Sommario

$$\mathbb{P}(A) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

Proprietà della $\mathbb{P}$

- $Se\ \ A \subseteq B\ \ \rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leq\ \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) =\ \mathbb{P}(A) +\ \mathbb{P}(B) -\ \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) < P(A) + \mathbb{P}(B)$

Probabilità condizionata

$$\forall\ A \subseteq \Omega \qquad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \rightarrow \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$$

$$\mathbb{P}(A \cup C\ |B) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B) \quad con\ A \cap C = \emptyset$$

Regola della moltiplicazione:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n\ |\ A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) * \dots * \mathbb{P}(A_2\ |\ A_1) * \mathbb{P}(A_1)$$

Formula delle $\mathbb{P}$ totali

$$Data\ \ (A_i)_{i=1}^{n}\ \ partizione\ di\ \Omega \qquad\qquad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) * \mathbb{P}(A_i)$$

Teorema di Bayes

$$\mathbb{P}(A\ |\ B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) * \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Indipendenza

A e B indipendenti se:

- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Indipendenza di collezioni di eventi

$(A_i)_{i=1}^{n}$ $\;$ *indipendenti a due a due se ogni coppia* è *indipendente*

$$(A_i)_{i=1}^{n} \quad \textit{indipendenti (mutuamente) se} \;\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i)$$

$$\textit{indipendenza} \quad \Rightarrow \quad \textit{indipendenza a due a due}$$

$$\textit{indipendenza a due a due} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \textit{indipendenza}$$

Variabile aleatoria: funzione a valori reali dell'esito dell'esperimento.

A seconda della natura dell'immagine, la variabile è discreta o continua.

PMF - probability mass function

$p_X \ : \quad Im(X) \to \mathbb{R} \quad t.c. \ \ k \ \to \ \mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\})$

Le controimmagini di X partizionano Ω

V.A. Bernoulli

Considero un esito probabilistico con esito dicotomico (successo/fallimento).

$$X \sim Bernoulli(p)$$

PMF: $p_X(0) = 1 - p$

$p_X(1) = p$

V.A. binomiale

Ripeto n volte delle prove bernoulliane in maniera indipendente e identica e conto quanti successi ottengo.

$$X \sim Binomiale(n, p)$$

PMF: $\mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

R:

- probabilità di avere esattamente x successi su n prove con probabilità del singolo evento p: **`dbinom(x,n,p)`**
- probabilità di fare ≤ x successi su n prove: **`pbinom(x,n,p)`**
- probabilità di fare > x successi su n prove: 1 - **`pbinom(x,n,p)`**

V.A. geometrica

Ripeto n prove bernoulliane fino a che ottengo il primo successo e conto quante prove ho fatto.

$$X \sim Geometrica(p)$$

PMF: $\mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = (1 - p)^{k-1} * p$

R:

- probabilità che l'x-esimo tentativo sia il primo successo: `dgeom(x-1,p)`
- probabilità di ottenere un successo in ≤ x tentativi: `pgeom(x-1,p)`
- probabilità di ottenere un successo in > x tentativi: 1 - `pgeom(x-1,p)`

V.A. di Poisson

Conta il numero di eventi di interesse che occorrono in una certa/fissata finestra di osservazione.

Si tratta di eventi rari, che non mi aspetto accadano di frequente.

$$X \sim Poisson(\lambda) \qquad \lambda > 0$$

PMF: $\mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$

R: sapendo che il tasso medio di successi è λ

- probabilità di avere esattamente x successi: `dpois(x, λ)`
- probabilità di avere ≤ x successi: `ppois(x, λ)`
- probabilità di avere > x successi: 1 - `ppois(x-1, λ)`

V.A. ipergeometrica

Effettuiamo estrazioni senza reimbussolamento da una scatola composta da C elementi dotati di una caratteristica di interesse e N-C elementi senza tale caratteristica.

X conta il numero di successi per n estrazioni.

PMF: $\mathbb{P}(X = k) = p_X(k) = \frac{\binom{C}{k}\binom{N-C}{N-k}}{\binom{N}{n}}$

R: su n estrazioni da una scatola di c palline bianche e *m* nere

- probabilità di estrarre esattamente x palline bianche: `dhyper(x,c,m,n)`
- probabilità di estrarre ≤ x palline bianche: `phyper(x,c,m,n)`
- probabilità di estrarre > x palline bianche: 1 - `phyper(x,c,m,n)`

Media, varianza e momenti di v.a. discrete

Media / valor medio / valore atteso / attesa:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in Im(X)} k * p_X(k)$$

Varianza: $Var(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$

Deviazione Standard: $StDev(X) = \sqrt{Var(X)}$

Momento di ordine k: $m_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$

Proprietà:

- $\mathbb{E}(aX + bY) = a * \mathbb{E}(X) + b * \mathbb{E}(Y)$
- $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- $Var(aX + b) = a^2 * Var(X)$

Media e varianza di v.a. discrete note:

$X \sim Bernoulli(p)$	$\mathbb{E}(X) = p$	$Var(X) = p * (1-p)$
$X \sim Binomiale(n, p)$	$\mathbb{E}(X) = n * p$	$Var(X) = n * p * (1-p)$
$X \sim Geometrica(p)$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$
$X \sim Poisson(p)$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$Var(X) = \lambda$

PMF congiunta

La PMF congiunta delle v.a. X e Y è la seguente funzione:

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Se ho la PMF congiunta posso calcolare le marginali.

Indipendenza di v.a. discrete

X e Y sono indioendenti se $\forall x \in Im(X) \;\; e \;\; \forall y \in Im(Y)$

$$gli\ eventi \quad \{X = x\} \;\; e \;\; \{Y = y\} \quad sono\ indipendenti$$

Deve valere che, $\forall x \in Im(X) \;\; e \;\; \forall y \in Im(Y) \qquad p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) * p_Y(y)$

Ovvero: se X e Y sono indipendenti, la PMF congiunta è il prodotto delle marginali.

Se X e Y sono indipendenti: $\mathbb{E}(X * Y) = \mathbb{E}(X) * \mathbb{E}(Y)$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Variabili Aleatorie continue

Hanno Immagine infinita e non numerabile.

PDF – probability density function

Data X v.a. continua $f_X\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t.c. \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int f_X(t)dt$

La densità non indica direttamente la probabilità.

Nelle v.a. continue, $<$ $e \leq$ si equivalgono.

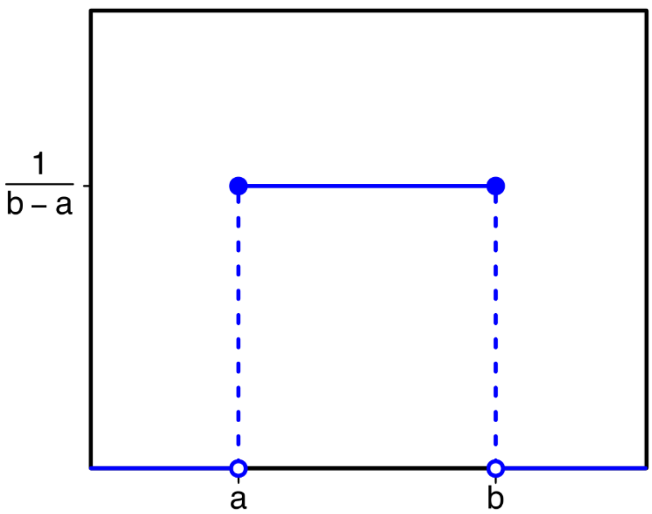
$X \sim Uniforme\ su\ [a, b]$

PDF: $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

I valori tra *a* e *b* sono equipossibili.

R:

- probabilità di trovare x nell'intervallo [a,b]: **`dunif(x,a,b)`**
- probabilità di trovare valori ≤ x in [a,b]: **`punif(x,a,b)`**
- probabilità di trovare > x in [a,b]: 1 - **`punif(x,c,m,n)`**



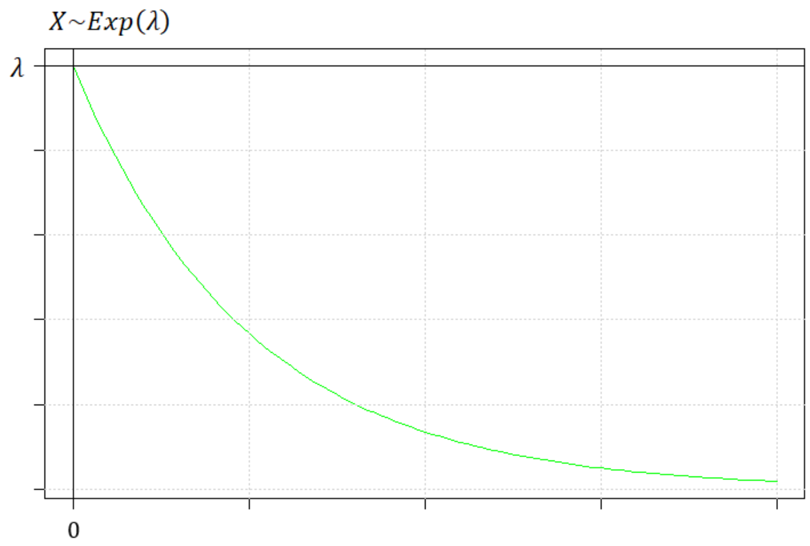
$X \sim Esponenziale(\lambda)$

PDF: $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

X assume solo valori ≥ 0 con $\mathbb{P}$ non nulla. È usata per rappresentare tempi di vita.

R: avendo $\lambda = \frac{1}{media}$

- percentuale di elementi ≤ x: `pexp(x, λ)`
- percentuale di elementi > x: 1 - `pexp(x, λ)`
- percentuale di elementi tra x e y: `pexp(y,λ) − pexp(x, λ)`



$X \sim Normale(\mu, \sigma^2)$

PDF: $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Rappresenta la gaussiana.

R: avendo media **`mean`** e deviazione standard **`sd`**

- valore della distribuzione normale in x: **`dnorm(x,mean,sd)`**
- percentuale di elementi ≤ x: **`pnorm(x,mean,sd)`**
- percentuale di elementi > x: 1 - **`pnorm(x,mean,sd)`**
- percentuale di elementi tra x e y: **`pnorm(y,mean,sd) - pnorm(x,mean,sd)`**