Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по лабораторной работе № 6

Тема: "Решение Алгебраической проблемы собственных значений"

Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр.**3630103/90002** Д.А.Беркман

Преподаватель: С.Б.Добрецова

Санкт-Петербург

2020

① Формулировка задачи и её формализация

Решить АПСЗ: Найти собственные числа и собственные векторы матрицы ~~[зачёркнуто]~~.

- Построить графики зависимостей нормы разности точного и вычисленного решений, нормы невязки (по определению с.ч. и с.в.), числа итераций (при сдвиге и без) от заданной точности (при хорошей отделимости с.ч.) и от величины отделимости с.ч. при ее ухудшении (при фиксированной точности).

Формализация задачи: A – симметричная матрица размера $n \times n$ – Дано.

Найти: число λ, такое, что $|\lambda - \lambda_1| < \varepsilon$, ε – точность, λ – заданные с.ч.

вектор X, такой, что $\|X - X_1\| < \varepsilon$, ε-точность, $X: AX = \lambda X$.

② Алгоритм метода и условия его применимости.

Условия применимости: $A = A^T$ (A – симметричная)

Алгоритм метода:

1) ищем ключевой элемент матрицы и фиксируем его индексы, $key = 0$

внедиагональный элемент, максимальный по модулю.

для $k = 1:n$

для $l = (k+1):n$

если $|A(k,l)| > key$

1. $key = |A(k,l)|$
2. $i\_o = k$, $j\_o = l$ } фиксируем индексы

$\exists\, it = 0$

$\exists\, M = 1$

2) Пока $M^2 > \varepsilon$

1. вычисляем синус и косинус:

~~$\alpha = 0{,}5 \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2 \cdot A(i\_o, j\_o)}{A(i\_o, i\_o) - A(j\_o, j\_o)}\right)$~~

~~$c = \cos(\alpha)$~~

~~$s = \sin(\alpha)$~~

$$\tau = \frac{A(i\_o, i\_o) - A(j\_o, j\_o)}{2A(i\_o, j\_o)}$$

$$t = \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$$

$$s = c \cdot t.$$

2. найдем B и A по ф-ле: $B = T^T A \cdot T$, где T это

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & c & \cdots & -s & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & s & \cdots & c & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

то есть, меняются 2 строки и 2 столбцы, в матрице A только

строки:

$B(i\_o, y) = c \cdot A(i\_o, y) + s \cdot A(j\_o, y)$

$B(j\_o, y) = -s \cdot A(i\_o, y) + c \cdot A(j\_o, y)$

столбцы:

$B(y, i\_o) = c \cdot A(y, i\_o) + s \cdot A(y, j\_o)$

$B(y, j\_o) = -s \cdot A(y, i\_o) + c \cdot A(y, j\_o)$, где y меняется от 1 до n.

~~3. Найдем B и A~~

~~$B = T^T A \cdot T$~~

3. Вычислим собственные вектора. ($X = T_0 \cdot T_1 \cdot \ldots \cdot T_n$) – меняются только 2 стр.

$X(y, i\_o) = c \cdot X(y, i\_o) + s \cdot X(y, j\_o)$ (изначально X – единичная матрица)

$X(y, j\_o) = -s \cdot X(y, i\_o) + c \cdot X(y, j\_o)$, y меняется от 1 до n.

4. Еще раз находим максимальный по модулю внедиагональный элемент

$key = 0$

для $k = 1:n$

для $l = (k+1):n$

если $(|B(k,l)| > key)$

$key = |B(k,l)|$

$i\_o = k$

$j\_o = l$.

$M = key$.

5. $A = B$

6. $it = it + 1$

3) Создаем массив собственных чисел: заполняем массив нулей

для $h = 1:n$

$L_1(h) = A(h,h)$

③ Проверка условия применимости метода.

Создаём матрицу $A_{n\times n} = A^T_{n\times n}$ с заданным спектром:

1) создаём диагональную матрицу $D_{n\times n}$, на диагонали которой лежат с.ч. будущей матрицы A.

2) создаём ортогональную матрицу $Q = E - 2\frac{(WW^T)}{\|WW^T\|}$, где $E_{n\times n}$ – единичная матрица, W – ∀ вектор размера n.

! 3) $A = QDQ^T$ – симметричная матрица.

④ Тестовый пример.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\varepsilon = 10^{-6}$ усл. применимости выполнено $A = A^T$ – симметричная

1) key = 2; i_o = 1; j_o = 3.
it = 0 M = 1, $M^2 > \varepsilon$ => продолжаем.

2) $\alpha = 0{,}5 \cdot arctg(2\cdot 2/(3-3)) = 0{,}5 \cdot arctg(\infty) = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$

$c = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$

$s = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$

3) $T^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0 & -0{,}7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 \end{pmatrix}$

4) $B^{(0)} = T^TAT = \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0 & -0{,}7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 1{,}4142 & 0 \\ 1{,}4142 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $X^{(0)} = T^{(0)}$

6) M = 1,4142, i_o = 1, j_o = 2, it = 1, $M^2 > \varepsilon$ => продолжаем.

7) $\alpha = 0{,}5 \cdot (arctg(2 \cdot 1{,}4142/(5-2)) \approx 0{,}3780$

$c = \cos(0{,}3780) \approx 0{,}9294$

$s = \sin(0{,}3780) \approx 0{,}3690$

8) $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}9294 & -0{,}3690 & 0 \\ 0{,}3690 & 0{,}9294 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) $B = \begin{pmatrix} 0{,}9294 & 0{,}3690 & 0 \\ -0{,}3690 & 0{,}9294 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1{,}4142 & 0 \\ 1{,}4142 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9294 & -0{,}3690 & 0 \\ 0{,}3690 & 0{,}9294 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5{,}5616 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}4384 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M \approx 0 < \varepsilon$

9) $X^{(1)} = X^{(0)} \cdot T^{(1)} =$

$= \begin{pmatrix} 0{,}7071 & 0 & -0{,}7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9294 & -0{,}3690 & 0 \\ 0{,}3690 & 0{,}9294 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6572 & -0{,}2610 & -0{,}7071 \\ 0{,}3690 & 0{,}9294 & 0 \\ \underbrace{0{,}6572}_{x_1} & \underbrace{-0{,}2610}_{x_2} & \underbrace{0{,}70171}_{x_3} \end{pmatrix}$ x_1, x_2, x_3 – собственные вектора матрицы A.

10) $L_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (5{,}5616, 1{,}4384, 1)$

↑ массив собственных чисел матрицы A.

⑤ Контрольные тесты

Гр 1,2,3 Для построения графиков зависимости от заданной точности при хорошей отделимости с.ч.:

1) Зададим спектор L = rand(1, n) · 10 массивом длины n с собственными числами от 0 до 10

2) Создадим матрицу с заданным спектром L, размером n × n

3) Решаем АПСЗ с точностью ε меняющейся от 10^{-1} до 10^{-15}, вследствии домножения текущего ε на 0,1 в начале каждой итерации.

4) Сдвиг реализуется, как A+E, (сдвиг спектра на +1) ← не имеет смысла (см ⑦ и ⑧) (!)

Гр 4,5,6 Для построения графиков зависимости от величины отделимости с.ч. при её ухудшении при фиксированной точности:

1) Зададим точность: $\varepsilon = 10^{-6}$

2) Зададим начальный спектр: Заполним массив собственными числами, разбросанными, например, вокруг значения 6 в радиусе 2. В Matlabе это будет реализовано: n = 10

```
l = 6    L = zeros(1, n)
for i = 1 : n
    L(i) = l + randn()
end
```

← какое-то рандомное вещественное число

, Lo = L

3) Ухудшаем отделимость с.ч., изменяя массива ~~уменьшая~~ радиус разбрасывания собственных чисел от заданного значения $l=5$.
В Matlab: $L(i) = l + \frac{L0(i)}{2^i}$, изменяя i от 0 до 25 ! (в теперь работает, см. графики)
$L_{n\times n}$

4) Строим матрицы A, соответствующие получившимся спектрам L.

5) Решаем АПСЗ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$

6) В массив „отделимость" записываем для каждой итерации $(\max(L) - \min(L))$

7) Сдвиг реализуем так же как в п. 7) выше

⑥ Модульная структура программ.

- Функция matrixCreation(L, n) создаёт матрицу $A_{n\times n}$ с заданным спектром L
- Функция Jakobi(A, n, eps) возвращает матрицу, заполненную собственными векторами, строку, заполненную собственными числами и количество итераций.
- В GraficsJacE строятся графики зависимостей от точности.
- В GraficsJacS строятся графики зависимостей от отделимости.

⑦ Численный анализ решения задачи.

Гр1 Видно, что при хорошей отделимости с.ч., с уменьшением точности уменьшается кол-во итераций. Сдвиг не даёт выигрыша в количестве итераций => не нужен

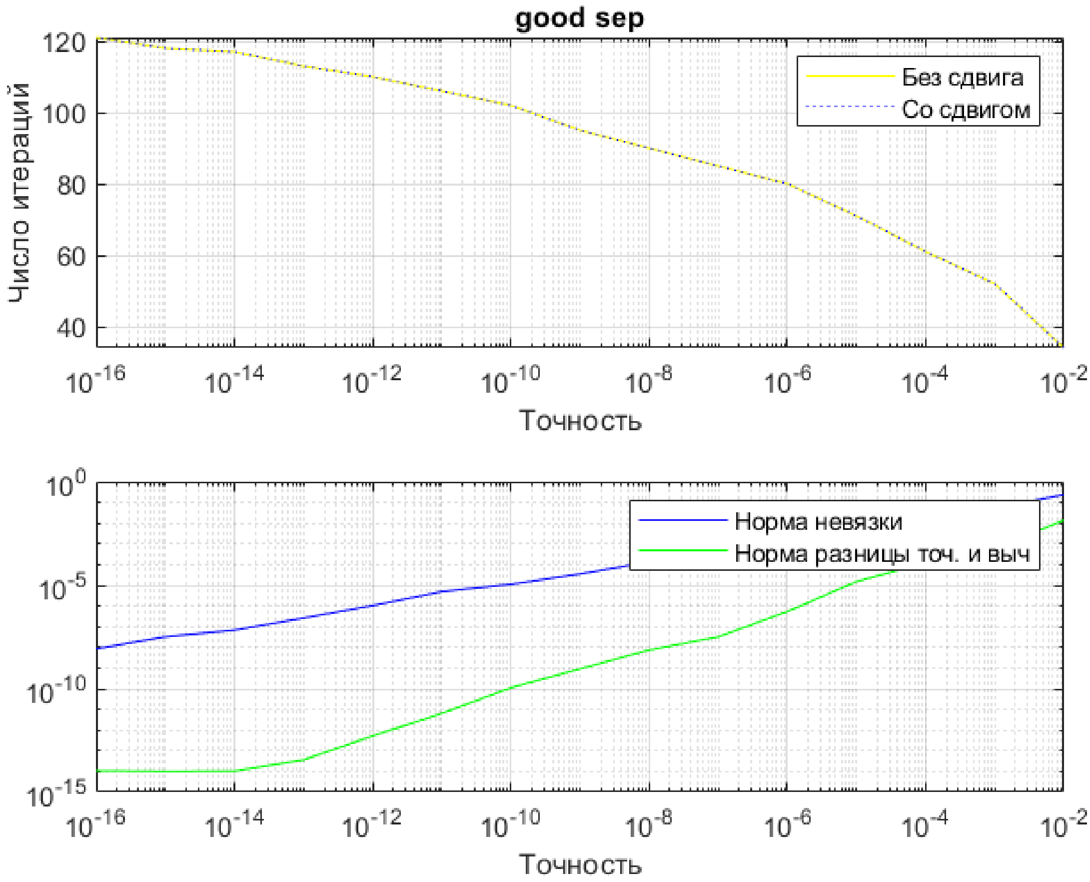
Гр2,3 Видно, что невязка не достигает требуемой точности, нежели норма разности. Следовательно, невязка не показывает точное решение. Оба графика зависят линейно (возрастают) от точности (при уменьшении точности)

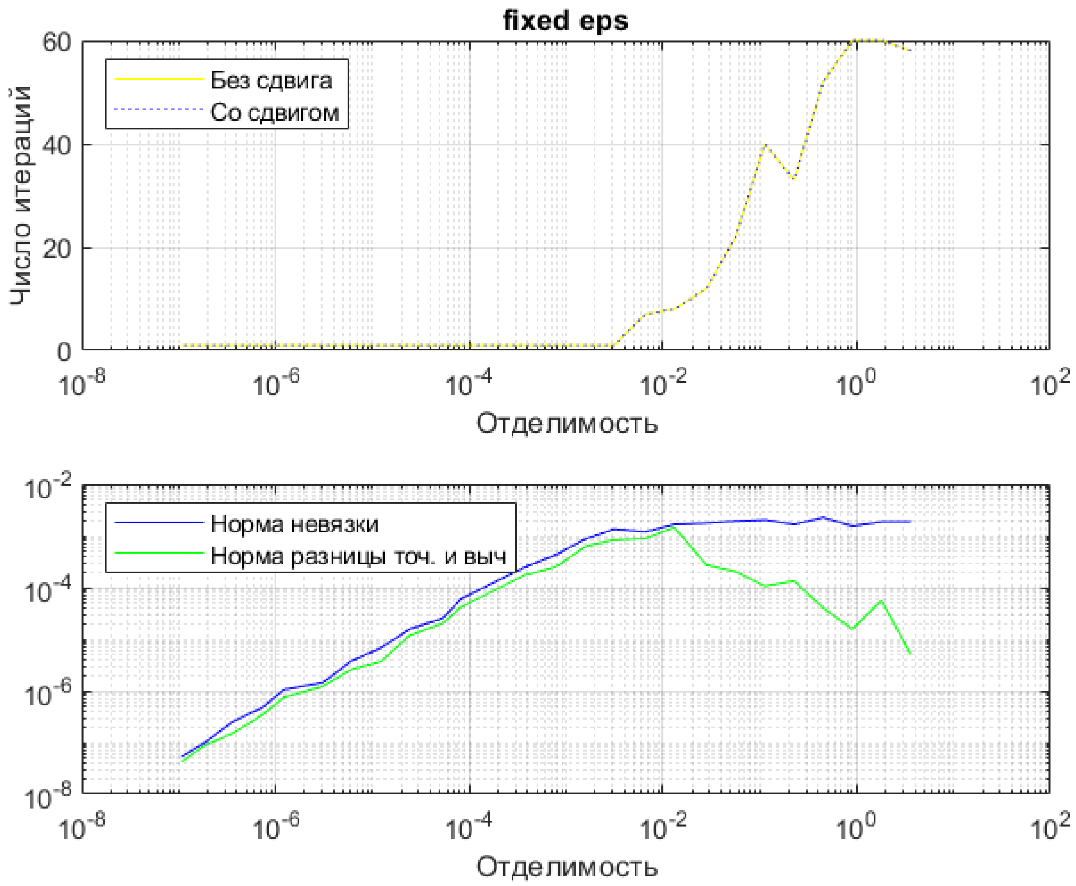
Гр4 Видно, что при увеличении отделимости почти линейно возрастает число итераций. При уменьшении (ухудшении) отделимости матрица A стремится к E умноженной на число l => в какой-то момент количество итераций становится равным 1.

Гр5,6 Видно, что норма разности достигает ожидаемой точности и параллельна невязке до момента, когда перестает быть диагональной (с одинаковыми числами на диагонали). Далее невязка апроксимируется горизонтальной прямой, а норма разности после пика падает почти линейно (с большим разбросом).

⑧ Вывод

Из графиков 1 и 4 следует, что сдвиг никак не влияет на количество итераций. Объяснить это можно тем, что в методе Якоби уменьшается сумма внедиагональных элементов.


good sep
Число итераций
Без сдвига
Со сдвигом
Точность
Норма невязки
Норма разницы точ. и выч
Точность


fixed eps
Число итераций
Без сдвига
Со сдвигом
Отделимость
Норма невязки
Норма разницы точ. и выч
Отделимость