir betrachten zur Erklärung das zweite Newton'sche Gesetz für die Kraft K in einer einfachen Form, nämlich mit einer konstanten Masse m und konstanter Beschleunigung $\ddot{x}(t) = a$:

$$K(t) = m\ddot{x}(t) = ma$$

und damit

$$\ddot{x}(t) = a\,.$$

Durch das Angeben der Stammfunktionen erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\dot{x}(t) = at + v_0$$

und im nächsten Schritt

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0\,.$$

Bemerkung

Wir erhalten bei den Schritten

1. die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = \dot{x}(t)$ mit zugehöriger Konstante v_0,
2. die Ortsfunktion $x(t)$ mit zugehöriger Konstante x_0.

Werden die Konstanten vernachlässigt, verschwinden plötzlich Anfangsort und -geschwindigkeit!!

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, dann gibt es eine Stammfunktion* F *zu* f *und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

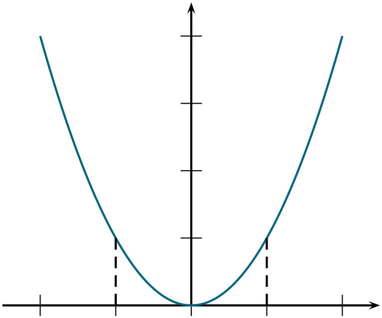
Bemerkung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt uns also etwas über den Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral und über die Berechnung des bestimmten Integrals.

Für den Term $F(b) - F(a)$ werden zumeist die abkürzenden Schreibweisen $F(x)\Big|_a^b$ bzw. $[F(x)]_a^b$ verwendet.

Beispiel

Wir berechnen die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) := x^2$ auf $[-1,1]$:



Beispiel

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + c - \left(\frac{-1}{3} + c\right) = \frac{2}{3} + c - c = \frac{2}{3}.$$

Wir sehen, dass die Konstante der Stammfunktion bei der Berechnung keine Rolle spielt; das bestimmte Integral ist also unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

Substitutionsregel am Beispiel

Wir wollen $\int_a^b f(3t+1)dt$ integrieren. Dafür definieren wir $x(t) := 3t+1$ und formen die Ableitung um:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{3} = dt \ .$$

Nun: erhaltene Gleichung ins Integral einsetzen und die Integralgrenzen anpassen, um die Substitutionsregel anzuwenden:

$$\int\limits_a^b f(3t+1)dt = \int\limits_{x(a)}^{x(b)} f(x)\frac{dx}{3} = \frac{1}{3}\int\limits_{3a+1}^{3b+1} f(x)dx \ .$$

Produktregel am Beispiel

Siehe Tafel.

Vektorräume: Definition

Gelten für eine Menge V die unten stehenden Eigenschaften für alle $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in V$ und alle μ, $\lambda \in \mathbb{R}$, so heißt die Menge V zusammen mit den Rechenoperationen „$+$" und „$\cdot$" Vektorraum, seine Elemente *Vektoren*:

Vektorräume

1. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (Assoziativität der Addition)
2. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ und $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (Nullvektor)
3. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (Kommutativität)
4. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$ (Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren)
5. $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}, \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$ (Distributivität)
6. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
7. $\lambda \cdot \vec{x} \in V$
8. $\vec{x} + \vec{y} \in V$

Vektorräume (Beispiel)

Denken wir uns für $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in der Definition einfach reelle Zahlen x und y.

Dann ist alles, was bei den Punkten 1. bis 6. steht nur das, was Sie schon immer über das Rechnen mit reellen Zahlen wussten.

Was ist aber die Rolle von 7. und 8.?

Wenn wir eine reelle Zahl mit einer anderen multiplizieren oder zwei reelle Zahlen miteinander addieren, so ist das Ergebnis wieder eine reelle Zahl. Die beiden Rechenoperationen führen also nicht aus der Menge hinaus.

Folgerung: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation und Addition bilden einen Vektorraum. (Sie haben es bisher nur nicht gewusst.)

Vektorräume (Bemerkung)

- Die Elemente eines Vektorraumes sind nicht immer, wie bereits erwähnt, „Pfeile“ bzw. als solche darstellbar. Diese Art der Visualisierung ist nützlich, jedoch nicht allgemein anwendbar.

- Wir haben absichtlich „$+$“ und „$\cdot$“ mit Anführungszeichen geschrieben, denn unter dem „Plus“ bzw. „Mal“ verstehen wir hier allgemein nicht mehr die Rechenoperationen, welche für reelle Zahlen bekannt sind.

- Durch die Punkte 1. bis 8. haben wir eine Struktur gegeben, die uns zum einen sagt, was wir mit den Elementen machen dürfen. Zum anderen sagen uns speziell die Punkte 7. und 8., dass wir beim Anwenden der Operationen nicht aus V herausgelangen können.

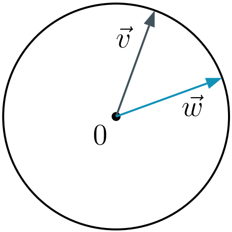
Vektorräume (Bemerkung)

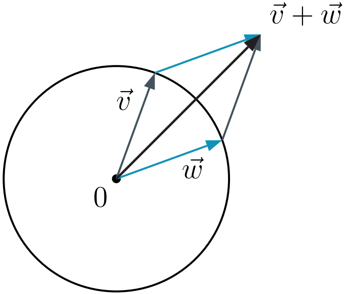
- Ein Vektorraum kann z. B. als Elemente auch Funktionen mit bestimmten Eigenschaften enthalten. Zur Darstellung solcher Vektoren versagt dann aber die einfache Vorstellung in Form von Pfeilen.

- Es geht im Wesentlichen darum, dass eine Menge betrachtet und durch Eigenschaften, die definieren, was mit den Elementen der Menge gemacht werden darf, festgelegt wird. Die dabei verwendeten Operationen dürfen nicht aus der Menge herausführen.

Vektorräume (Bemerkung)

Wir machen uns den letzten Punkt intuitiv klar: Betrachten wir einen Kreis und zeichnen den Radius an verschiedenen Stellen ein. Betrachten wir diese Radien als zwei Vektoren (als Pfeile visualisiert) und addieren sie mithilfe eines eingezeichneten Parallelogrammes, so zeigt der Ergebnisvektor aus dem Kreis heraus.





Vektorräume (Bemerkung)

Das wollen wir nicht! Betrachten wir hingegen zwei Vektoren in der gesamten Ebene (die natürlich in alle Richtungen unendlich weit ausgedehnt ist), so bleiben wir auch nach Addition der Vektoren in der Ebene.

Der Vektorraum der reellen Zahlen (**das** Beispiel)

Wir führen hier den so genannten $\mathbb{R}^n$ ein; dieser ist ein Vektorraum, wie wir unter Verwendung der sogleich vorgestellten Rechenoperationen mit den Punkten 1. bis 8. leicht nachprüfen können.

Seine Vektoren haben die Gestalt

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ .$$

Die Zahlen x_i heißen *Koordinaten* von $\vec{x}$.

Die natürliche Zahl n im Exponenten von $\mathbb{R}^n$ gibt die Anzahl der Koordinaten seiner Vektoren an.

Der Vektorraum der reellen Zahlen (**das** Beispiel)

Ein spezieller Vektor ist der Nullvektor: $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Addition von Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ;$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} .$$

Der Vektorraum der reellen Zahlen (**das** Beispiel)

Ein Beispiel mit Zahlen:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ein wichtiges Beispiel

Wir definieren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} =: \vec{e}_1\ , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} =: \vec{e}_2\ ,\ \ldots,\ \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\\1\end{pmatrix} =: \vec{e}_n\ .$$

Diese n Vektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bilden die so genannte *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$, was den $\mathbb{R}^n$ zu einem n-dimensionalen Vektorraum macht.

Lineare Abbildungen

Definition

Eine Abbildung $L\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heißt linear, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$,
- $L(\lambda\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$.

Lineare Abbildungen (Beispiel)

Sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \binom{x_1}{x_3}$. Dann ist

$$L\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$

Lineare Abbildungen (Beispiel)

Weiterhin

$$
\begin{aligned}
L(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = L \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
= \lambda L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Die hier definierte Abbildung ist folglich eine lineare Abbildung (die Projektion genannt wird.)

Lineare Abbildungen (Beispiel)

Wir betrachten Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die differenzierbar sind, und bezeichnen die Ableitung mit $\frac{d}{dx}$.

Wir lernten, dass bei Summen jeder Summand getrennt abgeleitet werden darf:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \ ,$$

und dass konstante Faktoren von der Ableitung unberührt bleiben:

$$\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{d}{dx}f(x) \ .$$

Das bedeutet, dass $\frac{d}{dx}$, also das Ableiten, eine lineare Abbildung ist.

Lineare Abbildungen (Gegenbeispiel)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$.

Hier ist

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 \ .$$

Die Gleicheit gilt nur für die Wahl spezieller Werte für x und y, aber nicht allgemein!

Matrizen

Definition

Für $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ heißt

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij}) = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

eine Matrix vom Format $(m \times n)$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.

Kurz: $(m \times n)$-Matrix oder auch (m, n)-Matrix.

Der erste Index, hier i genannt, heißt Zeilenindex, der zweite Spaltenindex.

Matrizen

Definition

Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle i und j wird als

$$M(m \times n) \quad \textit{oder auch als} \quad M^{m,n}$$

notiert.

Matrizen (Beispiel)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2) \ .$$

Eine sehr wichtige Matrix ist die *Einheitsmatrix*

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n) \ .$$

Matrizen (Bemerkung)

Beim Rechnen mit Matrizen übernimmt die Einheitsmatrix die Rolle der 1 bei den reellen Zahlen.

Beispielsweise hat die (3×3)-Einheitsmatrix die Gestalt

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken noch, dass statt E_n häufig einfach E geschrieben wird, wenn n klar ist. Teils findet sich in der Literatur auch I_n bzw. I.

Matrizen (Bemerkung)

Hier handelt es sich bei einer Matrix bisher nur um ein Schema.

Multiplikation von Matrizen

Wenn eine Matrix eine lineare Abbildung darstellt müssen wir wissen, wie Matrizen auf Vektoren des $\mathbb{R}^n$ wirken, wie also $A\vec{v}$ erklärt ist.

Zu diesem Zweck werden wir eine Multiplikation zwischen Matrix und Vektor definieren und sie schlicht *Matrix-Vektor-Multiplikation* nennen.

Allerdings sei erwähnt, dass Vektoren des $\mathbb{R}^n$ auch als Matrizen, nämlich als $(n \times 1)$-Matrizen, aufgefasst werden können.

Daher definieren wir die Multiplikation von Matrizen auch gleich allgemein. (Wir werden diese noch mehrfach benötigen.)

Multiplikation von Matrizen

Definition

Seien zwei Matrizen $A := (a_{ij}) \in M(m \times \underline{n})$ *und* $B := (b_{jk}) \in M(\underline{n} \times p)$ *gegeben.*

Dann ist das Matrixprodukt definiert als

$$AB = A \cdot B := \left(\sum_{\underline{j}=1}^{n} a_{i\underline{j}} b_{\underline{j}k} \right)_{i=1\dots m,\ k=1\dots p} .$$

Das Matrix-Vektor-Produkt $A\vec{v}$ *ist als Spezialfall des Matrixproduktes erklärt, indem* $\vec{v}$ *als* $(n \times 1)$*-Matrix aufgefasst wird und an die Stelle von* B *tritt.*

Multiplikation von Matrizen (Bemerkung)

Einzelne Indizes hier sind nur deshalb unterstrichen, um deren Zusammengehörigkeit deutlicher zu machen.

Dieses verdeutlicht, dass eigentlich immer nur die Zeilen (beginnend mit der ersten Zeile) der linken Matrix auf die Spalten (beginnend mit der ersten Spalte) der rechten Matrix gelegt werden. Die „aufeinander gelegten“ Einträge werden dann einfach multipliziert und die Ergebnisse mit den anderen entstehenden Termen addiert.

Multiplikation von Matrizen (Beispiel)

Das Matrixprodukt für (2×2)-Matrizen so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen (Beispiel)

Das Matrix-Vektor-Produkt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Definition

Seien $A := (a_{ij})$, $B := (b_{ij}) \in M(m \times n)$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann definieren wir Matrixsumme und Multiplikation mit Skalaren:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

Rechnen mit Matrizen (Bemerkung)

Achtung: Die Matrizenmultiplikation ist allgemein nicht kommutativ!

Rechnen mit Matrizen (Beispiel)

$$-\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\-3 & -4\end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3\\2 & 0\end{pmatrix}\ .$$

Lineare Gleichungssysteme

Jeder Koch benötigt, kann er sich nicht auf Erfahrungen stützen, eigentlich ein lineares Gleichungssystem, um zu wissen, wie viele Gerichte er aus seinen Zutaten zubereiten kann.

Es gibt noch viele weitere Beispiele...

Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten als Beispiel

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -x_1 + 6x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird, um es zu lösen, in eine so genannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* umgeformt:

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

In diesem Schema wird das LGS in folgenden Einzelschritten modifiziert:

Die Zeilen werden vertauscht:

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

zu Zeile 2 wird zweimal Zeile 1 addiert:

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 0 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

Zeile 2 wird durch 14 geteilt (normiert):

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

von Zeile 1 wird sechsmal Zeile 2 subtrahiert:

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

und schließlich wird Zeile 1 mit (-1) multipliziert:

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird nun wieder in ein LGS umgeschrieben:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$

Lineare Gleichungssysteme

Verwendet wurden so genannte *elementare Zeilenoperationen*:

- Tauschen von Zeilen,
- Addition eines (ggf. negativen) Vielfachen einer Zeile zu einer anderen,
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.

Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem mit m Gleichungen und m Variablen kann unter gewissen Voraussetzungen in die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & c_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_m \end{array}\right),$$

also mit der Einheitsmatrix im linken Teil, überführt werden.

Daran kann die eindeutige Lösung $x_1 = c_1, \dots, x_m = c_m$ direkt abgelesen werden kann. Dies lässt sich als Idealfall bezeichnen.

Tritt dieser nicht ein, so ergibt sich ein etwas anderes System, welches allerdings auch einfach zu behandeln ist.

Lineare Gleichungssysteme (Beispiel)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 12 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel kommen wir nicht auf obige Idealform, vereinfacht hat sich das LGS aber dennoch. Die letzte Zeile schränkt die Menge der Lösungen nicht ein, denn „$0 = 0$“ ist einfach eine wahre Aussage.

Lineare Gleichungssysteme (Beispiel)

Es verbleibt also die erste Gleichung, welche unendlich viele Belegungen für x_1 und x_2 liefert, die das Gleichungssystem lösen, und zwar in der Abhängigkeit $x_1 = 3 - 2x_2$.

Eine konkrete Lösung ergibt sich also durch konkretes Wählen von x_2 und anschließendem Berechnen von x_1.

Lineare Gleichungssysteme (Bemerkung)

Angenommen, wir erhalten als letzte Matrix nach Umformungen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Was bedeutet das? $0 = 1$!

Also hat das ursprüngliche LGS, aus dem diese erweiterte Koeffizientenmatrix entstanden ist, keine Lösung.

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Ein System der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit a_{jk}, $b_j \in \mathbb{R}$ *heißt lineares Gleichungssystem mit* m *Gleichungen und* n *Unbekannten (Variablen).*

Die b_j *heißen Inhomogenitäten des LGSs, die* a_{jk} *Koeffizienten.*

Sind alle $b_j = 0$, *so heißt das LGS homogen, sonst inhomogen.*

Lineare Gleichungssysteme (Bemerkung)

Die linke Seite eines solchen LGSs können wir in einem Matrix-Vektor-Produkt und die rechte Seite in einem Vektor zusammenfassen.

Dadurch entsteht dann die übersichtlichere Schreibweise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oder kurz $A\vec{x} = \vec{b}$.

Die Matrix $A := (a_{jk})$ heißt *Koeffizienten-* und der Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *Inhomogenitätsvektor*.

Lineare Gleichungssysteme (Bemerkung)

Weiterhin wird beim Rechnen mit linearen Gleichungssystemen, um Schreibarbeit zu sparen, gerne auf den Vektor $\vec{x}$ verzichtet, da alle wichtigen Informationen bereits in A und $\vec{b}$ stehen.

Übrig bleibt die so genannte *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) .$$

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Der Vektor $\vec{x}$ heißt Lösungsvektor des LGSs, wenn seine Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ alle Gleichungen des LGSs erfüllen.

Die Menge aller Lösungsvektoren heißt Lösungsmenge des LGSs.

Lineare Gleichungssysteme

Die zuvor eingeführten elementaren Zeilenoperationen — Tauschen von Zeilen, Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null — sind gerade die Operationen des *Gauß-Algorithmus*, an dessen Ende ein durch bloßes Hinsehen zu lösendes LGS steht.

Der erwähnte Idealfall

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & c_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_m \end{array}\right)$$

sollte dabei als zu erstrebendes Ziel nie aus den Augen verloren werden.

Gauß-Algorithmus (Teil 1)

Grob werden beim Gauß-Algorithmus folgende Punkte abgearbeitet:

- Alle Einträge unterhalb von a_{11} werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile addiert wird.
- Alle Einträge unterhalb von a_{22} werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der zweiten Zeile addiert wird.
- Auf diese Weise werden nacheinander die Einträge unterhalb sämtlicher a_{ii} Null.

Gauß-Algorithmus (Teil 2)

- Alle Einträge oberhalb von a_{nn} werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der n-ten Zeile addiert wird.
- Alle Einträge oberhalb von $a_{n-1,n-1}$ werden Null. Dies geschieht, indem auf die zugehörigen Zeilen ein geeignetes Vielfaches der $(n-1)$-ten Zeile addiert wird.
- Auf diese Weise werden nacheinander die Einträge oberhalb sämtlicher a_{ii} Null.
- Schließlich werden noch die a_{ii} zu 1 normiert, indem die entsprechende Zeile mit $\frac{1}{a_{ii}}$ multipliziert wird.

Gauß-Algorithmus (Teil 3)

Diese Reihenfolge versichert uns, dass bereits erzeugte Nulleinträge bis zum Ende des Gauß-Algorithmus bestehen bleiben. So machen spätere Umformungen die vorherigen nicht kaputt.

Es ist aber ratsam, für eventuelle Zwischenschritte flexibel zu bleiben und sich nicht stur an diese Auflistung zu halten.

So kann ein Zeilentausch zur rechten Zeit oder ein zwischenzeitliches Skalieren einer Zeile Brüche vermeiden, mit denen es sich schlecht weiterrechnen lässt.

Lineare Gleichungssysteme (Bemerkung)

Die Schritte beim Gauß-Algorithmus dokumentieren wir, in dem wir über den Pfeil schreiben, was getan wird. Dabei bekommen die Zeilen römische Ziffern.

Z. B.: schreiben wir dann über einen Pfeil: $2 \cdot \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}$ (zwei mal zweite Zeile minus drei mal erste Zeile).

Lineare Gleichungssysteme (Bemerkung)

Die Schritte beim Gauß-Algorithmus dokumentieren wir, in dem wir über den Pfeil schreiben, was getan wird. Dabei bekommen die Zeilen römische Ziffern.

Z. B.: schreiben wir dann über einen Pfeil: $2 \cdot \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}$ (zwei mal zweite Zeile minus drei mal erste Zeile).