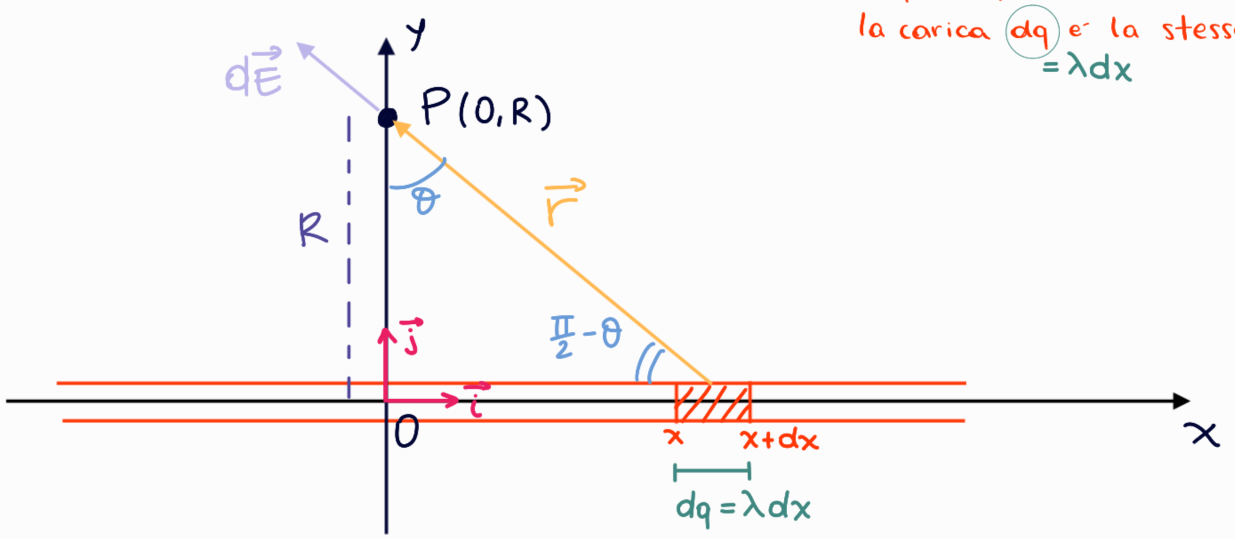
Distribuzione lineare e uniforme di carica elettrica

Premessa: siamo nel vuoto

Ci troviamo di fronte una distribuzione continua (lunghezza infinita) λ di carica elettrica

in qualunque tratto infinitesimo dx la carica dq è la stessa $= \lambda dx$



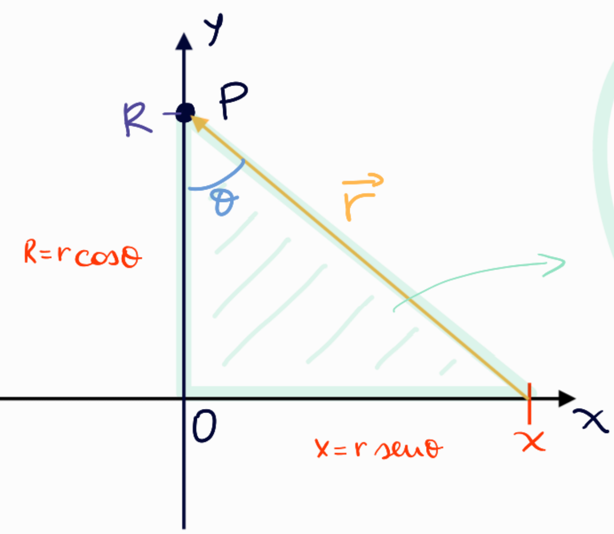
$$d\vec{E} = k_e \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot (-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j})$$

Ma voglio il campo totale, quindi integro:

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} k_e \frac{\lambda dx}{r^2} (-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j})$$

ci serve integrare in $d\theta$

perché ho lunghezza infinita



Notiamo che è un triangolo rettangolo di cateti R e x e ipotenusa r: $\tan\theta = \frac{x}{R}$

$$\Rightarrow x = R\tan\theta$$

$$dx = \frac{R}{\cos^2\theta} \cdot d\theta$$

Ora l'integrazione si riduce tra i valori $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (dove $\cos\theta > 0$)

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Ke \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \overbrace{\frac{R}{\cos^2\theta} d\theta}^{dx=} \vec{j} =$$

$R = r\cos\theta \Rightarrow r^2\cos^2\theta = R^2$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Ke \frac{\lambda}{R^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{R} \cos\theta \, d\theta \, \vec{j}$$

$$= Ke \frac{\lambda}{R} \underbrace{\left[\operatorname{sen}\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = 1+1 = 2} \vec{j}$$

$$\boxed{= 2Ke \frac{\lambda}{R} \vec{j}}$$

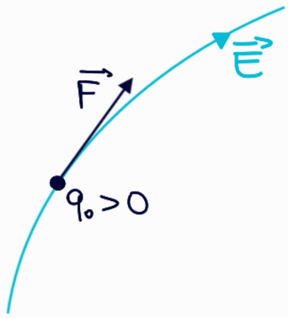
$\vec{E}$ è diretto radialmente

le linee di campo vanno in tutte le direzioni (come raggi)

Legge di Gauss per $\vec{E}$

- Rappresentazione di $\vec{E}$ con linee di forza

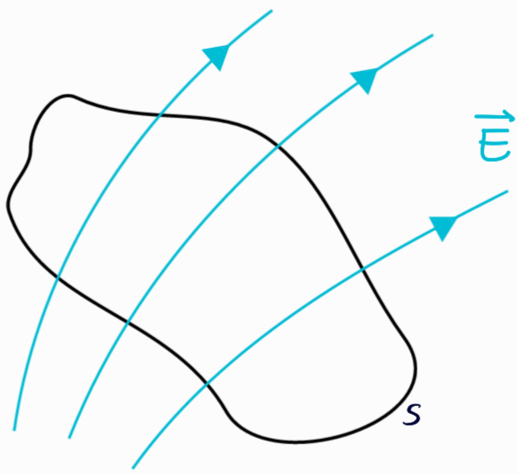
2 proprietà fondamentali:

1) 

Il campo elettrico è sempre tangente alla linea di forza in ogni suo punto

2) La densità delle linee di forza è direttamente proporzionale all'intensità del campo elettrico.

- Linee di forza attraverso una superficie chiusa

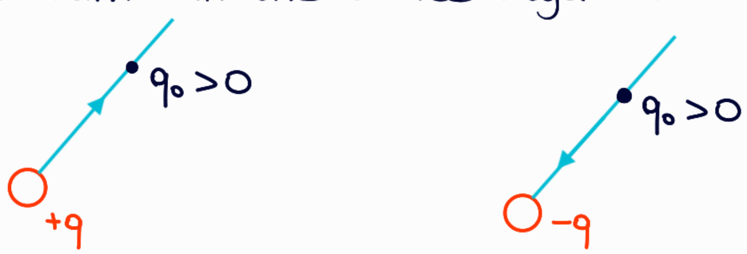


Si considerano:

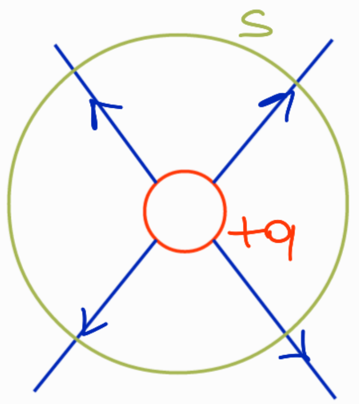
"+" quando sono uscenti da S

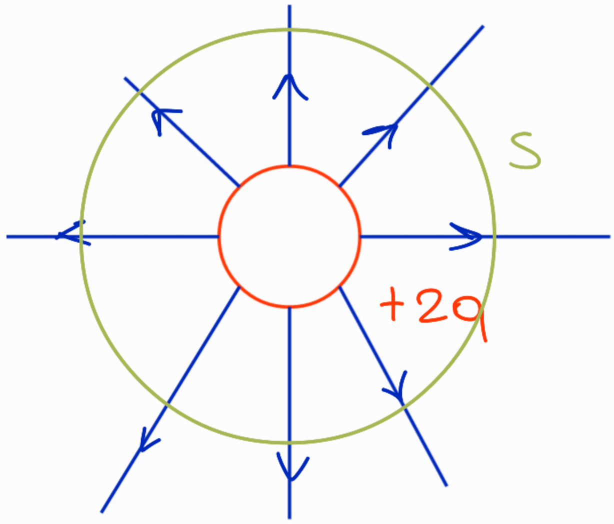
"−" quando sono entranti

Le linee di forza sono sempre uscenti da una carica positiva e entranti in una carica negativa



Alcuni casi:

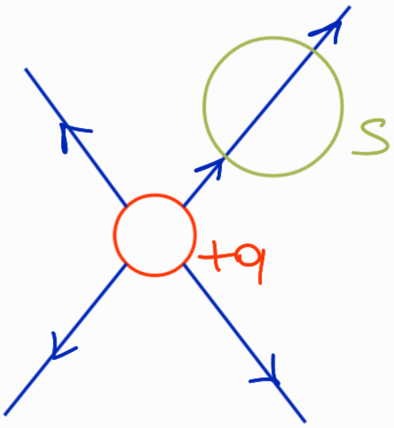




Notiamo che, maggiore è la carica all'interno di S, maggiore sarà la densità delle linee di forza.

$\Rightarrow$ # linee di $\vec{E}$ attraverso S (superficie CHIUSA) $\propto$ $\underbrace{Q_{int}}_{\text{CARICA INTERNA A } S}$

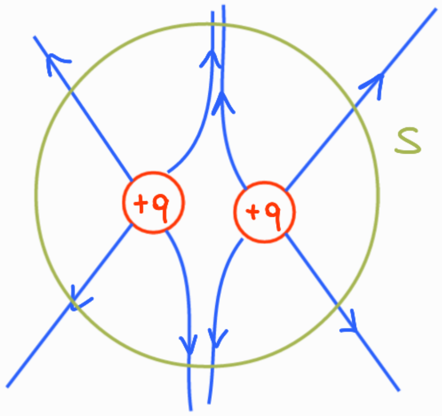
Infatti, se la carica si trova fuori da S:



linee uscenti = # linee entranti

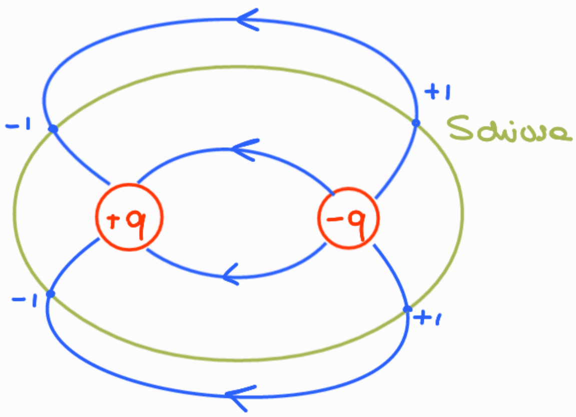
e in totale $\#$ linee di $\vec{E}$ attraverso $S = 0$

Cosa succede se abbiamo più cariche?



in questo caso ho solo linee uscenti $\Rightarrow$ 8 linee di campo attraverso S

Se invece prendo un dipolo elettrico:



$\#$ linee entranti $=$ $\#$ linee uscenti

$\Rightarrow$ $\#$ linee attraverso S $= 0$

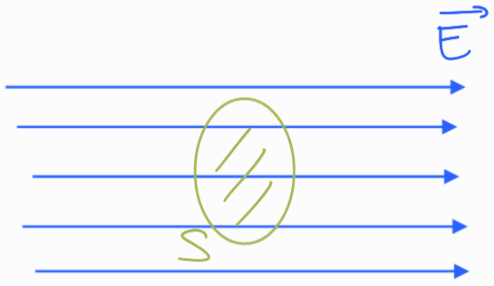
Vediamo quindi di nuovo che:

$$\#\text{ linee di } \vec{E} \text{ attraverso } S \text{ (superficie CHIUSA)} \propto \sum_k Q_{k\ int}$$

Il numero di linee per unità di superficie è dato dal FLUSSO

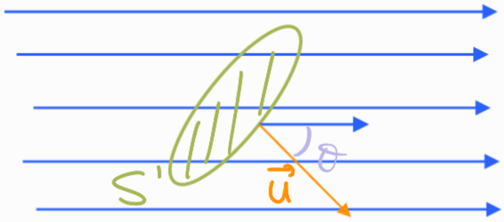
Flusso del campo elettrico

Prendiamo una superficie perpendicolare al flusso di $\vec{E}$



Allora flusso $= E \cdot S$

Ma se S non è $\perp$ $\vec{E}$, la formula sopra non basta.



Ora flusso $= E \cdot S' \cdot \cos\theta$

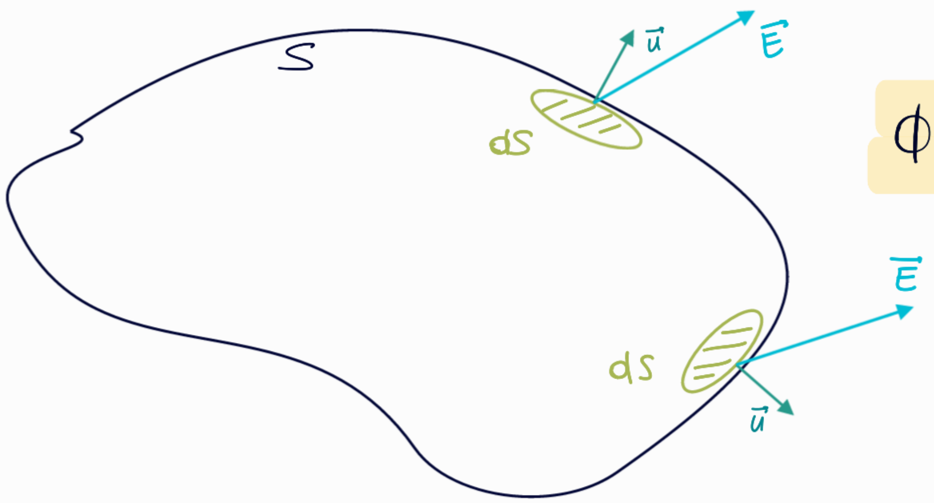
più incliniamo la superficie, più $\cos\theta$ è piccolo

(nel primo caso avevamo $\vec{E} \perp \vec{u} \Rightarrow \cos\theta = 1$)

In definitiva, possiamo definire il flusso come $\vec{E} \cdot \vec{u} \cdot S$

PROD. SCALARE

Se ora prendo una superficie irregolare, posso calcolare il flusso dividendola in tante superfici infinitesime



$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{u} \, dS$$

Legge di Gauss per $\vec{E}$

Abbiamo detto che:

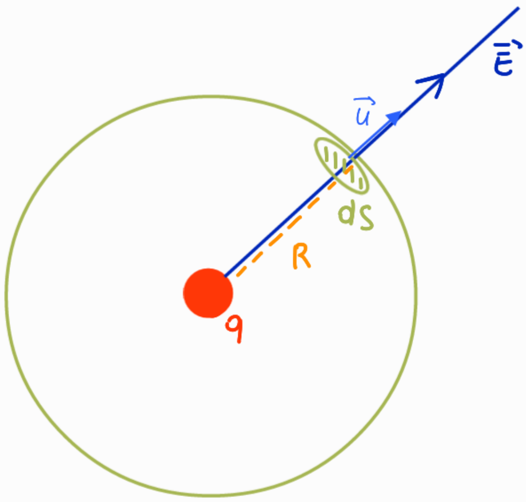
1) $\Phi_{\vec{E}}(S_{infinitesimo}) = \sum_k Q_{k\,int}$

2) $\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{u}\, dS$

Dimostriamo che

$$\Phi_{\vec{E}}(S_{chiusa}) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{u}\, dS = ?\cdot \sum_k Q_{k\,int}$$

Prendiamo una superficie sferica S con al centro una carica q



$\vec{E}/\!/\vec{u}$

$\vec{u}$ versore

$$\vec{E}\cdot\vec{u} = E\cdot 1\cdot \cos 0 = E = k_e\cdot\frac{q}{R^2}$$

costanti

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{u}\, ds = \int_S \left(k_e\frac{q}{R^2}\right) ds = k_e\frac{q}{R^2}\underbrace{\int_S ds}_{\text{area della sfera } = 4\pi R^2}$$

$$= k_e\frac{q}{\cancel{R^2}}\cdot 4\pi\cancel{R^2} = 4\pi k_e \underbrace{q}_{=\sum_k Q_{k\,int}}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{u}\, dS = 4\pi k_e \sum_k Q_{k\,int}$$

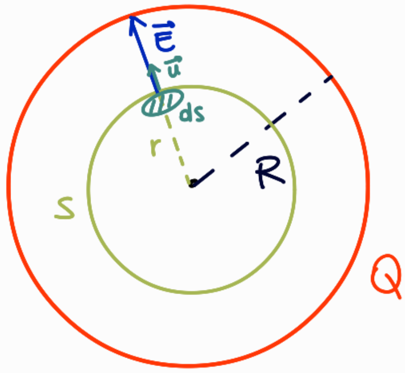
Uso della legge di Gauss per calcolare $\vec{E}$

$$\boxed{\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot\vec{u}\, dS = 4\pi k_e \sum_k Q_{k\,int}}$$

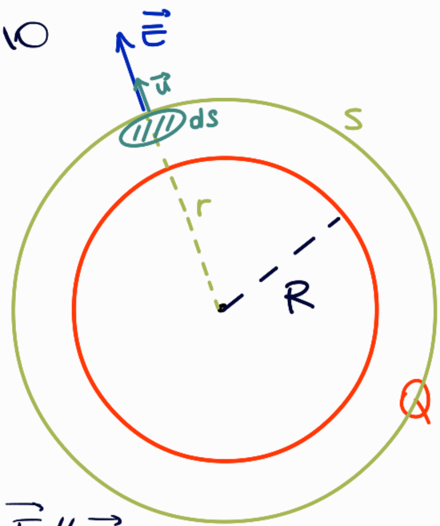
SIMMETRIA SFERICA : Guscio sferico

Distinguiamo due casi:

I) LA SFERA STA FUORI DAL GUSCIO
($r < R$)



II) LA SFERA STA DENTRO IL GUSCIO
($r > R$)



In entrambi i casi
$\vec{E}\cdot\vec{u}\, ds = E\, ds$ perché $\vec{E} \parallel \vec{u}$

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S E\, ds = E \int_S ds = E \cdot 4\pi r^2$$

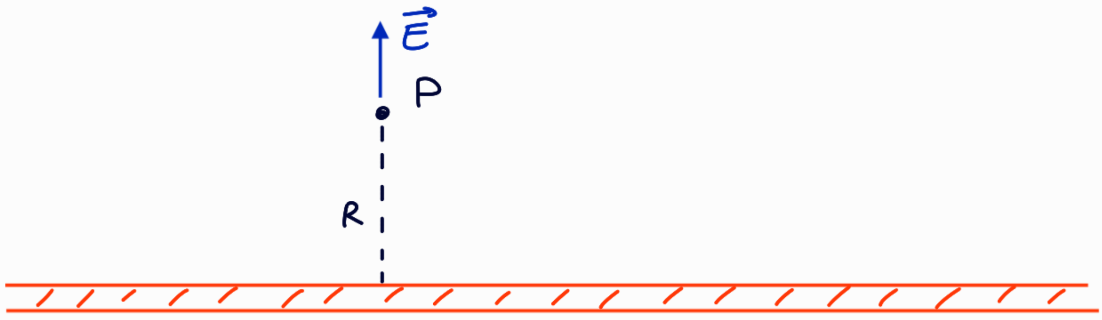
Nel caso I $\quad E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e \sum_k Q_{k\,int} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0}$

Nel caso II $\quad E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e \sum_k Q_{k\,int} = 4\pi k_e Q$

$$\Rightarrow \boxed{E = k_e\, Q/r^2}$$

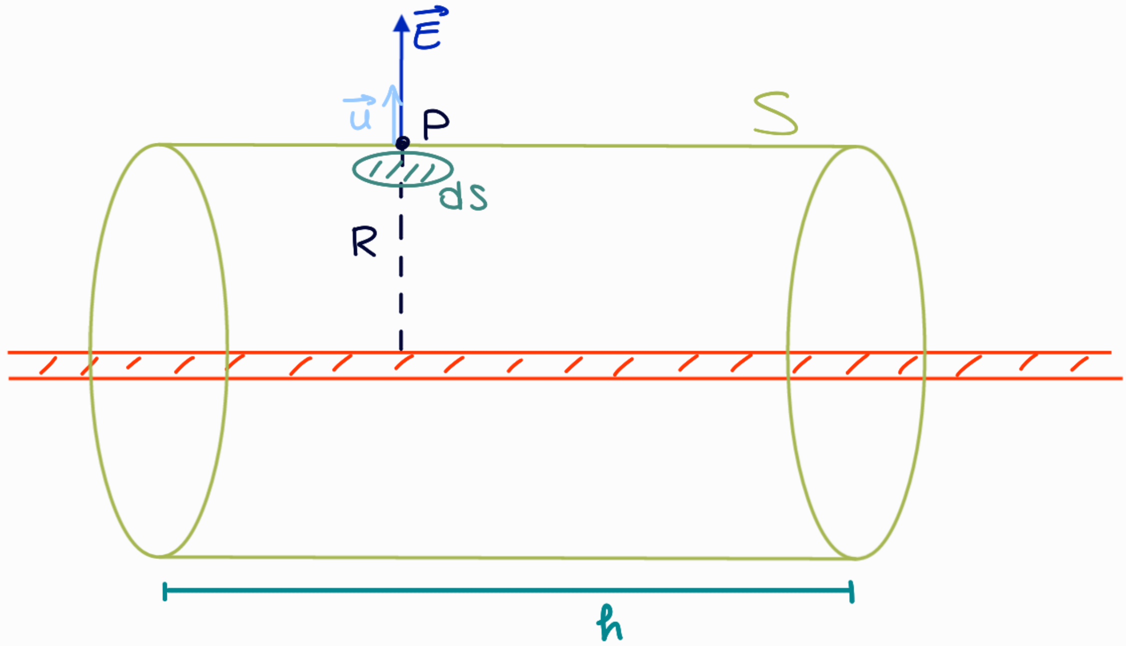
Simmetria assiale : distribuzione lineare uniforme

La quantità di carica in P dipende dalla distanza



λ densità di carica

Devo scegliere opportunamente la superficie in cui calcolare il flusso di $\vec{E}$ $\longrightarrow$ CILINDRO (altezza h e raggio R)



$\vec{E} \cdot \vec{u}\, ds$

- sulla superficie laterale : $\vec{E} \parallel \vec{u} \implies \vec{E} \cdot \vec{u} = E$
- sulle base : $\vec{E} \perp \vec{u} \implies \vec{E} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\, ds = E \int_S ds = E\, 2\pi R h$$

Allo stesso modo

$$\Phi_{\vec{E}}(S) = 4\pi K_e \overbrace{\sum_k Q_{k\,int}}^{\lambda h} = 4\pi K_e \lambda h$$

Uguagliando le due equazioni ottengo $E = 2 K_e \dfrac{\lambda}{R}$