1 Lógica de Predicados

Hasta ahora, se ha trabajado unicamente con Lógica Proposicional. Esta funciona bien, pero tiene algunas limitaciones que vuelven imposible modelar algunas situaciones.

- No tiene objetos. Solo se pueden usar proposiciones.
- No tiene predicados.
- No tiene cuantificadores.

1.1 ¿Y qué tiene la Lógica de Predicados?

La lógica de predicados es una parte de la lógica de primer orden. La lógica de predicados nos va a permitir expresar ciertas estructuras las cuales no eramos capaces de expresar usando la lógica proposicional.

1.2 Predicados

Un predicado consiste en una proposicion abierta. El valor de verdad de un predicado dependerá del valor usado en la valuación. Generalmente, estos se simbolizan usando letras mayúsculas (Ej.: $P(x)$)
Ejemplos de predicados:

- $P(x)$:= x es par
- $R(x)$:= x es primo
- $M(x)$:= x es mortal

1.2.1 Predicados n-arios

Los predicados n-arios consisten en predicados los cuales usan más de una variable para verificar su valor de verdad.
Ejemplo: $O(x, y) := x \leq y$. Si $x = 2$ e $y = 3$, entonces $O(2, 3) = 1$

1.2.2 Dominio de predicado

Todo predicado está restringido a un cierto dominio de evaluación. Esto significa que sus valores de verdad solo se pueden evaluar cuando las variables que se usan en el predicado estan dentro del dominio designado.
Ej.: $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$

1.2.3 Predicado 0-ario / Predicado degenerado

Corresponde a un predicado que no tiene ninguna variable libre. Tiene un valor de verdad el cual es totalmente independiente de su valuación.

1.2.4 Predicados compuestos

Un predicado compuesto corresponde a la combinación de diversos predicados básicos, usando distintos operadores para mezclarlos en la sentencia, o la cuantificación universal o existencial de algun predicado (Véase sección 9.3). Todos los predicados deben tener el mismo dominio.

1.3 Cuantificadores

1.3.1 Cuantificador Universal

Consideremos $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto de dominio D.
El cuantificador universal corresponde a

$$P'(y_1, \dots, y_n) := \forall x. P(x, y_1, \dots, y_n)$$

donde x es la variable cuantificada e $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres.
Si para cierta valuación se cumple que $P'(\dots) = 1$ significa que para toda variable libre se cumple lo especificado anteriormente.
Ejemplo

$$O(x, y) := x \leq y \text{ sobre } \mathbb{N}$$

$$O'(y) := \forall x. O(x, y)$$

$$O'(2) = \forall x. O(x, 2) = 0$$

Podemos notar que para $y = 2$, no se cumple para todo valor de x lo dictado en el predicado $O(x, y)$

$$O''(x) := \forall y. O(x, y)$$

$$O''(0) := \forall y. O(0, y) = 1$$

Si $x = 0$, debido a que estamos considerando a los naturales, entonces para todo valor de y se cumple siempre el predicado.

1.3.2 Cuantificador Existencial

Consideremos $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto de dominio D.
El cuantificador existencial corresponde a

$$P'(y_1, \dots, y_n) := \exists x. P(x, y_1, \dots, y_n)$$

donde x es la variable cuantificada e $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres.
Si para cierta valuación se cumple que $P'(\dots) = 1$ significa que para alguna combinación de variables libres se cumple lo especificado anteriormente.
Ejemplo

$$O(x, y) := x \leq y \text{ sobre } \mathbb{N}$$

$$O'(y) := \exists x. O(x, y)$$

$$O'(2) = \exists x. O(x, 2) = 1$$

1.4 Interpretaciones

En algunos casos, puede ocurrir que algún predicado o formula, dependiendo de ciertas condiciones, sea verdadero(a) o falso(a). Debido a esto, vamos a definir las *interpretaciones*.
Para comenzar, es importante destacar que desde ahora diremos que $P(x_1, \dots, x_n)$ es un símbolo de predicado.
Una interpretación $\mathcal{I}$ para símbolo de predicado $P_1, \dots, P_m$ se compone de

- Un dominio $\mathcal{I}(\text{dom})$
- Para cada símbolo P_i, un predicado $\mathcal{I}(P_i)$

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α. Se dice que la interpretación $\mathcal{I}$ satisface α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(\text{dom})$, expresado como

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$. En el caso que $\mathcal{I}$ no logre satisfacer a α, se anotará como

$$\mathcal{I} \not\models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

Ejemplo

$$\mathcal{I}_1(\text{dom}) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}_1(P) := \text{x es par}$$

$$\mathcal{I}_1(O) := x < y$$

$$\alpha(x) := \exists y.P(y) \land O(x, y)$$

$$\mathcal{I}_1 \models \alpha(1) := \exists y.\text{y es par} \land 1 < y$$

2 Equivalencia lógica en Lógica de Predicados

Se tiene $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ y $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ dos oraciones en lógica de predicados (no tienen variables libres). α y β serán logicamente equivalentes, escrito como:

$$\alpha \equiv \beta$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ se cumple que:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \text{ si, y solo si, } \mathcal{I} \models \beta(a_1, \ldots, a_n)$$

En otras palabras, funciona practicamente igual a la equivalencia lógica en lógica proposicional.

2.1 Equivalencias lógicas

Todas las equivalencias de lógica proposicional aplican aquí. Simplemente se tienen que cambiar las variables proposicionales por predicados de lógica de predicados. Aquí se muestra un ejemplo:
Conmutatividad (para operador $\land$)

En lógica proposicional	En lógica de predicados
$p \land q \equiv q \land p$	$\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha$

Ahora, además de estas equivalencias, nos encontraremos con algunas nuevas

1. $\neg\forall x.\alpha \equiv \exists x.\neg\alpha$
2. $\neg\exists x.\alpha \equiv \forall x.\neg\alpha$
3. $\forall x.(\alpha \land \beta) \equiv (\forall x.\alpha) \land (\forall x.\beta)$
4. $\forall x.(\alpha \lor \beta) \equiv (\forall x.\alpha) \lor (\forall x.\beta)$

3 Tautología en Lógica de Predicados

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con variables libres $(x_1, \ldots, x_n)$. α es tautología si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathcal{I}(\text{dom})$ se tiene que:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

4 Consecuencia lógica en Lógica de Predicados

Una oración de lógica de predicados α es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones Σ si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathcal{I}(\text{dom})$ se cumple que

$$\text{si } \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces se denota como

$$\Sigma \models \alpha$$

5 Inferencia en Lógica de Predicados

1. **Instanciación Universal**

$$\frac{\forall x.\alpha(x)}{\alpha(a) \text{ para cualquier a}}$$

2. **Generalización Universal**

$$\frac{\alpha(a) \text{ para cualquier a}}{\forall x.\alpha(x)}$$

3. **Instanciación Existencial**

$$\frac{\exists x.\alpha(x)}{\alpha(a) \text{ para algún a (nuevo)}}$$

4. **Generalización Existencial**

$$\frac{\alpha(a) \text{ para algún a}}{\exists x.\alpha(x)}$$

6 Demostraciones

6.1 Afirmación matemática

Una afirmación matemática consiste en una proposición en lógica de predicados

Tipos de afirmaciones matemáticas

- Teorema: Afirmación matemática verdadera y demostrable.
- Proposición: Similar a un Teorema, pero de menor importancia.
- Definición: Sentencia usada para explicar la naturaleza de algún objeto matemático.
- Axioma: Suposición que se considera cierta, y se usa como base para demostrar algo.
- Lema: Proposición demostrada, usada como herramienta para demostrar un teorema.
- Corolario: Teorema que se deduce de un axioma
- Conjetura: Afirmación que es intuitivamente correcta, pero que no ha sido demostrada.
- Problema: Conjetura, que podría ser verdadera o falsa. No se sabe su valor de verdad.

6.2 ¿Qué es una demostración?

Una demostración es un argumento válido que permite establecer la verdad de una afirmación matemática. Con argumento válido, nos referimos a una secuencia de argumentos que puede estar compuesta por

- Axiomas.
- Hipótesis o supuestos.
- Afirmaciones implicadas por argumentos previos.

Cada argumento en la secuencia lógica de argumentos está conectado con el anterior por una *regla de inferencia* (consecuencia lógica).
El último paso de la secuencia establece la verdad de la afirmación.

¿Qué NO es una demostración?

- Una secuencia de símbolos.
- Una secuencia disconexa o imprecisa de argumentos.

Al final, la secuencia de argumentos debe ser lo más clara, precisa y completa posible, para así, convencer al lector u oyente, sin dar lugar a dudas acerca de la veracidad de la demostración.

6.3 ¿Cómo puedo encontrar una secuencia de argumentos?

Si lo que se desea es encontrar una secuencia de argumentos que logre demostrar un teorema se requiere de las siguientes cosas

- *Experiencia*: La práctica hace al maestro.
- *Intuición*: Coloquialmente conocida como *La cachativa*
- *Creatividad*: Pensar fuera de la caja
- *Perseverancia*: If at first you don't succeed, try, try again.
- **Métodos de demostración**

7 Métodos de demostración

7.1 Demostración Directa

Si se desea demostrar

$$\forall x.P(x) \to Q(x)$$

entonces se supone que $P(n)$ es verdadero para un n cualquiera, y demostramos que $Q(n)$ es verdadero.

Ejemplo

- Un entero n en $\mathbb{Z}$ se dice **par** si existe k en $\mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.
- Un entero n en $\mathbb{Z}$ se dice **impar** si existe k en $\mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{Z}$, si n es impar, entonces n^2 es impar.
Para realizar la demostración, primero suponemos que n es impar. Por definición, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

$$\begin{array}{rcl} n^2 & = & (2k+1)^2 \\ n^2 & = & 4k^2 + 4k + 1 \\ n^2 & = & 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \end{array}$$

Al definir $k' = 2k^2 + 2k$, entonces $n^2 = 2k' + 1$. Esto corresponde a la definición de un número impar, por lo que n^2 es impar.

7.2 Demostración por Contrapositivo

Si se desea demostrar

$$\forall x.P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \forall x.\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$$

entonces se supone que $Q(n)$ es falso para un n cualquiera, y demostramos que $P(n)$ es falso también.

Ejemplo

Teorema: Suponga a y b son positivos. Si $n = ab$, entonces $a \leq \sqrt{n}$ o $b \leq \sqrt{n}$.
Para realizar la demostración por contrapositivo, debemos considerar que si $a > \sqrt{n}$ y $b > \sqrt{n}$, entonces $n \neq ab$, considerando la información entregada en el enunciado. Supongamos que $a > \sqrt{n}$ y $b > \sqrt{n}$ con n positivo.

$$\begin{array}{rcll} n & = & \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} & \\ n & < & a \cdot \sqrt{n} & (\text{por } a > \sqrt{n}) \\ n & < & a \cdot b & (\text{por } b > \sqrt{n}) \end{array}$$

Tenemos que $n < ab$, lo que automáticamente significa que $n \neq ab$.

7.3 Demostración por Contradicción

Si se desea demostrar

$$(\neg R) \rightarrow (S \wedge \neg S)$$

entonces se supone que $\neg R$ es verdadero e inferimos una contradicción. En este caso, R debe ser verdadero. Otro caso podría ser que se quiera demostrar

$$R := \forall x.P(x) \rightarrow Q(x)$$

Entonces, para realizar la demostración, consideramos la negación de la expresión anterior:

$$\neg R := \exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)$$

y suponemos que existe un n tal que $P(n)$ es verdadero y $Q(n)$ es falso, e inferimos una contradicción.

Ejemplo

- Un número r en $\mathbb{R}$ se dice racional si existen enteros p y q tales que:

  $$r = \frac{p}{q}$$

  con $q \neq 0$ y p, q no tienen divisores en común, exceptuando al 1.

- Un número r en $\mathbb{R}$ se dice irracional si no es racional.

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional.
Para comenzar la demostración, se supone que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces, existen p y q que pertenecen a $\mathbb{Z}$, sin divisores en común, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 \cdot q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Entonces, p^2 es par, por lo que p es par (debido a una propiedad existente en los numeros pares).
Como p es par, entonces $p = 2k$ para algún k en $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot q^2 &= p^2 \\ 2 \cdot q^2 &= (2k)^2 \\ q^2 &= 2 \cdot k^2 \end{aligned}$$

Entonces, q^2 es par, por lo que q es par también.
¡Esto es una contradicción! Se supone que si es irracional, p y q no pueden tener divisores comunes, y al ser pares, tienen como común divisor al 2. Como no es racional, significa que es irracional, y así, *Q.E.D.*

7.4 Demostración por Análisis de Casos

Si se desea demostrar
$$\forall x \in D.P(x)$$
entonces se va a dividir el dominio de posibilidades D en una cantidad finita de casos $D_1, D_2, \ldots, D_k$, de forma que
$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$$
Por ultimo, se demuestra que para todo subdominio D_i se cumple que
$$\forall x \in D_i.P(x)$$
con i desde 1 hasta k.

Ejemplo

Teorema: Para todo entero n se cumple que $n^2 \geq n$.
Para realizar la demostración, consideremos que

- Si $n = 0$, entonces $0^2 = 0$. Por lo tanto, $0^2 \geq 0$
- Si $n \geq 1$, entonces:
$$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ n^2 &\geq n \quad \text{(multiplicando ambos lados por } n \geq 0) \end{aligned}$$
- Si $n \leq -1$, como $n^2 \geq 0$, por lo que se tiene que $n^2 \geq n$

Recomendación: *Cuando todos los métodos anteriores han fallado y no se sabe por donde empezar, una 'estrategia' es empezar demostrando los casos simples para así ganar intuición en la demostración general.*

7.5 Demostración de Doble Implicación

Si se desea demostrar
$$\forall x.(P(x) \leftrightarrow Q(x))$$
entonces se deben demostrar dos afirmaciones
$$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \land \forall x.(P(x) \leftarrow Q(x))$$

Ejemplo

Teorema: Para todo numero natural n, se tiene que n es impar si, y solo si, n^2 es impar.
Entonces, para demostrar debemos

- $(\rightarrow)$ Si n es impar, entonces n^2 es impar. Esta demostración se realizó previamente en 15.1.
- $(\leftarrow)$ Si n^2 es impar, entonces n es impar.
  Mediante contrapositivo, si n^2 no es impar, entonces n tampoco es impar. El no ser impar significa ser par. Por lo tanto, podemos demostrar la afirmación n es par, entonces n^2 es par. Trivialmente, esto es algo que ya sabemos (en una prueba, deberías demostrarlo igual). De esta forma, queda demostrado que si n^2 es impar, entonces n es impar.

Como hemos demostrado que la teoría se cumple para ambos lados, Q.E.D.

7.6 Demostración por contra-ejemplo

Si se desea demostrar

$$\forall x.P(x)$$

entonces se debe encontrar un elemento n cualquiera tal que $P(n)$ es falso.

Ejemplo

Teorema: Es falso que todo número mayor a 1 es la suma de dos cuadrados perfectos.
Para demostrar, probamos con los dos primeros números mayores que 1

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 1^2 + 1^2 \\ 3 & \neq & 1^2 + 1^2 \\ 3 & \neq & 2^2 + 1^2 \end{array}$$

Nos damos cuenta de inmediato que para el 3 esto ya no se cumple. Así, se logra demostrar correctamente que la afirmación es falsa.

7.7 Demostración Existencial

Si se desea demostrar

$$\exists x.P(x)$$

entonces se debe demostrar que existe un elemento n tal que $P(n)$ es verdadero. No es estrictamente necesario mostrar n de forma explícita.

Ejemplo

Teorema: Existen dos números irracionales a y b tal que a^b es racional.

Consideremos $\sqrt{2}$, ya que este es un numero irracional. Entonces, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ y $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Nosotros no sabemos que es lo que ocurre con $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, asi que pongamonos en los casos posibles.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, entonces $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$ logra demostrar de forma satisfactoria el teorema.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional, entonces debemos considerar otro ejemplo. Un ejemplo que podemos analizar y comprobar con facilidad sería $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$. Entonces...

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} & = & \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} & = & \sqrt{2}^{2} \\ (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} & = & 2 \end{array}$$

Asi, logramos comprobar que a^b es racional, y esto demuestra de que al menos existe un valor de a y de b que permiten que el teorema se cumpla.

7.8 Demostración por Inducción

Supongamos que queremos demostrar que

$$\forall x.P(x) \text{ sobre } \mathbb{N}$$

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales, si $P(x)$ cumple que:

- $P(0)$ es verdadero. *(Caso base)*
- Si $P(n)$ *(Hipótesis de inducción)* es verdadero, entonces $P(n+1)$ *(Tesis de inducción)* es verdadero.

entonces para todo n en los naturales se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Ejemplo

Teorema: La suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
Primero, demostremos que se cumple para un caso base. En este caso, usaremos $n = 0$

$$\textbf{Caso base } (n = 0): \quad 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$$

Ahora supongamos que nuestro teorema se cumple para un n cualquiera. Demostremos que se cumple para $n + 1$

$$\begin{array}{rrcll}
\textbf{Hipótesis:} & 0+1+\ldots n & = & \frac{n \cdot (n+1)}{2} & \\
\textbf{Inducción:} & 0+1+\ldots n+(n+1) & = & 0+1+\ldots n+(n+1) & \text{esto es [caso n]} + (n+1) \\
 & 0+1+\ldots n+(n+1) & = & \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) & \\
 & 0+1+\ldots n+(n+1) & = & \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} &
\end{array}$$

Podemos notar como la ultima fórmula es igual a la del teorema, pero reemplazando n por $n + 1$. Esto demuestra que la formula si es válida para n, entonces si es válida para $n + 1$, demostrando correctamente el teorema.