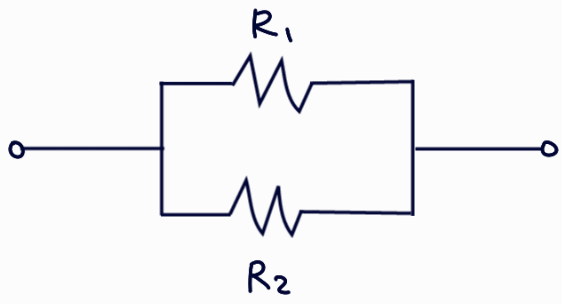
Alcune osservazioni:



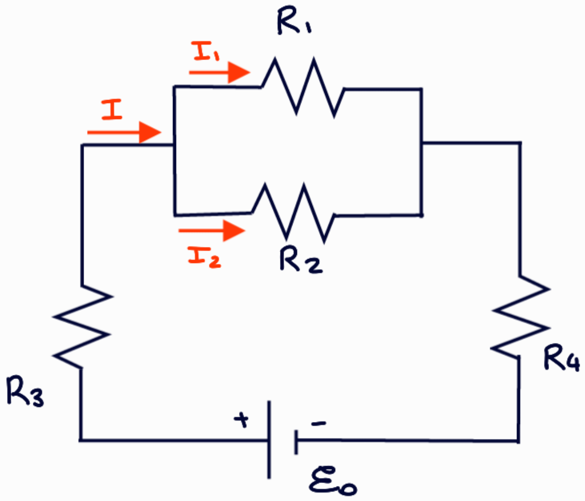
$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$\Longrightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Se $R_1 = R_2 \Longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{2} R_1$

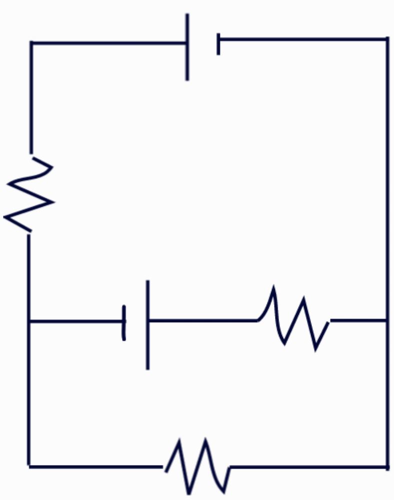
Prendiamo un circuito come quello visto nell'esempio della scorsa lezione:



$$\boxed{I_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I}$$

Allo stesso modo

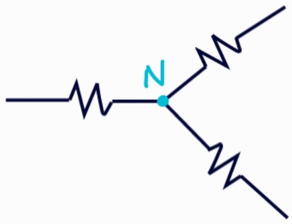
$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$



In questo caso non riusciamo a ricondurci ad un circuito elementare come visto sopra, quindi introduciamo le leggi di Kirchhoff.

LEGGI DI KIRCHHOFF

- Nodo: punto in cui confluiscono almeno 3 conduttori

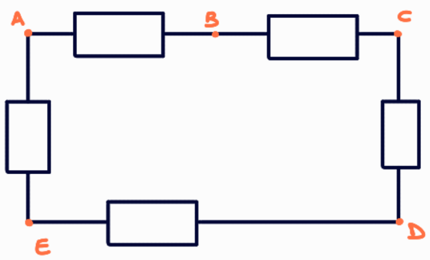


- Ramo: serie di conduttori collegati tra loro in cui attorno non ci sono nodi

- Maglia: insieme di rami che formano un percorso chiuso.

Legge di Kirchhoff delle maglie

La somma algebrica delle differenze di potenziale ai capi dei componenti che formano una maglia è zero.

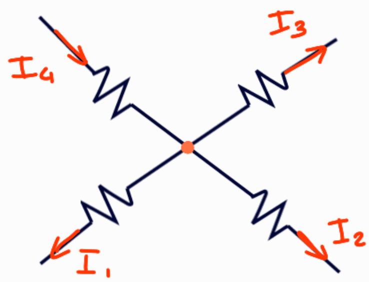


Rappresenta la conservazione dell'energia

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_A) = 0$$

Legge di Kirchhoff dei nodi

La somma algebrica delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti dal nodo.



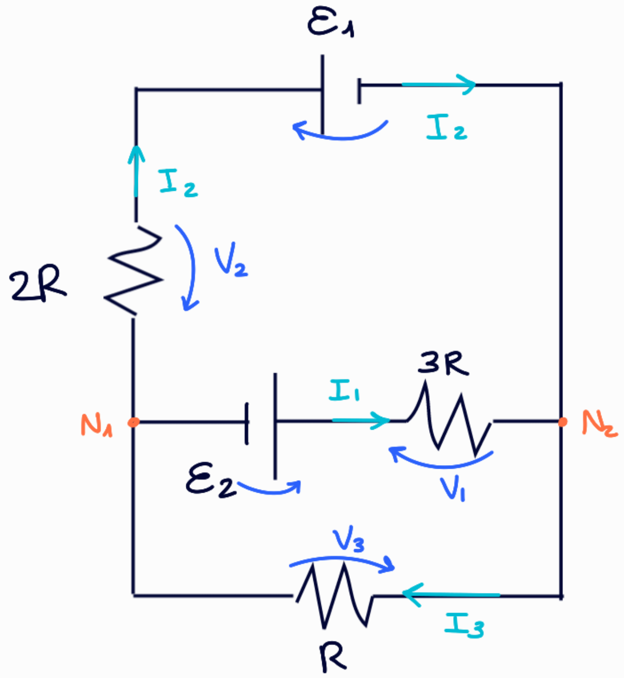
Rappresenta la conservazione della carica elettrica

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4$$

$$\Rightarrow \quad I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

Regola sul numero di maglie **indipendenti**: $M = R - (N - 1)$

Esempio



$\mathcal{E}_1 = 14\,V$

$\mathcal{E}_2 = 10\,V$

$R = 2\,\Omega$

$N = 2$
$R = 3 \rightarrow 3$ correnti

$M = 3 - (2-1) = 2$

$\Rightarrow$ scrivo 2 leggi di K. per le maglie e una per i nodi

L.K.N. al nodo N_1 :

$$I_2 + I_2 - I_3 = 0$$

L.K.M. :

- maglia superiore in senso orario: $V_1 - V_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0$

$$3R \cdot I_1 - 2R I_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0$$

- maglia inferiore in senso orario: $\mathcal{E}_2 - V_1 - V_3 = 0$

$$\mathcal{E}_2 - 3R I_1 - R I_3 = 0$$

mettendo le 3 leggi di K. a sistema:

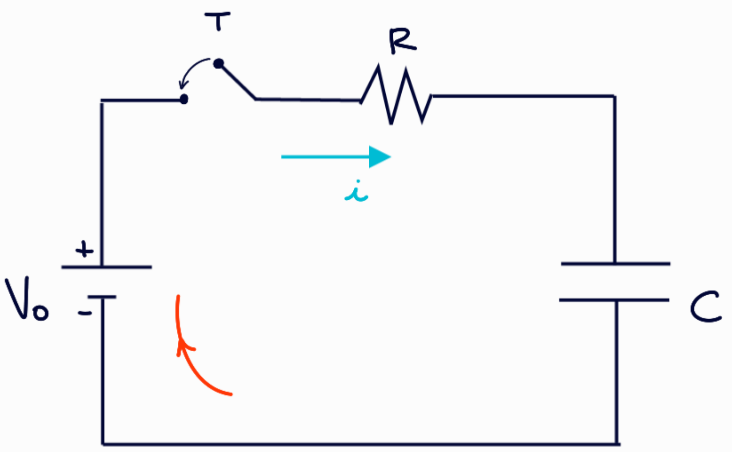
$$\begin{cases} I_2 + I_2 - I_3 = 0 \\ 3R \cdot I_1 - 2R I_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0 \\ \mathcal{E}_2 - 3R I_1 - R I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_3 = I_2 + I_1 \\ \rightarrow \\ \mathcal{E}_2 - 4R I_1 - R I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ 11RI_1 - 3\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 0 \\ RI_2 = \mathcal{E}_2 - 4RI_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rightarrow \\ RI_1 = \dfrac{3\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1}{11} \\ RI_2 = \mathcal{E}_2 - \dfrac{12\mathcal{E}_2 - 4\mathcal{E}_1}{11} = \dfrac{-\mathcal{E}_2 - 4\mathcal{E}_1}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_1 = \dfrac{3\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1}{11R} \\ I_2 = \dfrac{-\mathcal{E}_2 - 4\mathcal{E}_1}{11R} \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 2\,A \\ I_2 = -3\,A \\ I_3 = -1\,A \end{cases}$$

CARICA DI UN CONDENSATORE

Prendiamo un condensatore C inizialmente scarico.
A un certo istante t=0, chiudendo l'interruttore T, si genera una fem V_0 e inizia a circolare corrente.



$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\underbrace{V_c}_{\text{dd.p ai capi di C}}}$$

Siccome la corrente non può avere valori infiniti ed è legata alla carica del condensatore, questo vuol dire che è pari alla derivata della carica e quindi la orrende, così come la carica e quindi il potenziale, varia con continuità (è rappresentata da una funzione continua).

$$i = i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad Q = Q(t)$$

$$\Rightarrow \quad V_c = V_c(t)$$

funzioni continue

Applico la legge di Kirchhoff alla maglia: $\boxed{V_0 - Ri - V_c = 0}$

Sfruttiamo il fatto che $i = \frac{dQ}{dt}$, $V_c = \frac{Q}{C}$
e deriviamo:

$$\frac{d}{dt}\left(V_0 - Ri - V_c\right) = 0$$

$$-R\frac{di}{dt} - \frac{dV_c}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad -R\frac{di}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{C}\right) = 0$$

C e' costante

$$-R\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\cdot\underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=i} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -R\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\cdot i = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{-\frac{di}{dt} - \frac{1}{RC}\cdot i = 0}$$

eq. differenziale

Dal punto di vista dimensionale, RC è un tempo:

$$\Omega \cdot F = \frac{V}{A}\cdot\frac{C}{V} = \frac{\cancel{V}}{A}\cdot\frac{As}{V} = s$$

$$\boxed{i(t) = \underbrace{i_0}_{} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$$

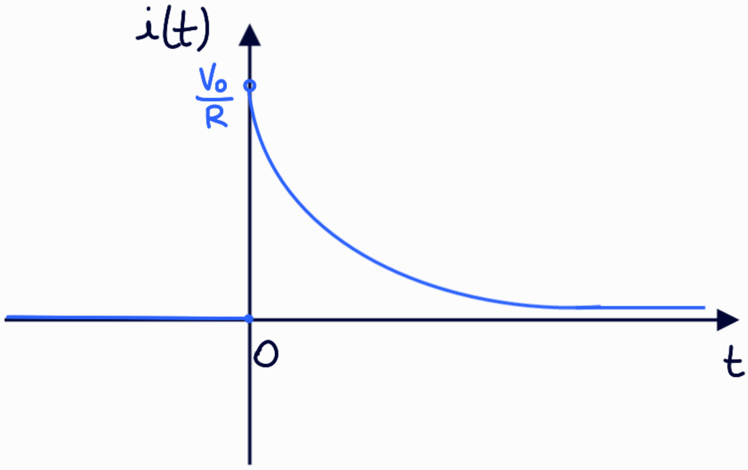
è una costante che si determina osservando l'istante appena chiuso l'interruttore

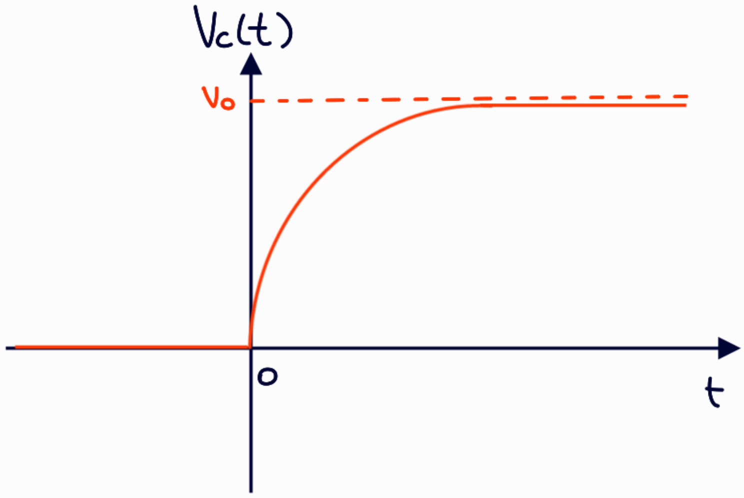
- per $t=0$: $i(t=0) = \frac{V_0}{R} = i_0$

$$\begin{cases} i(t) = 0 & \text{per } i<0 \\ i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC} & \text{per } i>0 \end{cases}$$

- $V_c = V_0 - Ri = V_0 - R\frac{V_0}{R}e^{-t/RC} = V_0\left(1-e^{-t/RC}\right)$

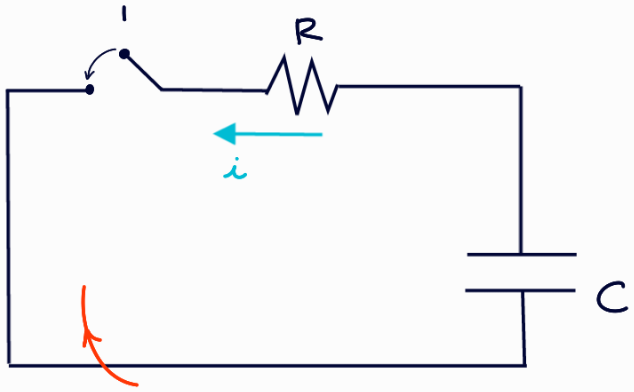
$$\rightarrow \quad V_0 = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ V_0\left(1-e^{-t/RC}\right) & \text{per } t>0 \end{cases}$$





SCARICA DI UN CONDENSATORE

Prendiamo un condensatore C inizialmente carico.
All'istante t=0 chiudiamo l'interruttore.



$$Q_0 = C V_0$$

Applico la legge di Kirchhoff per le maglie: $\boxed{+iR - V_c = 0}$

con $i = i(t)$ e $V_c = V_c(t)$

$$i = -\frac{dQ}{dt} \quad , \quad V_c = \frac{Q}{C}$$

derivando : $\frac{d}{dt}\left(iR - V_c\right) = 0 \implies R\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0$

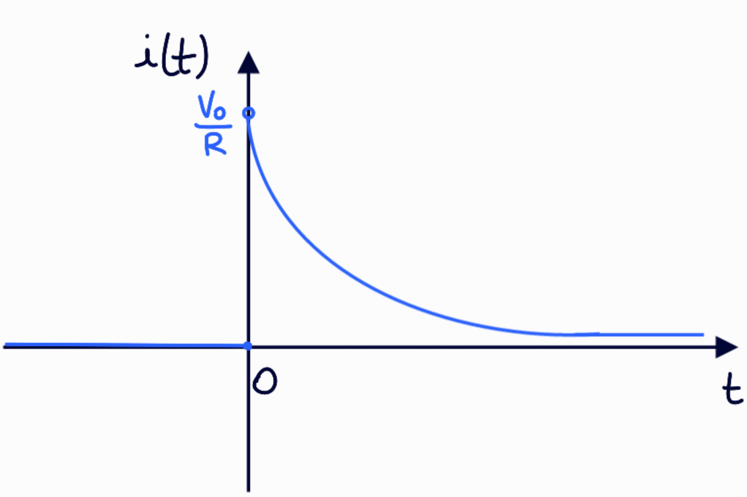
$$\rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}\, i = 0 \implies i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

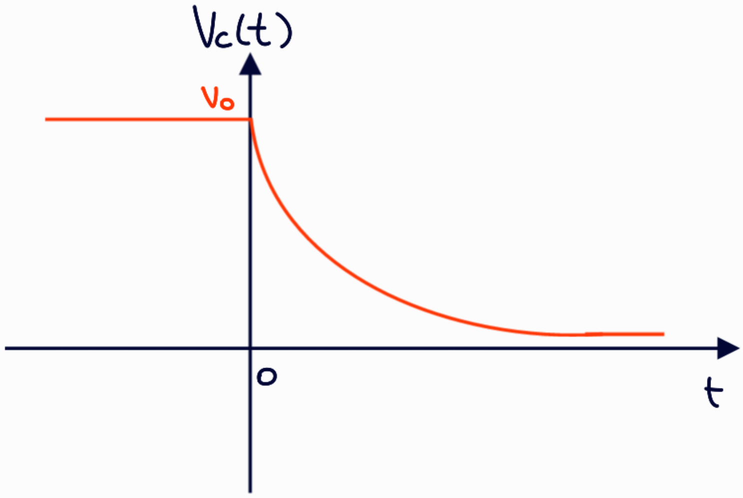
- per $t=0$: $i(t=0) = i_0 = \frac{V_0}{R}$

$$\rightarrow \quad i(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

- $V_c = iR = \frac{V_0}{R} \cdot R e^{-t/RC}$

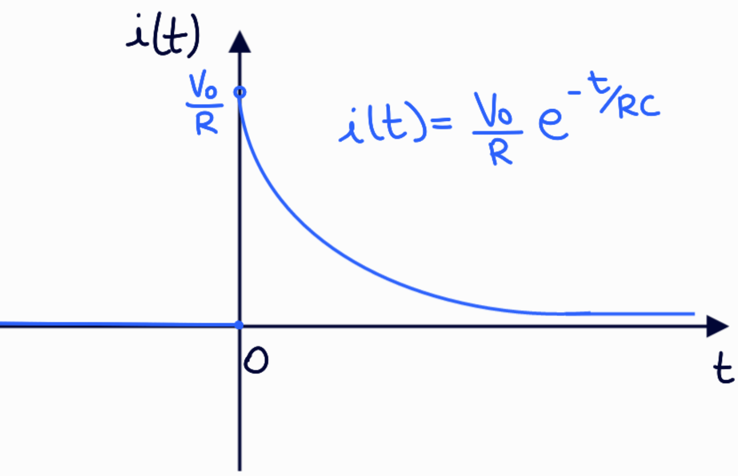
$$\implies \quad V_c(t) = \begin{cases} V_0 & \text{per } t<0 \\ V_0 e^{-\frac{t}{RC}} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

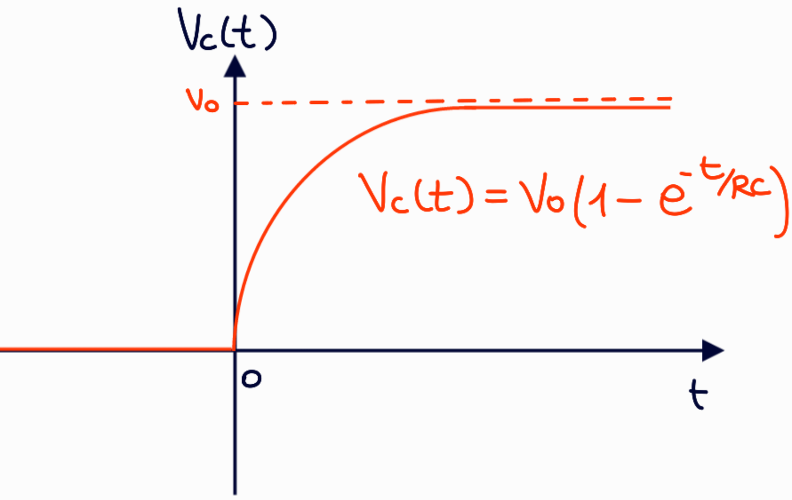




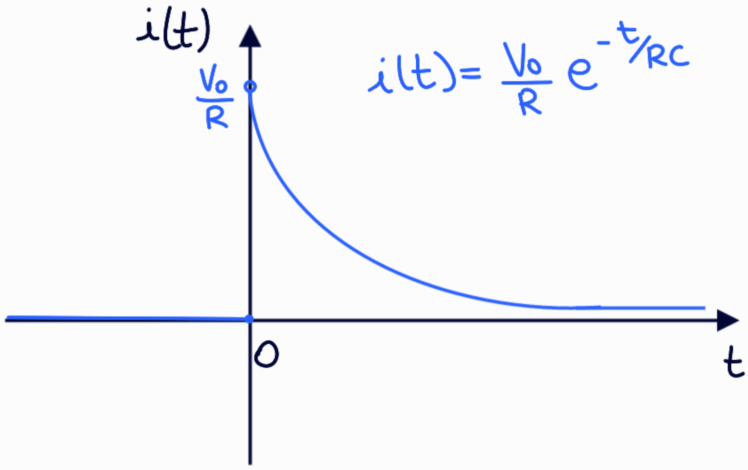
Confrontiamo i grafici ottenuti per carica e scarica:

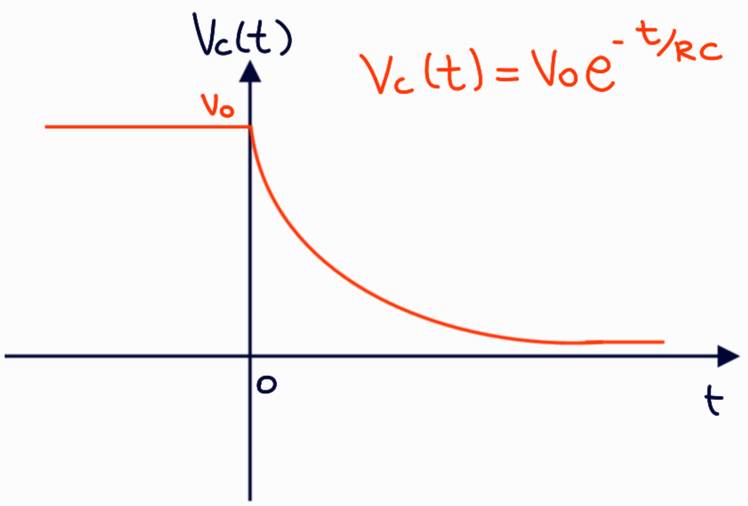
Carica





Scarica





Dai grafici deduciamo che:

- $\boxed{t<0}$ appena prima di chiudere l'interruttore

$$i=0 \qquad V_c = \begin{cases} 0 & (\text{c scarico}) \\ V_0 & (\text{c carico}) \end{cases}$$

- $\boxed{t=0^+}$ subito dopo aver chiuso l'interruttore

$$i = \frac{V_0}{R} \qquad V_c = \begin{cases} 0 & (\text{c scarico}) \\ V_0 & (\text{c carico}) \end{cases}$$

Se era scarico, il conduttore si comporta come un **corto circuito**.
Se era carico si comporta come una fem.

- $\boxed{t\to+\infty}$ dopo molto tempo dalla chiusura dell'interruttore

$$i=0 \qquad V_c = \begin{cases} V_0 \\ 0 \end{cases}$$

Non passa corrente quindi si comporta come un **circuito aperto**.