Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование

Отчет по лабораторной работе №**1**

Тема: "Решение алгебраических и трансцендентных уравнений"

Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр.3630103/90002 Д. А. Беркман

Преподаватель: С. Б. Добрецова

Санкт-Петербург

2020

① Формулировка задачи и её формализация.

Даны уравнения: 1) $2x^3-9x^2-60x+1=0$ – алгебраическое.
2) $x\cdot 2^x=1$ – трансцендентное.

В ходе лабораторной работы необходимо:

– найти $\xi\in[a,b]:\ \forall\varepsilon>0\ \ |f(\xi)|<\varepsilon$ (т.е. решить уравнения)
– построить графики зависимости количества итераций от: а) заданной точности
б) длины промежутка.

② Алгоритм метода и условия его применимости.

• Метод половинного деления: [условия применимости: $\exists f\in C([a;b]);\ f(a)f(b)<0$; единственность корня]

алгоритм:

0. Задать концы отрезка: a, b; $\varepsilon>0$ – допустимую абсолютную погрешность корня.
и $\delta>0$ – допуск для вычисления значений данной функции;
1. Вычислить $c=(a+b)/2$;
2. Если $b-a<2\varepsilon$, положить, что c – искомый корень ξ ($\xi=c$) и остановиться
3. Вычислить $f(c)$
4. Если $|f(c)|<\delta$, положить, что $\xi=c$ и остановиться
5. Если $f(a)f(c)<0$, положить, что $b=c$ и вернуться к шагу 1.
Если $f(a)f(c)>0$ (иначе), положить, что $a=c$ и вернуться к шагу 1.

• Метод Ньютона: [условия применимости: $\exists f(x)$ дважды дифференцируема на $[a,b]$, содержит единственный корень ξ, ($f'(x)\neq0$) $\exists\ \exists x_0\in[a,b]: f(x_0)$ удовлетв. усл. Фурье: $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$]

0. Выберем x_k и x_{k+1} и вычислим для x_k производную: $f'(x_k)$, $k=0$!
1. Вычислить $f(x_k)$
2) Пока $|x_k-x_{k+1}|>\varepsilon\cdot|x_{k+1}|$
$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k)$
$k=k+1$

③ Предварительный анализ задачи

• Алгебраическое уравнение: Дано уравнение $2x^3-9x^2-60x+1=0$ (1)
Применим теорему о верхней границе положительных корней:
$a_0=2$
$A=\max\{|a_i|, a_i<0\}=60$ – наибольший по модулю отриц. к-т.
$m=1$ – номер первого отрицательного к-та.
тогда $\xi<N=1+\sqrt[m]{\frac{A}{a_0}}=31$
Сделаем замену $x=\frac{1}{t}$: $2x^3-9x^2-60x+1\to t^3(2t^{-3}-9t^{-2}-60t^{-1}+1)=2-9t-60t^2+t^3=0$
$= t^3-60t^2-9t+2=0$
Применим теорему к новому уравнению:

$\left.\begin{array}{l}a_0=1\\A=60\\m=1\end{array}\right| \Rightarrow \xi'<N=1+\sqrt[1]{\frac{60}{1}}=61\Rightarrow \xi=\frac{1}{\xi'}>\frac{1}{N}=\frac{1}{61}$

$\Rightarrow$ все положительные корни $\in(\frac{1}{61};31)$
Найдем производную (1): $6x^2-18x-60=0$
$x^2-6x-10=0$
$(x-5)(x+2)=0$
Разбиваем промежуток $(\frac{1}{61};31)$ на области монотонности функции: $(\frac{1}{61};5]\cup[5,31)$
$f(\frac{1}{61})\approx0{,}14$, $f(5)=-274\Rightarrow(\frac{1}{61};5]$ – промежуток локализации корня
$f(5)=-274$, $f(31)=49074\Rightarrow[5,31)$ – так же, промежуток локализации корня.

• Трансцендентное уравнение: Дано уравнение $x\cdot 2^x = 1$ (2) $\Leftrightarrow f(x) = x\cdot 2^x - 1$
Найдем промежутки монотонности $f(x)$:

$$f'(x) = 2^x\cdot(x\cdot\ln 2 + 1) = 0 \Rightarrow x = -1/\ln 2 \approx -1{,}4$$

$$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{2^{-\frac{1}{\ln 2}}}{\ln 2} - 1 \approx -1{,}5 < 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot \underbrace{2^x}_{\to 0} - 1 = -1 < 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot \underbrace{2^x}_{\to+\infty} - 1 = +\infty > 0$$

f: $-\infty \;|\; -\frac{1}{\ln 2} \;|\; +\infty$; $-$ | $-$ | $+$ $\Rightarrow$ по т. Больцано-Коши $f(x)$ имеет строго 1 корень на $(-\frac{1}{\ln 2}; +\infty)$

Сузим промежуток:
$f(2) = 2\cdot 2^2 - 1 = 7 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ корень ур-я локализуется на промежутке $(-1{,}4; 2)$

(4) Проверка условий применимости метода.

• Метод половинного деления: $f(x)$ опр. и непр. на своём промежутке локализации. f на концах промежутка принимает значения разных знаков.

(1): определена и непрерывна на $[\frac{1}{61}; 5] \cup [5; 31]$
$f(\frac{1}{61})\cdot f(5) < 0$
$f(5)\cdot f(31) < 0$ (см. в п (3))

(2): определена и непрерывна на $(-1{,}4; 2)$
$f(-1{,}4)\cdot f(2) < 0$ (см в п (3))

• Метод Ньютона: $\exists f''(x), f'(x)$ на $[a, b]$; $f'(x) \neq 0$:
Выполняется условие Фурье: $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.
(промежуток локализации)

(1): $f''(x) = 12x - 18$
$\exists x_{01} = \frac{1}{60}$: $f(x_0) = -0{,}0025$, $f''(x_0) = -17{,}8$ $\Rightarrow f(x_{01})\cdot f''(x_{01}) > 0$
$\exists x_{02} = 30$: $f(x_0) = 44101$, $f''(x_0) = 342$ $\Rightarrow f(x_{02})\cdot f''(x_{02}) > 0$

(2): $f''(x) = 2^x \ln 2\,(x\ln 2 + 2)$
$\exists x_0 = 1$: $f(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 3{,}7$ $\Rightarrow f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$

(5) Тестовый пример

~~4 уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, корни которого $x_{1,2} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$~~

• Метод половинного деления (уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$, корни которого $\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$)

Заметим, что $[2,5]$ - промежуток локализации $f(2) = -8$; $f(5) = 7$
$\exists (a,b) = (2,5)$; $f(a)\,f(b) < 0 \Leftarrow$ условие применимости выполняется

$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{2+5}{2} = 3{,}5 > \delta$ $f(3{,}5) = -2{,}75 > \delta$ $(3{,}5; 5) = (a, b)$ $x_2 = 3{,}875$ $f(x_2) = -\frac{47}{64} > \delta$ $(a,b) = (3{,}875; 4{,}25)$
$x_1 = 4{,}25$; $f(4{,}25) \approx 1{,}56 > \delta$; $(a,b) = (3{,}5; 4{,}25)$ $x_3 = 4{,}0625$ $f(x_3) < \delta \Rightarrow x \to 4$

• Метод Ньютона (уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, корни которого $x_{1,2} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$)

$\varepsilon = 0{,}1$
$f''(x) = 2$; $x_0 = 4$, тогда $f(x_0)\cdot f''(x) = 3\cdot 2 = 6 > 0 \Rightarrow (\cdot)\, x_0$ удовл. усл. Фурье.
$f'(x) = 2x - 4$; $f'(x_0) = 4$ $\quad |4 - 3{,}25| > \varepsilon$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{3}{4} = 3{,}25$ $\quad |3{,}25 - 3{,}11| > \varepsilon$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_0)} \approx 3{,}11 - \frac{0{,}23}{4} \approx 3{,}05$ $\quad |3{,}11 - 3{,}05| < \varepsilon$ $\quad 0{,}06 < \varepsilon$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} \approx 3{,}25 - \frac{0{,}5625}{4} \approx 3{,}11$ $\quad \Rightarrow \{x_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 3$

⑥ Контрольные тесты.

• Алгебраическое уравнение $f(x)=2x^3-9x^2-60x+1=0$

Метод половинного деления

Зафиксируем промежуток локализации $[\frac{1}{61}, 5]$:

∢ кол-во иттераций i в зависимости от заданного $\varepsilon = 10^{-6}$

$\varepsilon=0{,}1$: $i=5$ $\varepsilon=0{,}00001$: $i=18$

$\varepsilon=0{,}01$: $i=8$ $\varepsilon=0{,}000001$: $i=22$.

$\varepsilon=0{,}001$: $i=12$

$\varepsilon=0{,}0001$: $i=15$

Для построения графиков зависимости кол-ва итераций от заданной точности, уменьшаем ~~точность~~ ε от 10^{-1} до 10^{-10}, как бы устремляя ε к 0.

Зафиксируем точность $\varepsilon=0{,}001$:

∢ кол-во иттераций в зависимости от заданной длины промежутка.

$[\frac{1}{61}; 5]$: $i=12$ $[\frac{1}{61}; 3]$: $i=11$ (меняем границы промежутка) сужаем

$[\frac{1}{61}; 4{,}5]$: $i=12$ $[\frac{1}{61}; 2{,}5]$: $i=11$

$[\frac{1}{61}; 4]$: $i=11$

$[\frac{1}{61}; 3{,}5]$: $i=11$

Для построения графиков зав-ти кол-ва итераций от длины промежутка, уменьшаем правую границу на 0,5, сужая промежуток.

Итоговый результат при $\varepsilon=10^{-4}$: $\xi=0{,}0165$.

• Метод Ньютона

$\exists x_0=4$:

∢ кол-во иттераций i в зависимости от $\varepsilon = 10^{-6}$

$\varepsilon=0{,}1$: $i=3$ $\varepsilon=0{,}0001$: $i=5$

$\varepsilon=0{,}01$: $i=4$ $\varepsilon=0{,}00001$: $i=6$

$\varepsilon=0{,}001$: $i=5$ $\varepsilon=0{,}000001$: $i=6$

Для построения графиков зависимости кол-ва итераций от выбора x_0: уменьшаем x_0 на 0,5

Зафиксируем точность $\varepsilon=0{,}001$

∢ кол-во иттераций в зависимости от выбора x_0:
(уменьшаем x_0, уменьшая на 0,5)

$x_0=4$: $i=5$ $x_0=2{,}5$: $i=4$

$x_0=3{,}5$: $i=6$ $x_0=2$: $i=4$

$x_0=3$: $i=5$ $x_0=1{,}5$: $i=4$

Итоговый результат при $\varepsilon=10^{-4}$: $\xi=0{,}0166$.

• Трансцендентное уравнение.

$f(x) = x\cdot 2^x - 1 = 0$

Метод половинного деления

Зафиксируем промежуток локализации $[-1{,}4; 2]$.

∢ кол-во иттераций в зависимости от ε:

$\varepsilon=0{,}1$: $i=5$ $\varepsilon=0{,}0001$: $i=15$

$\varepsilon=0{,}01$: $i=8$ $\varepsilon=0{,}00001$: $i=18$

$\varepsilon=0{,}001$: $i=11$ $\varepsilon=0{,}000001$: $i=21$

Зафиксируем точность $\varepsilon=0{,}001$:

∢ кол-во иттераций в зависимости от заданной длины промежутка:

$[-1{,}4; 2]$: $i=11$ $[-0{,}6; 1{,}6]$: $i=11$

$[-1{,}4; 1{,}6]$: $i=11$ $[-0{,}6; 1{,}2]$: $i=10$

$[-1; 1{,}6]$: $i=11$ $[-0{,}2; 1{,}2]$: $i=10$

Итоговый результат при $\varepsilon=10^{-4}$: $\xi=0{,}6413$

Метод Ньютона

$\exists x_0=2$:

∢ кол-во иттераций i в зависимости от ε:

$\varepsilon=0{,}1$: $i=6$ $\varepsilon=0{,}0001$: $i=6$

$\varepsilon=0{,}01$: $i=5$ $\varepsilon=0{,}00001$: $i=6$

$\varepsilon=0{,}001$: $i=5$ $\varepsilon=0{,}000001$: $i=6$

Зафиксируем точность $\varepsilon=0{,}001$:

∢ кол-во иттераций в зависимости от выбора x_0:

$x_0=2$: $i=5$ $x_0=1$: $i=4$

$x_0=1{,}6$: $i=5$ $x_0=0{,}8$: $i=3$

$x_0=1{,}2$: $i=4$ $x_0=0{,}7$: $i=3$

Итоговый результат при $\varepsilon=10^{-4}$: $\xi=0{,}6412$

⑦ Модульная структура программы

Программа состоит из четырех основных модулей: „F.m", „G.m", „bisec.m", „newt.m".

„F.m":

Задана алгебраическая функция

„G.m":

Задана трансцендентная функция

„bisec.m":

Реализация метода половинного деления для алгебраической и трансцендентной ф-й.

Входные данные: func1 – задание алгебраической ф-ии с помощью inLine

func2 – задание трансцендентной ф-ии с помощью inLine.

a_1, b_1 – границы промежутка монотонности для алг. ф-ии

a_2, b_2 – границы промежутка монотонности для трансц. ф-ии.

delta1 и delta2 – допуск для вычисления знач. данной ф-ии (алг. и тр.)

arrL1 и arrL2 – массивы границ промеж. монотонности

Выходные данные: ksi1 и ksi2 – найденные с заданной точностью корни алг и тр. ф-й

arrIt1 и arrIt2 – массивы количества итераций, затраченных соответственно на вычисление корней алг и тр ф-й соотв-но.

arrE1 и arrE2 – массивы, содержащие допустимые абсолютные погрешности $\varepsilon = 10^{(-i)}, i = \overline{1,10}$

„newt.m"

Реализация метода Ньютона для алгебраической и трансцендентной ф-ии.

Входные данные: func1, func2, arrL1, arrL2 (см „bisec.m").

dfunc1 – задание производной алг. ф-ии отдельной ф-ией с помощью inLine.

dfunc2 – аналогично dfunc1 для транец. ф-ии.

Xk и Xn – задание X_0 для алгебраической и тр-ой ф-й.

Выходные данные: (см. выходные данные в „bisec.m").

⑧ Численный анализ решения задачи.

- Алгебраическое уравнение

По контрольным тестам и графику видно, что метод Ньютона оказался эффективнее метода половинного деления из-за лучшей сходимости.

- Трансцендентное уравнение.

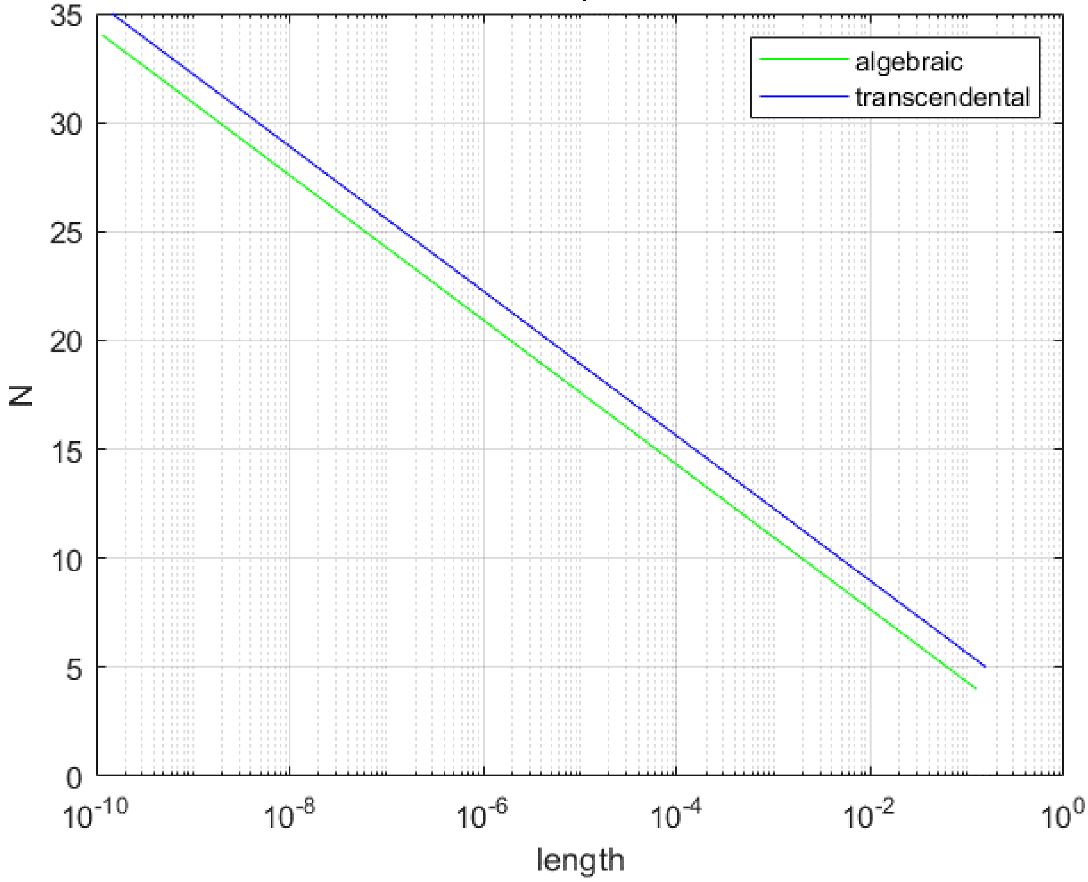
Аналогично алгебраическому ур-ю, метод Ньютона оказался эффективнее.

⑨ Выводы

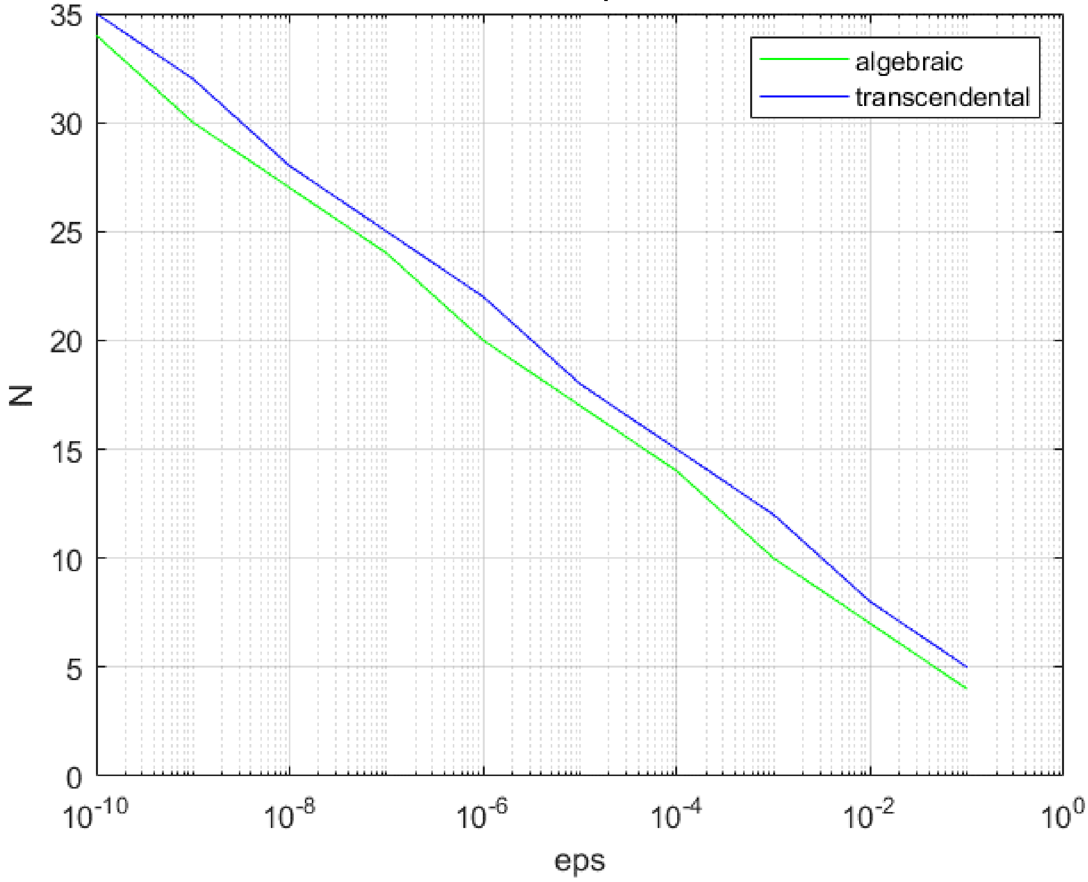
По результатам работы можно сделать вывод, что метод половинного деления универсален, так как его сходимость не зависит от вида функции.

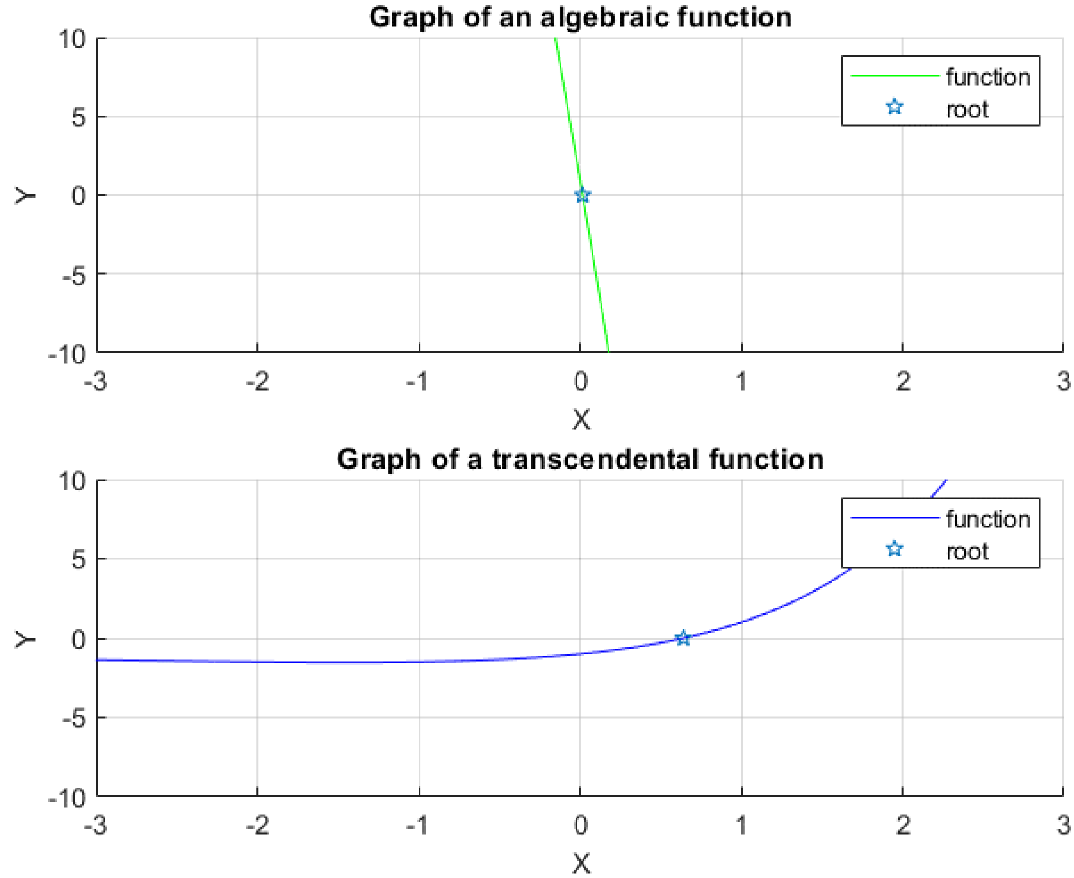
Про метод Ньютона можно сказать, что его сходимость зависит от выбора начальной точки и пологости графика функции.

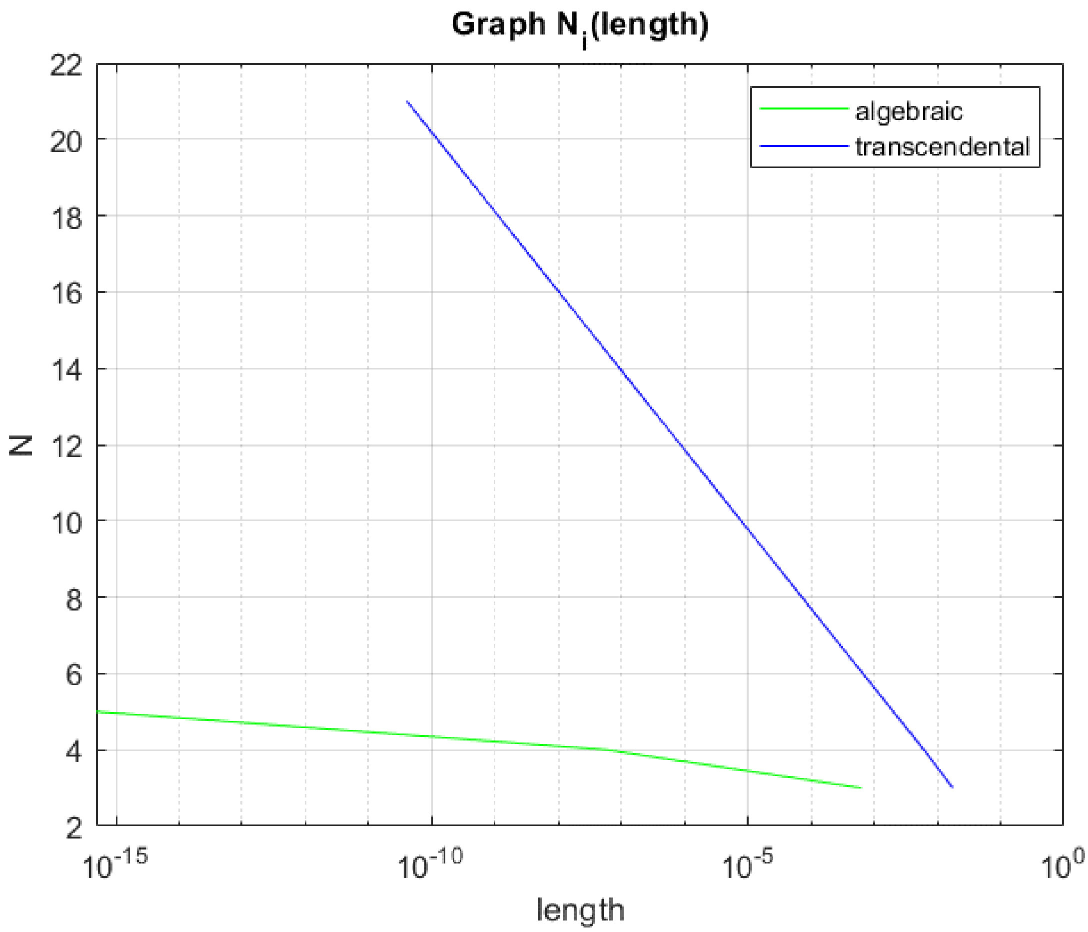
Graph N_i(length)

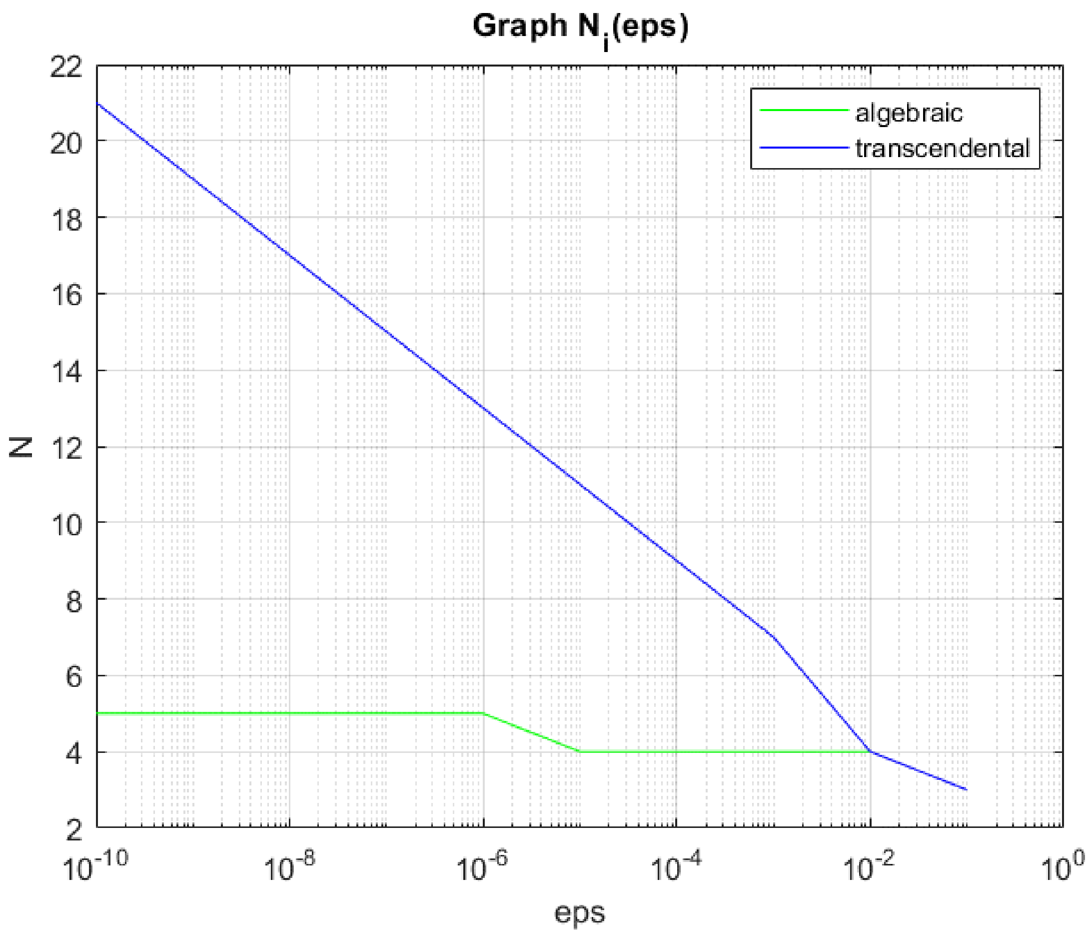


Graph N_i(eps)

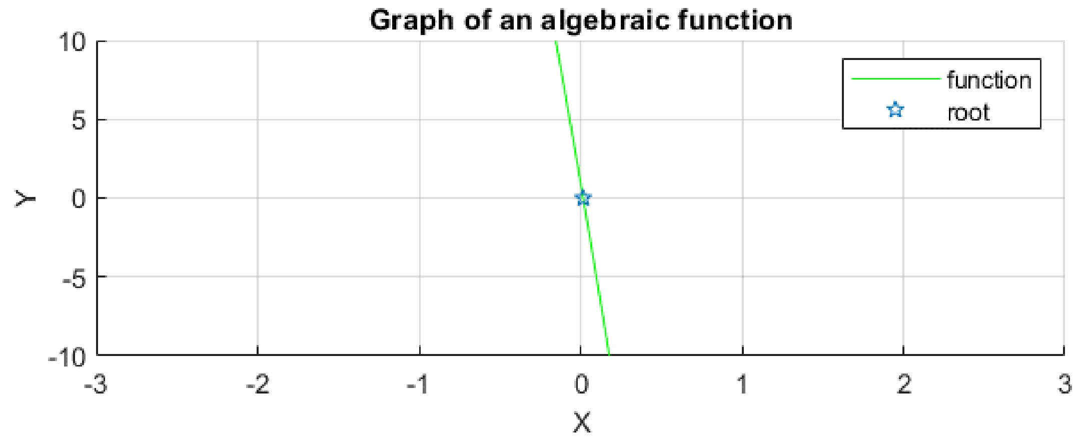



Graph of an algebraic function
Y
X
function
root
Graph of a transcendental function
Y
X
function
root

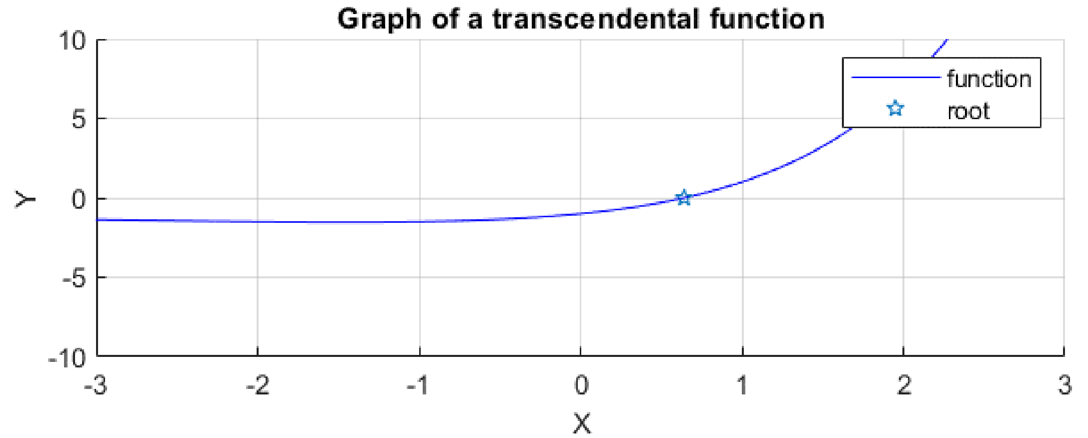

Graph N_i(length)
N
length
algebraic
transcendental



Graph N_i(eps)
algebraic
transcendental
N
eps
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}



Graph of an algebraic function
function
root
Y
X
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3



Graph of a transcendental function
function
root
Y
X
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3