מחברת זו הינה רכוש הטכניון
והיא מיועדת לצרכי בחינה בלבד

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מחברת בחינה

2017

*** מס' תעודת הזהות**

ציונים לשימוש הבוחן
יש לרשום את הציון כאן

		ציון
שאלה מס' 1	0	20
שאלה מס' 2	1	11
שאלה מס' 3	2	9
שאלה מס' 4	3	35 אמ
שאלה מס' 5	4	15 נ
שאלה מס' 6	5	
שאלה מס' 7	6	
שאלה מס' 8	7	
שאלה מס' 9	8	
שאלה מס' 10	9	
סה"כ		90

שם מקצוע _____

מספר מקצוע 104041

חדר מבחן 309

פקולטה _____

סמסטר _____

תאריך 17.4.2024

מחברת _____ מתוך _____ מחברות

* יש למלא X בתוך המשבצות בטבלה שלהלן עבור כל ספרה של תעודת הזהות, כולל ספרת הביקורת (סה"כ 9 ספרות), כאשר כל עמודה מייצגת ספרה בתעודת הזהות

006 2023.01-104041-1 17.04.24
חדו"א 1מ1
פקולטה: מתמטיקה

104041

214548760

לתשומת לבך !!!

1. אין לשדך סיכות נוספות, לסיכה הקיימת, למחברת הבחינה.
2. **אין לתלוש דפים ממחברת הבחינה.**
3. **אין להוסיף דפים למחברת הבחינה שלא אושרו על־ידי המתרגל או מרצה הקורס.**
4. יש לכתוב במחברת הבחינה בעט בלבד (**לא בעפרון**).
5. הקפד למלא בטבלת המשבצות של תעודת הזהות את ה־ X בתוך המשבצת.
6. במידה וטעית במיקום ה־ X בטבלת המשבצות, השחר את הריבוע לחלוטין.

TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום רביעי, ט' ניסן, תשפ"ד

17.4.24

מבחן בחדו"א 1מ1 – 104041 – חורף תשפ"ד – 2024 – מועד א'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- במבחן שלושה חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות נכון/לא נכון וחלק שלישי של שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.

(נק' 20) 1 הראש

הוכיחו $\frac{\sin^2(x)}{2} \le \ln(1+2\sin^2(x)) \le 4x$ ו- x מקיים (נק' 10)

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

נתון $f(x)=\ln(1+2\sin^2(x))-4x$ $\quad$ $f(x)$ רציפה : נגזר 93

$f(0)=\ln(1+0)-4\cdot 0=0$ $\quad$ נקודת מינימום

$f'(x)=\frac{4\sin(x)\cos(x)}{1+2\sin^2(x)}-4=\frac{8\sin(2x)}{1+2\sin^2(x)}-4$

$\sin(2x)$ נקודת אפס ראשונה $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\sin(2x)$ נקודת אפס שנייה $\frac{\pi}{2}$

$f'(0)=0$ ו- $f(x)\le 0$ $\Leftarrow$ $[0,\frac{\pi}{2}]$ נקודות חשודות לאי-חיוביות

$\Downarrow$

$\ln(1+2\sin^2(x))-4x\le 0$

$\ln(1+2\sin^2(x))\le 4x$ נוסף לכך $f(x)$ רציפה

$[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $f(x)$ מקסימום 0 $\quad$ $f(x)\le 0$ $\Leftarrow$ $[0,\frac{\pi}{2}]$ נקודות חשודות לאי-חיוביות

$f'(x)=\frac{2\sin(2x)}{1+2\sin^2(x)}-4\le 0$

$\le \frac{2}{2}-4<0$

ולכן $f(x)$ יורדת ב- $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $f(x)$ מקסימום 0 $\quad$ $f(x)\le 0$ $\Leftarrow$ $[0,\frac{\pi}{2}]$ נקודות חשודות לאי-חיוביות

$\ln(1+2\sin^2(x))-4x$ $\quad$ נוסף לכך $\ln(1+2\sin^2(x))$ רציפה

$[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $f(x)\le 0$ הוכיחו

$\ln(1+2\sin^2(x))\le 4x$

$g(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} - \ln(1+2\sin^2(x))$ $\qquad$ $g(x)$ פונקציה גזירה

$g(0) = 0$ $\qquad$ $g(x) \le 0$ צ"ל

$g(x)$ פונקציה רציפה וגזירה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ כהפרש של רציפות וגזירות

בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$g'(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2} - \frac{2\sin(2x)}{1+2\sin^2(x)} =$$

$$= \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{2\sin(2x)}{1+2\sin^2(x)} =$$

$$= \sin(2x)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1+2\sin^2(x)}\right) \le 1\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1}\right) = \frac{-3}{2} < 0$$

$0 \le \sin(2x) \le 1$

$1 \le 1+2\sin^2(x) \le 3$

$\Leftarrow$ הנגזרת היא שלילית בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ומתוך מונוטוניות משפט לגרנז':

אם $g(x)$ רציפה וגזירה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ וכל $g'(x)<0$ אזי הפונקציה $g(x)$ מונוטונית

יורדת ממש ותח"ל ולכן יהיה לה שורש אחד לכל היותר, משום ש $g(0)=0$

אזי ו $g(x)$ מתמלאת ירידת מהנקודה $(0,0)$ בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן היא תהיה בקטע

כולו שלילית מונוטונית יורדת ולכן $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} - \ln(1+2\sin^2(x)) \le 0$

$\Downarrow$

עבור $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\sin^2(x)}{2} \le \ln(1+2\sin^2(x))$$

מ.ש.ל

$\Leftarrow$ כעת נוכיח כי מתקיים:

$$\frac{\sin^2(x)}{2} \le \ln(1+2\sin^2(x)) \le 4x$$

עבור $[0,\frac{\pi}{2}]$.

מ.ש.ל

ב. (10 נק') הראו כי $\frac{1}{3} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\left(ln(1+2\sin^2(x))\right)dx \le 4$ כיוון שסיעה מוחלטת עולה ה בקטע.

נתון לנו מצד ימין עפ"י הסעיף הקודם:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(ln(1+2\sin^2(x)))dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)4x\,dx$$

נחשב אגף ימין:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx = \left[-x\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx\right]\cdot 4$$

$u = x \qquad v' = \sin(x)$

$u' = 1 \qquad v = -\cos(x)$

$\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin(x) = 4$ // סה"כ:

נחשב אגף שמאל:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{2}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ln(1+2\sin^2(x))dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)dx \underset{t=\cos(x)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{-\sin^3(x)}{\sin(x)}dt = \frac{1}{2}\int -\sin^2(x)\,dt = \frac{1}{2}\int \cos^2(x) - 1\,dt =$$

$\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$

$dx = \frac{-dt}{\sin(x)}$

אפשר להציב בגבולות 0, 1 ולהכפיל ב-(-1) אפשר גם לעשות אינטגרל לא מסוים ולסוף להציב! למען הסדר.

$$= \frac{1}{2}\int t^2 - 1\,dt = \frac{t^3}{3} - t\Big| = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3(\frac{\pi}{2})}{3} - \cos(\frac{\pi}{2}) - \left(\frac{\cos(0)}{3} - \cos(0)\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

סך הכל:

$$\frac{1}{3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{2}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ln(1+2\sin^2(x))dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)4x\,dx = 4$$

נ.ש.מ.

(חדוקה 15) 2 הצעה

א. (5 נק') הוכיחו שלפונקציה $f(x)=x^2+x\sin(x)+\cos(x)$ יש נקודת קיצון מקומית יחידה בקטע $[0,b]$ עבור $b>0$ כלשהו.

$f(0)=0+0+1=1$

$f(-x)=(-x)^2+(-x)\sin(-x)+\cos(-x)=$ נשתמש בזוגיות הנתונה ונקבל $f(x)$

$=x^2+x\sin(x)+\cos(x)=f(x)$

ב. הוכיחו שלפונקציה $x^2+x\sin(x)+\cos(x)=0$ אין פתרון חיובי אחד לפחות.

$f'(x)=2x+\sin(x)-x\cos(x)+\sin(x)$ נגזרת הפונקציה

$f'(x)=x(2-\cos(x))$ $0\le 2-\cos(x)\le 3$ נגזרת חיובית

מכאן שהפונקציה $f(x)$ עולה ולכן אין פתרון $x=0$ ו כל פונקציה עולה לא יכולה לחתוך את הציר פעמיים.

$f(x)=x(2-\cos(x))\le 0$ נגזרת שלילית

$x\le 0$ ולכן אפשר לומר שלא יתכן חיתוך

$x\ge 0$ אפשרי לפי הנתון

$f(0)=1$ ולכן הנקודה $x=0$ היא פתרון יחיד

$x^2+x\sin(x)+\cos(x)=0$ המשוואה לא בעלת פתרון חיובי אחד לפחות

(חדוקה 15) 2 הצעה

ב. (5 נק') הוכיחו שלפונקציה f הרציפה בקטע $[a,b]$ קיים ערך ביניים c עבורו $f(c)=t$, אם קיים $a<c<b$ המקיים עבורו $f(a)-f(b)$.

שאלה 3 (15 נק')

חשבו את $\sqrt{12}$ ברמת דיוק של $\frac{1}{100}$

נפתח פולינום טיילור לפונקציה $f(x)=(x+9)^{\frac{1}{2}}$ סביב $x=0$ (מקלורן)

ונקבל $x=3$

כמובן אפשר לפתח ל $\sqrt{x}$ סביב $x=9$ מהמעבדה אישית יותר נח לפתח

סביב 0)

$f(x)=(x+9)^{\frac{1}{2}}$ $\quad f(0)=\sqrt{9}=3$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x+9)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f'(0)=\frac{1}{6}$

$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+9)^{-3/2}$ $\quad f''(0)=\frac{-1}{108}$

$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x+9)^{-5/2}$ $\quad f^{(3)}(0)=\frac{1}{168}$

מהמעבדה סדרים גדולים יותר

נמצא את הטעות מסדר (2) לפי שארית לגרנז' עבור $0<c<3$

$$R_2(c)=\left|\frac{f^{(3)}(c)\cdot(3)^3}{3!}\right|=\left|\frac{\cancel{3}\cdot 3^3}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 8(c+9)^{5/2}}\right|=\frac{3^3}{16(c+9)^{5/2}}$$

$$0<c<3$$

$$9<c+9<12$$

$$9^{5/2}\le(c+9)^{5/2}\le 12^{5/2}$$

$$16\cdot 9^{5/2}<(c+9)^{5/2}<16\cdot 12^{5/2}$$

$$\frac{3^3}{16\cdot 12^{5/2}}<\frac{3^3}{(c+9)^{5/2}}<\frac{3^3}{16\cdot 3^5}=\frac{1}{16\cdot 3^2}=\frac{1}{144}<\frac{1}{100}$$

לכן פולינום טיילור של $(x+9)^{\frac{1}{2}}$ עבור $x=3$ יהיה:

$$T_2(x)=3+\frac{x}{6}-\frac{1}{2!\,108}x^2+\cancel{R_2(c)}$$

$$T_2(3)=3+\frac{1}{2}-\frac{1}{12\cdot 2}+\cancel{R_2(c)}=\sqrt{12}\quad 0<c<3$$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (35 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

הגבול של הפונקציה $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)}}$ הוא

א. $-\infty$ ב. 2 ג. 1 ד. ∞ ה. 0

שאלה 2 (7 נק')

נתונים שני הטורים הבאים $I=\sum_{n=2}^{\infty} sin^2\left(\frac{\pi}{2}-arctan(n)\right)$ ו-

$II=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tan\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ אזי

א. I מתכנס II מתבדר ✗

ב. II מתכנס I מתבדר

ג. שניהם מתכנסים

ד. שניהם מתבדרים

שאלה 3 (7 נק')

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n)(x-1)^n$ מתכנס עבור ה-x -ים הבאים

א. $0\le x\le 2$ ב. $0\le x<2$ ג. $0<x\le 2$ ד. $-\infty<x<\infty$ ה. $0<x<2$

שאלה 4 (7 נק')

נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$ אזי

א. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f^2(c)tan(c+1)=c$

ב. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)+1=c$ ✗

ג. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(sin(c))=c$

ד. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)\ln(c+3)=c$ ✗

ה. קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $e^c f(c)=c$ ✗

שאלה 5 (7 נק')

ערך האינטגרל $\int_1^e\frac{dx}{x(ln^{0.5}(x))}$

א. 4 ב. 3 ג. 2 ד. 1 ה. 0

סמנו נכון/לא נכון בסעיפים הבאים (15 נק' - 3 נק' לכל סעיף)

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(-1)^n n}{n^2} = \frac{2}{3}$

א. נכון **ב. לא נכון**

2. קיים $x_0 > 0$ כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $x^{0.000001} > \ln(x)$

א. נכון **ב. לא נכון**

3. אם $\lim_{n\to\infty} a_{4n+1}$ קיים ו- $\lim_{n\to\infty}(a_{4n+1} - a_{4n+2}) = 0$ אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

א. נכון **ב. לא נכון**

4. נקודת פיתול יכולה להיות גם נקודת מינימום

א. נכון **ב. לא נכון**

5. אם f גזירה מימין בנקודה a אזי היא רציפה מימין בנקודה a גזירה => רציפה

א. נכון **ב. לא נכון**

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!