

Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по лабораторной работе №2

Тема: "Решение СЛАУ прямыми методами"

Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр. **3630103/90002**

Д.А.Беркман

Преподаватель:

С.Б.Добрецова

Санкт-Петербург

2020

① Формулировка задачи и её формализация.

Решить* СЛАУ методами Матричного и прямых порядка. прямым методом
построить зависимости 1) $\|x - x_1\|$ от шага обусловленности

2) $\frac{\|x - x_1\|}{\|x\|}$ от $\frac{\|b - b_1\|}{\|b\|}$ при хорошем и плохом уровне обусловленности

(*) - найти вектор решения X для данной СЛАУ $AX=b$, где A - матрица с известным числом обусловленности ($\det \neq 0$)

② Алгоритм метода и условия его применимости.

Условие применимости: $\forall A_{n \times n}: \det A \neq 0$ (для любой невырожденной матрицы A)

Алгоритм метода:

а) Для $k = 1:n$

$$1) \quad b(k) = b(k) / A(k; k)$$

2) для $j = n-1:k$

2) für $j = n-1:k$
 $A(k,j) = A(k,j) / A(k,k)$

3) для $i=1:n$

3) для $i=1:n$
 если $i \neq k$
 $b(i) = b(i) - A(i, k) \cdot b(k)$

4) для $j = n-1:k$

4) для $j = n-1:k$
 для $i = 1:n$
 если $i \neq k$
 $A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) \cdot A(k,j)$

5) найти вектор-столбец X :

для $n = 1:n$
 $X(n) = b(n)$

③ Проверка условий применимости метода

Построение матриц: вводим ^{метод построения} матрицы из значений matlab:

A = gallery ('round' v d', m, cond)

Метод строит квадратную Матрицу A размера $n \times n$ с заданными условиями cond. (n и cond задаются вручную).

④ Тестовый пример

Решим СЛАУ с помощью метода Кронека:

$$\begin{cases} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 = 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 = 20 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 80 \cdot 40 \cdot 130 + (-20^3) + (-20^3) - ((-20 \cdot 40 \cdot -20) + (80 \cdot -20^2) + (130 \cdot -20^2)) = 300000 \neq 0 \Rightarrow \text{условие применимости выполняется}$$

После нормировки первой строки с помощью деления $A(1;1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -20 & 40 & -20 & 20 \\ -20 & -20 & 130 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{"II"} + \text{"I"}, \text{"III"} + \text{"I"}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 35 & -25 & 25 \\ 0 & -25 & 125 & 25 \end{array} \right)$$

Berechnen
(1) $\cdot (-20)$ u₂
(2) u₁ (3)

Корректируем второе уравнение элементом $A(2,2)$:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -25 & 125 & 25 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{вычитаем } (2) \cdot (-\frac{1}{4}) \text{ из } (1) \\ \text{и } (2) \cdot (-25) \text{ из } (3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{150}{7} & \frac{300}{7} \end{array} \right) \rightarrow$$

Корректируем третье уравнение элементом $A(3,3)$:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{вычитаем } (3) \cdot (-\frac{3}{4}) \text{ из } (1) \\ \text{и } (3) \cdot (-\frac{5}{7}) \text{ из } (2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{5} = 0,6 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{2}{5} = 0,4 \end{matrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

6) Контрольные тесты.

Для построения графика зависимости нормы разности точного и приближенного решений от числа обусловленности:

- 1) создаём столбец точного решения $X = \text{rand}(n, 1)$, где n - размер столбца и матрицы A
- 2) создаём матрицу A с числом обусловленности от 10 до 10^{15} (как бы "устраивая" строим график в логарифмических осях с помощью $\log \log$ к бесконечности)

Для построения графика зависимости относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части при фиксированном числе обусловленности:

- 1) создаём столбец точного решения $X = \text{rand}(n, 1)$ (см 1) и 2)
- 2) задаём хорошее число обусловленности $\text{cond} = 10$
- 3) создаём матрицу A с хорошим числом обусловленности cond
- 4) создаём возмущение правой части:

6.2! $\text{ewbcs} = \text{ewcs} + \theta \cdot i$, где θ - случайный столбец, ewcs - вычисленная правая часть для хорошего числа обусловленности, заполненный случайными $\in (0, 1)$.

и изменяется в диапазоне от $0,0001$ до $0,05$

- 1) (см 1) выше)
- 2) создаём плохое число обусловленности $\text{badCond} = 10^{15}$
- 3) создаём матрицу A с плохим числом обусловленности
- 4) (см 4) выше)

6.2! $\text{C}_{\text{ewbc}} = \text{C}_{\text{wbcs}} + \theta \cdot i$, где θ - случайный вектор, C_{wbcs} - вычисленная правая часть для матрицы с плохим числом обусловленности (см. выше).

7) Модульная структура программы

Функция $\text{bColumnCreation}(A, x)$ создает вектор-столбец b для точного значения x и матрицу A , которую задает:

Функция $\text{matrixCreation}(n, \text{cond})$ (создаёт невырожденную матрицу A и n с заданным числом обусловленности cond).

Функция $\text{Jordan}(A, b)$ вычисляет значение X .

Функция Graphics производит расчёты и строит графики зависимостей.

8) Численный анализ решения задачи

1p1 видно, что $\|x_1 - x\|$ почти линейно растёт с увеличением числа обусловленности матрицы. Но норма разности растёт медленнее, чем число обусловленности.

1p2 можно заметить, что зависимость относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части при хорошем числе обусловленности разорос тонок имеет линейный характер.

1p3 тогда как при плохом числе обусловленности разорос тонок довольно выше для.

9) Выводы

Рост числа обусловленности напрямую влияет на рост ошибок при решении СЛАУ прямыми методами, так как тогда $\det A \rightarrow 0 \Rightarrow$ решение применимости метода перестаёт выполняться.



