95

חובה למלא

תאריך: 21/3/19

מקצוע: חדו"א 1	
מספר תרגיל: 3	
סמסטר: א'ד ק/	קבוצה: 10
מגיש 1: שרון דוסקין	ת.ז. 1: 205379993
מגיש 2:	ת.ז. 2:

רשות בלבד:

תאריך הגשה: 24/3/19	מספר עמודים: 3 (שלושה)
	מספרי השאלות שהוגשו בתרגיל:

משוב:

התקבלה הגשה – בזמן / באיחור / באיחור עם אישור	ציון תרגיל:
	הערות הבודק:

Scanned by CamScanner

תרגיל בית 3

פרק 1 - שאלה 6

ה) הוכיח באינדוקציה:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

בסיס האינדוקציה: נוכיח עבור $n=1$

$$\frac{(2\cdot1-1)}{2\cdot1} \le \frac{1}{\sqrt{2\cdot1+1}}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} \le 2$$ ✓

צעד האינדוקציה:

הנחת האינדוקציה: עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו מתקיים:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

~~הנחת~~ צעד האינדוקציה: נראה את נכונות הטענה עבור $n+1$:

מהנחת האינדוקציה מתקיים:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

מכיוון ש $n\in\mathbb{N}$ אזי $\frac{(2n+1)}{(2n+2)}>0$ ולכן ניתן לכפול את שני אגפי השיוון, ללא שינוי בסימן האי שיוויון:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \quad (*)$$

נראה כי מתקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \quad (**)$$

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \le \frac{1}{2n+3}$$

$$\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3} \le 2n+2$$

$$\sqrt{(2n+1)(2n+3)} \le 2n+2$$

הים ושני אגפי האי שיוויון חיוביים ניתן להעלות את אי השיוון בריבוע

$$(2n+1)(2n+3) \le (2n+2)^2$$

$$\cancel{4n^2}+6n+2n+3 \le \cancel{4n^2}+4n+4n+4$$

$$3\le 4$$ ✓

-2

המשך

$2\cdot4\cdot6 \quad \sqrt{2n+1} \quad (2n+2) \quad \sqrt{2n+3}$

קיבלנו:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

האינדוקציה אכן מתקיימת עבור $n+1$. מש"ל.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n}{n^2} = 1$$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon > 0$.

נבחר $N = \frac{3}{\varepsilon}$

ואז לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\frac{n^2-3n}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{n^2-3n-n^2}{n^2}\right| = \left|\frac{-3}{n}\right| = -\left(\frac{-3}{n}\right) = \frac{3}{n} \underset{n>N}{<} \frac{3}{N} = \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

מאחר וגם $n \in \mathbb{N}$ $\frac{-3}{n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

לכן $\left|\frac{-3}{n}\right| = -\left(\frac{-3}{n}\right)$ לפי הגדרת ערך מוחלט)

מעולה

לסיכום, הראנו שעבור $\varepsilon > 0$ כלשהו

קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים $\left|\frac{n^2-3n}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$

ולכן לפי הגדרת הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n}{n^2} = 1$

<u>מש"ל</u>

הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+7}{3n^2+3n-22} = \frac{2}{3}$$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon > 0$

נבחר $N = 4 + \frac{3}{\varepsilon}$

ואז לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n^2-5n+7}{3n^2+3n-22} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-21n+65}{9n^2+9n-66}\right| \underset{\substack{n\geq 4 \text{ מאחר} \\ \text{הגדרת ערך מוחלט)}}}{=} -\left(\frac{-21n+65}{9n^2+9n-66}\right) = \frac{21n-65}{9n^2+9n-66} \underset{\substack{\text{הגדלנו מונה,} \\ n\geq 4 \text{ הקטנו מכנה תחת התנאי}}}{<} \frac{21n}{7n^2}$$

$$= \frac{3}{n} \underset{n>N}{<} \frac{3}{N} = \frac{3}{4+\frac{3}{\varepsilon}} < \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

לסיכום הראנו שעבור $\varepsilon > 0$ כלשהו

קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים $\left|\frac{2n^2-5n+7}{3n^2+3n-22} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2/3\right)^n = 0$$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$ ממשי.

נבחר $N=\log_{\frac{2}{3}}(\varepsilon)$

ואז לכל $n>N$ טבעי מתקיים:

$$\left|\left(\tfrac23\right)^n-0\right| = \left|\left(\tfrac23\right)^n\right| = \left(\tfrac23\right)^n \underset{N<n}{<} \left(\tfrac23\right)^N = \left(\tfrac23\right)^{\log_{\frac23}(\varepsilon)} = \varepsilon$$

לסיכום, הראנו שעבור $\varepsilon>0$ כלשהו

קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\left(\tfrac23\right)^n-0\right|<\varepsilon$

ולכן ע"פ הגדרת הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(2/3\right)^n=0$

מש"ל

פרק ב - שאלה 2

(ג) 3 יהי: לכל $\varepsilon>0$ קיים M טבעי כך שלכל $M\le n$ טבעי מתקיים $\frac{1}{2^n+n}<\varepsilon$

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$ ממשי.

נבחר $M=\frac{1}{\varepsilon}$ טבעי

ואז לכל $n\ge M$ מתקיים:

$$\frac{1}{2^n+n} \underset{\text{הקטנו מכנה}}{<} \frac1n \underset{M\le n}{\le} \frac1M = \frac{1}{\frac1\varepsilon}=\varepsilon$$

הראנו שעבור $\varepsilon>0$

קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $\cancel{M\le} n$ טבעי, מתקיים $\frac{1}{2^n+n}<\varepsilon$

מש"ל.

(ב) עבור $\varepsilon>0$ ממשי נסמן $A_\varepsilon=\{n\in\mathbb{N} \mid \frac{1}{2^n+n}\ge\varepsilon\}$. הוכח כי A_ε קבוצה סופית:

בסעיף (א) הראנו כי קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge M$ מתקיים:

$$\frac{1}{2^n+n}<\varepsilon$$

הוכחה:

כיוון ש $n\to\infty$ ו $n\in\mathbb{N}$ אז עד M יש מספר סופי של אינדקסים עבורם מתקיים $\frac{1}{2^n+n}\ge\varepsilon$

ולאחר מכן, לכל אינדקס n שגדול מ-M מתקיים $\frac{1}{2^n+n}<\varepsilon$ כפי שהראנו בסעיף א'. לכן הקבוצה A_ε היא סופית.

מש"ל.

-3