CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Límites de los Métodos Numéricos

E. Oñate

Publicación CIMNE Nº-191, Septiembre 2000

LÍMITES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Eugenio Oñate
Centro Internacional de Métodos Numéricos
en Ingeniería
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España
E-mail: onate@cimne.upc.es

Resumen. Se plantean en el artículo los límites de los métodos numéricos para resolver cualquier problema que afecte a la vida del hombre. Se discute la capacidad de la razón para expresar todos los problemas del universo en forma matemática, y la posibilidad de encontrar su solución en forma numérica. Finalmente, se especula sobre el alcance y posibilidad de los métodos numéricos en el amplio campo de las ciencias sociales.

Palabras clave: métodos numéricos, modelos matemáticos, ordenadores, ciencias sociales.

1 INTRODUCCIÓN

Se denominan métodos numéricos las técnicas de la matemática que permiten expresar la solución de un problema en forma de números. Para muchos, los métodos numéricos son una rama de la matemática aplicada, es decir, aquella parte de la matemática interesada en la resolución de problemas que afectan directa o indirectamente a los intereses del hombre. El término "solución numérica" se utiliza a menudo frente al de "solución analítica" (también denominada "solución exacta") de un problema. La diferencia entre ambos tipos de solución es sustancial. Consideremos como ejemplo el estudio del comportamiento de un sistema de tipo físico o bien humanístico. Dicho sistema satisface unas leyes (ecuaciones) generales de tipo matemático (denominadas ecuaciones de gobierno); por ejemplo, unas ecuaciones o inecuaciones diferenciales o algebraicas en las que intervienen un conjunto de variables y parámetros físicos. La solución analítica es una expresión matemática que proporciona toda la información sobre el comportamiento del sistema, para cualquier valor de las variables y parámetros que intervienen en las ecuaciones de gobierno. Es, por tanto, la solución "universal" del problema a la que aspiraban los pitagóricos, Platón y tantos otros creyentes en la numerización del mundo. Por otro lado, la solución numérica expresa el comportamiento del sistema en función de números que se obtienen resolviendo las ecuaciones de gobierno para valores concretos de las variables y los parámetros del sistema. Como ejemplo, planteemos el problema de encontrar la ecuación que expresa todas las trayectorias posibles de un móvil que se desplaza en línea recta partiendo siempre del mismo punto. Obviamente, la solución general del problema es $y = kx$, donde y es la coordenada de un punto de la trayectoria, x el valor de la abscisa y k la pendiente de la recta. Dicha ecuación es universal y expresa el conjunto infinito de rectas que pasa por el origen. Dando valores a la pendiente k y a la abscisa x encontraremos las coordenadas de los puntos de las trayectorias seleccionadas, caracterizadas por los valores de x e y.

Un ejemplo clásico de solución numérica fue la obtenida por Arquímedes para el valor aproximado del número π a partir de la división de la circunferencia en polígonos obtenidos duplicando sucesivamente el número de lados y dividiendo el perímetro de cada polígono por el radio del círculo. Obviamente, al aumentar el número de lados de cada polígono, aumentaba también la precisión en el valor del número π buscado. Tomando polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia regular de 96 lados, Arquímedes logró acotar el valor de π entre 3.14084 y 3.14285.

La técnica utilizada por Arquímedes reúne todas las características de los métodos numéricos. La solución numérica se obtiene dividiendo el dominio que se estudia (la circunferencia) en formas geométricas sencillas (rectas), de las que se conocen todas sus propiedades (longitud). Se observa también que, la solución numérica es aproximada y mejora (converge) al incrementar el número de divisiones del dominio. Finalmente, es muy importante advertir que la solución "exacta" del problema es desconocida (el valor exacto de π, uno de los números inconmensurables) y la solución numérica es la única alternativa, como sucede en la mayoría de los problemas prácticos.

Los métodos numéricos, por tanto, buscan números, mientras que los métodos analíticos buscan fórmulas matemáticas. Obviamente, la solución analítica, al ser universal, contiene todas las soluciones numéricas, mientras que de la solución numérica de un problema es imposible, en general, deducir la solución analítica.

Tanto los métodos numéricos como los analíticos comparten un punto inicial fundamental: la necesidad de plantear en forma matemática el problema a resolver. Durante miles de años, hasta el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz, dichas formas matemáticas eran variantes de expresiones polinómicas, destinadas muchas veces a resolver problemas de índole geométrico (tal como encontrar el valor del número π). La revolución del cálculo infinitesimal estribó fundamentalmente en su capacidad de expresar cualquier problema de la naturaleza en forma matemática por medio de *ecuaciones diferenciales*. Al mismo tiempo, Newton, Leibniz y tantos otros insignes sucesores (Euler, Cauchy, Lagrange, Navier, Gauss, etc.) sentaron las bases para resolver dichas ecuaciones diferenciales de forma analítica [1].

El profundo significado que para las matemáticas representaron los nuevos métodos de cálculo diferencial e integral propuestos por Newton y Leibniz, es comparable al que el descubrimiento del fuego tuvo para los hombres primitivos, o el de la electricidad para la revolución industrial.

Esta afirmación no es en absoluto exagerada. Antes de Newton y Leibniz no existía una metodología general para plantear en forma de ecuaciones matemáticas un problema concreto de la física, tal como, por ejemplo, la propagación del calor en un cuerpo, el flujo de un fluido o el equilibrio de un sólido elástico. Obviamente, al no poder plantearse el problema, su solución era imposible. Después de las aportaciones de Newton y Leibniz, no sólo fue ya posible describir el comportamiento de cualquier sistema físico, fuera éste un sólido, un líquido o un gas, mediante ecuaciones diferenciales e integrales, sino que se dispuso de técnicas para resolver aquéllas en muchos casos que, aunque usualmente eran simplificaciones del problema más general, permitieron avances significativos en el conocimiento científico y técnico. Así, mientras las matemáticas como ciencia autónoma exploraban nuevos campos de abstracción creciente, su aplicación a las demás ciencias se tornó cada vez más indispensable y eficaz. Esta aplicación se extendió, durante el siglo XVIII y el principio del XIX, de la mecánica y la astronomía a las restantes ramas de la física; más tarde a toda las ciencias naturales y, en este siglo, a todos los sectores del saber.

El optimismo que los primeros éxitos del cálculo infinitesimal infundió a la comunidad científica se vio matizado en posteriores aplicaciones por una desagradable evidencia: si bien todo problema podía plantearse en forma matemática por medio de ecuaciones diferenciales, la solución «exacta» de dichas ecuaciones sólo era posible para algunos casos particulares, que en ocasiones eran groseras simplificaciones de la realidad. Las dificultades que presentaba encontrar la fórmula matemática universal que diera la solución de problemas prácticos de la ciencia y la técnica, hizo patente la necesidad de encontrar formas alternativas de resolver las ecuaciones diferenciales.

Así, a principios de este siglo, diversos científicos observaron que si las ecuaciones diferenciales para un problema concreto se discretizaban utilizando técnicas similares a las utilizadas por Arquímedes para calcular el valor del número π, podían llegar a obtenerse los valores numéricos de la función incógnita. Habían nacido los denominados *métodos numéricos* [1].

La estrategia común de todos los métodos numéricos es la transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema, en un sistema de ecuaciones algebraicas que dependen de un número finito de incógnitas. No obstante, puesto que este número de incógnitas es en la mayoría de los casos de muchos miles (e incluso millones), el sistema de ecuaciones final sólo puede resolverse con la ayuda del ordenador. Esto explica por qué, aunque muchos de los métodos numéricos eran conocidos desde el siglo XIX, su gran desarrollo y popularidad han sucedido paralelos al de los modernos ordenadores en este siglo.

Los métodos numéricos representan, en definitiva, el retorno de los números como los auténticos protagonistas de la solución de un problema. El bucle iniciado por Pitágoras hace 2.500 años se ha cerrado, por tanto, en las últimas décadas con la evidencia de que con ayuda de los métodos numéricos podemos obtener respuestas concretas a los enigmas del universo [1-5].

2 LA CONCEPCIÓN MATEMÁTICO / NUMÉRICA DEL MUNDO

Los límites de los métodos numéricos, es decir, los límites de poder expresar en forma numérica cualquier problema del universo, están íntimamente ligados a la posibilidad de plantear (formalizar) dicho problema en forma matemática. Ante esta situación, surge inmediatamente la pregunta: ¿Es posible matematizarlo todo? ¿Habrá algo en el mundo que no pueda jamás llegar a ser descrito en lenguaje matemático? Como afirman P.J. Davies y R. Hersh [2], no parece que haya en el mundo físico nada no matematizable. Tenemos confianza, por tanto, en que la física es capaz de abarcar cualquier fenómeno físico y que es capaz de hacerlo por medio de un formalismo matemático.

El límite de lo claramente matematizable parece, por lo tanto, que coincide con el límite del mundo físico. ¿Qué otro mundo hay? Si nuestras convicciones son las de un materialista mecanicista puro, probablemente contestaremos que ninguno.

No obstante, es evidente que existen cosas tales como emociones, creencias, actitudes, sueños, intenciones, celos, envidias, ansias, pesares, sentimientos como la ira y la compasión y muchos otros. Estas cosas, que componen el mundo interior de la mente humana, y, más aún todavía, todas aquéllas que abarcan la "vida interior"de la sociedad, de la civilización misma, por ejemplo, la literatura, la música, la política o las mareas y corrientes de la historia. ¿Podrán ser matematizadas?

La respuesta no es sencilla, ni banal. A lo largo de la historia encontramos defensores de la creencia de que todo es matematizable, y por tanto numeralizable, y de lo contrario.

2.1 Insignes pro-numéricos

Los más emblemáticos paladines de la matematización del mundo fueron quizá Pitágoras, Platón y Descartes.

Dos consecuencias de gran relevancia posterior en ciencia y filosofía emergieron de las fascinantes aportaciones de Pitágoras en aritmética y geometría elemental. La primera fue la creencia de que el universo físico puede describirse de manera consistente en función de números. La segunda, su convicción de que las conclusiones alcanzadas mediante razonamientos matemáticos son de mayor certeza que las obtenidas de cualquier otra forma. Ambas opiniones han sido cuestionadas, especialmente en el periodo desde la última década del siglo diecinueve hasta los inicios de la segunda guerra mundial. Las dos se han modificado muchas veces para acomodarse a conocimientos más avanzados. Pese a ello, la esencia de ambas aseveraciones permanece substancialmente inalterada. Hoy en día pueden considerarse postulados complementarios de una única hipótesis, todavía no verificada: la comprensión racional de (al menos) el universo físico es posible, y, cuando se produzca, coincidirá con las experiencias de los sentidos y permitirá al hombre predecir el curso de la naturaleza.

Este es el sueño que, hoy en día, pese a los avances de cada nuevo descubrimiento, parece cada vez más lejano, aunque todavía posible para muchos. Pitágoras creyó que había encontrado dicha fórmula mágica en su idea de que «todo es número». En su versión más primitiva, el conocimiento último abarcaba literalmente «todo», desde el cielo hasta las emociones más íntimas del hombre. A medida que el conocimiento del universo aumentaba, el «todo» fue sucesivamente recortándose a proporciones más modestas. En la primera mitad del siglo XIX, «todo» se reducía a las ciencias astronómicas y físicas. En el momento actual, los numerólogos tienen razones para recobrar su antiguo optimismo. La evidencia en este siglo de que prácticamente todos los fenómenos de la naturaleza son expresables por ecuaciones matemáticas, y que la solución de éstas es posible en forma de números, vuelve a plantear la posibilidad de que «todo» sea explicable por números. El credo pitagórico permanece por tanto inalterable, apoyando las tesis de los que creen que los números y el hombre forman un binomio indisociable desde el origen de los tiempos.

La evidencia de que era imposible medir la diagonal de un cuadrado cuyos lados se expresan por números racionales, y que tampoco podía calcularse la longitud de una circunferencia cuyo diámetro fuera un número racional, desmontó la hipótesis de Pitágoras de que el universo podría expresarse por números conocidos. En el sentido más general, el universo aparecía como numéricamente «irracional». El sentido de la palabra irracional hay que tomarlo aquí con cautela, pues no significa tanto «contrario a la razón», sino más bien «contrario a los axiomas» (sobre los números) establecidos en la época. Este mismo espíritu de algunos hombres de poner en duda las leyes de la naturaleza, universalmente aceptadas en cada momento de la historia, ha dado lugar, sin duda, a los avances más espectaculares en ciencia y tecnología desde la época de Pitágoras hasta nuestros días.

La evidencia de que la verdad matemática está más allá de los axiomas y las reglas, ha sido defendida por numerosos científicos en todas las épocas. En tiempos cercanos a Pitágoras, sobre el año 475 a.C., Zenón de Enea inventó sus conocidas y controvertidas paradojas sobre el movimiento, tales como la que establece que en una carrera un corredor rápido nunca puede alcanzar a otro más lento, ya que, al llegar el más rápido al lugar del lento, éste ya habrá avanzado su posición.

Muchos años después de Zenón, en 1931, el matemático vienés Kurt Gödel explicó a su manera que para entender con total plenitud la naturaleza a través de las matemáticas, hay que salir de ellas. Utilizando un lenguaje matemático, Gödel demostró que un conjunto de axiomas suficientemente rico para incluir toda la aritmética, contiene necesariamente proposiciones indecidibles; es decir, contiene afirmaciones sobre la aritmética cuya verdad o falsedad no puede ser demostrada utilizando los axiomas conocidos. La demostración de Gödel sobre la inevitabilidad de la indecibilidad ha sido el acicate para muchas aplicaciones en otras áreas del pensamiento. En particular, se han discutido sus consecuencias para cualquier comprensión completa del universo por métodos matemáticos. Se ha afirmado que puesto que podemos «ver» la verdad de la sentencia de Gödel, esto necesariamente implica que la mente humana no puede ser un sistema formal y que, por consiguiente, los intentos más sofisticados de los denominados métodos de inteligencia artificial, basados en reducir el comportamiento de la mente humana a un conjunto finito de algoritmos, no pueden tener éxito. De hecho, las estribaciones más recientes del teorema de Gödel lo relacionan con las teorías aleatorias y el cálculo estocástico.

Uno de los más fieles herederos de la cultura pitagórica fue Platón quien interiorizó la cultura de los números como el más ferviente seguidor de Pitágoras, aceptando su filosofía y ampliándola de tal forma que proporcionó una base racional para la afirmación de su predecesor de que «todo es número».

Platón fue quizás el más claro y lúcido ejemplo después de Pitágoras, de una vida dedicada a la interpretación del mundo a través de las matemáticas, y también, aunque en grado menor, a tratar de capturar la esencia de las Ideas, las verdades matemáticas, a través de las experiencias de los sentidos. Su conclusión, compartida por tantos filósofos posteriores, de que «la realidad matemática se encuentra fuera de nosotros», enlaza con la creencia de que existe un universo matemático propio que el hombre puede ir descubriendo y explorando con la ayuda de la filosofía, y, más concretamente para Platón, de la dialéctica.

«Las matemáticas», dice Platón, «agudizan la mente, y son sumamente valiosas como disciplina preliminar para el joven que se inicia en el arduo negocio de la filosofía, la argumentación dialéctica y la ciencia pitagórica (la numerología). Dicho entrenamiento es necesario para todos los que buscan el conocimiento, y prepara la mente para reconocer las realidades últimas frente a la evidencia de los sentidos». En ese aspecto, para Platón las matemáticas son un puente entre la nueva «opinión», basada en la percepción de las cosas, y el «conocimiento» derivado de su esencia, o verdad absoluta.

Esta diferencia entre conocimiento y opinión se ha reflejado en la historia de la ciencia a través de permanentes disputas entre los partidarios de la teoría y de la observación. Para un matemático «realista», la única parte de la ciencia que puede conducir al conocimiento de la verdad eterna son las matemáticas. Cualquier otra ciencia que dependa de la observación humana está en conflicto perpetuo consigo misma, como en posesión de una doble personalidad, enfrentada a la imposible tarea de separar las verdades absolutas de la nuevas opiniones generadas a través del conocimiento sensorial.

Muchos siglos más tarde, quizá nadie como Descartes asumió y defendió la realidad objetiva de los métodos matemáticos. Descartes, como Platón, creyó vehementemente que las ideas son entidades auto-existentes, extra-espaciales, extra-temporales, independientes de los hombres, incambiables, perfectas y eternas; no creadas por la mente, pero comprensibles por ella y "conocidas" sólo por medio de la razón, a través de la dialéctica, no a través de los sentidos. El gran sueño de Descartes fue la unificación e iluminación de la ciencia toda, e incluso de la totalidad del conocimiento, merced a un único método, el método de la razón. La forma en que logró plasmar estas ideas quedó inmortalizada en el célebre "Discurso del método para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias". Según Descartes, debe aplicarse *su método* siempre que se busque conocimiento en cualquier campo científico. Consiste en: a) aceptar tan sólo lo que tan claro se halla en la propia mente que no queda posible duda; b) fragmentar las dificultades grandes en otras más pequeñas; c) llevar la argumentación de lo sencillo a lo complejo, y d) la verificación de lo conseguido al terminar.

Dos generaciones más tarde, el gran matemático y filósofo Leibniz acarició la idea de la "characteristica universalis", esto es, el sueño de un método universal íntimamente asociado a un lenguaje y a un simbolismo, a través del cual la totalidad de los problemas humanos, lo mismo científicos que jurídicos o políticos, pudieran ser resueltos racional y sistemáticamente mediante cálculo lógico. De esta aspiración platónica surgió lo que Leibniz denominó cálculo infinitesimal, cálculo que abrió las puertas al desarrollo de la mayoría de los métodos numéricos modernos [1,4].

3 GENERALIZACIÓN DEL USO DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Si el límite de los métodos numéricos es el de la capacidad de formalizar matemáticamente los problemas del universo, bien podemos hacernos las preguntas ¿Qué facetas del mundo admiten descripción matemática? y ¿Cómo le ha ido a la matematización del mundo que soñaron Platón, Descartes, Leibniz y tantos otros?

Sintetizando, podemos afirmar que son matematizables todos los aspectos de la vida encuadrables bajo enunciados (axiomas) concretos [1]. Si se afirma que "la vida es una feliz canción", mal puede encontrarse para esta frase una equivalencia matemática. Por el contrario, si un escritor expresa que "la vida es un juego de azar", cabe en lo posible que, utilizando teoría de juegos, alguien proponga una descripción matemática de la vida con cierta pretensión de equivalencia con el sentido que desea expresar el novelista.

Existe igualmente un conocimiento no verbal, no simbólico, como, por ejemplo, el sentimiento de bienestar. En este caso, si se caracterizara el bienestar como función de los niveles de hormonas y azúcar en la sangre, se podría llegar a encontrar una descripción matemática del bienestar.

En nuestros días, las bases de las ciencias de la naturaleza, la física, la astrofísica, la química y también todas las ingenierías son profundamente matemáticas. En efecto, para que una nueva teoría sea tenida como científica, y por tanto aceptada, es casi condición necesaria que sea expresable en lenguaje matemático, y es casi seguro que si las matemáticas disponibles son inadecuadas para describir ciertos fenómenos observados, será posible idear y desarrollar las adecuadas.

Las ciencias de la vida, la biología y la medicina, están adquiriendo un carácter cada vez más matemático. Los mecanismos que controlan los procesos fisiológicos, la genética, la morfología, la dinámica de poblaciones, la epidemiología y la ecología han sido provistos de modelos matemáticos.

No es posible comprender la teoría económica sin una sólida formación matemática. Las teorías de la competencia, de los ciclos y equilibrios comerciales exigen matemáticas de tipo más profundo. La determinación de una política comercial o militar pueden requerir teorías de decisión, teorías de juegos y estrategias de optimización.

Es casi seguro que los fondos de pensiones efectúan hoy sus inversiones fundándose en las recién creadas teorías de matemática financiera en su aplicación a carteras bursátiles. Posiblemente, la calidad de nuestra vida futura en la Tierra se prediga por métodos que utilicen series temporales de carácter socio-económico. Muy probablemente, también, las operaciones de carácter industrial o institucional puede que se establezcan mediante la teoría matemática de la planificación.

Una simple ojeada a nuestro alrededor nos evidencia que el rango de cuantificación del mundo es sumamente amplio. Así, mediante modelos matemáticos y métodos numéricos se diseñan nuevas estructuras de edificios y otras construcciones en ingeniería y arquitectura y, también, nuevas estructuras básicas de la materia utilizando técnicas de química computacional. Se ha reproducido digitalmente la *Misa en sí menor* de Bach mediante filtrado de ondas utilizando la transformada rápida de Fourier; se puede estudiar el comportamiento de animales en laberintos y se diseña el recorrido de camiones de limpieza en grandes urbes [2].

4 PERSPECTIVAS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN CIENCIAS SOCIALES

La aplicación de los métodos numéricos a las ciencias físicas y a la tecnología es una realidad desde hace varios decenios; de hecho, desde la implantación masiva de los ordenadores en los años 60.

En paralelo con esos avances, la matemática aplicada y los métodos numéricos han recibido en los últimos años un fuerte impulso procedente del mundo de las ciencias sociales. Las teorías de juegos, de investigación operativa, de decisión, la estadística, el procesado de datos, la teoría de información, la econometría, la sociometría, la psicometría, la biometría, la ingeniería humana y otras muchas, son otros tantos ejemplos de disciplinas desarrolladas en el seno de la matemática aplicada y que con la ayuda de los métodos numéricos permitirán un mejor conocimiento de la conducta social y económica de los seres humanos y del proceder de las personas en su interacción con otras y con la naturaleza.

Aunque los modelos matemáticos de las disciplinas anteriores pudieron haberse promulgado y aplicado hace muchos decenios, sólo florecieron de hecho cuando se dispuso de ordenadores potentes, capaces de resolver los grandes sistema de ecuaciones resultantes de tratar situaciones sociales que implican a miles, a millones de personas.

Otros autores aducen razones psicológicas para explicar la tardía incorporación de las matemáticas y los métodos numéricos a las ciencias sociales [2]. Durante años los científicos en las disciplinas de las ciencias sociales, miraban a sus colegas, los físicos y los ingenieros, envidiándoles sus maravillosos éxitos en la teoría planetaria, el electromagnetismo o el vuelo de las naves espaciales.

No obstante, los filósofos de la física, desde el desmoronamiento de la física clásica, a principios de siglo, han tenido una idea más modesta de lo que es una ley física. Hoy se considera que dichas leyes no emanan de un Decreto Cosmológico, sino de las mentes de los hombres, y que son, por tanto, simplemente *modelos* de la realidad de aplicabilidad limitada dentro de las hipótesis en las que fueron formulados.

Estas introspecciones y exámenes de conciencia de los físicos han infundido valor a los científicos de lo social, quienes advirtiendo la utilidad y limitación de los modelos matemáticos y el poder de los métodos numéricos, han propuesto, y muchas veces aplicado, numerosos modelos para predecir el comportamiento de individuos y grupos. Algunos ejemplos típicos son: la concertación de matrimonios por ordenador; la distribución de puestos laborales; la asignación de destinos en centros universitarios; la estimación de flujo automovilístico y del transporte público en ciudades; la evolución de la población en una zona geográfica; la estimación de la calidad de actuaciones laborales y académicas; etc. Un ejemplo paradigmático fue la simulación realizada hace unos diez años en el Massachusetts Institute of Technology (MIT) de cientos de aspectos del comportamiento social y económico de una pequeña villa de 2000 habitantes. La población fue adecuadamente distribuida por edades y niveles económicos. Mes tras mes, esas personas abstractas, habitantes de las células de memoria de un ordenador, se casan, tienen hijos, logran subidas salariales, pierden su empleo, se compran un coche o una casa, o fallecen, todo ello según una base probabilística acorde con estadísticas razonables. La simulación en ordenador permitió reproducir un periodo de diez años en apenas 10 horas de cálculo. Pese a las numerosas críticas recibidas, los resultados tuvieron aspectos prometedores y abrieron puerta para que futuros estudios de este tipo puedan proporcionar alguna información de interés al economista, al industrial y, en última instancia, al legislador.

Limitaciones de los métodos numéricos en ciencias sociales

La introducción de métodos matemáticos en las llamadas ciencias del comportamiento o ciencias sociales, ha ido acompañada siempre de controversia. Algunos autores denominan a ese conjunto de métodos con el nombre de matemática *retórica*, en el sentido más denigrante de este adjetivo, indicando que sus métodos están vacíos de contenido y conducen a una mera ofuscación pretenciosa.

Quizás por ello, el impacto de los modelos matemáticos/numéricos en sociología, psicología y psiquiatría es más bien irregular. Pese a todo, diversos pensadores, como Lacan, han intentado formalizar el comportamiento de la mente utilizando la teoría de conjuntos compactos. Asimismo, las estadísticas psicosociales permiten establecer modelos discretos del comportamiento del individuo y de grupos sociales, que son utilizados frecuentemente para establecer criterios de calidad y definir estrategias comerciales o políticas.

El principal problema de la aplicación de modelos matemáticos en ciencias sociales, es que muchas veces éstos se basan en ecuaciones que contienen coeficientes y parámetros que no pueden determinarse con un grado suficiente de precisión y significado, lo que conduce a resultados fuera de la realidad.

Con ojos compasivos, puede aducirse que dichos modelos son una primera aproximación al problema de cuantificar la solución de problemas de interés en el ámbito de lo social. Un análisis más riguroso detecta que en la mayor parte de los casos se ha excluido en esos modelos el efecto de muchos conceptos en juego.

Modelos de ese tipo se han aplicado con dudoso éxito en el ámbito histórico. En su superficie, dichos modelos permiten elaborar una metodología austera y rigurosa, que trata de ponderar la importancia de cualquier afirmación según la capacidad de contrastarla empíricamente. Su aspecto endeble, emana de la incapacidad del modelista de obtener los datos que precisa para asignar un valor empírico a cada término de sus modelos matemáticos de la historia, y debe recurrir a la estimación basada en conjeturas más o menos osadas.

Pese a esas dificultades, se han efectuado diversos intentos de dar definiciones matemáticas de la vida mediante la llamada teoría de la complejidad, y hay ejemplos que contemplan las tensiones entre Dios y el hombre, relatadas en el Antiguo Testamento, como ejercicio de aplicación de la teoría de juegos. Los más atrevidos han intentado también situar el Problema del Mal en el contexto de la teoría y de las transformaciones matemáticas [2].

Ejemplos, quizás, algo más realistas los encontramos en el ámbito de la lingüística, ciencia que hoy en día se ocupa mucho más de los lenguajes formales (similares al matemático) que de la compilación de diccionarios. Los modelos matemáticos han llegado también a la composición musical, a la coreografía y al arte.

Los párrafos que siguen están extraídos del excelente libro de Davis y Hersh [2] y resumen la esencia de las aspiraciones y limitaciones de los métodos numéricos en ciencias sociales.

El científico numérico se acomoda en su despacho. Imaginemos que haya en él unas pinceladas de utopía. Tiene un sueño: el mundo es complejo. La población crece irrefrenablemente. Las demandas sociales son muchas. Múltiples los puntos de atracción y antagonismo entre individuos y grupos. Tal vez la potencia del pensamiento matemático y el auxilio de los métodos numéricos y los ordenadores nos ayuden a encontrar las respuestas adecuadas, procesando los billones de bits de información relevante. Tal vez podamos controlar mejor el flujo de personas y el flujo de bienes y satisfacciones. Tal vez podamos alimentar a los hambrientos, terminar con el delito y los disturbios sociales, poner fin a la guerra. Tal vez podamos poner aquí a allá orden en el caos. Tal vez …

Dicho noble sueño, no está exento de peligros: el método puede ser mal aplicado, o aplicado con fines perversos; puede también convertirse en la razón de ser de sus defensores, quienes obcecados en sus ideas pueden quedarse progresivamente más aislados de la realidad. Por otra parte, como Norbert Wiener ha hecho notar, el proceso de predicción puede ofrecernos situaciones contradictorias, volcando sobre nosotros satisfacciones por un extremo y caos por el otro. Finalmente, y quizás lo más importante, el método no puede funcionar sin un criterio. Tal criterio debe ser forzosamente extramatemático, extracientífico. Establecer los criterios adecuados es uno de los grandes retos de los que aspiran a que los modelos matemáticos y los métodos numéricos sean de alguna utilidad en el ámbito de lo social. La solución quizá resida en combinar en proporciones adecuadas la ciencia y la tecnología con todos los otros aspectos que componen la vida del hombre. Es indispensable para ello que los científicos cultiven sólidos valores de carácter social, y adquirieran un pensamiento, lo más flexible posible, a través de una superior educación en la humanidades, en la historia y en tantas otras ciencias sociales.

5 MÉTODOS NUMÉRICOS Y REALIDAD

Está claro que el objetivo de los métodos numéricos es reproducir lo más fielmente el comportamiento del mundo a través de números. Recordemos, no obstante, que el primer paso en ese proceso es establecer un *modelo matemático* de la realidad en cuestión. Los métodos numéricos permiten resolver en forma numérica con ayuda del ordenador las ecuaciones matemáticas de dicho modelo, generalmente expresadas por medio de ecuaciones o inecuaciones en derivadas parciales o algebraicas. Los números que resultan del cálculo, expresados por medio de gráficos dibujados por ordenador, representan la visión de la realidad que proporciona el *proceso de cálculo* escogido. Obviamente, la solución numérica solo coincidirá con la *realidad* si: a) el modelo matemático incorpora todos los aspectos del mundo real; y b) el método numérico puede resolver exactamente las ecuaciones del modelo matemático.

En la práctica, ninguna de estas dos condiciones se cumple y hay que admitir que la predicción numérica no coincidirá con el comportamiento del mundo real. Se dice entonces que la solución numérica *aproxima* la realidad. Si conocemos la solución “real” del problema que se estudia, podemos compararla con la solución numérica y obtener el error de la predicción. En la práctica, sucede también que generalmente dicha solución real no existe, ya que todo modelo matemático expresa una idealización simplificada de la realidad. Así, pues, en el mejor de los casos es posible obtener soluciones “exactas” de algunos modelos matemáticos que son aproximaciones de la realidad. Estas soluciones “exactas” (que denominábamos soluciones analíticas al inicio del artículo) sí que pueden compararse con las obtenidas resolviendo por métodos numéricos los mismos modelos matemáticos. Desgraciadamente, las soluciones exactas son también prácticamente imposibles de obtener para la mayoría de los modelos matemáticos que resuelven problemas de interés. Los pocos casos (generalmente de tipo académico) en que esta comparación es posible sirven para calibrar el método numérico. En el resto de situaciones, la única comparación factible se consigue con resultados de pruebas experimentales obtenidos para problemas concretos, en las cuales es posible realizar mediciones. Naturalmente, la validación experimental es útil para calibrar, tanto el método numérico utilizado, como el modelo matemático subyacente.

En resumen, nuestra visión de la realidad será siempre aproximada, tanto por las limitaciones de formalizar dicha realidad mediante un modelo matemático, como por los errores inherentes en la aplicación de métodos numéricos a dicho modelo. Nuestra única referencia posible son las validaciones empíricas de los resultados numéricos, utilizando valores experimentales obtenidos en pruebas de laboratorio o de campo muy concretas. En la mayoría de los casos estamos solos frente al conjunto de números que resultan de la predicción de un problema cuya solución “real” es desconocida. Es en ese momento, cuando toda la experiencia acumulada en la calibración y validación del modelo matemático y el método numérico escogidos debe utilizarse para aceptar o no los números que proporciona el cálculo efectuado.

Quizá ningún ejemplo como el de la estimación del número π ejempliza las limitaciones de los métodos numéricos. Como es sabido el número π es uno de los inconmensurables, es decir, tiene un número infinito de cifras y cualquier proceso de cálculo conduce a una solución numérica aproximada del valor de π. Tomemos, por ejemplo, el método utilizado por Arquímedes, a base de dividir la circunferencia en polígonos inscritos y circunscritos de un número de lados crecientes. Refinando progresivamente dicho proceso de cálculo, es decir, tomando más y más polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia, se puede disminuir el error de la aproximación y acotar el valor de π entre dos números cada vez más próximos. En cualquier caso, la solución numérica será siempre una *estimación* del valor real de π, aunque deberemos aceptarla como útil para cualquier cálculo posterior en el que se necesite su valor.

Para poner de manifiesto las relaciones entre realidad, métodos numéricos, modelos matemáticos e informática, tendríamos que dar respuesta a muchas preguntas, ¿Qué hace veraz una solución numérica? ¿Por qué he de creer los valores numéricos obtenidos a través del ordenador? ¿Qué confiere a una solución numérica su utilidad? ¿Qué hace que sea buena o mala? ¿Qué la hace bella o fea? ¿Cuál ha sido la influencia de los métodos numéricos sobre las teorías del conocimiento y la existencia matemática; sobre la intuición matemática; sobre la educación matemática? ¿Qué relación existe entre el pensamiento matemático, los métodos numéricos y las capacidades potenciales del ordenador y la mente humana? ¿De qué modo contribuye la solución numérica de un problema a cambiar nuestra idea de la realidad, del conocimiento, del tiempo? [2].

Una vez dada respuesta a las preguntas anteriores tendríamos bien andado el camino conducente a la creación de una filosofía de los métodos numéricos (o del cálculo). Así, al igual que la filosofía clásica se ha ocupado de lo verdadero, lo bueno y lo bello, así también, la filosofía de los métodos numéricos podría ocuparse de la veracidad de los cálculos, de la bondad y belleza en la solución numérica de los problemas del universo. Sólo a través de una reflexión profunda sobre estas ideas podremos aportar luz sobre una sociedad cada vez más dividida entre los que opinan que la informática y sus actividades subsiguientes son un mal irremediable, que degrada el espíritu y corrompe la inteligencia, y los que, en el polo opuesto, creen que los números que proporciona el ordenador, generados a través de modelos matemáticos de la realidad y métodos numéricos, nos ayudan a entender mejor el mundo que nos rodea, y son un ingrediente más para alcanzar la justicia social y la pacificación del mundo.

6 REFERENCIAS

[1] E. Oñate, *El Aura de los Números*, Reial Acadèmia de Doctors, Barcelona, 1998.
[2] P.J. Davis y R. Hersh, *El sueño de Descartes*, Editorial Labor, Barcelona, 1989.
[3] G. Frey, *La matematización de nuestro universo*, G. del Toro Editor, 1972.
[4] E.T. Bell, *The magic of numbers*, Dover Publications, 1991.
[5] J.D. Barrow, *¿Por qué el mundo es matemático*?, Grijalbo-Mondadori 1997.