



מספר זהות:

--	--	--	--	--	--	--	--

סמסטר ב' מועד ב' תשע"ז  
תאריך: 26.07.2017  
שעה: 09:00  
משך הבחינה: שלוש וחצי שעות  
לא תינתן הארכת זמן  
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות  
מחשבון

### בחינה בקורס: מבוא להסתברות

מדבקית  
ברקוד

- נא לקרוא את כל המבחן בהתחלה.
- בבחינה 4 שאלות, עליכם לענות על כולן.
- משקל כל שאלה רשום לידה, משקלם של סעיפים שונים באותה השאלה אינו בהכרח שווה. סך הניקוד בבחינה – 100 נקודות.
- את הפתרונות יש לכתוב בעט בלבד וללא שימוש בטיפקס, במקומות המיועדים לכך.
- שימו לב, מחברות הטיוטה לא ייבדקו.
- את הפתרונות יש לנמק היטב. פתרונות לא מנומקים לא יזכו במלוא הנקודות.
- בחינה זו כוללת 11 עמודים, כולל עמוד זה.

הצהרה

**שאלה 1 (25 נקודות)**

טימון ופומבה אוהבים לשיר שירים ושרים מדי יום.  
משך הזמן  $Y$  (בדקות) שטימון שר מדי יום מתפלג בהתפלגות מעריכית עם תוחלת של 70 דקות.  
משך הזמן  $X$  (בדקות) שפומבה שר מדי יום מתפלג בהתפלגות רציפה בעלת פונקציית צפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 60 \\ c(x-60) & 60 < x \leq 70 \\ d & 70 < x \leq 80 \\ 0 & 80 < x \end{cases}$$

א. ידוע ש  $P(X \geq 75) = \frac{3}{8}$ , מצאו את ערכי  $c$  ו- $d$  כך שפונקציית הצפיפות של

המשתנה  $X$  תהיה פונקציית צפיפות חוקית.

ב. הוכיחו (על ידי דוגמא) שהמשתנה  $X$  לא מקיים את תכונת חוסר הזיכרון.

ג. חשבו את  $E(X)$ .

ד. מחר סימבה יצטרף לשירה. בהסתברות 0.2 ישיר רק עם טימון, בהסתברות 0.3 ישיר רק עם פומבה ובהסתברות 0.5 ישיר עם שניהם ( קודם עם טימון ולאחר מכן עם פומבה). חשבו את תוחלת זמן השירה של סימבה מחר.

הסעיף הבא אינו קשור לסעיפים הקודמים

ה. תנו דוגמא למשתנה מקרי בדיד שהתוחלת שלו גדולה ב-2 מהשכיח שלו.

**שאלה 2 (25 נקודות)**

להקה של חיות הכוללת 4 אריות, 2 פילים, 2 זברות והיפופוטם אחד (סך הכל 9 חיות) מכינה שיר לקראת הכתרתו של סימבה. מתוך הלהקה 4 חיות ייבחרו (ללא החזרה) באופן אקראי לשיר סולו בטכס ההכתרה.

נסמן ב:

$X$  – מספר הפילים שישירו סולו.

$Y$  – מספר סוגי החיות שישירו סולו.

למשל אם 4 אריות ישירו סולו אז  $X=0, Y=1$ , אם 2 אריות, פיל אחד וזברה

אחת ישירו סולו אז  $X=1, Y=3$ .

א. מצאו את טבלת ההתפלגות הדו-מימדית של  $(X, Y)$ .

ב. חשבו את  $\text{COV}(X, Y)$ .

ג. חשבו את  $E(XY | X \geq 1)$ .

**שאלה 3 (30 נקודות)**

מדי יום סימבה ונלה הולכים לטייל בממלכת החיות. הם הולכים לטייל בדיוק באחד מהמקומות הבאים: ביצה, בית הקברות לפילים או מדבר.

בכל אחד מהמקומות יכול להיות שישחקו או יבצעו תעלול (ייתכן שיעשו את שניהם וייתכן שלא יעשו כלום). ההסתברות שישחקו היא 0.3 וההסתברות שיבצעו תעלול היא 0.5, אך הקשר בין שני המאורעות: 'ישחקו' ו'יבצעו תעלול' תלוי במקום שבו יטיילו.

בהסתברות 0.2 ילכו לביצה. אם ילכו לביצה המאורעות 'ישחקו' ו'יבצעו תעלול' זרים. בהסתברות 0.7 ילכו לבית הקברות לפילים. אם ילכו לשם אז המאורעות 'ישחקו' ו'יבצעו תעלול' בלתי-תלויים.

בהסתברות 0.1 ילכו למדבר. אם ילכו לשם אז כאשר הם משחקים הם תמיד גם מבצעים תעלול.

**בכל מקרה, ימים שונים הינם בלתי-תלויים.**

א. מה ההסתברות שמחר סימבה ונלה ישחקו ולא יעשו תעלול? מה ההסתברות שיעשו בדיוק דבר אחד (ישחקו או יבצעו תעלול)?

ב. מה ההסתברות שמתוך 10 הימים הבאים לפחות ב-2 מהם סימבה ונלה ילכו למדבר אם ידוע שלפחות פעם אחת ילכו למדבר.

ג. סקאר, דודו של סימבה, מכין מארב לפעם הראשונה שיבקרו בבית הקברות של הפילים. בכל יום הוא מוסיף למארב 2 צבועים, עד למכסימום של 10 צבועים. כלומר, אם הפעם הראשונה שילכו לבית הקברות תהיה מחר יהיו במארב 2 צבועים, אם הפעם הראשונה תהיה בעוד יומיים ימצאו 4 צבועים, בעוד 3 ימים 6 צבועים, בעוד 4 ימים 8 צבועים והחל מהיום החמישי 10 צבועים. מצאו את תוחלת מספר הצבועים שיחכו להם בפעם הראשונה שילכו לבית הקברות של הפילים.



ד. סימבה ונלה הלכו לביצה. ליד הביצה פגשו בשורה של 10 קופים שמהם 3 קופים יושבים ו-7 קופים עומדים?

i. מה ההסתברות ששלושת הקופים היושבים נמצאים אחד ליד השני בשורה?

ii. מה ההסתברות שלפחות באחד מהקצוות של השורה ישנו קוף יושב?

**שאלה 4 (20 נקודות)**

הלביאה סרבי מנהיגה להקה של 20 לביאות, מתוכן ל-10 לביאות יש פרווה אפורה ול-10 לביאות פרווה לבנה. לפני היציאה לציד סרבי מסדרת באופן אקראי את 20 הלביאות במבנה מלבני המתואר בדיאגרמה למטה, המבנה כולל 2 שורות ו-10 טורים, כך שבכל שורה 10 לביאות ובכל טור 2 לביאות.

מבנה להקת הלביאות:

לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה
לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה	לביאה

לביאה לבנה תהיה **לביאה שמחה** אם מתקיים התנאי הבא:

- היא עומדת בשורה הראשונה ומאחוריה ומשני צדדיה יש לביאות אפורות.

נסמן ב-  $X$  את מספר חלביאות השמחות.

א. חשבו את  $E(X)$ .

מספר מחברת \_\_\_\_\_

ב. חשבו את  $V(X)$ .