Para tornar um sinal analógico num digital é preciso discretizar as variações no tempo e na amplitude.

Conversão ADC
- amostragem (tempo)
- quantização (amplitude)

$$\frac{1}{T_a} = f_a \rightarrow \text{Frequência de amostragem}$$

É possível fazer amostragem sem introduzir erro

Teorema da amostragem → permite reconstruir o sinal original.

$$44100\ Hz > 2 \times 200\,00\ Hz \quad \} \ f_a > 2 \times f_{am}$$

↓

f_a de um CD

Quantização: Não é possível fazer quantização sem introduzir erro.

SNR → Signal-to-noise-error (dB)

$u(n)$ → representação do sinal em tempo discreto.

SNR: $\mathcal{E}_R = \sum_n |u(n)|^2$

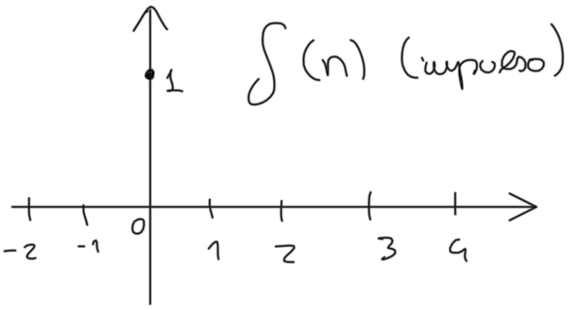
$r(n) = u(n) - \hat{u}(n)$ → quantizado

$\mathcal{E}_v = \sum |v(n)|^2$.

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}} \ (dB)$$

Estabilidade

Entrada limitada em amplitude $\longrightarrow$

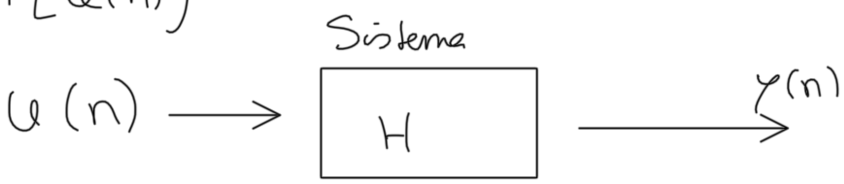


$$y(n) = u(n) + 2y(n-1)$$

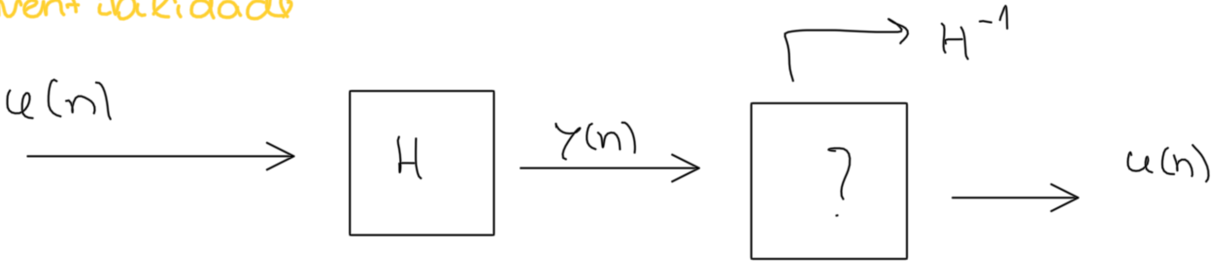
$$\left.\begin{aligned} n=0 &;\ y(0) = 1 \\ n=1 &;\ y(1) = 2 \\ n=2 &;\ y(2) = 4 \end{aligned}\right\} y(4) = 2^4$$

Exemplo: $f_a = 1000\,Hz \qquad T_a = \dfrac{1}{1000} = 1\,ms$

$$y(n) = H[u(n)]$$

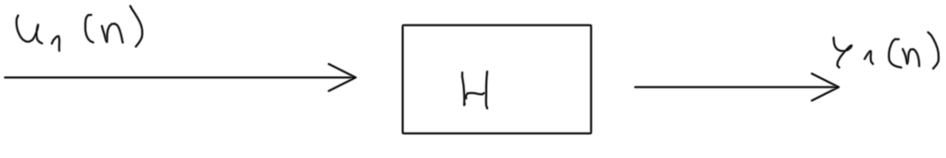


Inventibilidade



↳ sistema inverso.

Linearidade



$$u_2(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_2(n)$$

$$\underbrace{u_1(n)+u_2(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(n)+y_2(n)}_{\text{Aditividade}}$$

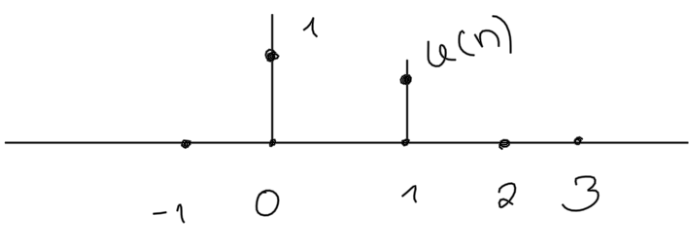
$$\underbrace{\alpha u(n) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \alpha y(n)}_{\text{Homogeneidade}}$$

Linear = Aditividade e Homogeneidade

Causalidade

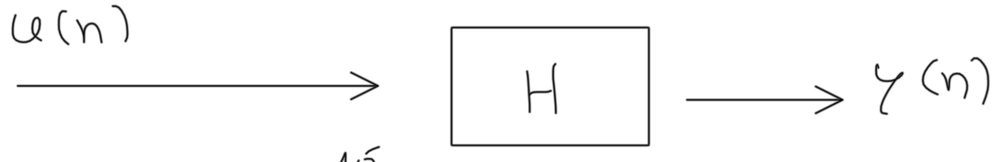
Exemplo de sistema não causal:

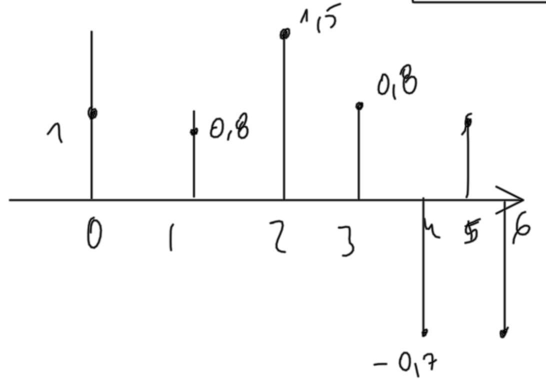
$$y(n) = u(n) + u(n-1) - 0,5\, y(n+4)$$



$$y(0) = u(0) + u(1) - 0,5\, y(4)$$

Linearidade e invariante no tempo (LIT)





$$x(n) = \sum_k x(k)\,\delta(n-k)$$

$$y(n) = H[x(n)] = H\left[\sum x(k)\,\delta(n-k)\right] =$$

aditividade

$$= \sum H[x(k)\,\delta(n-k)] =$$

homogeneidade

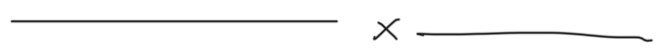
$$= \sum x(k)\, H[\delta(n-k)] =$$

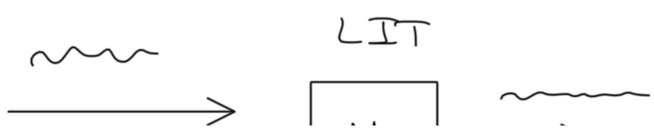
$$= \sum x(k)\, h(n-k)$$

invariância temporal

↳ Resposta impulsional do sistema.

$$\underbrace{y(n) = \sum_k x(k)\, h(n-k)}_{\text{Convolução}}$$

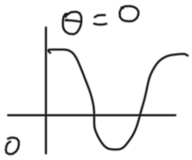


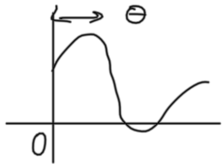


$\cos(2\pi f t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow a \cdot \cos(2\pi f t + \theta)$

amplitude

↳ fase





$$\cos(2\pi f t) \xrightarrow{\text{amostragem}} \cos(2\pi f_a n T_a)$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{f}{f_a} n\right)$$

Frequência normalizada

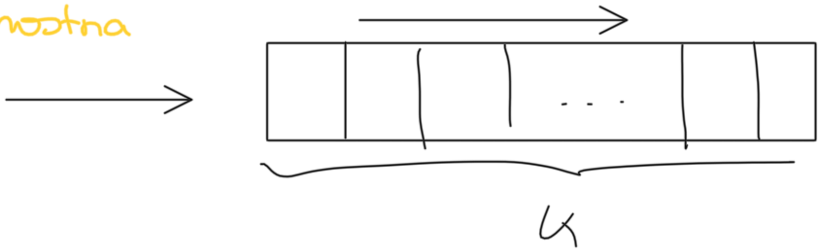
Eco : $y(n) = u(n) - \alpha\, u(n-K)$

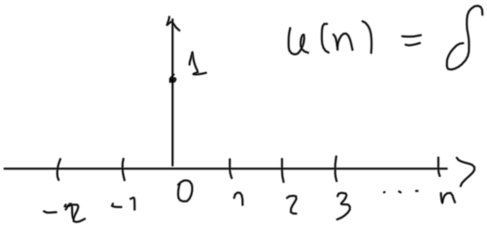
Ganho do eco

atraso do eco

sistema sem realimentação

Amostra





$u(n) = \delta(n)$

$y(n) = u(n) + \alpha u(n-1)$

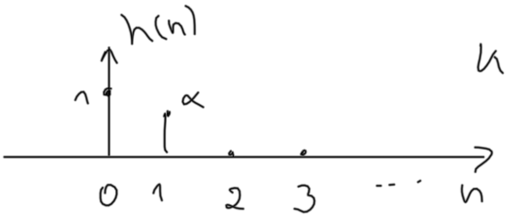
$y(0) = u(0) + \alpha u(-1) = 1$

$y(1) = u(1) + \alpha u(0) = \alpha$

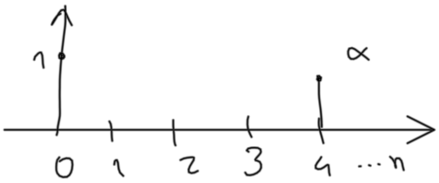
$y(2) = u(2) + \alpha u(1) = 0$

⋮

Resposta Impulsional



$k=1$



$k=4 \longrightarrow$ Delay

Múltiplos ecos

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-k) + \alpha^2 x(n-2k) + \alpha^3 x(n-3k)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i (n - ik)$$

$$h(n) = ? \quad \underbrace{y(n) = x(n) + \alpha y(n-1)}_{\text{sistema com realimentação}}$$

$$y(0) = x(0) + \alpha y(-1) = 1$$

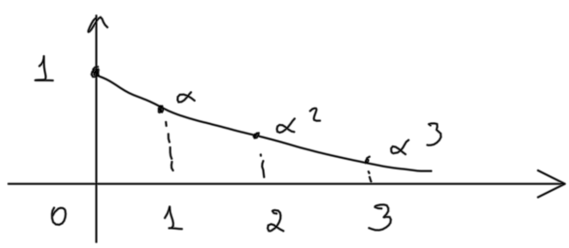
$$y(1) = x(1) + \alpha y(0) = \alpha$$

$$y(2) = x(2) + \alpha y(1) = \alpha^2$$

$\vdots$

$$y(m) = x(m) + \alpha y(m-1) = \alpha^m$$

IIR
Infinite
Impulse
Response



------

sistema, $y(n) = x(n) + \alpha x(n-1)$

... inverso

$$u(n) = y(n) + \alpha\, y(n-1)$$

$$y(n) = u(n) - \alpha\, y(n-1)$$

Transformação Z

$$Z\{a(n)\} = A(z)$$

$$Z\{a(n-k)\} = A(z) \cdot z^{-k}$$

$$y(n) = u(n) - \alpha y(n-1)$$

$$Y(z) = X(z) - \alpha Y(z) z^{-1}$$

Função de Transferência

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}}$$

"zeros" são as raízes do numerador

'pólos' são as raízes do denominador

Num sistema estável, todos os pólos têm módulo inferior a 1.

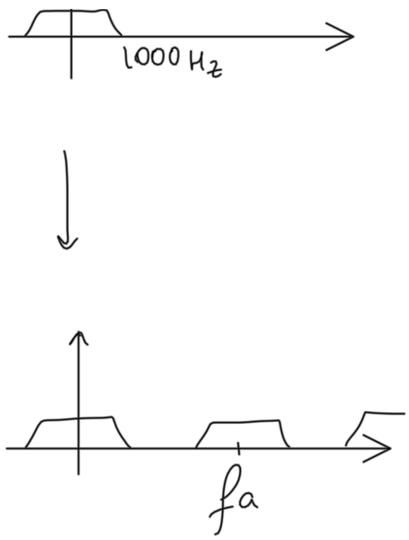
$$y(n) = 2u(n) - u(n-1) + 3y(n-1) - 2y(n-2)$$

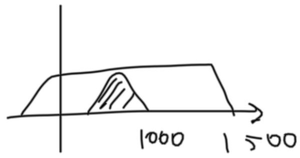
$$Y(z) = 2X(z) - X(z)z^{-1} + 3Y(z)z^{-1} - 2Y(z)z^{-2}$$

Aliasing

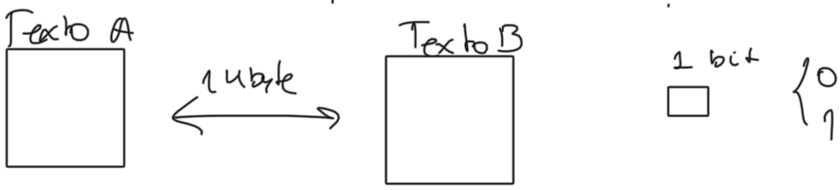
$f_a = 1500\ Hz$

↑

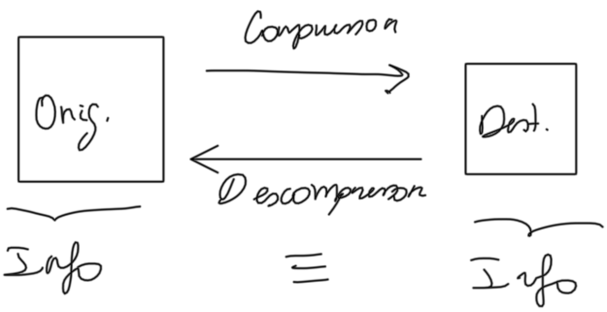

1000 Hz
fa


1000
1500

Informação, como medir?



1 bit de dado pode ter menos que 1 bit de informação.



$|Dest| < |Orig|$

$$\overset{x}{010 \ldots 01001 \ldots}$$

$$\boxed{|y| < 0{,}5\,|x| \quad \forall x}$$

$y = C(x)$ ← ficheiro original

↗ ficheiro comprimido

$D(y) = x$

↖ Descompressão

Alfabeto $\{M, U, I\}$

1. $xI \longrightarrow xIU$
2. $Mx \longrightarrow Mxx$
3. $xIIIy \longrightarrow xUy$

4. u UUy $\longrightarrow$ uy

MI $\longrightarrow$ MIU?

MI $\xrightarrow{1}$ MIU

MI $\xrightarrow{2}$ MII $\xrightarrow{2}$ MIIII $\xrightarrow{3}$ MIU

UIM $\xrightarrow{?}$ MIU não é possível

MIU $\xrightarrow{?}$ UIM

MIU $\xrightarrow{2}$ MIUIU $\xrightarrow{2}$ MIUIUIUIU ...

MI $\xrightarrow{?}$ MU

MI $\xrightarrow{1}$ MIU $\xrightarrow{2}$ MIUIU $\xrightarrow{2}$ ...

MI $\xrightarrow{2}$ MII $\longrightarrow$ MIIU $\rightarrow$

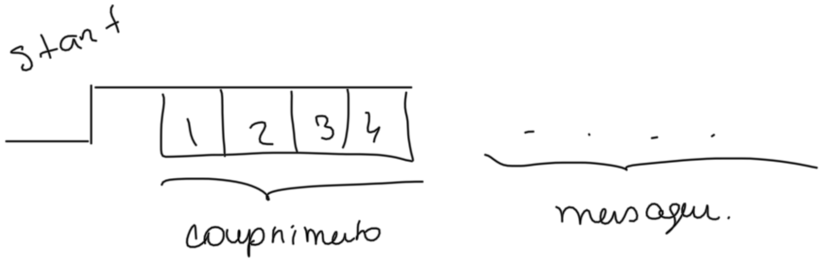
MII $\longrightarrow$ MIIII $\rightarrow$ ...

John von Neuman

$\boxed{\cancel{00}}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{01}$ $\boxed{\cancel{11}}$

→ 'Amostragem' 2 a 2, eliminar pares iguais e quando diferentes selecionamos o 1º

__________ x __________



$X = 64$

Alice

Bob

1 . . . 100

$e \geq 50$? $\longrightarrow$ 1

$e \geq 75$? $\longrightarrow$ 0

$e \geq 62$? $\longrightarrow$ 1

$e \geq 68$? $\longrightarrow$ 0

$e \geq 65$? $\longrightarrow$ 0

$e \geq 63$? $\longrightarrow$ 1

$e = 63$? $\longrightarrow$ 0 $\longrightarrow$ 64

m possibilidades → quantidade de info : $\log m$

→ quant. de info de msg de tamanho n

$$H = n \log m = \log m^n$$

$$m = 2 \quad \{0,1\}$$

$$n = 10 \rightarrow 10 \times \log 2 = \log(2^{10}) = \log 1024$$

Alice

Bob

52 cartas de jogo

52! possibilidades

$\log_2(52!) \approx 226$ bits || medida combinatória de info.

Código Morse

S . O . S

$\cdot\ \cdot\ \cdot\quad -\ -\ -\quad \cdot\ \cdot\ \cdot$

A: $\cdot\ -$ — 1 1 3

E T: $\cdot\ -$ — 1 3 3

$\cdot\ -$ → A ? / E T ?

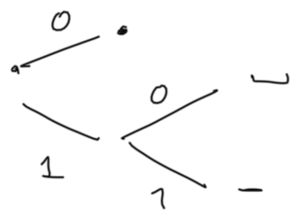
$\boxed{\begin{array}{l} \cdot \to 0 \\ \sqcup \to 1 \\ - \to 11 \end{array}}$ Ambíguo (not a prefix-free code)

$\cdot\quad -\quad \sqcup$

0 11 1

$\cdot\quad \sqcup\quad -$

$\boxed{\begin{array}{l} \cdot \to 0 \\ \sqcup \to 10 \\ - \to 11 \end{array}}$ Prefix-free code



→ Instantâneo

Código
- Unicamente Descodificáveis
  - livres de prefixo
  - ou não
- Ambíguos

①

A 0

B 01

C 11

$\{0, 01, 11, 1\}$ — $\cancel{0}1$

Unicamente descodificável

Ao tirar prefixo não criei um código existente

②

A 0

B 01

C 10

$\{0, 01, 10, 1, 0\}$ — $\cancel{0}1$ $\cancel{1}0$

Não é unicamente descodificável

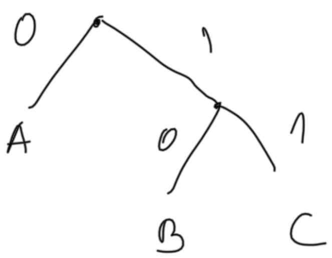
(tirei o prefixo e fiquei com um código que já tinha)

Código livre de prefixo

A 0

B 10

C 11



Desigualdade de Kraft

$$\sum_{l_i} \frac{1}{2^{l_i}} \leq 1$$ para construir árvore

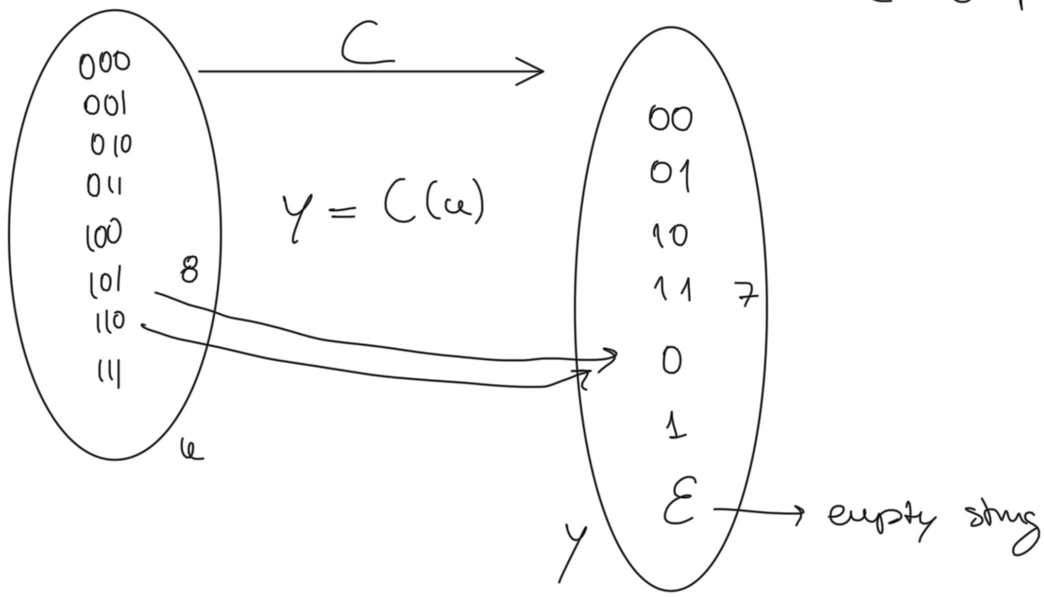
tamanho dos bits ← l_i

A B C

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1$$

Strings de tamanho 3

C comprime



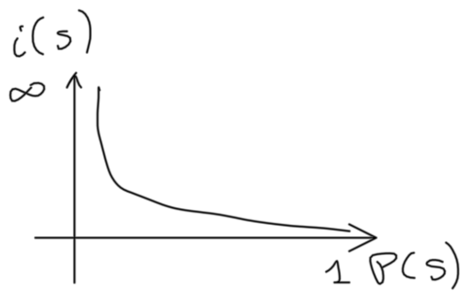
Medida probabilística de informação

$$i(s) = \log_2 \frac{1}{P(s)} = -\log_2 P(s)$$

símbolo do alfabeto

Se $P(s) = 1$, $i(s) = 0$

$P(s) = 0$, $i(s) = \infty$



Medida combinatória de informação

$$\underbrace{\text{m objetos distintos (tamanho do alfabeto)} \quad \text{informação é } \log_2(m) \text{ bits}}_{\text{Igualdade de Kraft}}$$

$$P(A) \longrightarrow i(A) = -\log P(A)$$

$$P(B) \longrightarrow i(B) = -\log P(B)$$

$$P(A,B) \longrightarrow i(A,B) = -\log P(A,B) =$$

$$= -\log P(A)P(B) =$$

$$= -\log P(A) \cdot -\log P(B)$$

$= i(A) + i(B)$

Média de info por símbolo ← $\sum_s i(s)P(s) = \underbrace{-\sum_s P(s) \times \log P(s)}_{\text{entropia}} = H$

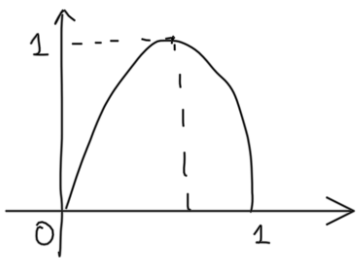
$P(s)$ uniforme $\Rightarrow$ entropia máxima

Alfabeto do tamanho m $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$

$$P_{s_i} = \frac{1}{m}$$

$$\underbrace{-\sum \frac{1}{m} \log\left(\frac{1}{m}\right)} = \log m$$

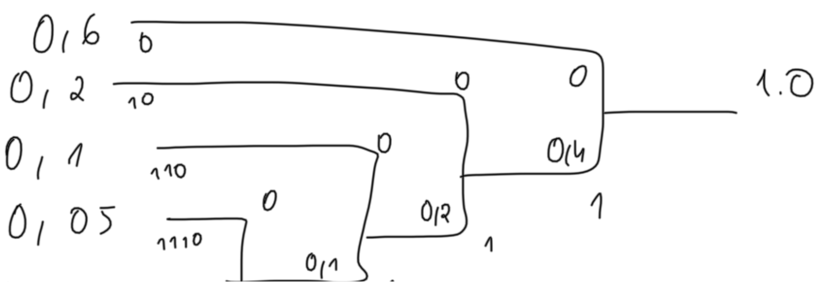
$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \log m =$$



$-p \log(p) - (1-p)\log(1-p)$

Códigos de Huffman

Ótimo na classe dos códigos de comprimento variável.



$0{,}05 \quad 1111 \quad 1 \quad 1$

Código de Golomb

Representa inteiros não negativos.

$n \in \mathbb{N}_0$

$q = n / m$

$r = n \% m$

q: código unário

r: código binário.

Exemplo:

$m = 4$

$n = 19$

$q = 19/4 = 4 \rightarrow 00001$

$r = 3 \rightarrow 11$

$\text{total} = \underbrace{0000\,1}_{q}\ \underbrace{11}_{r}$

$n = 9$

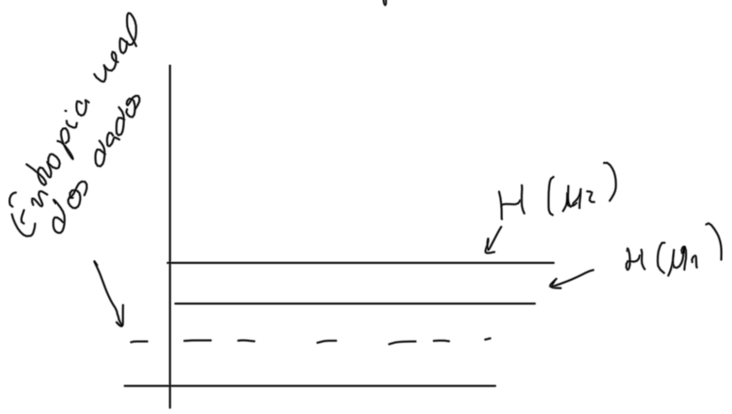
$q = 2 \rightarrow 001$

$r = 1 \rightarrow 01$

$\rightarrow 00101$

$$H = -\sum_i p_i \log_2 p_i \quad (\text{bits/símbolo})$$

Isto é a entropia 'verdadeira' se os símbolos ocorrerem de forma independente.



$\boxed{M_1} \longrightarrow P_i^1$ $\qquad$ $\boxed{M_2} \longrightarrow P_i^2$

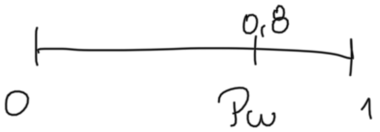
Se $H(M_1) < H(M_2)$ então M_1 é melhor que M_2.

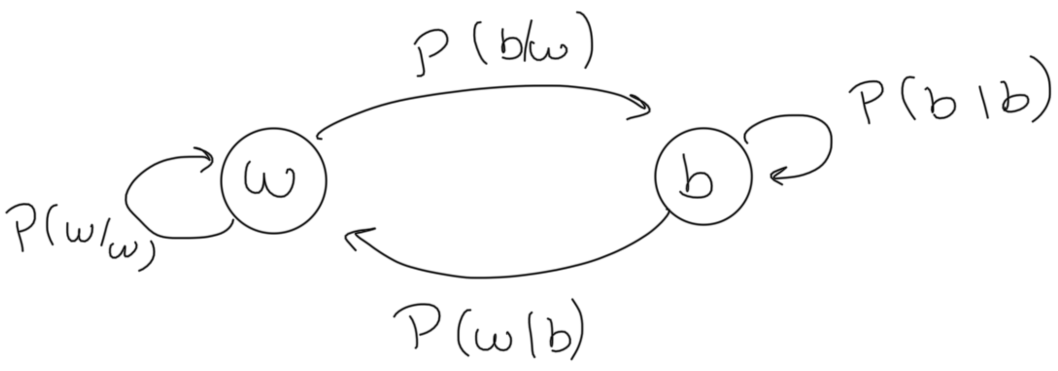
Modelo de Markov (de ordem k)

$$P(S \mid u_1 u_2 u_3 \dots u_n) = p(S \mid u_{n-k+1} \dots u_n)$$

u_{n+1}

$$P_b = 1 - P_w$$





$$p(w|b) + p(b|b) = 1$$

$p(w|b) = 0,3$

$p(b|w) = 0,01$

$$p(w) = \frac{p(w|b)}{p(w|b) \cdot p(b|w)}$$

$p(b|w) = 0,01$

$$H_w = -p(w|w)\log p(w|w) - p(b|w)\log p(b|w)$$

$$H_b = -p(b|b)\log p(b|b) - p(w|b)\log p(w|b)$$

$$H = H_w P_w + H_b P_b$$

Se considerar independentes

$H = 0,204$ bits/símbolo

Se considerar Markov ordem 1

$H = 0,107$ bits/símbolo

Σ : alfabeto

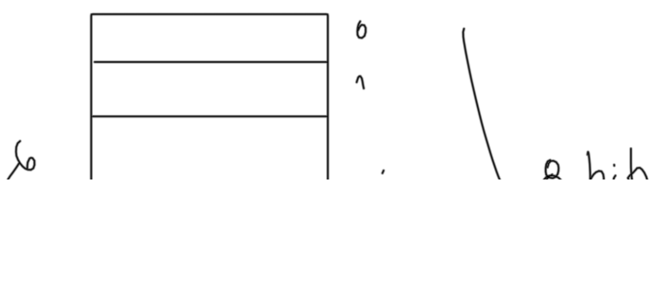
$|\Sigma| = 32$

Palavras de 4 símbolos

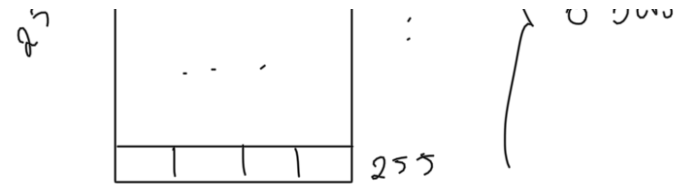
$|\Sigma|^4 = 32^4 \simeq 1M$

Probabilidade de uma palavra aleatória $\simeq 10^{-6}$

Escolho as 256 mais freq.



p: prob de estar no dicionário..



- Envia o idx no dicionário se a seq. estiver no dicionário (1)

- Envia 20 bits caso contrário (2)

$$L = 9p + 21(1-p) < 20$$

compensa neste caso

nº de bits médio

$$p \geq 0{,}084$$

$$\Sigma = \{A, B\}$$

(1)

AAA	00
AAB	01
AB	10
B	11

(2)

AAA	00
ABA	01
AB	10
B	11

(1) $\underbrace{AAB}_{01}\ \underbrace{B}_{11}\ \underbrace{AB}_{10}\ \underbrace{AAB}_{01}\ A \ \ldots$

(2) Não há forma de representar.

Código de Tunstall

A, B, C

0,5 0.3 0.2 → Probs

A	0,5
B	0,3
C	0,2
AA	0,25
AB	0,15
AC	0,1
B	0,3
C	0,2

A → AA, AB, AC

B → BA, BB, BC

↓

⋮

—— // ——

LZ 77 $\Sigma = \{a, b\}$

"Dict"

... 3 2 1 | a a b | abba ...

(0, 0, "a")

não há match

→ primeiro caracter que faz match

comprimento da match

... 3 2 1 a | a b a | b b a ...

(1, 1, "b")

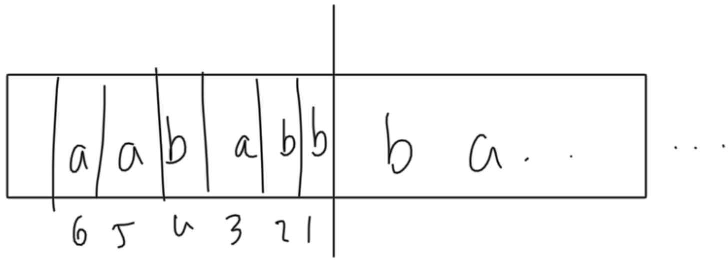
há match

há 1 b

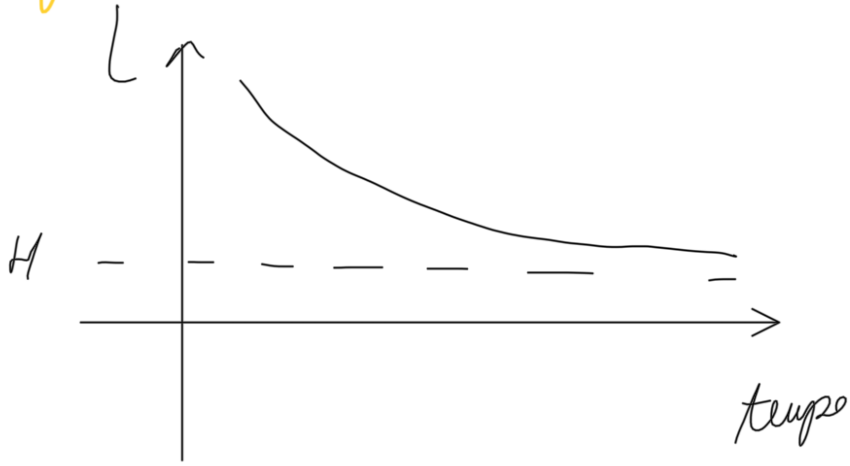
→ b

| | | | | a a b | a b b | a ... (2, 2 "b")

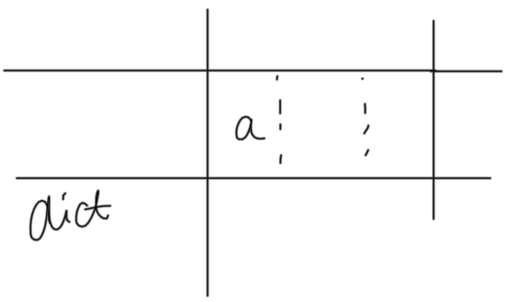
tamanho da match.



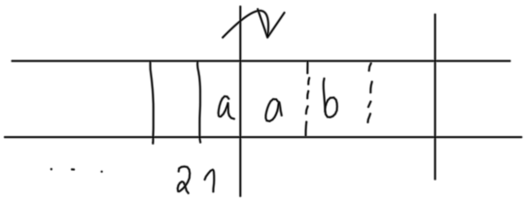
Algoritmos universais = LZ77 e LZ78



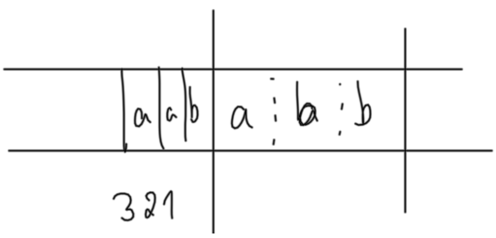
Descodificação



(0, 0, "a")



(1, 1, "b")



(2, 2, 'b')

LZ 78

a | a b | a b b | b | a a | a b b a ...

1 - a
2 - ab
3 - abb
4 - b
5 - aa
6 - abba
⋮

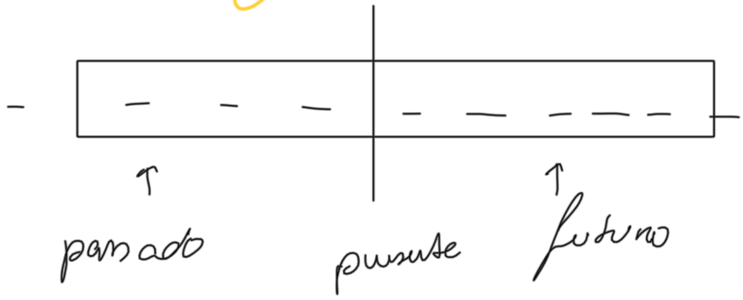
(0, 'a'), (1, 'b'), (2, 'b'),
(0, 'b'), (1, 'a'), (3, 'a').

Descodificação

a ab abb abb

1 - a
2 - ab
3 - abb

LZ77 janela deslizante



LZ78

$\{A, B\}$

\+ complexa → AA B A A B A A B | A B BAB AAAB BABB

\- complexa → $\underbrace{\text{AAA AAAAA B}}_{a}$ | B B B B B B B

\+ complexa →

1 - A
2 - AB
3 - B
4 - ABA

(0,A),(1,B),(0,B)(2,A)

\- complexa

1 - A
2 - AA
3 - AAA
4 - AAB

(0,A) (1,A) (2,A) (2,B)

LZW

Dicionário é iniciado com o alfabeto

{A,B} A|A|B|B|AB|AB|AB . . .

1 – A
2 – B
3 – AA
4 – AB
5 – BB
6 – BA
7 – ABA
8 – ABB

1, 1, 2, 2, 4, 4

	1	1	2	2	4	4
Rec	A	A	B	B	AB	AB
dict	3	4	5	6	7	8

1 – A
2 – B
3 – A A
4 – A B
5 – B B
6 – B A
7 – A B
8 – A B?

→ Codificação aritmética

$$\underbrace{-\log_2 P}_{\text{nº de bits ótimo}}$$

$p = 0{,}9$

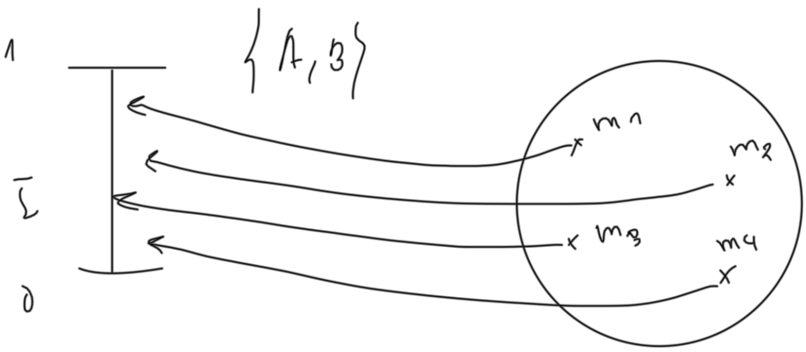
$-\log_2 0{,}9 \approx 0{,}15$

para representar um evento com prob. P

A - 1 ← 0,1

B - 00

C - 01



$I \subset \mathbb{R}$ → Infinito não contável

$I \subset \mathbb{Q}$ → Infinito contável

} $\mathbb{N}$

A - 0,5

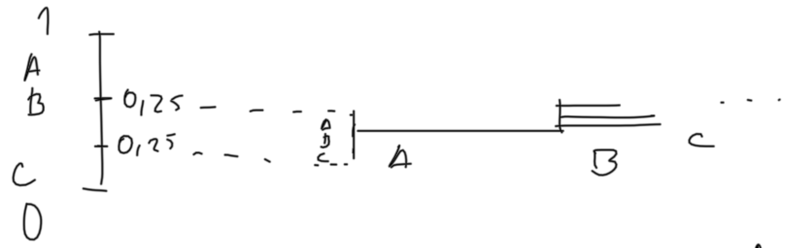
B - 0,25

C - 0,125

BABC

Intervalo corrente

$[L^n, H^n[$



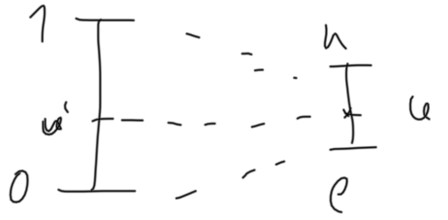
Novo símbolo

$[l, h[$

$$L^{n+1} = L^n + l(H^n - L^n)$$

} Translação de

$H = L + h(H^n - L^n)$ | implementação Gráfica.



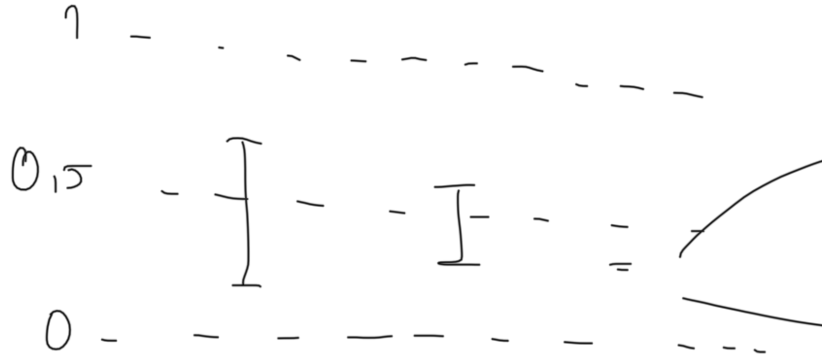
$(h - l) - 1$

$(u - l) - u'$

verificar que o valor u pertence ao intervalo inicial de B

$u'(h - l) = u - l$

$$u' = \frac{u - l}{h - l}$$



$H^n = \boxed{00}1100$

$L^n = \boxed{00}0100$

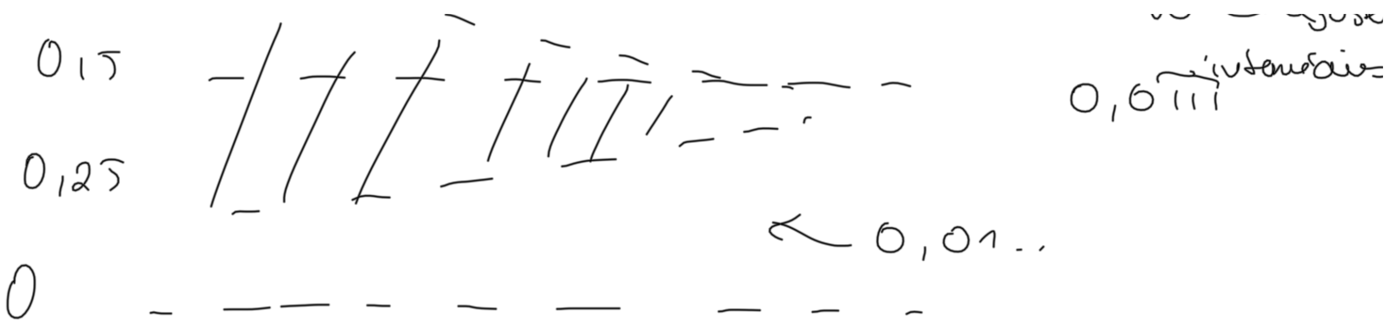
0.110.. shift

0.100.. shift

Como sabemos que está na gama (abaixo de 0,5) podemos mandar o '0' para o decoder e dar shift

0,10 ...

nº de a...



$$L = (L - 0{,}25) \times 2$$

$$H = (H - 0{,}25) \times 2$$

rescaling intermediário (para descartar o bit diferente e que não dá info onde está.