חובה למלא תאריך: 20.12.18

מקצוע: [illegible] 1	
מספר תרגיל: 5	
קבוצה: ב׳	סמסטר: ב׳
ת.ז. 1: 308335272	מגיש 1: [illegible]
ת.ז. 2:	מגיש 2:

רשות בלבד:

מספר עמודים:	תאריך הגשה:
מספרי השאלות שהוגשו בתרגיל:	

משוב:

ציון תרגיל: 100	התקבלה הגשה – בזמן / באיחור / באיחור עם אישור
הערות הבודק: מושלם	

חדו"א 1 - תרגילי הרצאה

CS) הוכיחו באינדוקציה על k שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ לכל k טבעי.

בסיס האינדוקציה - נבדוק עבור $k=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad \checkmark$$

עפ"י גבול ידוע.

הנחת האינדוקציה - נניח כי עבור k טבעי כלשהו הטענה מתקיימת, כלומר נניח:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$$

צעד האינדוקציה - נוכיח כי עבור $k+1$ הטענה מתקיימת, כלומר נוכיח:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}=0$$

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\cdot\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

לפי גבולות ידועים, הנחת האינדוקציה ואש"ג

הוכחנו את נכונות הטענה לכל k טבעי. מש"ל.

שאלה מתוך מבחן:

1) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(i) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול סופי וכן $a_n<b_n$ לכל n טבעי אז

$$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$$

הפרכה - נפריך בעזרת דוגמא נגדית.

$$b_n=(\tfrac{1}{2})^n \qquad a_n=0$$

שתי סדרות מתכנסות, ~~...~~ וכמו כן $0<(\frac{1}{2})^n$ לכל n טבעי. ~~$\lim_{n\to\infty}a_n$~~

אך $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ ו- $\lim a_n=0$ והגבולות שווים בסתירה לטענה $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$.

(ii) אם $0<a_n<b_n$ לכל n טבעי אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

הפרכה - נגדיר $a_n=\frac{1}{4}$ (הסדרה הקבועה $\frac{1}{4}$)

$b_n=\frac{1}{2}$ (הסדרה הקבועה $\frac{1}{2}$)

וכמו כן מתקיים $0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ כלומר $0<a_n<b_n$ לכל n טבעי.

אך $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ בסתירה לטענה ~~...~~ שהגבול הוא 0.

(iii) אם $0<a_n$ ו- $0<b_n$ לכל n טבעי וגם $\lim \frac{a_n}{b_n}=0$ אזי קיים N טבעי כך שלכל
$n \geq N$ טבעי מתקיים $a_n < b_n$.

הוכחה - נניח כי $a_n>0$ וגם $b_n>0$, ונתון $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ נוכיח קיים N טבעי כך שלכל n
טבעי המקיים $n \geq N$ מתקיים $a_n<b_n$.

לפי הגדרה, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n \geq N_0$
מתקיים $|a_n\cdot\frac{1}{b_n}|<\varepsilon$. בפרט, עבור $\varepsilon=1$ מתקיים $|a_n\cdot\frac{1}{b_n}|<1$

ולכן אם נבחר $N=N_0$, אז לכל n טבעי המקיים $n \geq N$ יתקיים:

$$|a_n\cdot\frac{1}{b_n}-0|=|a_n\cdot\frac{1}{b_n}|=a_n\cdot\frac{1}{b_n}<1$$

נתון $a_n>0$
$b_n>0$

$$\frac{a_n}{b_n}<1 \rightarrow a_n<b_n$$

כנדרש. מש"ל.

חדו"א 1 - תרגילי בית

3) חשבו לכל סדרה אם קיים גבול סופי. אם כן מהו. אחרת, הסבירו מדוע לא מתכנסת.

א. $a_n=\dfrac{4n^3-3n^2-1}{2n^3-6n^2+4n}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^2-1}{2n^3-6n^2+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3})}{n^3(2-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

$$=\frac{4-0-0}{2-0+0}=\frac{4}{2}=2$$

ע"פ גבול + אריתמטיקה של גבולות

ב. $b_n=\dfrac{2^n+3^n}{3\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{6\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(\frac{2^n}{3^n}+1)}{3^n(6\cdot\frac{2^n}{3^n}+\frac{2}{3})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{6\cdot(\frac{2}{3})^n+\frac{2}{3}}=\frac{0+1}{6\cdot 0+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

* ע"פ + סדרה q^n מתכנסת $-1<q<1$

ג. $c_n=\dfrac{3n^2}{n^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^3(1+\frac{1}{n^3})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n(1+\frac{1}{n^3})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}$$

$$=0\cdot\frac{1}{1+0}=0\cdot 1=0$$

ע"פ אריתמטיקה + גבולות

ה. $e_n=\sqrt[n]{3^n+4^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n(\frac{3^n}{4^n}+1)}=\lim_{n\to\infty}4\sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}+1}=\lim_{n\to\infty}4\left[(\tfrac{3}{4})^n+1\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=4\cdot 1=4$$

ע"פ אריתמטיקה + גבולות

ו. $f_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})\cdot\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n})\cdot(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2+2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n^2(1-\frac{2}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

ע"פ + אריתמטיקה של גבולות

ג. נתונות k סדרות מתכנסות $a_n^1, a_n^2, \dots a_n^k$ שגבולן $a^1, a^2, \dots a^k$. הראו בעזרת אינדוקציה ואריתמטיקה של גבולות שהסדרה $a_n^1+a_n^2+\dots a_n^k$ מתכנסת וגבולה $a^1+a^2+\dots a^k$.

בסיס האינדוקציה - נבדוק את נכונות הטענה עבור $k=1$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^1) = a^1$$

הנחת האינדוקציה - נניח את נכונות הטענה עבור k טבעי כלשהו, כלומר נניח:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^1+a_n^2+\dots a_n^k) = a^1+a^2+\dots a^k$$

צעד האינדוקציה - נוכיח את נכונות הטענה עבור $k+1$, כלומר נוכיח

$$\lim(a_n^1+a_n^2+\dots a_n^k+a_n^{k+1}) = a^1+a^2+\dots a^k+a^{k+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^1+a_n^2+\dots+a_n^k+a_n^{k+1}) \underset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=} \lim_{n\to\infty}(a_n^1+a_n^2+\dots a_n^k)+\lim_{n\to\infty} a_n^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_n^1+a_n^2+\dots a_n^k)+\lim_{n\to\infty}(a_n^k\cdot a_n) \underset{\text{הנחת האינדוקציה + אריתמטיקה של גבולות}}{=} a^1+a^2+\dots a^k + a^k\cdot a$$

$$= a^1+a^2+\dots a^k+a^{k+1}$$

הוכחנו את נכונות הטענה לכל k טבעי. מש"ל.