Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по лабораторной работе № 4

Тема: **"**Решение СЛАУ итерационными методами**"**

Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр.**3630103/90002** Д.А.Беркман

Преподаватель: С.Б.Добрецова

Санкт-Петербург

2020

① Формулировка задачи и её формализация

Решить СЛАУ итерационным методом ~~Зейделя~~. Исследовать зависимости нормы разности точного и вычисленного решений, нормы невязки и числа итераций от заданной точности и от значения определителя при стремлении к 0.

Формализация задачи:

Дано СЛАУ $Ax = b$, где x – столбец точного решения размером n, A – квадратная $n \times n$ невырожденная (симметричная или с диаг. преоб.) положительно определённая матрица с заданным определителем, b – столбец правой части СЛАУ.

Найти столбец решений x_1 такой, что $\|x - x_1\| < \varepsilon$, ε – точность

② Алгоритм метода и условия его применимости

Условия применимости (сходимости): матрица A симметрическая положительно определенная или с диагональным преобладанием. $\det A \neq 0$.

Алгоритм метода:

0) если матрица A не подходит под условия сходимости: $A^* = A^T \cdot A$, $b = A^T \cdot b$ ← делает матрицу симм.

1) Преобразовать СЛАУ к виду $x = Bx + c$, где $B = -\frac{A_{ij}}{A_{ii}}$, $B_{ii} = 0$, $c_i = \frac{b_i}{A_{ii}}$.

2) Зададим $x^{(0)} = c$

! 3) Пока $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \geq \varepsilon \cdot \frac{\|B\|}{1 - \|B_R\|}$ ($B = B_L + B_R$)

Вычисляем столбец решений $x^{(k+1)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases}$$

③ Проверка условия применимости метода

Построение матрицы:

1) Создаём единичную диагональную матрицу D $n \times n$

! 2) Говорим, что $D(1,1) = \det$, $\det$ – заданное значение определителя.

! 3) Создаём ортогональную матрицу $Q = \frac{-2(WW^T)}{\|WW^T\|} + E$

4) Создаём невырожденную положительно определённую матрицу за счёт того, что задаём определитель $\det > 0$. (У матрицы A будет такой же определитель, как у матрицы D)

$$A = QDQ^T$$

④ Тестовый пример

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix};\ X_{зад} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ b = A \cdot X_{зад} = \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \\ 26 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 12x_1 + x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + 16x_2 + x_3 = 36 \\ 2x_3 + x_2 + 10x_3 = 26 \end{cases}$$

↑ симметрическая, положительноопределенная, невырожденная

$\det A = 12 \cdot 16 \cdot 10 + 2 + 2 - 16 \cdot 4 - 12 - 10 = 1838 > 0$

Решим СЛАУ методом Зейделя:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}25 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \quad \text{Зададим } X^{(0)} = C = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}25 \\ 2{,}6 \end{pmatrix},\ \varepsilon = 0{,}1$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 \cdot 2{,}5 - \frac{1}{12} \cdot 2{,}25 + (-\frac{1}{6}) \cdot 2{,}6 + 2{,}5 = 1{,}8792 \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{16} \cdot 1{,}8792 - \frac{1}{16} \cdot 2{,}6 + 2{,}25 = 1{,}9701 \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{5} \cdot 1{,}8792 - \frac{1}{10} \cdot 1{,}9701 + 2{,}6 = 2{,}0272 \end{cases} \quad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0{,}8899 > \varepsilon \Rightarrow \text{продолжаем}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{12} \cdot 1{,}9701 - \frac{1}{6} \cdot 2{,}0272 + 1{,}8792 = 1{,}9980 \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{16} \cdot 1{,}998 - \frac{1}{16} \cdot 2{,}0272 + 1{,}9701 = 1{,}9984 \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{5} \cdot 1{,}998 - \frac{1}{16} \cdot 1{,}9984 + 2{,}0272 = 2{,}0006 \end{cases} \quad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0{,}125 > \varepsilon \Rightarrow \text{продолжаем}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0 \cdot 1{,}998 + \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 1{,}9984 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 2{,}0006 + 1{,}998 = 2{,}000037 \\ x_2^{(3)} = -\frac{1}{16} \cdot 2{,}00004 + 0 \cdot 1{,}9984 + \left(\frac{1}{16}\right) \cdot 2{,}0006 + 1{,}9984 = 1{,}999962 \\ x_3^{(3)} = -\frac{1}{5} \cdot 2{,}00004 + \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot 1{,}999962 + 0 \cdot 2{,}0006 + 2{,}0006 = 1{,}999996 \end{cases} \quad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0{,}0026 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow X_{выч} = \begin{pmatrix} 2{,}000037 \\ 1{,}999962 \\ 1{,}999996 \end{pmatrix} \text{ с точностью } \varepsilon = 0{,}1.$$

⑤ Контрольные тесты

Гр. 1,2,3 Для построения графиков зависимости от заданной точности при фиксированном определителе и начальном приближении:
1) Создадим столбец точного решения $x = rand(n,1)$, где n - размер столбца и $A^{матр}_{n\times n}$
2) Создадим матрицу A с заданным определителем $det = 0{,}1$, например. и столбец правой части $b = A \cdot x$.
3) Решаем СЛАУ с заданной точностью, меняющейся от $0{,}1$ до 10^{-15} вследствии домножения текущего ε на $0{,}1$ в конце каждой итерации.

Гр4,5,6 Для построения графиков зависимости от значения определителя при фиксированной точности и начальном приближении:
1) (см. 1) выше) (и $b = A \cdot x$)
2) Создадим матрицу A с меняющимся определителем det от $0{,}1$ до 10^{-15}, как бы „устремляя определитель матрицы к 0" вследствии домножения текущего det на $0{,}1$ в конце каждой итерации.
3) Решаем СЛАУ с заданной точностью (фиксированной) и для каждых получившихся матриц A и столбцу b.

⑥ Модульная структура программы.

Функция matrixCreation (det, n) создаёт невырожденную положительноопределённую матрицу $A_{n\times n}$ с заданным определителем det.

! Функция Seidel (A, b, eps) ~~преобразует матрицу A к симметричной и~~ решает СЛАУ итерационным методом Зейделя.

В Grafics производятся расчёты и строятся графики зависимостей

⑦ Численный анализ решения задачи.

Гр1 Видно, что при фиксированном определителе число итераций линейно зависит от точности. Чем точнее вычисляется результат, тем больше понадобится итераций

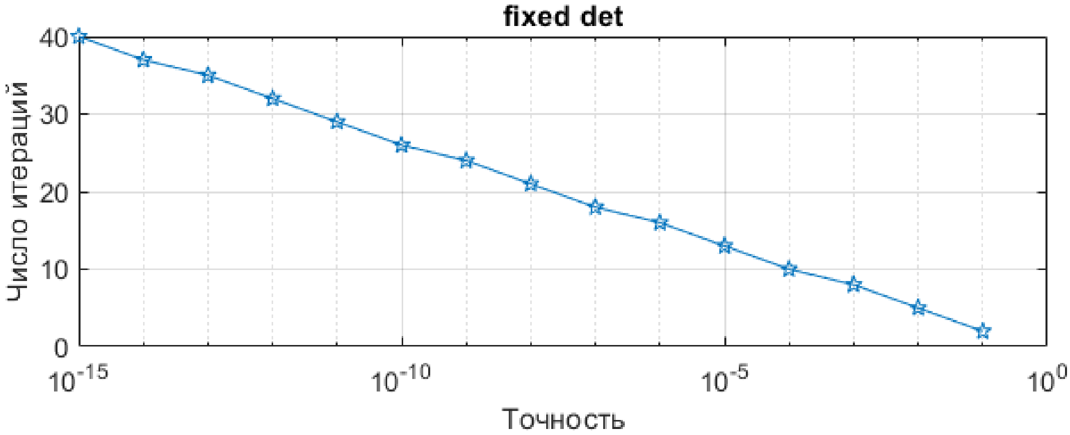
Гр2,3 Видно, что зависимости нормы невязки и нормы разности решений (точ-выч), так же, линейно зависят от точности и графики зависимостей параллельны. Чем точнее вычисляется результат, тем меньше нормы разности и невязки.

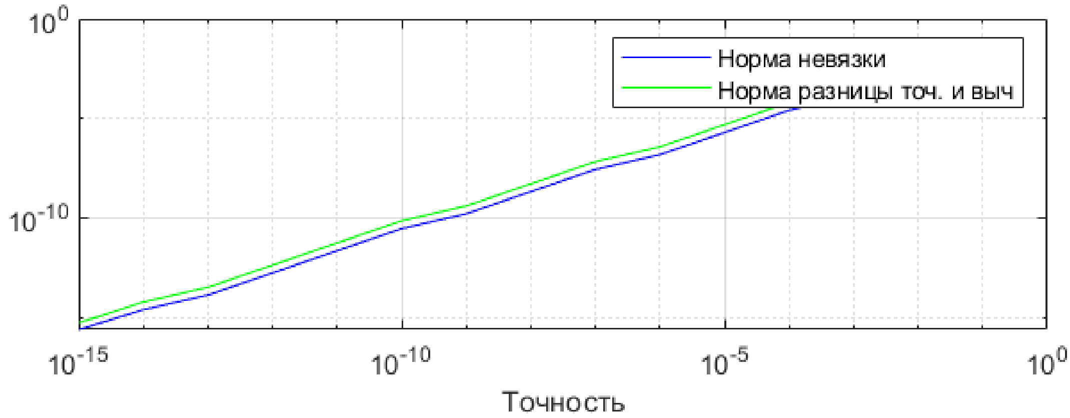
Гр4 Видно, что устремление определителя матрицы к 0 никак не влияет на число итераций.

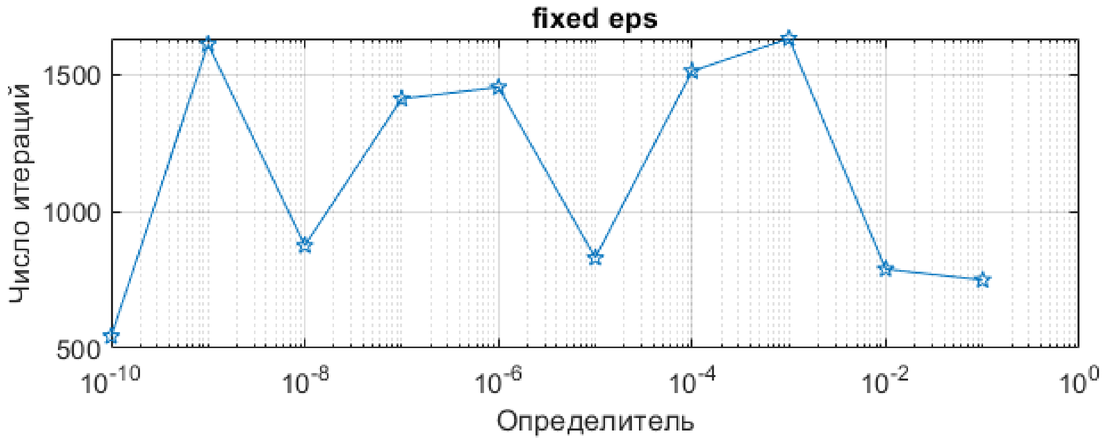
Гр5,6 Видно, что тогда как график зависимости нормы разницы точного и вычисленного решений от определителя аппроксимируется горизонтальной прямой, в графике зависимости нормы невязки от точности заметен медленный рост с увеличением точности.

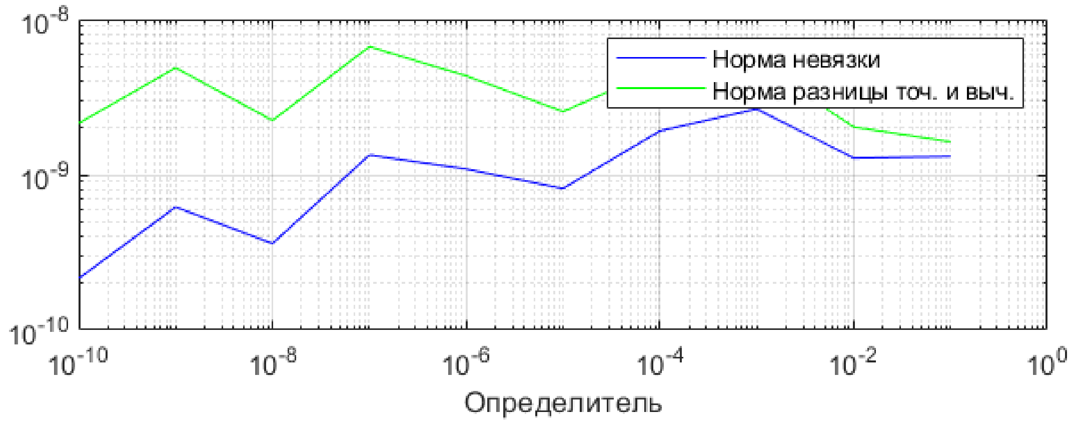
⑧ Вывод

Из графиков 2 и 3 видно, что ожидаемое решение совпадает с получившимся => => итерационный метод Зейделя достаточно хорош для решения СЛАУ, хоть и сходится только при нормальных СЛАУ и СЛАУ с диагональным преобладанием. Метод работает одинаково, как при определителе близком к 0, так и с отличающимся от 0.


fixed det
Число итераций
Точность


Норма невязки
Норма разницы точ. и выч
Точность


fixed eps
Число итераций
Определитель


Норма невязки
Норма разницы точ. и выч.
Определитель