וקטורים:

הצגה פרמטרית: צריך להשלים....

פעולות על וקטורים:

חיבור וקטורים: עבור $v=(a,b), u=(c,d)$ נגדיר: $v+u=(a+c,b+d)$. (חיסור זה רק חיבור שלילי. למעשה חיסור וקטורים זה המרחק בינהם ↓)

צמוד מרוכב: עבור מספר מרוכב $z=a+bi$ נגדיר את הצמוד המרוכב כ- $\bar{z}=a-bi$ (נשים לב לדוגמאות: $\bar{i}=-i$ וכן $\bar{7}=7$)

מכפלה סקלרית: עבור $v=(a,b), u=(c,d)$ נגדיר את המכפלה ע"י הסימון הבא: $\langle v,u\rangle = ac+bd$.

נורמה (אורך): עבור וקטור $v=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ נגדיר את הנורמה (אורך) של u באופן הבא: $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}$

תכונות הנורמה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ ו- t סקלר אזי מתקיים:

- $\|v\|\geq 0$ וגם $\|v\|=0$ אם"ם $v=\vec{0}$
- $\|t\cdot v\|=|t|\cdot\|v\|$
- $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$
- $\|v-u\|\leq\|v\|+\|u\|$

מרחק: עבור וקטורים $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $v=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ נגדיר את המרחק ביניהם באופן הבא:

$$d(u,v)=\|v-u\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}$$

זווית בין וקטורים: עבור זווית α בין $v=(a,b)$ ל- $u=(c,d)$

(נשים לב שע"י הוספת המרחק בינהם w נוכל ליצור משולש, ואז לפי משפט הקוסינוסים נקבל: $v^2+u^2-2vu\cdot\cos\alpha=w^2$) ולכן:

$$\cos\alpha=\frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\cdot\|u\|}$$

וקטורים מאונכים: $\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \langle v,u\rangle=0 \Leftrightarrow v\perp u$

מכפלה פנימית:

הגדרה: פעולה אשר מוגדרת על שני וקטורים u,v תקרא **מכפלה פנימית** אם היא מקיימת:

- **לינאריות:** לכל וקטורים u,v,w מתקיים: $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
- **הרמטיות:** לכל וקטורים u,v מתקיים: $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ (סימטריות)
- **חיוביות:** לכל וקטור v הסקלר $\langle v,v\rangle\geq 0$ ומתקיים שוויון אם"ם $v=\vec{0}$

הגדרה: עבור וקטורים $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $v=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ נגדיר את **המכפלה הסקלרית** מעל $\mathbb{C}^n$ באופן הבא: $\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b_i}$
(עבור וקטורים מעל $\mathbb{R}^n$ מגדירים באותה צורה).

טענות:

- עבור $u,w\in\mathbb{F}^n$ ו- $a\in\mathbb{F}$ כלשהם מתקיים: $\langle u,aw\rangle = \bar{a}\langle u,w\rangle$
- עבור $u\in\mathbb{F}^n$ ו- $a\in\mathbb{F}$ כלשהם מתקיים: $\|a\cdot u\|=|a|\cdot\|u\|$
- יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u,v\in V$ כך ש $u\perp v$ אזי מתקיים: $\|u-v\|^2=\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ **(פיתגורס המוכלל)**
- יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u,v\in V$ כך ש- $\|u\|=\|v\|$ אזי מתקיים: $(u+v)\perp(u-v)$
- יהי V מרחב מ"פ $u,v\in V$ מתקיים: $|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$ **(אי שיווין קושי שוורץ)**
- יהיו u,v וקטורים כלשהם ב- $\mathbb{F}^n$ אזי מתקיים: $\langle u,v\rangle=u^t\bar{v}$

ניצבות: נאמר ששני ווקטורים $u,v\in\mathbb{R}^n$ ניצבים אם"ם $\langle u,v\rangle=0$

בסיסים אורתוגונלים ואורתונורמלים במרחב מכפלה פנימית

יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbb{F}$.

הגדרה: קבוצת וקטורים $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\in V$ נקראת **קבוצה אורתוגונלית** אם"ם לכל $1\leq i\neq j\leq n$ מתקיים $\langle v_i,v_j\rangle=0$ וכן $v_i\neq\vec{0}$.

הגדרה: **בסיס אורתוגונלי** של V הוא בסיס של V המהווה קבוצה אורתוגונלית.

הגדרה: **קבוצה אורתונורמלית** היא קבוצה אורתוגונלית שבה אורכו של כל וקטור הוא 1.

הגדרה: **בסיס אורתונורמלי** של V הוא בסיס של V המהווה קבוצה אורתונורמלית.

טענות:

- כל קבוצה אורתוגונלית / אורתונורמלית היא בת"ל.
- יהי V מרחב מ"פ ויהי $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי של V. עבור $w \in V$ כלשהו מתקיים: $w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle w_i, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$
- יהי u וקטור כלשהו בבסיס אורתונורמלי אזי מתקיים: $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle \ = 1$

המשלים הניצב וההיטל הניצב

הגדרה: יהי V מרחב מ"פ ותהי S תת קבוצה של V לא ריקה. נגדיר את: $S^{\perp}$ באופן הבא: $S^{\perp} = \{\, v \in V \mid \forall_{s \in S} : v \perp s \,\}$
(כלומר, $S^{\perp}$ היא קבוצת כל הווקטורים ב- V אשר ניצבים לכל איברי S).
הגדרה: יהי V מרחב מ"פ ויהי U תת מרחב של V. אזי $U^{\perp}$ נקרא **המשלים הניצב** של U.
הגדרה: יהי V מרחב מ"פ ו- U ת"מ של V ויהי $v \in V$ כלשהו. וקטור $p \in U$ נקרא **ההיטל הניצב** של v על U אם"ם מתקיים: $d(v,p) < d(v,u)$ לכל $p \neq u \in U$.
(מסמנים את ההיטל הניצב של v על U באופן הבא: $P_U(v)$)

טענות:
יהי V מרחב מ"פ ותהי $S \subseteq V$ אזי:

- אם S לא ריקה אז $\vec{0} \in S^{\perp}$
- אם S לא ריקה אז $S^{\perp}$ תת מרחב של V.
- יהי U תת מרחב של V כך ש: $U = Sp\,\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = Sp(S)$ (כלומר: $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$) אזי מתקיים: $U^{\perp} = S^{\perp}$
- $V^{\perp} = \{\vec{0}\}$
- יהי U תת מרחב של V אזי מתקיים: $U \cap U^{\perp} = \{\,\vec{0}\,\}$
- יהי U ת"מ של V ויהי $v \in V$. אם $p \in U$ מקיים $(v - p) \in U^{\perp}$ אזי p הוא ההיטל הניצב של v על U.
- יהי U ת"מ של V ויהי $v \in V$ כלשהו. יהי $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ <u>בסיס אורתוגונלי</u> של U.
  אזי הווקטור p הוא ההיטל של v על U:
$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$$

- יהיו U ת"מ של V אזי מתקיים: $V = U \oplus U^{\perp}$
- יהי U ת"מ של V. אזי מתקיים: $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$
- יהי U ת"מ של V ויהי $v \in V$ כלשהו. אזי מתקיים: $v = P_U(v) + P_{U^{\perp}}(v)$
- יהי U ת"מ של V ויהי $v \in V$ כלשהו אזי $P_U(v) = v$ אם"ם $v \in V$.

מציאת בסיס אורתוגונלי לתת מרחב

תהי $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ קבוצה בת"ל.
נרצה למצוא קבוצה אורתוגונלית $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ כך ש: $Sp\{w_1, w_2, \dots, w_k\} = Sp\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$.
התהליך למציאת קבוצה כזו נקרא **תהליך גראם-שמידט:**

1. מגדירים תחילה: $w_1 = u_1$
2. נניח שמצאנו $\{w_1, w_2, \dots, w_j\}$ קבוצה אורתוגונלית. אזי את האיבר הבא נחשב באופן הבא: $w_{i+1} = u_{i+1} - \sum_{i=1}^{j} \frac{\langle u_{j+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$
3. נמשיך בסעיף 2 עד אשר נגיע לקבוצה בגודל k.

הערה: במידה ומעוניינים בבסיס אורתונורמלי יש לנרמל כל וקטור לפני שמוסיפים אותו לקבוצה.

לכסון מטריצות

הגדרה: יהיו מטריצות A, B בגודל $n \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$.
נאמר ש- B **דומה** ל- A מעל $\mathbb{F}$ אם"ם קיימת מטריצה P הפיכה מעל $\mathbb{F}$ כך ש: $B = P^{-1}AP$
הגדרה: תהי A מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר ש- A **לכסינה** מעל $\mathbb{F}$ אם"ם קיימת מטריצה אלכסונית D כך ש- A דומה ל- D.
הגדרה: תהי $A_{n\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $\vec{0} \neq v \in \mathbb{F}^n$. נאמר ש- v הוא **וקטור עצמי** של A אם"ם קיים $d \in \mathbb{F}$ כך ש: $Av = dv$ ובמצב הזה d יקרא **הערך העצמי** של A.
הגדרה: בהינתן מטריצה A, **הפולינום האופייני** של A מסומן $f_A(x)$ ומוגדר להיות: $f_A(x) = |xI - A|$
הגדרה: יהי c ע"ע של מרטיצה $A_{n\times n}$. **המרחב העצמי** של A השייך ל- c מסומן V_c ומוגדר כמרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(cI - A)v = 0$
הגדרה: תהי $A_{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}$ ויהי $g(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i$ פולינום כלשהו מעל $\mathbb{F}$.
אזי $g(A)$ מוגדר באופן הבא: $g(A) = \sum_{i=1}^{m} b_i A^i$.

טענות:

- מטריצה A תמיד דומה לעצמה כי אפשר לבחור $P = I$
- אם B דומה ל- A מעל $\mathbb{F}$ אז גם A דומה ל- B מעל $\mathbb{F}$.
- אם B דומה ל- A ו- C דומה ל- B אז C דומה ל- A.
- מצירוף הסעיפים הקודמים נקבל שיחס הדמיון הוא יחס שקילות.
- אם A דומה למטריצה אלכסונית D אזי מתקיים: $A^m = P^{-1}D^mP$.
- תהי $A_{n\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $c \in \mathbb{F}$ אזי: $|cI - A| = 0 \Leftrightarrow c$ ערך עצמי של A.
- תהי $A_{n\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$. מעלתו של הפולינום האופייני של A היא n והמקדם של x^n הוא 1.
- תהי מטריצה$A_{n\times n}$. לכל ערך עצמי c של A חייב להיות וקטור עצמי. (כלומר, לא ייתכן שלמערכת $(cI - A)v = 0$ יהיה פתרון יחיד)
- יהיו $c_1, c_2, \dots, c_k$ כל הע"ע של $A_{n\times n}$ ויהי B_i בסיס עבור V_{c_i} אזי הקבוצה: $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ היא בת"ל.

  מכאן ש- A לכסינה אם"ם:
$$\sum_{i=1}^{k} \dim\left(V_{c_i}\right) = n$$
- לשתי מטריצות דומות יש את אותו פולינום אופייני.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ בעלת ע"ע יחיד $c \in \mathbb{F}$ אזי מתקיים: A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם $A = cI$.
- **משפט קיילי המילטון:** עבור $A_{n\times n}$ מתקיים $f_A(A) = 0_{n\times n}$ כאשר $f_A(x)$ הוא הפולינום האופייני של A.
- יהיו A, B מטריצות דומות: $A = PBP^{-1}$ ויהי $g(x)$ פולינום כלשהו אזי מתקיים: $g(A) = Pg(B)P^{-1}$.
- תהי $D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית כלשהי ויהי $g(x)$ פולינום כלשהו אזי מתקיים: $g(D) = \begin{pmatrix} g(d_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g(d_n) \end{pmatrix}$.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי הו"ע שלה עם הע"ע c. אזי לכל $m \geq 1$ שלם מתקיים v ו"ע של A^m עם ע"ע c^m.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$. 0 ע"ע של A אם"ם A איננה הפיכה.

לכסון אוניטרי

הגדרה: **לכסון אוניטרי** הוא לכסון בעזרת בסיס אורתונורמלי כלומר, בלכסון אוניטרי מחפשים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע של A.

הגדרה: עבור $A_{m\times n}$ מטריצה מרוכבת נסמן ב- $\bar{A}$ את המטריצה שאיברה ה- i, j הוא $\overline{a_{ij}}$.

הגדרה: עבור $A_{m\times n}$ מטריצה מרוכבת נסמן: $\boldsymbol{A}^* = (\bar{A})^t = \overline{(A^t)}$.

הגדרה: מטריצה $P_{n\times n}$ המקיימת $P^* = P^{-1}$ נקראת **מטריצה אוניטרית**.

הגדרה: נאמר שמטריצה A **ניתנת ללכסון אוניטרי** אם"ם קיימות P אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש: $P^*AP = D$.

הגדרה: מטריצה $A_{n\times n}$ נקראת **מטריצה נורמלית** אם"ם מתקיים $AA^* = A^*A$.

הגדרה: מטריצה $A_{n\times n}$ נקראת **מטריצה הרמטית** אם"ם מתקיים $A^* = A$.

הגדרה: מטריצה אוניטרית ממשית נקראת **מטריצה אורתוגונלית** ועמודותיה הן קבוצה אורתונורמלית.

הגדרה: עבור A מטריצה ממשית נאמר שיש ל- A **לכסון אורתוגונלי** אם יש לה לכסון אוניטרי מעל $\mathbb{R}$.

טענות:

- תהי מטריצה מרוכבת $P_{n\times n}$ אזי עמודות P מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$ אם"ם $P^* = P^{-1}$.
- תכונות המטריצה הצמודה. יהיו A, B מטריצות וסקלר k אזי מתקיים:
  - $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$
  - $(kA)^* = \bar{k}A^*$
  - $(AB)^* = B^*A^*$
  - $(A^*)^* = A$
- כל מטריצה אלכסונית היא נורמלית.
- כל מטריצה ממשית סימטרית היא נורמלית.
- כל מטריצה אוניטרית היא נורמלית.
- כל מטריצה הרמטית היא נורמלית.
- **משפט הלכסון האוניטרי:** תהי מטריצה $A_{n\times n}$ אזי A ניתנת ללכסון אוניטרי מעל $\mathbb{C}$ אם"ם A נורמלית.
- תהי A מטריצה נורמלית ויהיו u, v וקטורים עצמיים של A השייכים לערכים עצמיים שונים של A אזי מתקיים: $\langle u, v\rangle = 0$.
- תהי A מטריצה כלשהי ויהיו u, v וקטורים כלשהם ב- $\mathbb{F}^n$ אזי מתקיים:
  - $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$
  - $\langle A^*u, v\rangle = \langle u, Av\rangle$
- תהי מטריצה $A_{n\times n}$ נורמלית ויהי $v \in \mathbb{F}^n$ אזי מתקיים: $Av = \vec{0} \Leftrightarrow A^*v = \vec{0}$.
- תהי A נורמלית ויהי $c \in \mathbb{F}$ אזי $A - cI$ נורמלית.
- תהי A נורמלית ו- v ו"ע שלה עם הע"ע c אזי v ו"ע של A^* עם הע"ע $\bar{c}$.
- תהי A מטריצה נורמלית כלשהי ויהיו u, v וקטורים עצמיים של A אזי מתקיים: $u \perp v$.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה מרוכבת אזי אם A הרמיטית כל ע"ע שלה ממשי.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה מרוכבת אזי אם A אוניטרית כל ע"ע שלה מקיים: $|z| = 1$.
- **משפט הלכסון האורתוגונאלי:** תהי $A_{n\times n}$ ממשית אזי ל- A יש <u>לכסון אורתוגונלי</u> אם"ם A <u>סימטרית</u>.

מטריצות סיבוב, שיקוף והיטל

הגדרה: נגדיר **מטריצת סיבוב** A בזווית α נגד כיוון השעון ביחס לראשית באופן הבא: $A=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

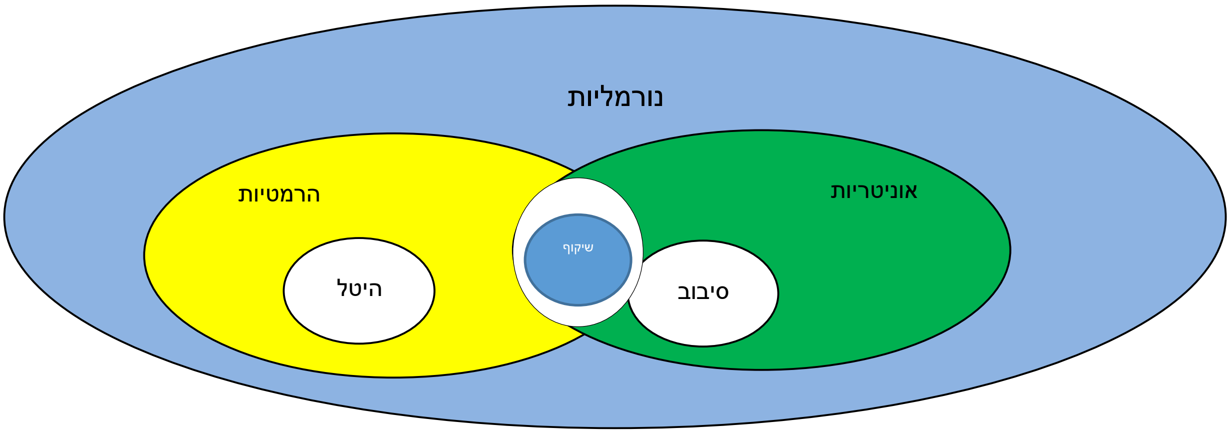
הגדרה: נגדיר **מטריצת שיקוף** A ביחס לציר V_1 (כאשר V_1 הוא המרחב העצמי של הע"ע 1) באופן הבא: $A=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

הגדרה: נגדיר **מטריצת היטל** A ביחס לישר $U=Sp\{(a,b)\}$ (ת"מ בעל מימד 1) באופן הבא: $A=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}$

סיכום תכונות

	האם יש לכסון אוניטרי	**האם סימטרית**	**האם יש לכסון אורתוגונלי**	**האם הפיכה**	**דטרמיננט**
מטריצות סיבוב	כן	לא, מלבד $\pm I$	לא, מלבד $\pm I$	כן	1
מטריצות שיקוף	כן	כן	כן	כן	-1
מטריצות היטל	כן	כן	כן	לא	

הקשר בין סוגי המטריצות:



פולינומים מאפסים ופולינום מינימלי של מטריצה

הגדרה: **פולינום מתוקן** ממעלה n הוא פולינום שבו המקדם של x^n הוא 1.

הגדרה: תהי $A_{n\times n}$ ויהי $g(x)\in F[x]$. נאמר ש- $g(x)$ **פולינום מאפס** של A אם"ם מתקיים $g(A)=0_{n\times n}$.

הגדרה: פולינום $g(x)$ נקרא **פולינום פשוט** מעל $\mathbb{F}$ אם קיימים $c_1,c_2,\dots,c_k$ שונים זה מזה כך ש: $g(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_k)$.

הגדרה: תהיה מטריצה $A_{n\times n}$. פולינום מתוקן ממעלה מינימלית המאפס את A נקרא **פולינום מינימלי** של A ומסומן $m_A(x)$.

טענות:

- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{F}$ בעלת הע"ע $c_1,c_2,\dots,c_k$. נסמן: $g(x)=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_k)$ אזי מתקיים: $g(A)=0$.
- **קריטריון לכסון**: תהי A מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ אזי A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם קיים פולינום פשוט מעל $\mathbb{F}$ המאפס את A.
- **קריטריון לכסון**: תהי A מטריצה מעל שדה $\mathbb{F}$ אזי A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם"ם $m_A(x)$ פולינום פשוט מעל $\mathbb{F}$.
- יהי v וקטור עצמי של A עם ע"ע c ויהי $g(x)$ פולינום כלשהו. אזי v וקטור עצמי של $g(A)$ עם הע"ע $g(c)$.
- יהי $g(x)$ פולינום כלשהו שמאפס את A. אזי כל ע"ע של A הוא שורש של g.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. מעלת הפולינום המינימלי של A היא לכל היותר n (כי הפולינום האופייני של A הוא פולינום מתוקן שמאפס את A).
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. הפולינום המינימלי של A הוא יחיד.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. אזי $m_A(x)$ מחלק כל פולינום שמאפס את A ובפרט את $f_A(x)$.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. שורשיו של $m_A(x)$ הם בדיוק כל הערכים העצמיים של A.

חבורות

הגדרה: קבוצה G עם פעולה: $*$ כלשהי נקראת **חבורה** אם"ם מתקיימים התנאים הבאים:

- **סגירות:** לכל $a,b \in G$ מתקיים: $a*b \in G$
- **אסוציאטיביות:** לכל $a,b,c \in G$ מתקיים: $a*(b*c)=(a*b)*c$
- **קיום איבר ניטרלי:** קיום איבר $1_G \in G$ אשר לכל $a \in G$ מקיים: $a*1_G=a$
- **קיום איבר הופכי:** לכל $a \in G$ קיים $a^{-1} \in G$ כך ש: $a^{-1}*a=a*a^{-1}=1_G$

הגדרה: עבור $a \in G$ ועבור $m>0$ שלם נגדיר חזקה באופן הבא: $a^m=a*a*\ldots*a$ (m פעמים) **הערה:** $(a^{-1})^m=a^{-m}$

הגדרה: לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}=g^{m-1} \Leftrightarrow g^m=1_G$ וכן $m=O(g)$. ולכן נקבל כי לכל $g \in G$ מתקיים $g \neq g^{-1} \Leftrightarrow O(g) \geq 3$.

הגדרה: חבורה G בה הפעולה $*$ חילופית נקראת חבורה **אבלית.**

הגדרה: חבורה G תקרא חבורה **דיהדרלית** אם היא מורכבת מהעתקות השיקוף ומהעתקות הסיבוב של מצולע בעל n צלעות.

הגדרה: תהי G חבורה כלשהי. מספר איברי G נקרא **הסדר** של G.

הגדרה: תהי חבורה G ויהי $a \in G$ כלשהו. השלם החיובי המינימלי m המקיים $a^m=1_G$ נקרא **הסדר של האיבר a** וסימונו: $m=O(a)$.

הגדרה: תהי חבורה G כלשהי. תת קבוצה H של G נקראת **תת חבורה** של G ומסומנת $H \leq G$ אם מתקיימים התנאים הבאים:

- **סגירות:** $\forall a,b \in H: a*b \in H$
- **קיום איבר ניטרלי:** $1_G \in H$
- **קיום איבר הופכי:** $\forall a \in H: \ a^{-1} \in H$

הגדרה: תהי חבורה G ויהי $a \in G$. נסמן: $\langle a \rangle = \{ a^i \mid i \in \mathbb{Z} \}$ (כלומר כל החזקות של a).
הקבוצה $\langle a \rangle$ היא תת חבורה ונקראת **תת חבורה הנוצרת ע"י a.**

הגדרה: חבורה G המקיימת $G=\langle a \rangle$ עבור $a \in G$ מסוים נקראת **חבורה ציקלית.**

הגדרה: תהי חבורה G ותת חבורה H של G.
עבור $a \in G$ הקבוצה $H_a=\{ h \in H \mid h*a \}$ נקראת **קוסט** של H ב- G.

הגדרה: נסמן ב- S_n את קבוצת כל התמורות על הקבוצה $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ ($|S_n|=n!$).
S_n עם פעולת הרכבה היא חבורה אשר נקראת **חבורת תמורות.**

טענות:

- תהי חבורה G ויהיו $g,h,x \in G$ כלשהם. אזי מתקיים:
  - $gx=hx \Leftrightarrow g=h$
  - $xg=xh \Leftrightarrow g=h$
  - $(gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}$
  - $(g^k)^{-1}=(g^{-1})^k=g^{-k}$
- תהי G חבורה סופית ויהי $a \in G$ כלשהו. אזי מתקיים $O(a)$ סופי.
- תהי G חבורה כלשהי ויהי $a \in G$ כלשהו. הקבוצה $\langle a \rangle$ היא תת חבורה.
- תהי חבורה G ויהי $a \in G$ המקיים: $O(a)=m$ כך ש- m סופי. אזי מתקיים: $|\langle a \rangle|=O(a)=m$
- **משפט לגרנז':** תהי G חבורה סופית ותהי H תת חבורה של G. אזי $|H|$ מחלק $|G|$ (כלומר מספר האיברים ב- H מחלק את מספר האיברים ב- G)
  - עבור $a \in G$ מתקיים: $O(a)$ מחלק את $|G|$.
  - תהי G חבורה כלשהי מסדר ראשוני אזי לכל $1 \neq a \in G$ מתקיים $\langle a \rangle = G$ (בפרט G ציקלית)
- כל חבורה ציקלית היא אבלית.
- תהי H תת חבורה סופית מסדר m של G אזי מתקיים: $|H_a|=m$.
- תהי חבורה G ותת חבורה H של G. אם $a \notin H$ אז מתקיים: $H_a \cap H = \emptyset$
- תהי חבורה G ותת חבורה H של G. אם $a \in H$ אז מתקיים: $H_a=H$
- תהי חבורה G ותת חבורה H של G. כל איבר של G נמצא בקוסט כלשהו של H.
- תהי חבורה G ותת חבורה H של G ויהיו $a,b \in G$ אזי מתקיים: $H_a=H_b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$
- תהי חבורה G ותת חבורה H של G. ויהיו $a,b \in G$ אזי מתקיים: $H_a=H_b$ **או** $H_a \cap H_b = \emptyset$ (כלומר אין איבר של G ששייך לשני קוסטים שונים של H)
- תהי G חבורה סופית מסדר n אזי לכל $a \in G$ מתקיים: $a^n=1_G$.
- **משפט פרמה:** יהי P ראשוני כלשהו. אזי לכל $a \in \mathbb{Z}_P{}^X$ מתקיים: $a^{P-1}=1_G$.
- כל חבורה מסדר קטן מ- 6 היא אבלית.
- תהי G חבורה אבלית סופית מסדר n: $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$. נסמן: $u=g_1*g_2*\ldots*g_n$ אזי מתקיים:
  u היא מכפלת כל איברי G השונים אשר מקיימים: $O(g)=1$ או $O(g)=2$.
  (עבור n אי זוגי נקבל $u=1_G$ כיוון שע"פ לגרנז' אין בחבורה איברים מסדר 2).
- תהי G חבורה סופית מסדר n ויהיו A,B תת חבורות של G כך שמתקיים: $G=A \cup B$ אזי בהכרח $A=G$ **או** $B=G$.

סוגי מטריצות ותכונות

המטריצה הצמודה (*Conjugate transpose*) היא מטריצה המתקבלת משחלוף שורות בעמודות והצמדה; של רכיבי מטריצה מרוכבת A. כך ש:

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \overline{\boldsymbol{A^T}}$$

- מטריצה **סימטרית** היא מטריצה ריבועית המקיימת $\boldsymbol{A^T = A}$ (בדר"כ בעלת ערכים **ממשיים** בלבד)
- מטריצה **הרמיטית** היא מטריצה ריבועית המקיימת $\boldsymbol{A^* = A}$ (ערכיה **מרוכבים**, ובפרט ממשיים, המקבילה המרוכבת של סימטרית)
- מטריצה **נורמלית** היא מטריצה ריבועית המקיימת $\boldsymbol{A^*A = AA^*}$ (ערכיה **מרוכבים**, ובפרט ממשיים)
- מטריצה **אוניטרית** היא מטריצה ריבועית המקיימת $\boldsymbol{A^* = A^{-1}}$ (ערכיה **מרוכבים**, ובפרט ממשיים)
- מטריצה **אורתוגונלית** היא מטריצה ריבועית המקיימת $\boldsymbol{A^T = A^{-1}}$ (ערכיה **ממשיים**, למעשה היא אוניטרית ממשית)

<u>**תכונות**</u>

<u>**הרמיטית**</u>: $A^* = A$ (צמודה לעצמה)

- כל הרמיטית היא **נורמלית**.
- <u>ערכי האלכסון הראשי חייבים להיות ממשיים</u>, כיוון שרק ממשיים שווים לצמוד שלהם $(\overline{7} = 7)$
- כל הרמיטית ניתנת **ללכסון אוניטרי** (כלומר ע"י מטריצה אוניטרית). והמטריצה המתקבלת היא אלכסונית ממשית.
- לכן <u>כל הע"ע</u> של הרמיטית הם <u>ממשיים</u> וכל ויש לה <u>n וו"ע בלת"ל</u>. גם ניתן למצוא בסיס אורתונורמלי בעל n וו"ע.
- סכום הרמיטיות הוא הרמיטי. גם ההופכית הרמיטית. המכפלה הרמיטית $AB = BA \Leftrightarrow$. לכן גם A^n הרמיטית $A \Leftrightarrow$ הרמיטית ו- $n \in \mathbb{Z}$.
- עבור וקטור מרוכב כלשהו v, מתקיים כי המכפלה v^*Av ממשית, כיוון ש- $v^*Av = (v^*Av)^*$.
- מטריצה הרמיטית מרוכבת מסדר $n \times n$ לא יוצרת מ"ו מעל $\mathbb{C}$, כיוון שמטריצת הזהות I_n היא הרמיטית. היא כן יוצרת מ"ו מעל $\mathbb{R}$.
- הדטרמיננטה של הרמיטית הוא ממשי.
- סכום מטריצה ריבועית והצמודה שלה נותן הרמיטית $(C + C^*)$
- חיסור מטריצה ריבועית בצמודה שלה נותן אנטי-הרמיטית $(C - C^*)$. אנטי הרמיטית מקיימת $\boldsymbol{A^* = -A}$.

<u>**נורמלית**</u>: $A^*A = AA^*$

- מטריצה ריבועית ממשית A מקיימת $A^* = A^T$ ולכן היא נורמלית אם מתקיים ש- $A^TA = AA^T$.
- נורמליות היא דרך טובה לבדוק לכסינות: מטריצה נורמלית $\Leftrightarrow$ אם היא 'דומה אוניטרית' למטריצה אלכסונית.
- לכן כל מטריצה המקיימת $A^*A = AA^*$ היא לכסינה.
- איזה מטריצות ידועות כנורמליות:
  - <u>מהמרוכבות</u>: אוניטרית, הרמיטית ואנטי הרמיטית.
  - <u>מהממשיות</u>: אורתוגונלית, סימטרית ואנטי-סימטרית.
- מטריצה נורמלית היא לא בהכרח אף אחת מאלה ↑. יכול להיות שכן, אך לא ניתן להסיק זאת רק מנורמליות.
- מטריצה נורמלית משולשית היא אלכסונית.
- **דמיון מטריצות**: עבור שתי מטריצות A, B ריבועיות, A ו- B דומות אחת לשנייה אם מתקיים $\boldsymbol{A = P^{-1}BP}$ (עבור מטריצה ריבועית הפיכה כלשהי P)
- **מטריצות דומות** מייצגות את אותה טרנספורמציה לינארית, בבסיסים שונים. P היא מטריצת החלפת בסיסים.
- **מטריצות דומות** חולקות מספר רב של תכונות בינהם: <u>פ"א, דטרמיננטה, עקבה, ע"ע, פ"מ, דרגה</u> ועוד...
- אם $P = U$ כלומר היא אוניטרית, אז המטריצות **דומות אוניטרית**.
- מטריצה A נקראית **לכסינה** אם היא <u>דומה למטריצה אלכסונית</u> D. כלומר קיימת P הפיכה, וניתן לומר באופן כללי: $\boldsymbol{A^m = P^{-1}D^mP}$.
- מטריצה A ניתנת **ללכסון אוניטרי** אם היא <u>דומה אוניטרית</u> למטריצה אלכסונית D. (נקרא גם **לכסינה אוניטרית**).
  כלומר קיימת $P = U$ הפיכה, D אלכסונית ומתקיים: $\boldsymbol{A = U^{-1}DU = U^*DU}$.
- <u>**משפט הליכסון האוניטרי**</u>: A נורמלית $\Leftrightarrow$ קיים לה לכסון אוניטרי; קיימים D אלכסונית ו- U אוניטרית: $A = UDU^*$.
  ערכי האלכסון של D הם הע"ע של A ועמודות U הם הו"ע המתאימים. (משפט הפירוק הספקטרלי).
- משפט הפירוק הספקטרלי נותן פירוק קנונית של המטריצה לצורה קנונית בה המטריצה מיוצגת ע"י הע"ע והו"ע שלה.
  רק מטריצות לכסינות ניתנות לפירוק כזה $(eigendecomposition)$
- <u>**באופן שקול**</u>, ניתן לומר שקיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ המורכב מו"ע של A וכל הע"ע של A ממשיים.
- <u>**באופן שקול**</u>, A נורמלית $\Leftrightarrow$ המרחבים העצמיים של A פורשים את $\mathbb{C}^n$ והם <u>אורתוגונלים</u> אחד לשני.
- כלומר, המרחב כולו נפרש ע"י קבוצה <u>אורתונורמלית</u> של ו"ע של A.
- לכל x, $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

<u>**אוניטריות**</u>: $A^* = A^{-1}$

- נשים לב שההגדרה שקולה ללומר: $A^*A = AA^* = I$.
- כל אוניטרית היא **נורמלית**.
- מטריצה אוניטרית שכל מרכיביה הם **ממשיים** היא **אורתוגונולית**.
- עבור כל מטריצה אוניטרית A מתקיים $\boldsymbol{\det(A) = 1}$. למעשה $|\det(A)|^2 = 1$. נזכר ש- $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$.
- מטריצה אוניטרית <u>שומרת מ"פ</u>: $\langle \boldsymbol{Ax, Ay} \rangle = \langle x, A^*Ay \rangle = \langle x, Iy \rangle = \langle \boldsymbol{x, y} \rangle$.
- מטריצה אוניטרית <u>שומרת על נורמה</u>: $\|Ax\| = \|x\|$.
- המרחבים הוקטורים של מטריצה אוניטרית הם אורתוגונלים.

- התנאים הבאים שקולים:
  - U אוניטרית.
  - U^* אוניטרית.
  - U הפיכה וכן $U^{-1} = U^*$.
  - עמודות U מהוות בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{C}^n$.
  - שורות U מהוות בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{C}^n$.
  - U היא מטריצה נורמלית עם ע"ע הנמצאים על מעגל היחידה.

<u>**אורתוגונלית**</u>: $A^T = A^{-1}$

- נשים לב שההגדרה שקולה ללומר: $A^TA = AA^T = I$.
- מטריצה אורטוגונלית היא בהכרח **הפיכה** $A^{-1} = A^T$, **אוניטרית** $A^{-1} = A^*$, ולכן **נורמלית** $A^*A = AA^*$.
- הדטרמיננטה של מטריצה אורטוגונלית היא ± 1.
- למעשה מטריצה אורטוגונלית היא <u>מטריצה אוניטרית מעל הממשיים</u>. לכן גם תכונותיה זהות לאוניטרית.
- ל- A יש **לכסון אורתוגונלי** (מעל $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ A **סימטרית**. קיימים D אלכסונית ו- Q אורתוגונלית כך ש: $A = QDQ^T$.
  (דומה ללכסון אוניטרי המתקיים מעל $\mathbb{C}$ אמ"מ A נורמלית)

<u>ליכסון</u>

מטריצה ריבועית A היא **לכסינה** אם היא דומה למטריצה אלכסונית D. כלומר קיימת P הפיכה כך ש: $\boldsymbol{D = P^{-1}AP}$, כלומר $P^{-1}AP$ אלכסונית גם כן.

- מטריצה $A_{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}$ לכסינה $\Leftrightarrow$ סכום מימדי המרחבים הוקטוריים שלה שווה ל- n, כלומר קיים בסיס ל- $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע של A.