Resumen general de Matemáticas Discretas

Andrés Cabezas y Sebastián Poblete

March 20, 2022

1 ¿Qué son las matemáticas discretas?

"El lenguaje necesario para entender y modelar la computación". Las matemáticas discretas usan conjuntos finitos e infinitos al momento de estudio. Modelan los objetos y conceptos abstractos de las matemáticas que pueden ser representados dentro de un computador.

1.1 Lógica

La lógica consiste en el uso y estudio del razonamiento válido. Para esto, es necesario un lenguaje, pero esto también supone un problema: Los lenguajes que los humanos hablan tiene ciertas subjetividades y diferencias entre si, lo que conduce a errores al momento de usar la lógica. Para resolver esto, es necesario usar un lenguaje formal.
Durante el curso, se estudiarán dos lógicas (o lenguajes), sin embargo, existen muchos más

- Lógica Proposicional
- Lógica de Predicados

¿Para qué son necesarias estas lógicas? Recordemos nuestro objetivo. Queremos usar esto para realizar nuestro razonamiento matemático. De esta forma, podemos definir correctamente objetos matemáticos, teorías matemáticas y realizar demostraciones más formales

2 Lógica Proposicional (LP)

2.1 Proposición

Una proposición consiste en una afirmación, la cual puede ser *verdadera (1)* o *falsa (0)*.
Para denotar proposiciones básicas, usaremos letras mayusculas (Ej.: P, Q, R...)

2.2 Conectivos Lógicos

La LP usa conectivos sencillos para conseguir formar proposiciones más complejas.

Conectivos	Nombre	Uso	Significado
$\wedge$	Conjunción	$P \wedge Q$	P y Q
$\vee$	Disyunción	$P \vee Q$	P o Q
$\neg$	Negación	$\neg P$	No P
$\rightarrow$	Condicional	$P \rightarrow Q$	Si P, entonces Q
$\leftrightarrow$	Bicondicional	$P \leftrightarrow Q$	P, si y solo si, Q

2.2.1 Conjunción ($\wedge$)

El valor de verdad de una conjunción es *verdadero* si ambas proposiciones (a cada lado del signo) son verdaderas. En cualquier otro caso, es *falso*.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.2.2 Disyunción ($\vee$)

El valor de verdad de una disyunción es *verdadero* si al menos una de las proposiciones (a cada lado del signo), es verdadera.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.2.3 Negación ($\neg$)

El valor de verdad corresponde al opuesto del valor entregado (a la derecha del signo)

P	$\neg P$
1	0
0	1

2.2.4 Condicional ($\rightarrow$)

El valor de verdad de una condicional del tipo $P \rightarrow Q$ es *falso* si P es verdadero, pero Q es falso. En cualquier otro caso, es *verdadero*.

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Hint: *"Si P es verdadero, entonces necesariamente Q es verdadero"*. Si P es verdadero, entonces Q deberá ser verdadero para tener un valor de verdad *verdadero*. Si P es falso, entonces de forma automática el valor de verdad es *verdadero*.

2.2.5 Bicondicional ($\leftrightarrow$)

El valor de verdad de una bicondicional es verdadero si ambas proposiciones (a ambos lados del signo) son iguales (en otras palabras, ambas verdaderas o ambas falsas).

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.3 Proposición Compuesta

Una proposición es compuesta si corresponde a la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción($\vee$), condicional($\rightarrow$) o bicondicional($\leftrightarrow$) de proposiciones compuestas.
Como por ejemplo

$$P \wedge (Q \vee R)$$

$$\neg(P \vee (\neg R \wedge Q))$$

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$

Si se desea obtener el valor de verdad de alguna proposición compuesta, se debe evaluar de forma recursiva cada uno de los conectivos lógicos presentes.
Por ejemplo:

$$\neg(P \vee (\neg R \wedge Q)) \text{ con P = 0, Q = 1 y R = 0}$$

$$\neg(0 \vee (\neg 0 \wedge 1))$$

$$\neg(0 \vee (1 \wedge 1))$$

$$\neg(0 \vee 1)$$

$$\neg 1$$

$$0$$

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \text{ con P = 1 y Q = 0}$$

$$(1 \rightarrow 0) \leftrightarrow (1 \wedge 0)$$

$$0 \leftrightarrow 0$$

$$1$$

2.3.1 Paréntesis y prioridad

El orden de prioridad entre conectivos lógicos, al momento de evaluar proposiciones compuestas, será el siguiente:

Conectivo	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

3 Formulas y Valuaciones

3.1 Variables Proposicionales

Una variable proposicional es una variable que puede ser reemplazada con los valores 1 o 0. Generalmente son representadas con una letra minúscula (Amiga eri boolean)

3.2 Formulas Proposicionales

Una formula proposicional es una formula que puede ser

- Una variable proposicional
- Los valores 1 o 0
- Una combinación con conectivos lógicos

Generalmente son representadas con letras griegas (Ej.: α)
Ejemplos:

$$\alpha(p, q, r) := p \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\beta(p, q) := (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$$

4 Equivalencia Lógica

4.1 Definición

Si tenemos dos formulas proposicionales con las mismas variables proposicionales

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \text{ y } \beta(p_1, \ldots, p_n)$$

Entonces, α y β serán logicamente equivalentes

$$\alpha \equiv \beta$$

si para toda valuacion posible $(v_1, \ldots, v_n)$ se cumple que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n)$$

Ejemplo: Para las fórmulas $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ se tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Como ambas formulas son equivalentes para toda valuación, entonces:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$$

4.2 Equivalencias útiles

1. Conmutatividad:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

2. Asociatividad:
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

3. Idempotente:
$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

4. Doble negación:
$$\neg\neg p \equiv p$$

5. Distributividad:
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

6. De Morgan:
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

7. Implicación:
$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

8. Absorción:
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

9. Identidad:
$$p \vee 0 \equiv p$$
$$p \wedge 1 \equiv p$$

10. Dominación:
$$p \wedge 0 \equiv 0$$
$$p \vee 1 \equiv 1$$