1 Anexo

1.1 Ejercicio - Inferencia lógica de predicados

$$\begin{array}{l} \text{Algún estudiante en la sala no estudió para el examen.} \\ \text{Todos los estudiantes de la sala pasaron el examen.} \\ \hline \text{Algún estudiante pasó el examen y no estudió.} \end{array}$$

¿Cómo modelamos este problema?

$$S(x) := x \text{ está en la sala}$$

$$E(x) := x \text{ estudió para el examen}$$

$$X(x) := x \text{ pasó el examen}$$

Entonces, la consecuencia lógica quedaría así:

$$\begin{array}{c} \exists x.S(x) \land \neg E(x) \\ \forall x.S(x) \to X(x) \\ \hline \exists x.X(x) \land \neg E(x) \end{array}$$

¿Cómo inferimos esta consecuencia lógica?

1. $\exists x.S(x) \land \neg E(x)$ (Premisa)
2. $S(a) \land \neg E(a)$ (Instanciación Existencial 1.)
3. $S(a)$ (Simplificación Conjuntiva 2.)
4. $\forall x.S(x) \to X(x)$ (Premisa)
5. $S(a) \to X(a)$ (Instanciación Universal 4.)
6. $X(a)$ (Modus ponens 3. y 5.)
7. $\neg E(a)$ (Simplificación Conjuntiva 2.)
8. $X(a) \land \neg E(a)$ (Conjunción 6. y 7.)
9. $\exists x.X(x) \land \neg E(x)$ (Generalización Existencial 8.)

1.2 Demostración - Mínimo único

Si S tiene un elemento mínimo, entonces dicho elemento es único.
Sea $x_1^{\downarrow} \in S$ y $x_2^{\downarrow} \in S$ ambos mínimos y $x_1 \neq x_2$. ¿Es esto posible?
Mediante la definición de mínimo, llegamos a que

$$\forall y \in S.x_1^{\downarrow} \preceq y \quad ; \quad \forall y \in S.x_2^{\downarrow} \preceq y$$

Esto nos lleva a que

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{\downarrow} \preceq x_2^{\downarrow} \\ x_2^{\downarrow} \preceq x_1^{\downarrow} \end{array}\right\} x_1^{\downarrow} = x_2^{\downarrow}$$

Así, queda demostrado que el mínimo debe ser único.

1.3 Demostración - Si es mínimo, es minimal

Si x es mínimo, entonces x es minimal
Sea $x^{\downarrow}$ un mínimo
Para realizar la demostración, se debe demostrar que $\forall z \in S. z \preceq x^{\downarrow} \rightarrow z = x$
Suponga que $z \preceq x^{\downarrow}$. Por definición de mínimo, se tiene que $x^{\downarrow} \preceq z$. Entonces, considerando toda la información, se llega a que

$$\left.\begin{array}{l} z \preceq x^{\downarrow} \\ x^{\downarrow} \preceq z \end{array}\right\} z = x^{\downarrow}$$