TD1: Simulateur à événement discret et générateur aléatoire uniforme

2017-2018

Exercice 1. Faire tourner le simulateur vu en cours

Sur e-campus, vous pouvez récupérer le code en C du simulateur vu en cours (fichier `SED.tar`). On rappelle que ce programme écrit dans la sortie standard l'évolution de la taille d'une file d'attente au cours du temps. Le débit d'entrée dans la file est donné par la variable λ.

a. Exécuter ce programme et afficher l'évolution dans le logiciel R. Le document `R_memo.pdf` recense les principales commandes de R, et le document `Paradis-rdebuts_fr.pdf` est une introduction à R.

b. Même question mais en choisissant les valeurs 0.9, 1.0, et 1.2 pour λ. Quels profils de courbes obtient-on ? Est-ce conforme à l'intuition ?

Exercice 2. Premières mesures

Dans cet exercice, vous pouvez partir du code de l'exercice précédent.

Description du modèle On considère une file d'attente où les clients sont servis en ordre FIFO. Cette file a une capacité limitée, notée C : lorsqu'un client arrive et que la file est pleine, ce dernier est perdu.

Pour différentes valeurs de λ et C, on veut mesurer les indices de performance suivants :

1. le taux d'activité du serveur : `TA` ;
2. le nombre moyen de clients dans la file : `N` ;
3. le taux de rejet des clients : `TR` ;
4. la proportion de temps où la file est pleine : `P` ;
5. le temps moyen d'attente des clients qui sont sortis de la file après avoir terminé leur service : `AT` ;

Initialement,on choisira $\lambda = 0.8$.

a. Donner les événements et les variables permettant de simuler cette file d'attente et de mesurer `TA`, `N`, `TR`, `P` et `AT`.

b. Ajouter le code pour mesurer `TA`, `N`, `TR`, et `P` lors d'une simulation.

c. Supposons qu'il n'y ait aucun clients dans le système aux dates 0 et T. Quelle relation existe-t'il entre les temps d'attente des clients arriveés avant la date T, et le nombre moyen de client entre ces 2 dates ?

d. Ajouter alors le code permettant de mesurer `AT`.

e. Afficher l'évolution du nombre moyen de clients au cours d'une simulation. Que constatez-vous ?

f. Afficher le nombre moyen de clients obtenu pour plusieurs valeurs de λ.

Exercice 3. Deux files d'attentes

On a deux files l'une derrière l'autre. Quand un client a fini son service dans la file 1 il rentre dans la file 2. La file 1 est de capacité infinie, la file 2 est de capacité finie B. Si la file 2 est pleine et qu'un client de la file 1 a terminé son service, ce client reste bloqué dans la file 1 en attendant que la file 2 ne soit plus pleine. Pendant ce temps aucun service ne peut avoir lieu dans la file 1.

a. Donner les événements et les variables globales permettant de simuler cette file d'attente.

b. Rajouter le code nécessaire pour calculer la probabilité que la file 1 soit bloquée sans servir alors qu'elle n'est pas vide.

Exercice 4. Générateurs à base de congruences linéaires

On considère le générateur suivant :

$$x_{n+1} = ax_n \mod 7.$$

a. Quelle est la longueur maximale du cycle de ce générateur ?

b. Étudier les suites produites par cet algorithme avec $a = 3$, $a = 4$ et $a = 5$.

Exercice 5. Un théorème

Le théorème de Hull-Dobel (1962) dit que la suite (x_n) produite par l'algorithme $x_{n+1} = ax_n + b \mod m$ a un cycle maximal de longueur m si et seulement si les trois hypothèses suivantes sont vérifiés :

1. $\mathrm{PGCD}(a, m) = 1$, $\mathrm{PGCD}(b, m) = 1$;
2. si un nombre premier p divise m, alors p divise $a - 1$;
3. si 4 divise m, alors 4 divise $a - 1$.

Vérifier les conditions du théorème pour les valeurs suivantes

— $a = 4$, $b = 2$, $m = 9$,
— $a = 2$, $b = 2$, $m = 9$,
— $a = 3$, $b = 3$, $m = 9$,
— $a = 1$, $b = 1$, $m = 9$.

Exercice 6. Décalage de registre

Soit $S = \{1, 0, 1, 1\}$ la séquence binaire (le germe). Pour produire le bit suivant (S_5) de la séquence on applique

$$S_1 \,\mathrm{XOR}\, S_3 \quad \text{ce qui donne } 1 \,\mathrm{XOR}\, 1 = 0.$$

Ensuite, on décale et on recommence. On peut décrire cette récurrence par

$$S_{n+1} = S_{n-1} \,\mathrm{XOR}\, S_{n-3}.$$

1. Trouver les 5 prochains bit de la séquence. Quelle est la suite obtenue ?
2. Étudier les séquences de ce même générateur avec les germes $S = \{1, 0, 1, 0\}$ et $S = \{1, 0, 0, 1\}$.

On considère maintenant l'algorithme

$$S_{n+1} = S_{n-2} \,\mathrm{XOR}\, S_{n-3}.$$

3. Étudier la séquence produite par cet algorithme. Trouver la longueur du cycle de ce générateur. Quel est le comportement de ce générateur sur les autres germes ?
4. Quelle est la longueur maximale du cycle avec un registre à 4 bits ? Quelle est la longueur minimale ?

Exercice 7. Comment tirer à pile ou face avec une pièce mal équilibrée

On dispose d'une pièce de monnaie mal équilibrée, c'est-à-dire que la fréquence d'apparition de piles ou de faces n'est pas égale à $\frac{1}{2}$.

On modélise un tirages de la pièces par une variable aléatoire X à valeur dans $\{0, 1\}$ et on note

$$p = \mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[\text{ la pièce tombe sur pile }].$$

On suppose que $p < 0.5$.

a. Calculer en fonction de p les probabilités :

$$\mathbb{P}[(X_1, X_2) = (0, 0)], \quad \mathbb{P}[(X_1, X_2) = (0, 1)],$$
$$\mathbb{P}[(X_1, X_2) = (1, 0)], \quad \mathbb{P}[(X_1, X_2) = (1, 1)].$$

où X_i désigne le i-ème tirage de la pièce.

On note Y_2 la variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1\}$ définie par $Y_2 = (X_1 + X_2) \bmod 2$.

b. Calculer $\pi_2 = \mathbb{P}[Y_2 = 1]$.

c. Montrer que $\pi_2 - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(1 - 2p)$.

d. Ranger par ordre croissant les 5 nombres $p, 1 - p, \pi_2, 1 - \pi_2, \frac{1}{2}$.

e. En déduire de X_1 ou de Y_2 quelle serait la meilleure simulation d'une pièce non biaisée ?

On pose alors $Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3) \bmod 2$, ce qui équivaut à $Y_3 = (Y_2 + X_3) \bmod 2$.

f. Calculer $\pi_3 = \mathbb{P}(Y_3 = 1)$.

g. Exprimer $\left|\pi_3 - \frac{1}{2}\right|$ en fonction de $\left|\pi_2 - \frac{1}{2}\right|$ et p puis de $\left|p - \frac{1}{2}\right|$.

On généralise maintenant le procédé en définissant $Y_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \bmod 2$ ce qui équivaut à $Y_{n+1} = (Y_n + X_{n+1}) \bmod 2$.

h. Exprimer $\pi_{n+1} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1)$ en fonction de π_n et p.

i. Calculer alors $\left|\pi_n - \frac{1}{2}\right|$ en fonction de $\left|p - \frac{1}{2}\right|$ et p.

j. Application : on suppose $p = 0.4$. Pour quelle valeur minimale de n aura-t-on

$$\left|\pi_n - \frac{1}{2}\right| < 10^{-6}.$$