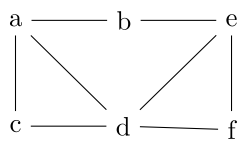
1. Grafos

Un grafo no dirigido G es un par (V, E) donde $V \neq \emptyset$ corresponde al conjunto de nodos (o vertices) y $E \subseteq 2^V$ corresponde al conjunto de conexiones o aristas del grafo (destacar que todo $e \in E$ debe ser una tupla de dos valores, como por ejemplo $e = \{a, b\}$).

Ejemplo:



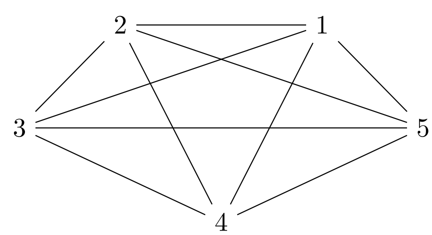
$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e, f\} \\ E &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\} \end{aligned}$$

Cabe destacar que en un grafo no dirigido como este, no hay loops (conexiones que vayan de un nodo al mismo nodo), las aristas no tiene dirección (lo que significa que $\{a, b\} = \{b, a\}$) y para cada par de nodos solo puede haber una conexión.

1.1. Familias de grafos

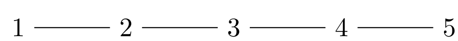
1.1.1. Grafos Completos (Cliques)

Un grafo completo o clique corresponde a un grafo de n vertices tal que $K_n = (V, E)$, $|V| = n$ y $E = \{\{u, v\} | u, v \in V \wedge u \neq v\}$. De forma más sencilla, un grafo completo es un grafo que conecta todos los nodos que contiene con todos los demás nodos.



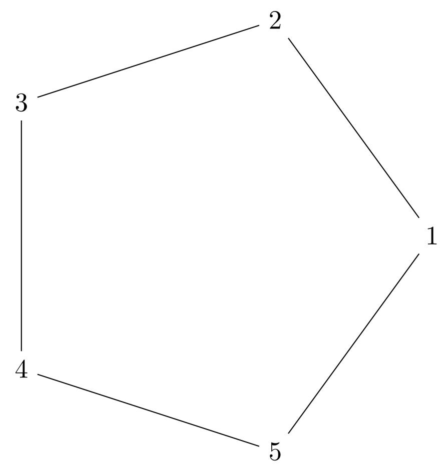
1.1.2. Linea

Un grafo de tipo linea consiste en un grafo de n vertices tal que $L_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ y $E = \{\{i, i+1\} | 0 \leq i \leq n-1\}$. En palabras simples, la linea corresponde a un grafo en donde todos los nodos se conectan con el "punto siguiente" (asumiendo que se tiene un orden establecido previamente, como 1, 2, 3, etc.)



1.1.3. Ciclo

Un grafo cíclico corresponde a un grafo de n vertices tal que $C_n = (V, E)$, $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $E = \{\{i, (i+1) \mod n\} | 0 \leq i \leq n-1\}$. En otras palabras, corresponde a un grafo el cual forma una figura cíclica, en donde el último elemento de la cadena se debe unir con el primero.



1.2. Igualdad de grafos

Se dice que dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos (denotado como $G_1 \cong G_2$) si se cumple que

$$f \text{ biyectiva} : V_1 \to V_2 \quad ; \quad \{u, v\} \in E_1 \leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

La relación de isomorfismo $\cong$ es una relación refleja, simétrica y transitiva. Se dice que una propiedad de un grafo G es preservada bajo isomorfismo, si G tiene una propiedad y $G \cong G'$, entonces G' también tiene la propiedad.

1.3. Vertices y Grados

Para un grafo $G = (V, E)$ y dos vertices $u, v \in V$

- u y v son adyacentes si y solo si $\{u, v\} \in E$
- El grado de u se define como: $\deg(u) = |\{v \in V | \{u, v\} \in E\}|$

Lema: (handshaking)

- Para todo grafo $G = (V, E)$ se cumple que $\sum_{v \in V} = 2 \cdot |E|$ (en palabras más simples, la suma de todos los grados de un grafo cualquiera siempre es $2 \cdot |E|$).
- Todo grafo tiene una cantidad par de vertices con grado impar.

1.4. Subgrafos

Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, y se escribe como $G' \subseteq G$