TD2: Lois de probabilités

2017-2018

Exercice 1. Loi discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'ensemble $\{1 \dots 5\}$ de loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X=1] &= \frac{1}{10}, & \mathbb{P}[X=2] &= \frac{3}{10}, & \mathbb{P}[X=3] &= \frac{2}{10}, \\ \mathbb{P}[X=4] &= \frac{3}{10}, & \mathbb{P}[X=5] &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

a. Calculer et dessiner la fonction de répartition $F_X(x)$.

b. Calculez $\mathbb{P}[1.4 \leq X \leq 4.2]$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}[X]$.

Exercice 2. Loi continue

Soit X une variable aléatoire réelle ayant la fonction de densité suivante :

$$f_X(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq c$$

Quelle doit être la valeur de c pour que f_X soit bien une fonction de densité ? Cette valeur étant donnée à c :

a. Dessiner $f_X(x)$.

b. Calculer et dessiner $F_X(x)$.

c. Calculer $\mathbb{P}[\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}]$, $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}[X]$.

Exercice 3. Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ est décrite par la fonction de densité qui est constante sur l'intervalle et nulle en dehors.

a. Calculer la fonction de densité et la fonction de répartition et l'espérance de la loi uniforme.

b. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendentes uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Calculer la loi de

1. $1 - X$
2. $X + Y$
3. $X - Y$
4. $1/X$
5. $\max(X, Y)$
6. $\min(X, Y)$

Préalablement au calcul, vous afficherez la densité empirique de ces lois dans R.

c. Soit F une fonction de répartition inversible (par exemple F est continue et strictement croissante). Si X est uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, quelle est la loi de $F^{-1}(X)$?

Exercice 4. Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p :

$$\mathbb{P}[X = n] = (1-p)^{n-1}p, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

a. Calculer la moyenne de X.

b. Montrer la propriété "sans mémoire" de la loi géométrique.

Exercice 5. Loi exponentielle

La fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda}$ est proportionnelle à $e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.

a. Par quelle valeur faut il multiplier $e^{-\lambda x}$ pour que f soit une fonction de densité ?

b. Calculer la moyenne de X.

c. Montrer la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle.

d. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ, quelle loi suivent les variables $\min(X_1, X_2)$ et $X_1 + X_2$ et $\max(X_1, X_2)$? Au préalable, vous afficherez la densité de ces variables dans R.

e. On considère la variable discrète obtenue par $Y = \lceil \theta X \rceil$. Vérifier visuellement, dans R, que Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1/\theta}$. Le démontrer.