תרגיל 6 – קורס סיבוכיות

שאלה 2

סעיף א':

תהיינה A,B שפות המקיימות $A\in L$, $B\in NL$, הוכיחו כי $A\cup B\in NL$.

פתרון:

עלינו להראות כי $A\cup B\in NSpace(\log(n))$

נראה כי קיימת מ"ט א"ד M_{AB} אשר מכריעה את השפה $A\cup B$ בסיבוכיות מקום של $O(\log(n))$.

מהנתון כי $B\in NL$ ע"פ הגדרה קיימת מ"ט א"ד M_B אשר מכריעה את השפה B בסיבוכיות מקום של $O(\log(n))$.

מהנתון כי $A\in L$ ע"פ הגדרה קיימת מ"ט דט' M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום של $O(\log(n))$, ע"פ הגדרה של הכרעה דט' מתקיים כי המכונה M_A מהווה גם מכונה א"ד להכרעת השפה A.

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).
בהינתן קלט $x\in\Sigma^*$ המכונה תסמלץ את ריצת המכונה M_A אם קיבלה את הקלט, המכונה תסיים ותקבל את הקלט גם כן, אם M_A דחתה, נסמלץ את ריצת המכונה M_B ונחזיר את תשובתה (סמלוץ המכונות על אותו שטח עבודה).

נכונות

$x\in A\cup B \Leftarrow x\in A$ או $x\in B \Leftarrow M_A$ מקבלת את הקלט או קיים תסריט ריצה בו M_B מקבלת את הקלט $\Leftarrow$ קיים תסריט ריצה בו המכונה M_{AB} תקבל את הקלט.

$x\notin A\cup B \Leftarrow x\notin A$ וגם $x\notin B \Leftarrow M_A$ דוחה את הקלט וגם כל תסריט ריצה של M_B על הקלט מוביל למצב דחיה $\Leftarrow$ כל תסריט ריצה של המכונה M_{AB} על הקלט יוביל למצב דחיה.

סיבוכיות מקום

המכונה משתמשת בסיבוכיות מקום של $O(\log(n))$ משום שמסמלצת את המכונות על אותו שטח עבודה סה"כ לכל תסריט ריצה של המכונה נקבל כי רצה בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$, גם במקרה בו צריכה לסמלץ את ריצת שתי המכונות. סה"כ נקבל סיבוכיות מקום כנדרש.

נסכם כי מכך שהראנו מכונה א"ד להכרעת השפה $A\cup B$ אשר רצה בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$ נובע כי $A\cup B\in NL$ כנדרש.

<u>סעיף ב':</u>

תהא B שפה ותהא $A=\{<x,0^{(2^{|x|})}> \mid x\in B\}$.

<u>פתרון:</u>

1. הוכיחו כי אם $A\in P$ אז $B\in EXP$.

<u>עלינו להראות כי קיימת מ"ט דט' M_B אשר מכריעה את השפה B בסיבוביות זמן אקספ'</u>

מהנתון כי $A\in P$ נובע ע"פ הגדרה כי קיימת מ"ט דט' M_A אשר מכריעה את השפה A בזמן פול" נסמנו $O(n^c)$ **(#)**.

הגדרת המכונה

נגדיר מ"ט ע"פ מודל החישוב הסטנדרטי, בהינתן קלט $x\in\Sigma^*$ המכונה תשרשר אותו עם $2^{|x|}$ אפסים, בשלב הבא, המכונה תסמלץ את ריצת המכונה M_A על הקלט עם התוספת ותחזיר את תשובתה בהתאם.

נכונות

$x\in B \Leftrightarrow y=<x,0^{(2^{|x|})}>\in A \Leftrightarrow$ M_A מקבלת את הקלט y $\Leftrightarrow$ M_B מקבלת את הקלט x.

זמן ריצה

ננתח את זמן ריצת המכונה M_B עבור קלט x, נסמן $|x|=n$.

עלות הוספת האפסים

ע"פ (#)

$$O(2^{|x|} + |y|^c) = O(|y|^c) = O(|<x,0^{(2^{|x|})}>|^c) = O(\,(|x| + |0^{(2^{|x|})}|\,)^c\,) = O(\,(n + 2^n)^c\,) = O(\,(2^n)^c\,)$$

$|y|^c > 2^{|x|}$

$y=<x,0^{(2^{|x|})}>$

$|x|=n,\ |0^{(2^{|x|})}| = 2^n$

$$= O(\,2^{cn}\,) \le O(\,2^{n^c}\,) \longrightarrow$$ זמן אקספ' כנדרש!

עבור n גדול דיו

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט M_B אשר מכריעה את השפה B בזמן אקספ' ולכן $B\in EXP$ כנדרש.

2. הוכיחו כי אם $A\in L$ אז $B\in PSPACE$.

עלינו להראות כי קיימת מ"ט דט' M_B אשר מכריעה את השפה B בסיבוכיות מקום פול"

מהנתון כי $A\in L$ נובע ע"פ הגדרה כי קיימת מ"ט דט' M_A במודל החישובי עבור סיבוכיות מקום תת-לינארית אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$.

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).

בהינתן קלט $x\in\Sigma^*$ המכונה תתחזק בנוסף בסרט העבודה שטח אשר יוקצה לטובת מונה שיסמן את התו עליו מצביע הראש הקורא בסרט הקלט בתוספת לשרשור האפסים הנדרש $<x,0^{(2^{|x|})}>$.

המכונה תסמלץ את ריצת המכונה M_A במקביל תעדכן את המונה בהתאם, במידה והמונה חורג מהערך המתאים עבור התו האחרון בקלט x המקורי המכונה תתייחס לתו כ-0, אחרת ע"פ התו הנמצא המקום המתאים בסרט הקלט. בסיום הסמלוץ המכונה תחזיר את תשובתה בהתאם.

נכונות

$x\in B \Leftrightarrow y=<x,0^{(2^{|x|})}>\in A \Leftrightarrow$ M_A מקבלת את הקלט y $\Leftrightarrow$ M_B מקבלת את הקלט x.

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה M_B עבור קלט x, נסמן $|x|=n$.

המכונה מסמלצת את ריצת המכונה M_A אשר עושה שימוש בסיבוכיות מקום של $O(\log(<x,0^{(2^{|x|})}>))$ בסרט העבודה שכן בפועל המכונה רצה על הקלט המנופח.

בנוסף לכך המכונה מתחזקת מונה אשר נגדיר שיישמר בייצוג בינארי, כלומר תוספת של $O(\log(<x,0^{(2^{|x|})}>))$.

לכן נקבל:

$O(\log(<x,0^{(2^{|x|})}>) + \log(<x,0^{(2^{|x|})}>)) = O(\log(<x,0^{(2^{|x|})}>)) = O(\log(n+2^n)) \le O(\log(2*2^n)) = O(\log(2^{n+1})) =$
$O(n+1) = O(n)$ **סיבוכיות מקום פול' כנדרש!**

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט M_B אשר מכריעה את השפה B בסיבוכיות מקום פול" ולכן $B\in PSPACE$ כנדרש.

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א':</u>

הוכיחו כי בעיות ההכרעה שלהלן שייכות למחלקת הסיבוכיות L.

<u>פתרון:</u>

1. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם קיים בגרף G כיסוי קודקודים שגודלו לכל היותר 2017?

נגדיר את השפה הבאה:

A={ G | בגרף G קיים כיסוי קודקודים שגודלו לכל היותר 2017 }

<u>עלינו להראות כי קיימת מ"ט דט' M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום O(log(n))</u>

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).
בהינתן קלט $G=(V,E)$.
אם בגרף מס' הצמתים קטן/שווה ל-2017 המכונה תקבל את הקלט (כל הצמתים מהווים כיסוי כנדרש).
אם קיימים בגרף יותר מ-2017 צמתים המכונה תעבור על כל בחירה אפשרית של 2017 צמתים ותבדוק אם קיימת בחירה כזו אשר מהווה כיסוי קודקודים, המכונה תבצע את זה ע"י תחזוקת 2017 מונים בייצוג בינארי אשר גודלו של כל אחד הינו $\log(|v|)$.
מונים אלו יהוו יחד את כל הת"ק האפשריות של קבוצת צמתים בגודל לכל היותר 2017 (אם מונה מכיל ערך 0 אינו מסמל אף קודקוד).
עבור כל בחירה אפשרית של מונים המכונה תבדוק אם מהווים כיסוי, לצורך בדיקת הכיסוי המכונה תתחזק בסרט העבודה מונה בייצוג בינארי אשר בכל בדיקה ימנה את מס' הקשתות המכוסות.
אם נמצאה בחירה אשר מהווה כיסוי המכונה תקבל את הקלט, אם סיימה לרוץ על כל הבחירות ועדיין לא קיבלה את הקלט תדחה.

נכונות

$x\in A$ ⇔ בגרף G קיים כיסוי קודקודים שגודלו לכל היותר 2017 ⇔ M_A מקבלת את הקלט G.

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה M_A עבור קלט $x=G$, נסמן $|x|=n$.
בשלב הראשון מניית הקודקודים לבדיקה אם מספרם קטן או שווה ל-2017 תתבצע ע"י אחד מהמונים שהוגדרו בסרט העבודה בגודל $\log(|V|)$.
המכונה מתחזקת 2017 מונים בגודל של $\log(|v|)$ הינה:

$$O(2017*\log|V|) = O(\log|V|) \underset{|V|\le|G|}{\le} O(\log|G|) = O(\log(n))$$

בנוסף, המכונה משתמשת בתחזוקה של מונה לגודל הכיסוי עלות מונה זה הינה:

$$O(\log|E|) \underset{|E|\le|G|}{\le} O(\log|G|) = O(\log(n))$$

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום O(log(n)) ולכן $A\in L$ כנדרש.

2. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ורשימת קודקודים L, האם L היא מסלול המילטון ב-G?

נגדיר את השפה הבאה:

$A=\{(G,L)$ | L מהווה מסלול המילטון ב-G $\}$

<u>עלינו להראות כי קיימת מ"ט דט' M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$</u>

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).
המכונה תעשה שימוש במונה בייצוג בינארי שיציין צומת נוכחי מבין צמתי הגרף נסמנו $V_{Counter}$, כמו כן אזור נוסף אשר יוקצה לגודל של שני קודקודים כלומר יסמל קשת נסמנו $E_{counter}$.
המכונה תשתמש במונה $V_{counter}$ ראשית כדי למנות את אורכה של הרשימה ותוודא כי אורכה $|V|$.
בנוסף, המכונה תעבור תוך שימוש במונה זה על כל הצמתים ברשימה L, עבור כל צומת המכונה תבצע מעבר חוזר על הצמתים ב-L ותוודא שאף צומת לא חוזר על עצמו מעבר לפעם אחת. אם אחת מבדיקות אלו לא צלחה תדחה את הקלט, אחרת תמשיך.
בשלב האחרון המכונה תעבור על כל זוג צמתים סמוך ברשימה L, הזוג יועתק ל-$E_{counter}$, עבור קשת זו המכונה תוודא כי אכן קיימת בגרף G בסרט הקלט, אם קיים זוג אשר לא מקיים את הנ"ל המכונה תדחה את הקלט.
אם בסיום מעבר על כל הזוגות המכונה לא דחתה, המכונה תקבל את הקלט.

נכונות

$(G,L)\in A \Leftrightarrow$ L מהווה מסלול המילטון בגרף G $\Leftrightarrow$ M_A מקבלת את הקלט (G,L).

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה M_A עבור קלט $x=(G,L)$, נסמן $|x|=n$.

$$|V_{counter}| = O(\log|V|) \le O(\log|G|) \le O(\log(n))$$

|V|≤|G|

$$|E_{counter}| = O(\log|V| + \log|V|) = O(\log|V|) \le O(\log|G|) \le O(\log(n))$$

נסכום שתי תוצאות אלו נקבל כי סה"כ סיבוכיות המקום בסרט העבודה הינה $O(\log(n))$.

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$ ולכן $A\in L$ כנדרש.

<u>סעיף ב':</u>

הוכיחו כי בעיות ההכרעה שלהלן הן NL-שלמות.

<u>פתרון:</u>

1. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ושלושה קודקודים $s,t,u\in V$ האם קיים בגרף G מסלול מכוון מ-s ל-t שאינו עובר דרך u?

<u>עלינו להראות ע"פ הגדרה כי הבעיה הנ"ל נסמנה A שייכת ל-NL הינה NL-קשה</u>

<u>שלב 1: $A\in NL$</u>

נגדיר מכונה א"ד M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$.

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).
המכונה תעשה שימוש בשני מונים עבור זוג צמתים V_i, V_{i+1} וכן מונה למס' הצמתים שינוחשו אשר יתוחזקו בסרט העבודה.
בהינתן קלט (G,s,t,u) המכונה M_A תנחש מס' $K\le|V|$ אשר ישמר במונה למס' הצמתים שינוחשו.
לאחר מכן המכונה תעבור לשלב הניחוש של K הצמתים $v_0,v_1,\dots,v_K$.
המכונה תבדוק שמתקיים $v_0=s$ ו- $v_K=t$, ועבור כל צומת v_i כך ש- $1\le i\le K-1$ שמתקיים: $v_i\neq u$, בנוסף בין כל ניחוש לניחוש תבדוק ע"י שימוש במונים עבור זוג הצמתים שמתקיים $(v_i,v_{i+1})\in E$.
אם כל אלו מתקיימים המכונה תקבל את הקלט אחרת תדחה אותו.

נכונות

$(G,s,t,u)\in A$ ⇔ בגרף G קיים מסלול מ-s ל-t שאינו עובר דרך u ⇔ קיים תסריט ריצה בו M_A מקבלת את הקלט (G,s,t,u).

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה M_A עבור קלט $x=(G,s,t,u)$, נסמן $|x|=n$.
עלות תחזוקת שני המונים אשר מייצגים זוג צמתים הוא:

$$O(2*\log(|v|)) = O(\log(|v|)) \le O(\log(|G|)) \le O(\log(n))$$

עלות תחזוקת מונה לניחוש הצמתים:

$$O(\log(|V|)) \le O(\log(|G|)) \le O(\log(n))$$

$|V| \le |G| \le |x| = n$

נסכום שתי תוצאות אלו ונקבל כי סה"כ סיבוכיות המקום בסרט העבודה הינה $O(\log(n))$.

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט א"ד M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$ ולכן $A\in NL$ כנדרש.

שלב 2: A הינה NL-קשה

כדי להראות את הנ"ל מספיק להראות $stCON \leq_L A$, שכן הבעיה stCON הינה NL-קשה.

הגדרת הרדוקציה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-3 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה) וסרט פלט (לכתיבה בלבד).

יהא קלט (G,s,t) כך ש-$G=(V,E)$ ו-$s,t\in V$.

הרדוקציה תבנה גרף $G'=(V',E')$, כך ש-$E'=E$ ו- $V'=V\cup\{u\}$ (u קודקוד מבודד).

המכונה תעשה שימוש בשטח בסרט העבודה אשר יוגדר בגודל $O(\log(|V|))$ (אופן שימוש בסרט מוצג בניתוח סיבוכיות מקום).

פלט הרדוקציה הינו הרביעייה (G',s,t,u).

נכונות

$(G,s,t)\in stCON$ ⇐ בגרף G קיים מסלול מ-s ל-t ⇐ אותו מסלול מהווה גם מסלול ב-'G (לא עושה שימוש ב-u) ⇐ קיים מסלול ב-'G מ-s ל-t אשר אינו עובר ב-u ⇐ $(G',s,t,u)\in A$.

$(G,s,t)\notin stCON$ ⇐ בגרף G לא קיים מסלול מ-s ל-t ⇐ בגרף 'G לא קיים מסלול מ-s ל-t (u מבודד לכן לא תרם לקיום מסלול) ⇐ לא קיים מסלול ב-'G בין s ל-t אשר אינו עובר ב-u ⇐ $(G',s,t,u)\notin A$.

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה עבור קלט $x=(G,s,t)$, נסמן $|x|=n$.

המכונה צריכה לבצע העתקה של קשתות הגרף G הנוכחי עם עדכון תוספת הקודקוד u.

העתקת הקשתות הקיימות בסרט הקלט לסרט הפלט לא דורשת שימוש בזיכרון העבודה, לשם עדכון הוספת הקודקוד המבודד המכונה תעתיק את מס' הקודקודים לסרט העבודה לשטח בסרט העבודה תעלה את ערכו ב-1 ותדפיס מס' זה לסרט הפלט כמס' הקודקודים החדש בגרף הפלט, לפיכך סיבוכיות המקום בסרט העבודה הינה:

$$O(\log(|V|)) \leq O(\log(|G|)) \leq O(\log(|(G,s,t)|)) = O(\log(n))$$

סה"כ סיבוכיות המקום בסרט העבודה הינה $O(\log(n))$, לכן הראנו כי קיימת רדוקציית מקום לוגריתמית ולכן השפה A הינה NL-קשה כנדרש.

נסכם כי מהוכחת שני שלבים אלו עולה ע"פ הגדרה כי השפה A הינה NL-שלמה כנדרש.

2. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$, האם קיימת בגרף G קבוצה של לפחות $|V|/2$ קודקודים שבין כל שניים מהם קיים מסלול (בשני הכיוונים)?

<u>עלינו להראות ע"פ הגדרה כי הבעיה הנ"ל נסמנה A שייכת ל-NL הינה NL-קשה</u>

<u>**שלב 1: $A \in NL$**</u>

נגדיר מכונה א"ד M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$.

הסבר על הרעיון: כדי להיווכח כי קיימת קבוצה בגודל לפחות $\frac{|V|}{2}$ אשר מקיימת כי בין כל שני קודקודים בקבוצה יש מסלול, מספיק יהיה להשתכנע ע"י קודקוד יחיד $u \in V$, אשר מקיים כי יש מסלול ממנו ליתר הקודקודים בקבוצת צמתים הזו ומכל קודקוד בקבוצה זו מסלול אליו, כך שגודלה הוא לפחות $\frac{|V|}{2}-1$.
בצירוף הקודקוד u נקבל סה"כ קבוצה בגודל לפחות $\frac{|V|}{2}$. ברור כי לכל שני צמתים x,y בקבוצה זו יש מסלול ביניהם כי מ-x יש מסלול ל-u ומ-u יש מסלול ל-y, לכן נקבל מסלול מ-x ל-y כנדרש.

הגדרת המכונה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-2 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה).
נגדיר שני מונים כל אחד מהם גודלו כמס' הקודקודים בגרף בייצוג בינארי, הראשון נסמנו vertex אשר יסמל את הקודקוד הנוכחי ומונה match אשר ימנה את מס' ההתאמות לקודקוד הנוכחי שנבדק כפי שתיארנו ברעיון הכללי.

1. לכל $v \in V$:
2. איפוס המונה match.
3. לכל $u \in V$ כך ש-$u \neq v$:
   - המכונה תנחש מסלול ע"פ אותו מימוש של stCON מקודקוד v לקודקוד u – אם נמצא תקין תמשיך הלאה, אחרת תסיים את הבדיקה באיטרציה ותעבור לאיטרציה הבאה.
   - המכונה תנחש מסלול ע"פ אותו מימוש של stCON מקודקוד u לקודקוד v – אם נמצא תקין תמשיך הלאה, אחרת תסיים את הבדיקה באיטרציה ותעבור לאיטרציה הבאה.
   - העלאת ערך המונה match ב-1.
   - אם ערך המונה match ערכו בייצוג בינארי הוא $\frac{|V|}{2}-1$ המכונה תעצור ותקבל את הקלט, אחרת ממשיכים בלולאה.
4. אם הלולאה הסתיימה ללא קבלת הקלט, נדחה אותו.

נכונות

$G \in A \Leftrightarrow$ בגרף G קיימת קבוצה בגודל לפחות $\frac{|V|}{2}$ צמתים אשר בין כל אחד מהם יש מסלול $\Leftrightarrow$ בגרף G קיימת קבוצה בגודל $\frac{|V|}{2}$ של צמתים אשר בין כל זוג יש מסלול $\Leftrightarrow$ קיים קודקוד $u \in V$ אשר יש ממנו ואליו מסלולים מכוונים לקבוצה בת $\frac{|V|}{2}-1$ צמתים בגרף G $\Leftrightarrow$ קיים תסריט ריצה בו המכונה M_A תקבל את הקלט G.

סיבוכיות מקום

המכונה עושה שימוש בשני מונים vertex ו-match כל אחד מהם בגודל $O(\log(|V|))$.
בנוסף ביצוע סימולציה ע"פ אותו אלגוריתם שהצגנו עבור הבעיה stCON גם הוא עושה שימוש בסיבוכיות מקום לוגריתמית ב-G **(*)**, כיוון ש-$|V| \leq |G|$ עבור קלט G בגודל n סה"כ מתקיים כי סיבוכיות המקום היא $O(\log(n))$ כנדרש.

(*) <u>הערה</u>: עבור הבעיה stCON סיבוכיות המקום הינה לוגריתמית עבור הקלט <G,s,t> ולכן סיבוכיות המקום:
$O(\log(|\langle G,s,t\rangle|)) \leq O(\log(3|G|)) = O(\log(3)+\log(|G|)) = O(\log(|G|))$

$|s|,|t| \leq |G|$

נסכם כי אכן הראנו כי קיימת מ"ט א"ד M_A אשר מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$ ולכן $A \in NL$ כנדרש.

שלב 2: A הינה NL-קשה

כדי להראות את הנ"ל מספיק להראות $S \le_L A$, כאשר S הינה השפה הבאה:

S = { G | G גרף מכוון קשיר חזק }

הוכחנו בכיתה כי השפה S הינה NL-קשה לכן מספיק את הרדוקציה משפה זו.

הגדרת הרדוקציה

נשתמש במודל חישובי אשר עושה שימוש ב-3 סרטים, סרט קלט (לקריאה בלבד), סרט עבודה (קריאה וכתיבה) וסרט פלט (לכתיבה בלבד).

יהא G=(V,E) קלט הרדוקציה, נסמן V={1,2,…,n}.

הרדוקציה תחזיר גרף G'=(V',E') שמוגדר ע"י E'=E ו- V' הינה אותה קבוצה V בתוספת |V| צמתים נוספים מבודדים, סה"כ נקבל |V'|=2|V| .

נכונות

G=(V,E)∈S ⇐ הגרף G הינו קשיר חזק ⇐ לכל שני צמתים u,v∈V קיים מסלול בין u ל-v ⇐ קיימת קבוצה ב-V' שגודלה $\frac{|V'|}{2}$ בה בין כל זוג צמתים יש מסלול ב-G' **(*)** ⇐ קיימת קבוצה ב-G' בגודל לפחות $\frac{|V'|}{2}$ צמתים בה בין כל שניים יש מסלול מכוון ⇐ G'=(V',E')∈A.

G=(V,E)∉S ⇐ הגרף G אינו קשיר חזק ⇐ קיימים שני צמתים u,v∈V אשר לא קיים מסלול בין u ל-v ⇐ לא קיימת קבוצה ב-G' בגודל לפחות $\frac{|V'|}{2}$ צמתים בה בין כל שניים יש מסלול מכוון **(*)** ⇐ לא קיימת קבוצה ב-G' בגודל לפחות $\frac{|V'|}{2}$ צמתים בה בין כל שניים יש מסלול מכוון ⇐ G'=(V',E')∉A.

(*) <u>נימוק:</u> בגרף G=(V,E) קבוצת הקודקודים V כולה מהווה רק"ח בו בין כל זוג צמתים יש מסלול מכוון, אותה קבוצה בדיוק של צמתים מהווה מחצית ממס' הצמתים בגרף G'=(V',E') שכן מתקיים |V'|=2|V| , לכן קבוצת הקודקודים המקוריים מהווה קבוצה בגודל מחצית מצמתי הגרף הפלט של הרדוקציה אשר בין כל שניים מהם יש מסלול. כיוון שקיימת קבוצה זו בפרט אותה קבוצה מקיימת כי גודלה לפחות כמחצית כנדרש.

(*) <u>נימוק:</u> בגרף G=(V,E) קיימים שני צמתים אשר אין ביניהם מסלול מכוון, מהוספת הצמתים המבודדים לגרף G'=(V',E') נקבל כי לא קיימת קבוצה בגודל לפחות $|V| = \frac{|V'|}{2}$ המקיימת כי בין כל זוג צמתים בה יש מסלול, מכיוון שאם הייתה כזו גודלה היה צריך להיות לפחות |V| כלומר בגודל לפחות של קבוצת הצמתים המקוריים או קבוצת הצמתים שהתווספו ל-G' ברדוקציה.
קבוצה כזו לא יכולה להיות קבוצת הצמתים החדשים כי כל צומת שם הינו מבודד, כמו כן היא לא יכולה להיות קבוצת הצמתים המקוריים של G שכן ע"פ הנחה G אינו קשיר חזק ואינה יכולה לערב צמתים בין שתי קבוצות אלו כי אין קשתות בין הצמתים המבודדים לקבוצת הצמתים המקוריים.

סיבוכיות מקום

ננתח את סיבוכיות המקום של ריצת המכונה עבור קלט x=G, נסמן |x|=n .

המכונה צריכה לעדכן את מס' הקודקודים ולהדפיסו לגרף הפלט לשם כך דרושה סיבוכיות מקום הבאה:

$$O(\log(|V|+|V|)) = O(\log(2|V|)) = O(\log(2)+\log(|V|)) = O(\log(|V|)) = O(\log(|G|)) = O(\log(n))$$

כמו כן, המכונה תעתיק את כל הקשתות ללא שינוי מסרט הקלט לסרט הפלט ללא שימוש כלל בסרט העבודה.

סה"כ נקבל סיבוכיות מקום O(log(n)) כפונ' של גודל הגרף G.

נסכם כי מהוכחת שני שלבים אלו עולה ע"פ הגדרה כי השפה A הינה NL-שלמה כנדרש.

<u>שאלה 4</u>

נגדיר את מחלקת הסיבוכיות 'NL כמחלקת השפות $A\subseteq\Sigma^*$ עבורן קיימים פולינום p ומ"ט דט' M עם שלושה סרטים.
סרט קלט לקריאה בלבד, סרט עד (witness) לקריאה חד פעמית יסומן w הראש הקורא בו נע רק ימינה וסרט עבודה
שבו הראש הקורא מבקר ב-O(log(n)) תאים בריצה על קלט באורך n, כך שלכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים:

$x\in A \Leftrightarrow$ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M(x,w)=T$.

<u>סעיף א':</u>

הוכיחו כי 'NL=NL.

<u>פתרון:</u>

<u>עלינו להראות שוויון בין המחלקות נראה את נכונות השוויון ע"י הוכחת הכלה בשני הכיוונים</u>

<u>שלב 1: $NL\subseteq NL'$</u>

תהא $A\in NL$, ע"פ הגדרה קיימת מ"ט א"ד M, המכונה בעלת 2 סרטים, סרט קלט וסרט עבודה, כמו כן המכונה מכריעה את השפה A בסיבוכיות מקום O(log(n)).
נראה כי קיימת מ"ט 'M ופולינום p אשר מקיימים את שייכות השפה A ע"פ הגדרה למחלקה 'NL.
ע"פ הגדרה צריך להתקיים:

$x\in A \Leftrightarrow$ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M'(x,w)=T$

הגדרת המכונה

נגדיר מ"ט דט' 'M בעלת 3 סרטים, סרט קלט לקריאה בלבד, סרט עד (witness) לקריאה חד פעמית וסרט עבודה.
בהינתן קלט x על סרט הקלט המכונה 'M תסמלץ את ריצת המכונה M באופן כזה שלא תבצע כלל ניחושים
אי-דטרמיניסטיים אלא תשתמש בקלט אשר נמצא בסרט העד אשר יכתיב לה את הבחירות בסימלוץ המכונה M.
בסיום הסימלוץ, המכונה 'M תחזיר את תשובת המכונה M בהתאם.

נכונות

$x\in A \Leftarrow$ קיים תסריט ריצה בריצת המכונה M בו מקבלת את הקלט $x \Leftarrow$ קיימת מחרוזת בינארית $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ אשר מהווה תסריט ריצה המכונה M מקבלת את הקלט $\Leftarrow$ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M'(x,w)=T$.

$x\notin A \Leftarrow$ לכל תסריט ריצה בריצת המכונה M על הקלט x הינה דוחה אותו $\Leftarrow$ לכל $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ אשר מהווה תסריט ריצה המכונה M דוחה את הקלט $\Leftarrow$ לכל $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ מתקיים $M'(x,w)=F$.

סיבוכיות מקום

המכונה 'M מסמלצת את ריצת המכונה M, עבור קלט x כך ש-$|x|=n$ המכונה M רצה בסיבוכיות מקום O(log(n)).
מכאן שגם המכונה 'M רצה באותו סיבוכיות מקום עבור כל קלט x.
כל מעבר של פונ' המעברים של המכונה M הינו מסדר גודל קבוע, בנוסף מכך ש-$NL\subseteq P$ נובע שזמן הריצה של המכונה M הינו פול' סה"כ נקבל כי גודל העד הינו פול' בגודל הקלט לכן קיים פולינום p כנדרש.

נסכם כי ע"פ הגדרה הראנו קיום 'M והסברנו כי קיים פולינום p אשר מקיימים את הנדרש ולכן מתקיים $A\in NL'$.

שלב 2: $NL'\subseteq NL$

תהא $A\in NL'$, ע"פ הגדרה קיימת מ"ט דט' M ופולינום p, המכונה בעלת 3 סרטים, סרט קלט, סרט עד וסרט עבודה.
כמו כן המכונה מכריעה את השפה A בסיבוביות מקום $O(\log(n))$ של סרט העבודה ומתקיים:

$x\in A \Leftrightarrow$ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M(x,w)=T$

כדי להראות את שייכות השפה למחלקה NL נראה כי קיימת מ"ט א"ד M' בעלת 2 סרטים, סרט קלט וסרט עבודה בסיבוכיות $O(\log(n))$ אשר מכריעה את השפה A.

הגדרת המכונה

נגדיר מ"ט דט' M' א"ד ע"פ המודל לסיבוכיות מקום תת-לינארית בעלת 2 סרטים, סרט קלט לקריאה בלבד וסרט עבודה לקריאה ולכתיבה. המכונה M' תסמלץ את ריצת המכונה M על הקלט <x,w> כך שאת העד w ניצור ונעביר לה באופן הבא: במקום לבצע ניחוש מראש מה שיצריך סיבוכיות מקום פול', נגדיר בסרט העבודה תא נסמנו current_w אשר יכיל בכל עת את התו הבא אותו תצטרך המכונה M' בסמלוץ, אותו המכונה M' תנחש ותספק בסמלוץ ע"פ דרישה. נמשיך בריצת הסימולציה ונחזיר את תוצאת המכונה בהתאם.

נכונות

$x\in A \Leftarrow$ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M(x,w)=T \Leftarrow$ קיים תסריט ריצה בו המכונה M' מקבלת את הקלט x.

$x\notin A \Leftarrow$ לכל $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ עבורו $M(x,w)=F \Leftarrow$ כל תסריטי ריצה של המכונה M' על הקלט x מובילים לדחייה.

סיבוכיות מקום

המכונה M' מסמלצת את ריצת המכונה M, עבור קלט x כך ש-$|x|=n$ המכונה M רצה בסיבוכיות מקום $O(\log(n))$.
מכאן שגם המכונה M' רצה באותו סיבוכיות מקום עבור כל קלט x, בנוסף תחזוק התא בסרט העבודה current_w אשר מייצג תו בודד מתוך מחרוזת העד הינו בעלות סיבוכיות מקום קבועה.

נסכם כי ע"פ הגדרה הראנו קיום M' אשר מקיימת את הנדרש ולכן מתקיים $A\in NL$.

מהוכחת שתי ההכלות הללו עולה כי $NL=NL'$ וסיימנו.

<u>סעיף ב':</u>

תהא "NL המחלקה המתקבלת מהמחלקה 'NL ע"י השינוי הבא: סרט העד מיועד לקריאה בלבד, אולם מותר לראש לנוע לכל כיוון (הקריאה אינה חד פעמית).

<u>פתרון:</u>

1. הראו כי "SAT∈NL.

הגדרת המכונה

נתאר מכונה M בעלת 3 סרטים - סרט קלט, סרט עד (לקריאה רב-פעמית) וסרט עבודה.
בהינתן קלט נוסחה φ מצורת CNF המכונה תקבלו בסרט הקלט, בנוסף תקבל עד w אשר מהווה הצבה למשתני הנוסחה, כיוון שמדובר בהצבה למשתני הנוסחה זו תהיה מחרוזת בינארית פול" בגודל הקלט נסמנה $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$.
המכונה תתחזק בסרט העבודה מונה אשר במהלך הריצה המכונה תשמש בו כדי לדעת לאיזה משתנה לגשת בסרט הקלט כדי לקבל ערכו, המכונה תעבור פסוקית אחר פסוקית אשר נמצאת בסרט הקלט, עבור כל ליטרל שם תבדוק את ערכו בהתאם לערך של המשתנה המתאים בסרט העד, אם סיפק את הפסוקית המכונה תמשיך לבדיקת הפסוקית הבאה.
אם הייתה פסוקית שלא סופקה המכונה תעצור ותדחה את הקלט, אם המכונה סיימה לעבור על כל הפסוקיות כך שכולן סופקו המכונה תקבל את הקלט.

נכונות

φ∈SAT ⇔ קיימת השמה למשתני הנוסחה φ כך שמספקת אותה ⇔ קיים $w\in\{0,1\}^{P(|x|)}$ כך שבריצת המכונה M על הקלט φ עם העד w המכונה תקבל את הקלט.

סיבוכיות מקום

על המכונה לתחזק מונה בסדר גודל לוגריתמי של מס' המשתנים בנוסחה לכן מדובר בעלות לוגריתמית בפרט בגודל הנוסחה כולה ולכן נקבל סיבוכיות $O(\log(n))$ כאשר n מהווה את גודל הנוסחה.

2. הסיקו כי אם P≠NP אז "NL≠NL.

<u>נניח בשלילה כי "NL=NL ונראה כי נקבל סתירה להנחה כי P≠NP</u>

ע"פ ההנחה בשלילה מתקיים "NL=NL, כמו כן בסעיף א' הוכחנו כי "SAT∈NL לכן ע"פ השוויון בפרט מתקיים SAT∈NL. כמו כן, ידוע כי NL⊆P לכן בפרט מתקיים SAT∈P.

מכיוון שהשפה SAT הינה NP-קשה נקבל כי NP=P **(*)** כי לכל שפה B∈NP מתקיים $B\le_P SAT$ ומסגירות לרדוקציות זמן פול' מתקיים B∈P, כמו כן P⊆NP ומצירוף שתי ההכלות נובע השוויון ב-**(*)** בסתירה להנחה.

נסכם כי ההנחה בשלילה אינה נכונה ולכן מתקיים "NL≠NL כנדרש.

חלק ב' – תרגיל למידה עצמית – קורס סיבוכיות

הוכיחו כי קיימת רדוקציית זמן פול" מהשפה $B \in NP$ לשפה SAT, שבהינתן קלט x מחזירה נוסחה בוליאנית מצורת CNF שמספר ההשמות המספקות אותה הוא $\#M_B(x)$.

פתרון:

טענה: הרדוקציה ממשפט Cook-Levin אינה מקיימת את הדרישה כי מס' ההשמות המספקות את הנוסחה φ_x שהינה פלט הרדוקציה הוא $\#M_B(x)$.

הוכחה: תהי שפה $B \in NP$, לכן קיימים פולינום p ומ"ט דט' M_B כך שלכל $x \in \Sigma^*$:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists w \in \{0,1\}^{P(|x|)}.M_B(x,w)=T$$

ניזכר ברדוקציה ובהגדרת המשתנים אותה הגדירה עבור הנוסחה φ_x, עבור טבלת הקונפיגורציות בהינתן קלט x לרדוקציה עבור כל תא (t,j) הוגדרו המשתנים:

1. משתנה אחד – לצורך סימון האם הראש הקורא מצביע על תא זה.
2. $\log(|\Gamma_{M_B}|)$ משתנים – לצורך סימון התו הכתוב בתא.
3. $\log(|Q_{M_B}|)$ משתנים – לסימון המצב בו המכונה נמצאת **(בהנחה והראש הקורא מצביע על תא זה).**

נשים לב, כי עבור $x \notin B$ לא ניתן יהיה למלא את טבלת הקונפיגורציות בצורה תקינה אשר תבטא ריצה תקינה כי בכל מקרה תנאי הסיום עבור φ_x המתאימה לא יתקיים ונקבל $\#M_B(x)=0$ כנדרש.

נדון במקרה עבור $x \in B$: המכונה M_B הינה מכונה דט', לכן עבור כל w בהינתן קלט x ישנו תסריט יחיד אשר מבטא מעברים תקינים של טבלת הקונפיגורציות עד ההגעה למצב מקבל/דוחה.

עבור w המהווה השמה שאינה מספקת מאותו נימוק כמו $x \notin B$ תנאי הסיום לא יתקיים ולכן לכל w כזה לא נוכל למלא את טבלת הקונפיגורציות בצורה אשר מהווה השמה למשתני φ_x ויביאו לספיקות הנוסחה.

לעומת זאת עבור w המהווה <u>השמה מספקת</u> נשים לב כי ישנם כמה דרכים למלא את טבלת הקונפיגורציות עד ההגעה למצב מקבל תוך קיום תנאי ההתחלה, המעבר והסיום, זה נובע מכיוון שלמעשה עבור כל תא בטבלה קיימים משתנים אשר מהווים משתני "don't care" (דוגמא המשתנים ע"פ 3) שכן אין להם שום משמעות בערכם כדי להביא לספיקות הנוסחה המתאימה φ_x כל עוד התנאים כן מתקיימים.

תיקון הרדוקציה: לצורך תיקון הרדוקציה עלינו לדאוג לכך שעבור קלט x אשר שייך לשפה, כל מחרוזת עד w אשר מהווה את קיום התנאי ע"פ הגדרת המכונה כל המשתנים אשר מהווים משתני "don't care" אינם כבר כך, וכי יש לערכם חשיבות בספיקות הנוסחה φ_x.

לשם כך, נגדיר משתנה נוסף לכל תא בטבלה שמסמן עבור כל תא אם מכיל את אותו ערך אותו מכיל המשתנה עבור התא באותה שורה עליו מצביע הראש הקורא וספיקות התא תלויה בכך שערכו חיובי בנוסף.

בצורה כזו, נקבל כי ישנה השמה יחידה מספקת למשתני φ_x והיא זו אשר בהינתן מחרוזת עד w מעבור לכך שתבטא ריצה תקינה ותמלא בהצלחה את תנאי ההתחלה, המעבר והסיום גם תקיים את זה שכל תא מכיל את הערך המתאים עבור המשתנה הנ"ל ביחס לתא אשר עליו מצביע הראש הקורא.

מתיקון זה נקבל:

$$\#M_B(x) = \text{מס' ההשמות המספקות את הנוסחה } \varphi_x$$

נסכם כי אכן הראנו על קיום רדוקציית זמן פול" המקיימת את הנדרש שכן מתבססת על אותה רדוקציית ממשפט Cook-Levin עם התיקון הנ"ל.

(נעיר כי הוספת משתנה קבוע למעשה ביט יחיד, עדיין תשמור על כך שמס' המשתנים הכולל בטבלה הינו מאותו סדר גודל ע"פ ההוכחה).