1 Conjuntos

1.1 ¿Qué es un conjunto?

Un conjunto corresponde a una colección bien definida de objetos. Estos objetos son denominados como **elementos del conjunto** y se dice que estos **pertenecen** (expresado con el simbolo $\in$) a él.
Cuando definimos un conjunto, se usan símbolos de llaves y dentro se colocan todos los objetos que pertenecen al conjunto.
Ejemplo:

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

1.2 Nociones básicas de los conjuntos

1.2.1 Pertenencia ($\in$)

Si tenemos un conjunto S y un objeto a, se dice que

- $a \in S$ cuando el objeto a se encuentra dentro del conjunto S.
- $a \notin S$ cuando el objeto a **no** se encuentra dentro del conjunto S.

NOTA: Un objeto puede ser un conjunto. Esto significa que un conjunto puede pertenecer a otro conjunto.

1.2.2 Subconjunto ($\subseteq$)

Considerando a un conjunto A y un conjunto B, se dice que A es subconjunto de B si

$$\forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si todo elemento presente en A está presente en B también. Cuando esto ocurre, se denota como $A \subseteq B$ (y cuando no, lógicamente se escribe como $A \nsubseteq B$)

1.2.3 Igualdad de conjuntos

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si se cumple que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \text{o, escrito de otra forma} \quad \forall x. x \in A \leftrightarrow x \in B$$

En palabras simples, dos conjuntos son iguales cuando ambos conjuntos tienen exactamente los mismos objetos, sin ninguno que pertenezca a un conjunto y no a otro. Esto se expresa como $A = B$ (y cuando no, $A \neq B$).

1.2.4 Conjunto vacío

Existe un conjunto único $\emptyset$, el cual llamamos *conjunto vacío*, el cual cumple que

$$\forall x. x \notin \emptyset$$

1.3 Descripción de un conjunto

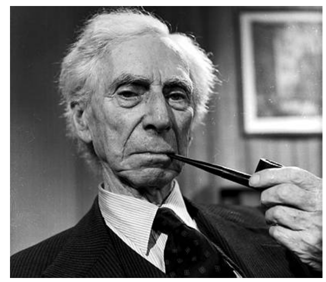
1. Por extensión: Este es el método más básico y el cual se describió anteriormente. Simplemente se listan todos los contenidos del conjunto entre llaves.
   Ejemplo:
   $$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

2. Por comprensión: Se define una propiedad $\delta(x)$ en algún lenguaje formal que solo cumplen los elementos del conjunto.
   Ejemplo:
   $$S = \{x|\delta(x) \text{ es verdadero}\}$$
   Ejemplo un poco más creativo:
   $$P = \{x|\forall x.x \text{ es par}\}$$

1.4 Paradoja de Russell o Paradoja del Barbero (1901)

Esta es una paradoja enunciada por Bertrand Russell[1]. Para comenzar, se define el siguiente conjunto

$$S^* = \{B \mid B \notin B\}$$



B. Russell (1872 - 1970)

S^* corresponde al "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a si mismos como miembros". Ahora, recordemos que por la definición de lo que es un conjunto, esto es equivalente a

$$\forall B.B \in S^* \leftrightarrow B \notin B$$

O sea, "cada conjunto es elemento de B si y solo si no es elemento de si mismo". Debido a que B es un conjunto, lo podemos sustituir de la siguiente forma

$$S^* \in S^* \leftrightarrow S^* \notin S^*$$

lo cual es una contradicción.
Esto puede ser un poco complicado de entender así. Intentemos entenderlo con la historia del Barbero.

Una definición como esta es bastante problemática. El problema aquí es *"considerar definiciones que se referencian a si mismas"*. Esto nos deja de lección que no todas las definiciones son válidas en la teoría de conjuntos.[2]

[1] Esta sección contiene información extraída del siguiente artículo de Wikipedia.
[2] Todas las definiciones que se verán durante el curso son válidas, pero esto es una lección de que no siempre es así.

1.5 Operaciones sobre conjuntos

- Unión ($\cup$): $A \cup B$ son todos los elementos que se encuentran en A o en B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- Intersección ($\cap$): $A \cap B$ son todos los elementos que se encuentran en A y B al mismo tiempo.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

- Diferencia ($\backslash$): $A \backslash B$ son todos los elementos que se encuentran en A y no en B.

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Complemento (A^C): A^C corresponde a todos los elementos que no se encuentran en A.

$$A^C = \{x | x \notin A\}$$

1.5.1 Propiedades de las operaciones sobre conjuntos

Para conjuntos A, B y C y un universo $\mathcal{U}$ tenemos las siguientes propiedades

1. Asociatividad:
$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

2. Conmutatividad:
$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

3. Idempotencia:
$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

4. Absorción:
$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap (A \cup B) &= A \end{aligned}$$

5. Distributividad:
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

6. De Morgan
$$\begin{aligned} (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \end{aligned}$$

7. Elemento neutro:
$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \mathcal{U} &= A \end{aligned}$$

8. Dominación:
$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U} \end{aligned}$$

9. Elemento inverso:
$$\begin{aligned} A \cup A^C &= \mathcal{U} \\ A \cap A^C &= \emptyset \end{aligned}$$

1.5.2 Paréntesis y precedencia

Se asumirá el siguiente orden de precedencia entre operadores

Operadores	Precedencia
$\cdot^C$	1
$\cap$	2
$\cup$	3

1.5.3 Operaciones generalizadas

- Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S}$ son todos los elementos que pertenecen a algún elemento de $\mathcal{S}$.

$$\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A.\ A \in \mathcal{S} \wedge x \in A\} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

- Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S}$ son todos los elementos que pertenecen a todos los elementos de $\mathcal{S}$

$$\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A.\ A \in \mathcal{S} \rightarrow x \in A\} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

1.6 Conjunto Potencia

Para un conjunto A, el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de todos los subconjuntos de A es definido como:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

En palabras simples, el conjunto potencia de A corresponde al conjunto que contiene a todos los subconjuntos de A.

1.7 Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad del conjunto corresponde a la cantidad de elementos distintos contenidos en un conjunto

$$A = \# \text{ de elementos distintos en } A$$

Teorema:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

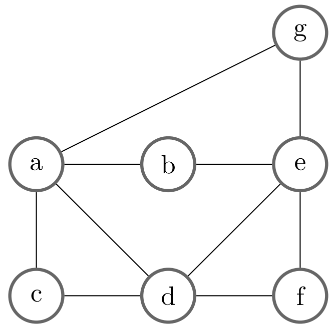
En otras palabras, la cardinalidad del conjunto potencia de A corresponde a 2 elevado a la cardinalidad del conjunto A.

1.8 Grafos como conjuntos

Pero …¿qué es un grafo?[3]
Un grafo consiste en un conjunto de objetos llamados vertices y nodos, los cuales se encuentran unidos entre sí.

[3] Información extraida del siguiente artículo de Wikipedia

Definición: Un grafo G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$, tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.



$$\begin{aligned} V &= \{\text{a, b, c, d, e, f, g}\} \\ E &= \{\ \{\text{a,b}\}, \{\text{a,c}\}, \{\text{a,d}\}, \{\text{a,g}\}, \{\text{b,e}\}, \{\text{c,d}\}, \{\text{d,e}\}, \{\text{d,f}\}, \{\text{e,f}\}, \{\text{e,g}\}\ \} \end{aligned}$$

En un grafo, los elementos que están presentes en V los llamamos *vértices o nodos*, y los elementos en E los llamamos *aristas*.

1.9 Pares Ordenados

Para dos elementos a y b se define el par ordenado (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

De forma mas informal, decimos que (a, b) es un par ordenado si es que el primer elemento (a) se distingue del segundo elemento (b). Por esto, tenemos que $(a, b) \neq (b, a)$.
Generalización: Se define una *n-tupla ordenada* como

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

1.10 Producto Cartesiano

Sea A y B conjuntos. El producto cartesiano se define como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Si tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el producto cartesiano generalizado es

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

2 Relaciones

Considerando un conjunto A y B, R es una relación binaria sobre A y B si se cumple que

$$R \subseteq A \times B$$

Es posible que $B = A$, entonces se dice que R es una relación binaria sobre A

$$R \subseteq A \times A$$

Notación: Para una relación R y un par (a, b), se usará la siguiente notación

$$\left.\begin{array}{c} (a, b) \in R \\ \text{o} \\ a\ R\ b \end{array}\right\} \quad (a, b) \text{ pertenece a la relación } R$$

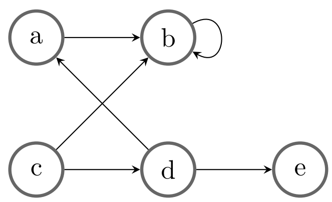
$$\left.\begin{array}{c}(a,b) \notin R \\ \text{o} \\ a \not R\, b\end{array}\right\} \quad (a,b) \text{ no pertenece a la relación } R$$

2.1 Representación de Relaciones

2.1.1 Grafos dirigidos

Toda relación binaria R sobre A se puede ver como un grafo dirigido $G_R = (A, R)$
Ejemplo:

$$A = \{a,b,c,d,e\} \quad ; \quad R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$



2.1.2 Matrices sobre bits / Representación Matricial

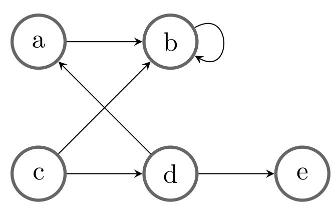
Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto y R una relación binaria sobre A. Definimos la matriz M_R que representa a la relación R como

$$M_R[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \; R \; a_j \\ 0 & \text{si } a_i \not R \; a_j \end{cases}$$

Ejemplo:

$$A = \{a,b,c,d,e\} \quad ; \quad R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Operaciones sobre matrices: Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n, entonces

$$\begin{array}{rcl} (M \vee N)[i,j] & = & M[i,j] \vee N[i,j] \\ (M \wedge N)[i,j] & = & M[i,j] \wedge N[i,j] \\ (\neg M)[i,j] & = & \neg M[i,j] \\ M[i,j] & \leq & N[i,j] \end{array} \qquad \text{para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq n \text{ asumiendo que } 0 \leq 1.$$

2.2 Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$. Se definen las siguientes operaciones

- Proyección 1: $\pi_1(R)$ son todos los elementos que estan en la primera componente de R (No se consideran los duplicados).
$$\pi_1(R) = \{x \mid \exists y \in A.(x,y) \in R\}$$
- Proyección 2: $\pi_2(R)$ son todos los elementos que están en la segunda componente de R (No se consideran los duplicados).
$$\pi_2(R) = \{y \mid \exists x \in A.(x,y) \in R\}$$

- Inverso: R^{-1} son todos los pares (x, y) de la relación R, pero al revés (como (y, x)). Más formalmente escrito como:
$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- Composición: $R_1 \circ R_2$ son todos los pares (x, y) que cumplen con que exista un z tal que $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$
$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \mid \exists z.(x, z) \in R_1 \land (z, y) \in R_2\}$$

- Unión: $R_1 \cup R_2$ son todos los pares que existen en R_1 o R_2. De forma más formal:
$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) | (x, y) \in R_1 \lor (x, y) \in R_2\}$$

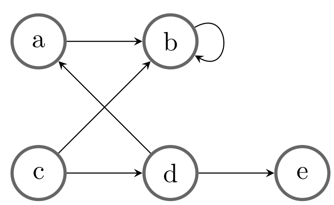
- Intersección: $R_1 \cap R_2$ son todos los pares que existen en R_1 y R_2 de forma simultánea. Más formalmente expresado como:
$$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) | (x, y) \in R_1 \land (x, y) \in R_2\}$$

- Relación identidad: I_A solamente contiene a los pares (x, x) para los x que existen en A.
$$I_A = \{(x, x) | x \in A\}$$

Debido a que esta parte puede llegar a ser un poco complicada de entender, vamos a mostrar una serie de ejemplos en base al conjunto y relación que tenemos de antes.

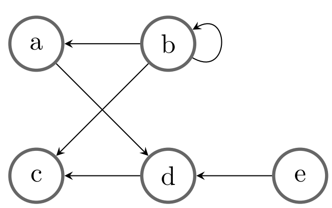
$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad ; \quad R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

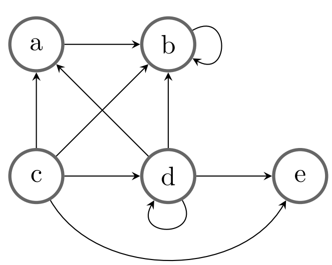


$$\pi_1(R) = \{a, b, c, d\} \quad ; \quad \pi_2(R) = \{a, b, d, e\}$$

$$R^{-1} = \{(b, a), (b, b), (b, c), (d, c), (a, d), (d, d), (e, d)\}$$



$$R \circ R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, a), (c, d), (c, e), (d, b), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$



2.3 Tipos de Relaciones

- Refleja: $\forall a \in A.(a, a) \in R$
- Irrefleja: $\forall a \in A.(a, a) \notin R$
- Simétrica: $\forall a, b \in A.(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
- Asimétrica: $\forall a, b \in A.(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$
- Antisimétrica: $\forall a, b \in A.((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b$
- Transitiva: $\forall a, b, c \in A.((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$
- Conexa: $\forall a, b \in A.(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

2.3.1 Tipos de Relaciones caracterizadas con operaciones

Se considera un conjunto A y una relación binaria $R \subseteq A \times A$

- R es refleja si y solo si $I_A \subseteq R$.
- R es irrefleja si y solo si $R \cap I_A = \emptyset$.
- R es simétrica si y solo si $R = R^{-1}$.
- R es asimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
- R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
- R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.
- R es conexa si y solo si $R \cup R^{-1} = A \times A$.

2.4 Ordenes Parciales

Si tenemos un conjunto A y una relación $R \subseteq A \times A$, decimos que R es un orden parcial si es que cumple que

- R es refleja: $I_A \subseteq R$
- R es antisimétrica: $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- R es transitiva: $R \circ R \subseteq R$

El orden parcial se denota como $(A, \preceq)$.

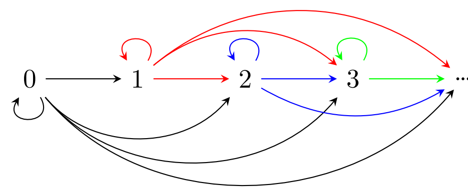
2.4.1 Ordenes Totales

Si tenemos un conjunto A y un orden parcial $(A, \preceq)$, se dice que este orden parcial es un orden total si es que se cumple que la relación $R \subseteq A \times A$ es conexa. En otras palabras, un orden total debe cumplir con

- R es refleja: $I_A \subseteq R$
- R es antisimétrica: $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- R es transitiva: $R \circ R \subseteq R$
- R es conexa: $R \cup R^{-1} = A \times A$

2.4.2 Representación de un Orden Parcial

¿Cómo se ve un orden parcial representado con grafos?
Consideremos como ejemplo, el orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



Este grafo queda demasiado enredado. Normalmente, para representar ordenes parciales, se usa el **Diagrama de Hasse**, el cual consiste en un diagrama de grafos, tal como el anterior, pero omitiendo los loops y las aristas transitivas[4].
Considerando la descripción anterior, el diagrama de Hasse del orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$ se vería así

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

2.5 Elementos extremos

- Cotas superiores: $c \in A$ es una cota superior de S si y solo si $\forall y \in S. y \preceq c$
- Maximales: $\hat{x} \in S$ es un maximal si y solo si $\forall y \in S. \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- Máximo: $x^{\uparrow} \in S$ es un máximo si y solo si $\forall y \in S. y \preceq x^{\uparrow}$
- Cotas inferiores: $c \in A$ es una cota inferior de S si y solo si $\forall y \in S. c \preceq y$
- Minimales: $\breve{x} \in S$ es un minimal si y solo si $\forall y \in S. y \preceq \breve{x} \rightarrow \breve{x} = y$
- Mínimo: $x^{\downarrow} \in S$ es un máximo si y solo si $\forall y \in S. x^{\downarrow} \preceq y$

2.5.1 Sobre minimales y minimos

Sea $(a, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\emptyset$.

- Si S tiene un elemento mínimo, entonces ¿es único?
  Si. Es único.[5]
- ¿Tiene S siempre un mínimo?
  No. Es posible tener conjuntos que no tienen mínimos
- Si x es mínimo, entonces ¿es x minimal?
  Si. Un mínimo es siempre minimal también.[6]
- Si x es minimal, entonces ¿es x es mínimo?
  No necesariamente.
- ¿Tiene S siempre un elemento minimal?
  No necesariamente.

Con respecto a esto, también es verdadero respecto a maximales y máximos.

[4] Con esto nos referimos a que se omite $(a, b) \in \preceq$ si es que existe c de forma que $(a, c) \in \preceq$ y $(b, c) \in \preceq$
[5] Se puede consultar la demostración en el anexo, subsección 2
[6] Se puede consultar la demostración en el anexo, subsección 3

2.6 Ínfimos

Decimos que c^* es infimo si es una cota inferior de S y de todas las cotas inferiores de S, c^* es la cota inferior mayor.

2.7 Supremos

Decimos que c^* es supremo si es una cota superior de S y de todas las cotas superiores de S, c^* es la cota superior menor.

2.8 Clausuras