MODELLO PROBABILISTICO

- è l'aspetto matematico che fornisce la rappresentazione astratta dell'esperimento probabilistico.

- è composto di tre oggetti:

1) Ω SPAZIO CAMPIONARIO = insieme che contiene tutti i possibili ESITI ELEMENTARI dell'esperimento probabilistico.

2) $\mathbb{P}$ LEGGE DI PROBABILITÀ $\longrightarrow$ è una funzione

$$\mathbb{P} : \wp(\Omega) \to \mathbb{R}$$

insieme delle parti di Ω

$\mathbb{P}$ per essere PROBABILITÀ deve avere le seguenti proprietà:

1) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \Omega$ POSITIVITÀ

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ è FINITA

3) se $A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B = \emptyset$

$\rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ ADDITIVITÀ

ESEMPI DI MODELLI PROBABILISTICI

① Lancio una moneta equa (= esperimento probabilistico)

etichetta che rappresenta "lancio la moneta ed esce testa"

SPAZIO CAMPIONARIO: $\Omega = \{T, C\}$

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \Omega\}$

Specificare $\mathbb{P}$ vuol dire specificare: $\mathbb{P}(\emptyset)$, $\mathbb{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(T)$, $\mathbb{P}(C)$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ $\qquad$ per l'ADDITIVITÀ
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ $\quad \to$ lo deduciamo: $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset)$

<u>Oss</u>: $\underbrace{\Omega \cap \emptyset = \emptyset}_{\text{voglio l'ADDITIVITÀ}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \underbrace{\mathbb{P}(\emptyset)}_{\geq 0} \quad \text{POSITIVITÀ}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- cerchiamo $\mathbb{P}(\{T\})$ e $\mathbb{P}(\{C\})$

LA MONETA È EQUA $\Rightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = \mathbb{P}(\{C\})$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{T\} \cup \{C\}) = \mathbb{P}(\{T\}) + \mathbb{P}(\{C\})$$

$\{T\} \cap \{C\} = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2 \\ \mathbb{P}(\{C\}) = 1/2 \end{array} \right.$$

② LANCIO UN DADO EQUO A n FACCE

$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

Quanti sono i sottoinsiemi di taglia k estratti da $\mathcal{P}(\Omega)$? $\binom{n}{k}$

$\mathbb{P}$? $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

IL DADO E' EQUO $\Rightarrow$ i "singoletti" devono avere le stesse probabilità

$$\Rightarrow \quad 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\underbrace{\{1\} \cup \{2\} \cup \_\_ \cup \{n\}}_{\{i\} \cap \{j\} = \emptyset \quad i \neq j}) \overset{\text{ADDITIVITÀ}}{=} \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \_\_ + \mathbb{P}(\{n\})$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{n}$$ — numero facce dado $= |\Omega|$

$$\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{n}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n}$$

- Procedo con i sottoinsiemi di cardinalità 2 : $\{i, j\}$ $i \neq j$

$$\mathbb{P}(\{i, j\}) = \mathbb{P}(\{i\} \cup \{j\}) \overset{\text{ADDITIVITÀ}}{=} \mathbb{P}(\{i\}) + \mathbb{P}(\{j\}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

- $$\mathbb{P}(\{i, j, k\}) = \mathbb{P}(\{i\} \cup \{j\} \cup \{k\}) = \mathbb{P}(\{i\}) + \mathbb{P}(\{j\}) + \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n}$$

e così via

In generale : $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}}$$

UNIFORME DISCRETA

③ LANCIO 3 VOLTE UNA MONETA EQUA

$$\Omega = \{TTT, CCC, TCC, CTC, CCT, TTC, TCT, CTT\}$$

$$|\Omega| = 2^{3} = 8$$

n° posizioni

n° simboli

$\mathbb{P}$: partiamo da $\mathbb{P}$ sui singoletti $\rightarrow$ $\mathbb{P}(\{TTT\}) = ?$

LA MONETA E' EQUA $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(\{TTT\}) = \mathbb{P}(\{CCC\}) = \mathbb{P}(\{TCC\}) = \_\_$

e' uguale a lanciare un dado a 8 facce

$\Rightarrow$ uso la $\mathbb{P}$ UNIFORME DISCRETA !

$\mathbb{P}(\{TTT\}) = 1/8$

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

A : "il primo lancio e' T" $\quad A = \{TTT, TCC, TTC, TCT\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

B : "ottengo 2 teste" $\quad B = \{TTC, TCT, CTT\}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{8}$

C : "ottengo ALMENO 2 Teste" $\quad C = \{TTT, TTC, TCT, CTT\}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

D : "ottengo piu' di 2 teste" $\quad D = \{TTT\}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{1}{8}$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{P}$ DEDOTTE DAGLI ASSIOMI

Proposizione

Se A, B, C sono sottoinsiemi di Ω:

a) Se $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ MONOTONIA

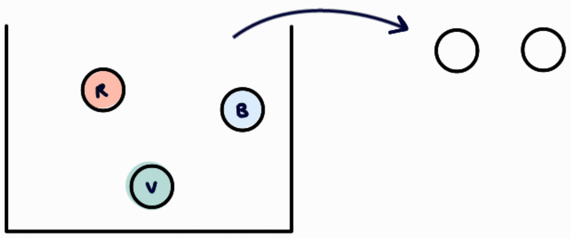
b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ SUBADDITIVITÀ

d) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

ESERCIZI

1. Una scatola contiene 3 biglie: una rossa, una verde e una blu.
Considero il seguente esperimento: estraggo una biglia, la reimbussolo e ne estraggo una seconda.
Scrivere un possibile modello probabilistico e calcolare la probabilità che le due biglie estratte siano uguali.



$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2),\ \omega_i \in \{R, V, B\}\}$

$\#\Omega = 3^2 = 9$

$\Omega = \{(R,V), (R,B), (R,R), \_\_\_\_\}$

$\mathbb{P}$: posso usare la $\mathbb{P}$ discreta? Ω finito? SI; EQUIPROBABILITÀ? SI $\Rightarrow$ SI

A: "le due biglie estratte sono uguali"

$A = \{(V,V), (B,B), (R,R)\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

2

Un dado a 4 facce equo viene lanciato ripetutamente fino a che esce un numero pari. Scrivere lo spazio campionario questo esperimento.
Quanti sono gli esiti possibili?
Posso usare la legge uniforme discreta?

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ con $N = 1, 2, 3, \dots$

tali che ω_N è PARI e $\omega_1, \omega_2, \omega_{N-1}$ sono DISPARI,

$\omega_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\}$

- $\#\Omega = \infty$
- NON POSSO USARE LA LEGGE UNIFORME DISCRETA perché Ω NON È FINITO!