שם	דוגמא	תומך	פונקציית ההתפלגות - P	תוחלת E	שונות VAR
אחידה - $U(a,b)$	אם X = תוצאת הטלת קוביה אז: X מתפלג אחיד על: $U(\{1,2,3,4,5,6\})$. לכולם סיכוי אחיד.	$S=\{a,\dots,b\}$	$P(X=k)=\frac{1}{\|S\|}$ לכל $k\in S$.	$E(X)=\frac{a+b}{2}$.	$Var(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.
ברנולי (אינדיקטורים) - $ber(p)$	הטלת מטבע הוגן אז: $P(X=0)=P,(X=1)=\frac{1}{2}$	$\{0,1\}$. משתנים שמקבלים רק את הערך 0 או 1.	$P(X=1)=p,P(X=0)=1-p$	$E(X)=p$	$Var(X)=p(1-p)$.
בינומית - $Bin(n,p)$	מבצעים את אותו הדבר n פעמים כאשר כל הפעמים הם בלתי תלויים ובכל פעם הסיכוי להצליח הוא p. המשתנה X סופר כמה הצלחות מתוך ה n נסיונות היו.	$\{0,1,2,\dots,n\}$ כאשר n הוא מספר הניסויים, p היא ההסתברות להצלחה בכל ניסוי.	$P(X=k)=\frac{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.	$E(X)=np$	$Var(X)=np(1-p)$
גיאומטרית - $Geom(p)$	מבצעים את אותו הדבר שוב ושוב עד הפעם הראשונה שמצליחים, כל הפעמים הם בלתי תלויים ובכל פעם הסיכוי להצליח הוא p. המשתנה X סופר כמה נסיונות סה"כ היו.	$\{1,2,\dots inf\}$. לדוגמא - הטלת קוביה שוב ושוב עד שיוצא 6 בפעם הראשונה. X = כמה הטלות היו (כולל האחרונה).	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$.	$E(X)=\frac{1}{p}$.	$Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$.
היפרגיאומטרית - $Hyp(N,D,n)$	כאשר: N הוא מספר העצמים הכולל, D הוא מספר העצמים הטובים, n הוא מספר העצמים שבוחרים מתוך הסה"כ. X סופר את מספר העצמים הטובים שבחרנו	$\{max(0,n+D-N),\dots,min(n,D)\}$.	$P(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.	$E(X)=\frac{1}{p}$.	$Var(X)=\frac{Dn(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$
פואסון - $Pois(\lambda)$	בכל יחידת זמן אחת מתרחשים אירועים כאשר בממוצע יש λ אירועים לאותה יחידת זמן. X סופר את מספר האירועים שקרו ביחידת זמן אחת.	$\{0,1,2,\dots\}$. λ מתאר את ממוצע האירועים ליחידת זמן	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.	$E(X)=\lambda$	$Var(X)=\lambda$
בינומית שלילית - $NB(r,p)$	מנסים את אותו הדבר שוב ושוב עד שמצליחים r פעמים בדיוק ואז עוצרים. כל ניסוי הוא בלתי תלוי באחרים ובכל ניסוי הסיכוי להצלחה הוא p. X סופר את מספר הניסויים הכולל שעשינו.	$\{r,r+1,r+2,\dots\}$. כאשר r מתאר את מספר ההצלחות, p מתאר את הסיכוי להצלחה בכל ניסיון	$P(X=k)=\frac{k-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{k-r}$.	$E(X)=\frac{r}{p}$.	$Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$.

תוחלת E

הערך הממוצע של המשתנה X על פני כל הדגימות.

הגדרה: $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)\cdot X(\omega)$.

הגדרה דרך מאורעות: $E(X)=\sum_k P(X=k)\cdot k$.

תכונות של תוחלת:

- ליניאריות התוחלת:
  - $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
  - $E(aX)=aE(X)$.
  - $E(a)=a$.
- אם $X\leq Y$ לכל הערכים אז $E(X)\leq E(Y)$ (בתנאי שהתוחלות קיימות).
- תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי: $E(f(X))=\sum_k P(X=k)\cdot f(k)$.
- אם X,Y בלתי תלויים אז: $E(XY)=E(X)E(Y)$.

שונות VAR

ממוצע המרחקים של הערכים מהממוצע כאשר כל מרחק נמדד בריבוע.

הגדרה: $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

תכונות :

- $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$ רק אם X,Y בלתי תלויים.
- $Var(aX)=a^2Var(X)$.
- $Var(a)=0$.
- תמיד אי שלילית: $Var(X)\geq 0$

- אם X,Y תלויים: $Var(X+Y)=Var(X)+2Cov(X,Y)+Var(Y)$
- אם X,Y בלתי תלויים: $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

סכום שונות-

$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2\cdot Cov(X,Y)$

שונות משותפת COV

ממוצע מכפלת המרחקים של X מהממוצע שלו ו Y מהממוצע שלו.

הגדרה: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

הערה: $E(XY)=\sum_a\sum_b ab\cdot P(X=a,Y=b)$.

תכונות של שונות משותפת:

- $Cov(X,X)=Var(X)$.
- אם X,Y בלתי תלויים אז: $Cov(X,Y)=0$.
- אם $Cov(X,Y)=0$ אז הם בלתי מתואמים (אבל עדיין יכולים להיות תלויים).
  אם $Cov(X,Y)>0$ אז הם באותו כיוון של תלות ,(ככל שאחד גדל השני גדל ולהיפך)
  אם $Cov(X,Y)<0$ אז הם בכיוונים מנוגדים של תלות, (ככל שאחד קטן השני גדל).
- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.
- $Cov(aX,bY)=a\cdot b\cdot Cov(X,Y)$.
- $Cov(X+Z,Y+W)=Cov(X,Y)+Cov(X,W)+Cov(Z,Y)+Cov(Z,W)$.

הגדרה של שונות לפי Cov:

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

מקדם מתאם

התיאום בין X,Y אבל "סוג של" מנורמל.

הגדרה: $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$ (מוגדר רק כאשר 2 המשתנים אינם קבועים).

תכונות של מקדם מתאם:

- $|\rho(X,Y)|\leq 1$.
- $\rho(X+a,Y)=\rho(X,Y)$.
- $\rho(aX,Y)=\frac{a}{|a|}\cdot\rho(X,Y)$.
- $\rho(X,X)=1$.
- $\rho(X,Y)=0$ רק אם $Cov(X,Y)=0$.

אם $Y=aX+b$ אז אם $a>0$ אז: $\rho(X,Y)=1$ ואם $a<0$ אז $\rho(X,Y)=-1$.

אי שיוון מרקוב	אי שיוון צ'בישב
אם X משתנה חיובי אזי: $P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$ לכל $a>0$. לדוגמא: נניח ש X מתפלג בינומית עם: $n=30,p=1/2$. תנו חסם על ההסתברות ש $P(X\geq 20)$. פתרון: לפי מרקוב: $P(X\geq 20)\leq\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.	אם X משתנה מקרי אזי: $P(\|X-E(X)\|\geq a)\leq\frac{Var(X)}{a^2}$. לדוגמא: נניח ש X מתפלג בינומית עם: $n=30,p=1/2$. (נביא אותו לצורה לעיל) תנו חסם על ההסתברות ש $P(X\geq 20)$. פתרון: $P(X\geq 20)=P(X-15\geq 20-15)\leq P(\|X-15\|\geq 5)\leq\frac{7.5}{25}<\frac{1}{3}$.

נוסחת ההסתברות השלמה: $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(B^c)\cdot P(A|B^c)$.

נוסחת בייס: $P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$.

מאורעות תלויים: כדי לבדוק אם מאורעות הם בלתי תלויים בודקים האם: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

משתנים מקריים בלתי תלויים -

$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)$

$\Sigma_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{a_1}{1-q}$ $\Sigma_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

$\Sigma_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$ $\Sigma_{i=1}^{n}i=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$\Sigma_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}=(x+y)^n$

תכונות, משפטים ונוסחאות:

1. $pP(\Phi)=0,P(\Omega)=1$
2. $P(A^c)=1-P(A)$. (מאורע משלים)
3. אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\leq P(B)$.
4. אם A,B זרות אז: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
5. אם A,B לא זרות אז: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
6. נוסחת הכלה והדחה: אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות לא זרות אזי:

$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=1}^{n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k=1}^{n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots(-1)^{n+1}P(\cap_{i=1}^{n}A_i)$

הסתברות מותנה: $P(X=k|X>n)=\frac{P(X=k,X>n)}{P(X>n)}$

$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(Y=y|X=x)\cdot\mathbb{P}(X=x)$

הסתברות מותנה של מאורעות: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

ייצוג אחר: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$.

יהיו A, B ו-C מאורעות כלשהם באותו מרחב הסתברות (Ω, P). הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. (8 נקודות) אם A ו-B בלתי תלויים וגם B ו-C בלתי תלויים אז A ו-C בלתי תלויים.

ב. (8 נקודות) אם $P(A|C) > 2/3$ וגם $P(A|C^c) > 2/3$ אז $P(A) > 2/3$.

ג. (9 נקודות) אם A ו-B בלתי תלויים בהנתן C והם גם בלתי תלויים בהנתן C^c אז הם בלתי תלויים.

1. דוגמא נגדית: $\Omega = \{1, 2, 3\}$. $A = \{1\}, B = \Phi, C = \{1, 2\}$ בהסתברות אחידה.
$P(A \cap B) = 0, P(A)\cdot P(B) = 0$ ולכן A, B ב"ת.
$P(B \cap C) = 0, P(B)\cdot P(C) = 0$ ולכן B, C ב"ת.
$P(A \cap C) = \frac{1}{3}, P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ ולכן A, C תלויים.

2. הוכחה: נניח את הנתונים. צ"ל: $P(A) > 2/3$.
ואכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה:
$$P(A) = P(C)\cdot P(C) + P(C^c)\cdot P(C^c) > \frac{2}{3}P(C) + \frac{2}{3}P(C^c) = \frac{2}{3}\left(P(C) + P(C^c)\right) = \frac{2}{3}$$

3. דוגמא נגדית: $\Omega = \{1, 2, 3\}$. $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$ ו-$C = \{1, 2\}$ אז $C^c = \{3\}$:
$P(C) = 0, P(C)\cdot P(C) = 1\cdot 0 = 0$ ולכן הם ב"ת בהינתן C.
$P(C^c) = 0, P(C^c)\cdot P(C^c) = 0\cdot 1 = 0$ ולכן הם ב"ת בהינתן C^c.
$P(A\cap B) = 0, P(A)\cdot P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ ולכן הם תלויים.

שאלת מבחן. לכל $1 \le i \le 20$ מטילים מטבע הוגן כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. תהי A הקבוצה כל השלמים בין 1 ל-20 שתוצאת המטבע שהוטל עבורם הייתה עץ. יהי $X = \Sigma_{i\in A} i$.

1. חשבו את $E(X)$ 2. חשבו את $Var(X)$.

פתרון 1: נגדיר את האינדיקטורים: X_i השווה ל 1 אם יצא עץ בהטלה ה i. לכל $1 \le i \le 20$. מכאן $X = \Sigma_{i=1}^{20} i \cdot X_i$. מכאן:
$$E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{20} i\cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} E(i\cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} i\cdot E(X_i) =$$
$$= \Sigma_{i=1}^{20} i\cdot P(X_i = 1) = \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{20} i = \frac{21\cdot 20}{4} = 105$$

פתרון 2: לפי תכונות של שונות:
$$Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{20} i\cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} Var(i\cdot X_i) =$$
$$= \Sigma_{i=1}^{20} i^2 Var(X_i) = \frac{1}{4}\Sigma_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{24} = 717.5$$

א. (12 נקודות) יהיו A ו-B מאורעות כך ש-$0 < P(B) \le 1/3$. אם $P(A|B) \le 2/3$ וגם $P(A|B^c) \le 1/3$ אז $P(A) \le 4/9$.

ב. (13 נקודות) יהיו A, B ו-C מאורעות כך ש-A ו-C בלתי תלויים וכן $P(B\cap C) > 0$. אזי $P(A|B\cap C) = P(A|B)$.

(a) This statement is true. Denote $p = \mathbb{P}(B)$. It follows by the law of total probability that
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) \le 2/3\cdot p + 1/3\cdot(1-p) = 1/3 + p/3 \le 1/3 + 1/9 = 4/9,$$
where the last inequality holds sine $f(p) := 1/3 + p/3$ is an increasing function and $p \le 1/3$.

(b) This statement is false. Consider the uniform probability space $(\Omega, \mathbb{P})$, where $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Let $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ and $C = \{2, 3\}$. Note that $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/4 > 0$. Moreover
$$\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/4 = 1/2\cdot 1/2 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),$$
and thus A and C are independent. However
$$\mathbb{P}(A|B\cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)} = \frac{\mathbb{P}(\{3\})}{\mathbb{P}(\{3\})} = 1$$
whereas
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{3\})}{\mathbb{P}(\{1,3\})} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \neq 1.$$

יהי n מספר טבעי. גלית ואבי משחקים את המשחק הבא. לכל $1 \le i \le n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \le i \le n$ נסמן ב-a_i את תוצאת ההטלה ה-i. אם $a_i \in \{4,5,6\}$, אז גלית מקבלת a_i נקודות, אחרת אבי מקבל a_i^2 נקודות. יהי X סך כל הנקודות שגלית קיבלה ויהי Y סך כל הנקודות שאבי קיבל.

א. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של X ושל Y.

ב. (9 נקודות) חשבו את השונויות של X ושל Y.

ג. (8 נקודות) חשבו את $Cov(X,Y)$.

For every $1 \le i \le n$ let X_i denote the number of points Galit receives in the ith round of the game and let Y_i denote the number of points Avi receives in the ith round of the game. By assumption, for every $1 \le i \le n$, it holds that
$$X_i \sim \begin{cases} 0 & 1/2 \\ 4 & 1/6 \\ 5 & 1/6 \\ 6 & 1/6 \end{cases}$$
and
$$Y_i \sim \begin{cases} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/6 \\ 4 & 1/6 \\ 9 & 1/6 \end{cases}$$
In particular, $\mathbb{E}(X_i) = (4+5+6)/6 = 5/2$ and $\mathbb{E}(Y_i) = (1+4+9)/6 = 7/3$ hold for every $1 \le i \le n$. Note that $X = \sum_{i=1}^n X_i$ and $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. It then follows by the linearity of expectation that $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 5n/2$ and $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = 7n/3$.

(b) For every $1 \le i \le n$ it holds that $\mathbb{E}(X_i^2) = (4^2+5^2+6^2)/6 = 77/6$ and thus
$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 77/6 - (5/2)^2 = 79/12.$$
Noting that $X_1, \ldots, X_n$ are mutually independent random variables, we conclude that
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) = 79n/12.$$
Similarly
$$\mathrm{Var}(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = (1^2+4^2+9^2)/6 - (7/3)^2 = 98/9$$
and thus
$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(Y_i) = 98n/9.$$

(c) Since
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, Y_j),$$
we wish to determine $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$ for every $1 \le i, j \le n$. Since different die rolls are independent, X_i and Y_j are independent whenever $i \neq j$; in particular $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ in this case. Given any $1 \le i \le n$, note that, by definition, either $X_i = 0$ or $Y_i = 0$. It follows that
$$\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = \mathbb{E}(X_iY_i) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(0) - 5/2\cdot 7/3 = -35/6.$$
We conclude that
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = -35n/6.$$

(12 נקודות) יהי $0 < p < 1$ מספר ממשי ויהיו $X \sim Geom(p)$ ו-$Y \sim Geom(p)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. הוכיחו שמתקיים $P(X = k \mid X+Y = n) = \frac{1}{n-1}$ לכל $1 \le k \le n-1$.

(13 נקודות) יהיו X ו-Y משתנים מקריים המקבלים ערכים שלמים אי שליליים. הוכיחו כי X ו-Y בלתי תלויים אם רק אם לכל שני שלמים אי שליליים a ו-b מתקיים
$$P(X \ge a, Y \ge b) = P(X \ge a)P(Y \ge b)$$

א. לפי הסתברות מותנה: $P(X = k|X+Y = n) = \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$

מכאן: $\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{(1-p)^{k-1}p\cdot(1-p)^{n-k-1}p}{P(X+Y=n)} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{P(X+Y=n)}$.

ההסתברות אינה תלויה ב k ולכן היא אחידה.

כמה ערכים שונים יש? מכיוון ש 2 המשתנים הם גיאומטריים אז התומך שלהם הוא: $\{1,2,\ldots\}$ ולכן: הערכים האפשריים ל k הם: $\{1,2,3\ldots,n-1\}$. ישנם $n-1$ ערכים שונים ולכן: $P(X = k|X+Y = n) = \frac{1}{n-1}$.

ב. המשתנים X, Y הם בלתי תלויים אם ורק אם $P(X = a, Y = b) = P(X = a)\cdot P(Y = b)$ לכל a, b.

הוכחה: כיוון 1: נניח ש X, Y ב"ת. מכאן:
$$P(X\ge a)P(Y\ge b) = \sum_{k=a}^{\infty} P(X=k)\sum_{m=b}^{\infty} P(Y=m) = \sum_{k=a}^{\infty}\sum_{m=b}^{\infty} P(X=k)P(Y=m) =$$
$$= \sum_{k=a}^{\infty}\sum_{m=b}^{\infty} P(X=k, Y=m) = P(X\ge a, Y\ge b)$$

כיוון 2: נניח ש $P(X \ge a, Y \ge b) = P(X\ge a)\cdot P(Y\ge b)$. צ"ל: X, Y ב"ת.
יהיו a, b כלשהם. מכאן:
$$P(X=a, Y=b) = P(X\ge a, Y\ge b) - P(X\ge a+1, Y\ge b) - P(X\ge a, Y\ge b+1) +$$
$$+P(X\ge a+1, Y\ge b+1) =$$
$$= P(X\ge a)P(Y\ge b) - P(X\ge a+1)P(Y\ge b) - P(X\ge a)P(Y\ge b+1) + P(X\ge a+1)P(Y\ge b+1)$$
$$= P(Y\ge b)[P(X\ge a) - P(X\ge a+1)] - P(Y\ge b+1)[P(X\ge a) - P(X\ge a+1)] =$$
$$= P(Y\ge b)P(X=a) - P(Y\ge b+1)P(X=a) = P(X=a)P(Y=b)$$

יהיו $X \sim Bin\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$ ו-$Y \sim Poi(1)$ משתנים מקריים בלתי תלויים.

א. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של $\frac{1}{Y+1}$.

ב. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של $\frac{X}{Y+1}$.

ג. (9 נקודות) הוכיחו או הפריכו: $\lim_{n\to\infty} P(X > 1.1) = 0$.

ד. (10 נקודות) חשבו את התוחלת של $\frac{1}{X+1}$.

א. לפי תוחלת של פונקציה נקבל:
$$E(\tfrac{1}{Y+1}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{e^{-1}\cdot 1^k}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!} = e^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!} = e^{-1}(e-1) = 1 - e^{-1}.$$

ב. $E(\frac{X}{Y+1}) = E(X\cdot\frac{1}{Y+1})$

נראה ש $X, \frac{1}{Y+1}$ בלתי תלויים: $P(X = a, \frac{1}{Y+1} = b) = P(X = a, Y = \frac{1-b}{b}) = P(X = a)P(Y = \frac{1-b}{b}) =$
$P(X = a)P(\frac{1}{Y+1} = b)$.

ומכאן: $E(X\cdot\frac{1}{Y+1}) = E(X)E(\frac{1}{Y+1}) = (n\cdot\frac{1}{n+1})\cdot(1-e^{-1})$.

ג. $\lim_{n\to\infty} P(X > 1.1) \ge \lim_{n\to\infty} P(X = 2) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}\cdot(\frac{1}{n+1})^2\cdot(\frac{n}{n+1})^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2}\cdot(\frac{1}{n+1})^2\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{n-2} =$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2}\cdot(\frac{1}{n+1})^2\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+4n+2}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1-\frac{1}{n+1})^{-3}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{2e} > 0$$

ולכן הגבול המקורי לא שואף ל 0 ולכן הטענה לא נכונה.

ד. לפי תוחלת של פונקציה נקבל:
$$E(\tfrac{1}{X+1}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}\cdot(\tfrac{1}{n+1})^k(1-\tfrac{1}{n+1})^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot(\tfrac{1}{n+1})^k(1-\tfrac{1}{n+1})^{n-k} =$$
(הכפלנו וחילקנו ב $n+1$) $= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot(\frac{1}{n+1})^{k+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n-k}$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\cdot(\tfrac{1}{n+1})^{k+1}(1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1-(k+1)} = \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n+1}{m}\cdot(\tfrac{1}{n+1})^{m}(1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1-m} =$$
$$= (\tfrac{1}{n+1} + (1-\tfrac{1}{n+1}))^{n+1} - (1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1} = 1 - (1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1}$$

א. (5 נקודות) יהיו $a < b$ ו-$0 < p < 1$ מספרים ממשיים. יהי X משתנה מקרי המקיים $P(X = a) = p$ ו-$P(X = b) = 1-p$. חשבו את ההתפלגות של $\frac{X-b}{a-b}$.

ב. (9 נקודות) יהי $0 < p < 1$ ממשי ויהי X משתנה מקרי המקיים $P(X = 1) = p$ ו-$P(X = 0) = 1-p$. חשבו את p אם נתון ש-$E(X) = 3Var(X)$.

ג. (11 נקודות) יהי $0 < p < 1$ ממשי ויהי $X \sim Geom(p)$. חשבו את $P($זוגי $X)$.

(a) Denote $Y = \frac{X-b}{a-b}$. Note that if $X = a$, then $Y = 1$ and if $X = b$, then $Y = 0$. It follows that
$$Y \sim \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$
That is, $Y \sim \mathrm{Ber}(p)$.

(b) By definition, $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, implying that $\mathbb{E}(X) = p$ and $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$. Since $\mathbb{E}(X) = 3\mathrm{Var}(X)$ by assumption, it then follows that
$$p = 3p(1-p) \Longrightarrow 1-p = 1/3 \Longrightarrow p = 2/3.$$

(c) Since $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, the probability that X is even is
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1} = p\cdot\frac{1-p}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Elad V.

בכד יש שלושה כדורים אדומים ושלושה כדורים ירוקים. מוציאים כדור אחד מהכד באופן מקרי אחיד עם החזרה. חוזרים על הניסוי הנ"ל שוב ושוב כאשר הוצאות הכדורים השונות בלתי תלויות זו בזו. יהי X מספר הפעמים שהוצאנו כדור מהכד עד הפעם הראשונה (כולל) שהוצאנו לפחות כדור אחד מכל צבע ויהי Y מספר הפעמים שהוצאנו כדור מהכד עד הפעם הראשונה (כולל) שהיו שתי הוצאות רצופות של כדור מאותו צבע.

א. (5 נקודות) מהי ההתפלגות של X?
ב. (10 נקודות) מהי ההתפלגות של Y?
ג. (10 נקודות) מהי ההתפלגות המשותפת של X ו-Y?

(a) By definition, X is an integer and is at least 2. For every integer $k \geq 2$, we have $X = k$ if and only if the first $k-1$ draws were all of a ball of the same colour (all red or all green) and the kth draw was of a ball of the opposite colour. Moreover, since we draw each ball uniformly at random with replacement, the probability of any specific draw to be of a red ball is $3/6 = 1/2$. Since, moreover, the draws are mutually independent, for every integer $k \geq 2$, we have

$$\mathbb{P}(X = k) = (1/2)^{k-1} \cdot 1/2 + (1/2)^{k-1} \cdot 1/2 = (1/2)^{k-1}.$$

(b) Similarly to Part (a), it is evident that Y is an integer and is at least 2. For every integer $k \geq 2$, we have $Y = k$ if and only if the first $k-1$ ball draws alternate between red and green and the kth drawn ball has the same colour as the $(k-1)$th drawn ball. Therefore, for every integer $k \geq 2$, we have

$$\mathbb{P}(Y = k) = 1 \cdot (1/2)^{k-2} \cdot 1/2 = (1/2)^{k-1}.$$

(c) Given integers $i, j \geq 2$, note that $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ if $i \geq 3$ and $j \geq 3$. Indeed, if the first two drawn balls have the same colour, then $Y = 2$; otherwise $X = 2$. The same argument also shows that $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$. Next, for every integer $j \geq 3$ we have

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = j) = 1 \cdot 1/2 \cdot (1/2)^{j-3} \cdot 1/2 = (1/2)^{j-1}.$$

Similarly, for every integer $i \geq 3$ we have

$$\mathbb{P}(X = i, Y = 2) = 1 \cdot 1/2 \cdot (1/2)^{i-3} \cdot 1/2 = (1/2)^{i-1}.$$

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת תוצאה **שונה** מ-6 כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי X סכום תוצאות כל ההטלות.

א. (6 נקודות) חשבו את $P(X=k)$ לכל k טבעי.
ב. (7 נקודות) הוכיחו ע"י חישוב ישיר שמתקיים $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1$.
ג. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של X (התשובה הסופית צריכה להיות מספר ממשי כלשהו, תשובה המכילה סכום אינסופי תזכה לניקוד חיובי אך נמוך מאוד).

(a) It is evident from the definition of X that it only takes values of the form $6i + j$ Then $X = 6i + j$ if and only if the result of the first i die rolls is 6 and the result of the $(i+1)$st die roll is j. Since all coin flips are mutually independent,
$$P(X = 6i + j) = (1/6)^i \cdot 1/6 = (1/6)^{i+1}.$$

(b) It follows by Part (a) of this question that

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{5} (1/6)^{i+1} = 5 \sum_{i=1}^{\infty} (1/6)^i = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - 1/6} = 1.$$

(c) We have

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{5} (6i + j)(1/6)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{5} i \cdot (1/6)^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{5} j \cdot (1/6)^{i+1}$$

$$= 5 \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1/6)^i + \sum_{i=0}^{\infty} (1/6)^{i+1} \sum_{j=1}^{5} j = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (5/6) \cdot (1/6)^{i-1} + 15 \sum_{i=1}^{\infty} (1/6)^i$$

$$= 6/5 + 15 \cdot \frac{1/6}{1 - 1/6} = 21/5,$$

where the first equality holds by a result which was proved in the lecture and in the fifth equality we used the fact that $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (5/6) \cdot (1/6)^{i-1}$ is the expectation of a random variable $Y \sim Geom(5/6)$ and thus equals $6/5$.

יהי $0 < p < 1$ ויהי $X \sim Geom(p)$ משתנה מקרי בעל התפלגות גיאומטרית.
א הוכיחו שלכל שלם אי שלילי k מתקיים $P(X > k) = (1 - p)^k$.
ב הוכיחו שלכל שלם אי שלילי n ושלם חיובי k מתקיים
$$P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$$
ג. חשבו את התוחלת והשונות של $Y := \frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}$.

Since $X \sim Geom(p)$ we have

$$P(X > k) = \sum_{t=k+1}^{\infty} P(X = t) = \sum_{t=k+1}^{\infty} p(1-p)^{t-1} = p(1-p)^k \sum_{t=0}^{\infty} (1-p)^t$$
$$= p(1-p)^k \frac{1}{1 - (1-p)} = (1-p)^k.$$

(b) Fix integers $n \geq 0$ and $k > 0$. We have

$$P(X = n + k | X > n) = \frac{P(X = n + k, X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = n + k)}{P(X > n)}$$
$$= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^n} = p(1-p)^{k-1} = P(X = k).$$

where the second equality holds since, for $k > 0$, if $X = n + k$, then $X > n$, and the third equality holds by part (a) of this question.

(c) Since $X \sim Geom(p)$ it follows that $\mathbb{E}(X) = 1/p$ and $Var(X) = (1-p)/p^2$. Hence

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{pX - 1}{\sqrt{1-p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \cdot (p\mathbb{E}(X) - 1) = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \cdot (p \cdot 1/p - 1) = 0.$$

Similarly

$$Var(Y) = Var\left(\frac{pX - 1}{\sqrt{1-p}}\right) = \frac{1}{1-p} \cdot p^2 Var(X) = 1.$$

יהיו X ו-Y משתנים מקריים כלשהם באותו מרחב הסתברות (Ω, P) המקיימים $X(\omega) \leq Y(\omega)$ לכל $\omega \in \Omega$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. (8 נקודות) $E(X) \leq E(Y)$.
ב. (9 נקודות) $Var(X) \leq Var(Y)$.
ג. (8 נקודות) $E(|X|) \leq E(|Y|)$.

(a) This statement is true. Indeed

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\omega) = \mathbb{E}(Y),$$

where the inequality holds by our assumption that $X(\omega) \leq Y(\omega)$ for every $\omega \in \Omega$.

(b) This statement is false. Consider the probability space (Ω, P), where $\Omega = \{1, 2\}$ and $P(1) = P(2) = 1/2$. Let $X : \Omega \to \mathbb{R}$ be the random variable satisfying $X(1) = 1$ and $X(2) = 2$, and let $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ be the random variable satisfying $Y(1) = Y(2) = 10$. Clearly, $X(i) \leq Y(i)$ for every $i \in \{1, 2\}$. However, we will show that $Var(X) > Var(Y)$. Indeed, it was proved in the lectures that $Var(Z) \geq 0$ holds for every random variable Z and, moreover, $Var(Z) = 0$ if and only if $P(Z = \mathbb{E}(Z)) = 1$. Observe that $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 3/2$ and thus $P(X = \mathbb{E}(X)) = 0 < 1$. It follows that $Var(X) > 0$. On the other hand, $\mathbb{E}(Y) = 10 \cdot 1/2 + 10 \cdot 1/2 = 10$ and thus $P(Y = \mathbb{E}(Y)) = 1$. It follows that $Var(Y) = 0$.

(c) This statement is false. Consider the probability space (Ω, P), where $\Omega = \{1, 2\}$ and $P(1) = P(2) = 1/2$. Let $X : \Omega \to \mathbb{R}$ be the random variable satisfying $X(1) = X(2) = -2$, and let $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ be the random variable satisfying $Y(1) = Y(2) = -1$. Clearly, $X(i) \leq Y(i)$ for every $i \in \{1, 2\}$. However

$$\mathbb{E}(|X|) = 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 2 > 1 = 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = \mathbb{E}(|Y|).$$

לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת (כלומר הסתברות 1/6 לכל תוצאה אפשרית) כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n$ יהי X_i משתנה מקרי המוגדר באופן הבא: אם תוצאת הטלת הקוביה ה-i היא 1, אז $X_i = -1$, אם תוצאת הטלת הקוביה ה-i היא 2 או 3, אז $X_i = 0$ ואחרת (כלומר תוצאת הטלת הקוביה ה-i היא 4,5 או 6) אז $X_i = 1$. לכל $1 \leq i \leq n-2$ יהי Y_i משתנה מקרי המוגדר באופן הבא: אם $X_i = X_{i+1} = X_{i+2}$ אז $Y_i = 1$ ואחרת $Y_i = 0$. יהי $Y = \sum_{i=1}^{n-2} Y_i$.

א. (7 נקודות) חשבו את $\Pr(X_1 = 0, Y_1 = 0)$.
ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.
ג. (10 נקודות) הוכיחו ש-$Var(Y) \leq n$.
ד. (8 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(Y \geq \frac{n}{5}\right) = 0$.

(a) The event $\{X_1 = 0\}$ indicates that the result of the first die roll is 2 or 3. The event $\{Y_1 = 0 | X_1 = 0\}$ indicates that the result of the second die roll was in $\{1, 4, 5, 6\}$ or that the result of the third die roll was in $\{1, 4, 5, 6\}$. Therefore

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0 | X_1 = 0) = 1/3 \cdot [1 - \mathbb{P}(Y_1 = 1 | X_1 = 0)]$$
$$= 1/3 \cdot [1 - (1/3)^2] = 8/27.$$

(b) For every $1 \leq i \leq n-2$, the random variable Y_i is an indicator, implying that

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{P}(Y_i = 1)$$
$$= \mathbb{P}(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = -1) + \mathbb{P}(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = 0) + \mathbb{P}(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = 1)$$
$$= (1/6)^3 + (1/3)^3 + (1/2)^3 = \frac{1 + 8 + 27}{6^3} = 1/6.$$

It then follows by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-2} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{E}(Y_i) = (n-2)/6.$$

(c) We aim to use the formula

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n-2} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n-2} Var(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} Cov(Y_i, Y_j).$$

For every $1 \leq i \leq n-2$, since Y_i is an indicator, it follows that

$$Var(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = \mathbb{E}(Y_i) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = 1/6 - (1/6)^2 < 1/6.$$

Since the die rolls are independent, it follows that whenever $j > i + 2$, the random variables Y_i and Y_j are independent and thus $Cov(Y_i, Y_j) = 0$. For every $1 \leq i \leq n-3$ we have

$$Cov(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) = \mathbb{P}(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) - 1/36$$
$$< \mathbb{P}(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = X_{i+3}) = (1/6)^4 + (1/3)^4 + (1/2)^4 < 3 \cdot (1/2)^4 < 1/5.$$

Similarly, for every $1 \leq i \leq n-4$ we have

$$Cov(Y_i, Y_{i+2}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+2}) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+2}) = \mathbb{P}(Y_i = 1, Y_{i+2} = 1) - 1/36$$
$$< \mathbb{P}(X_i = X_{i+1} = X_{i+2} = X_{i+3} = X_{i+4}) = (1/6)^5 + (1/3)^5 + (1/2)^5$$
$$< 3 \cdot (1/2)^5 < 1/5.$$

We conclude that

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n-2} Var(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} Cov(Y_i, Y_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-2} Var(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-3} Cov(Y_i, Y_{i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-4} Cov(Y_i, Y_{i+2})$$
$$< (n-2)/6 + 2(n-3)/5 + 2(n-4)/5 < n.$$

(d) Using Chebyshev's inequality we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y \geq n/5) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \geq n/5 - (n-2)/6) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq n/100)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(Y)}{(n/100)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{100^2}{n} = 0,$$

where in the last inequality we used the inequality $Var(Y) \leq n$ proved in part (c) of this question.

בוחרים מספר מהקבוצה $\{1,2,\dots,100\}$ באופן מקרי אחיד, יהי X המספר הנבחר. מטילים מטבע הוגן X פעמים, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי Y מספר ההטלות שתוצאתן פלי.

א. (5 נקודות) חשבו את $P(Y = 1 \mid X = 3)$.
ב. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.
ג. (8 נקודות) הוכיחו ש- $P(Y \geq 60) < 1/2$.

3. (a) Given that $X = 3$, we toss a fair coin 3 times, all coin tosses being mutually independent. Hence, $(Y|X = 3) \sim Bin(3, 1/2)$. In particular, $P(Y = 1|X = 3) = \binom{3}{1}(1/2)^3 = 3/8$.

(b) Similarly to part (a), for every $n \in \{1, \dots, 100\}$ it holds that $(Y|X = n) \sim Bin(n, 1/2)$; in particular, $\mathbb{E}(Y|X = n) = n/2$. It thus follows by the law of total expectation that

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_{n=1}^{100} \mathbb{E}(Y|X = n) \cdot P(X = n) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{100} n = \frac{101}{4}.$$

(c) By definition, Y is a non-negative random variable. Hence, we can apply Markov's inequality to obtain

$$P(Y \geq 60) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{60} = \frac{101}{240} < \frac{1}{2}.$$

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n$ יהי X_i תוצאת ההטלה ה-i. לכל $1 \leq i \leq n-1$ יהי Y_i האינדיקטור של המאורע $X_i + X_{i+1} = 8$. יהי $Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.

א. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.
ב. (12 נקודות) חשבו את השונות של Y.
ג. (7 נקודות) הוכיחו ש-$\lim_{n\to\infty} P(Y < n/6) = 1$.

(a) For every $1 \leq i \leq n-1$, there are 36 possible values for the ordered pair (X_i, X_{i+1}), of which exactly 5 sum to 8 (namely, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$). Since the die is fair and the die rolls are independent, all those possibilities have the same probability. Hence

$$\mathbb{E}(Y_i) = P(Y_i = 1) = P(X_i + X_{i+1} = 8) = 5/36.$$

It then follows by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(Y_i) = 5(n-1)/36.$$

(b) Recall that

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} Cov(Y_i, Y_j).$$

Note first, that for every $1 \leq i \leq n-1$, it holds that

$$Var(Y_i) = \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = \mathbb{E}(Y_i) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = \frac{5}{36} - \frac{5^2}{6^4} = \frac{155}{6^4}.$$

Now, if $j > i+1$, then Y_i and Y_j are independent as they rely on disjoint pairs of independent die rolls. In particular, $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ holds in this case. On the other hand, for every $1 \leq i \leq n-2$, it holds that

$$Cov(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i \cdot Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i) \cdot \mathbb{E}(Y_{i+1}) = P(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) - \frac{5^2}{6^4} = \frac{5}{6^3} - \frac{5^2}{6^4} = \frac{5}{6^4},$$

where the third equality holds since if $X_i + X_{i+1} = 8$ and $X_{i+1} + X_{i+2} = 8$, then $(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}) \in \{(6, 2, 6), (5, 3, 5), (4, 4, 4), (3, 5, 3), (2, 6, 2)\}$. We conclude that

$$Var(Y) = (n-1)\frac{155}{6^4} + 2(n-2)\frac{5}{6^4} = \frac{165n}{6^4} - \frac{175}{6^4}.$$

(c) Fix any integer $n \geq 2$. Then

$$P(Y \geq n/6) \leq P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq n/36) \leq \frac{Var(Y)}{(n/36)^2} \leq \frac{165n/6^4}{n^2/6^4} = \frac{165}{n},$$

where the first inequality holds by part (a) of this question, the second inequality holds by Chebyshev's inequality, and the third inequality holds by part (b) of this question. We conclude that

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} P(Y < n/6) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(Y \geq n/6) \geq 1 - \lim_{n\to\infty} 165/n = 1$$

and thus $\lim_{n\to\infty} P(Y < n/6) = 1$ as required.

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$, בסיבוב ה-i מטילים שלושה מטבעות הוגנים ששני צידיהם מסומנים ב-0 וב-1, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות (גם בין הסיבובים וגם בתוך כל סיבוב). יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הסיבובים בהם תוצאות כל שלוש ההטלות היו 0 ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הסיבובים בהם יותר הטלות נתנו את התוצאה 1 מאשר את התוצאה 0. יהי Z משתנה מקרי הסופר את כל הטלות המטבע שתוצאתן 0.

א. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגות של X ואת ההתפלגות של Y.
ב. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של Z.
ג. (10 נקודות) הוכיחו ש- $P(Z - X \geq 2n) < 3/4$.

(a) For every $1 \leq i \leq n$, since the three coin tosses made in the ith round are independent, the probability that the outcome of all 3 is 0, is $(1/2)^3 = 1/8$. Similarly, by symmetry, the probability that the outcome of at least 2 of the 3 tosses made in the ith round is 1, is $1/2$. Since the random experiments made in different rounds are independent, it follows that $X \sim Bin(n, 1/8)$ and $Y \sim Bin(n, 1/2)$.

(b) There are various ways to solve this part, but the simplest one is to ignore the rounds and observe that we make $3n$ independent tosses of fair coins. Hence $Z \sim Bin(3n, 1/2)$ and thus $\mathbb{E}(Z) = 3n/2$.

(c) Note first that

$$\mathbb{E}(Z - X) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X) = 3n/2 - n/8 = 11n/8,$$

where the first equality holds by the linearity of expectation and the second equality holds by parts (a) and (b) of this question.

Now, observe that $Z - X$ is a non-negative random variable. Indeed, each of the n rounds contributes either 0 or 1 to X and at least 0 to Z. Moreover, every round which contributes 1 to X, contributes 3 to Z. Therefore, we can apply Markov's inequality to deduce that

$$P(Z - X \geq 2n) \leq \frac{\mathbb{E}(Z - X)}{2n} = \frac{11n/8}{2n} < 3/4.$$

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן קטנה ממש מ-4 ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן 3 או 4.

א. (6 נקודות) חשבו את השונות של X ואת השונות של Y.
ב. (12 נקודות) חשבו את $Var(X - Y)$.
ג. (7 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n\to\infty} P(X > Y) = 1$.

(a) For every $1 \leq i \leq n$, let X_i be the indicator random variable for the event that the outcome of the ith die roll is in $\{1, 2, 3\}$, and let Y_i be the indicator random variable for the event that the outcome of the ith die roll is in $\{3, 4\}$. Then $X = \sum_{i=1}^n X_i$ and $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Since the die rolls are independent, it follows that $X \sim Bin(n, 1/2)$ and $Y \sim Bin(n, 1/3)$. In particular, $Var(X) = n \cdot 1/2 \cdot (1 - 1/2) = n/4$ and $Var(Y) = n \cdot 1/3 \cdot (1 - 1/3) = 2n/9$.

(b) It holds that

$$\begin{aligned} Var(X - Y) &= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, Y_j). \end{aligned}$$

Since $Var(X)$ and $Var(Y)$ were calculated in part (a) of this question, it remains to calculate $Cov(X_i, Y_j)$ for every $1 \leq i, j \leq n$. Fix some $1 \leq i \neq j \leq n$. Since the die rolls are independent, it follows that X_i and Y_j are independent and thus, in particular, $Cov(X_i, Y_j) = 0$. For every $1 \leq i \leq n$, it holds that

$$\begin{aligned} Cov(X_i, Y_i) &= \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) = P(X_i = 1, Y_i = 1) - P(X_i = 1)P(Y_i = 1) \\ &= 1/6 - 1/2 \cdot 1/3 = 0. \end{aligned}$$

It follows that $Cov(X, Y) = 0$ and thus

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = n/4 + 2n/9 = 17n/36.$$

(c) Fix some positive integer n. It follows by part (a) of this question and by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = n/2 - n/3 = n/6.$$

It then follows by Chebyshev's inequality that

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= P(X - Y - n/6 \leq -n/6) \leq P(|(X - Y) - \mathbb{E}(X - Y)| \geq n/6) \\ &\leq \frac{Var(X - Y)}{n^2/36} = \frac{17n/36}{n^2/36} = \frac{17}{n}, \end{aligned}$$

where the first inequality holds since $X - Y - n/6 \leq -n/6 \implies |(X - Y) - \mathbb{E}(X - Y)| \geq n/6$, and the second equality holds by part (b) of this question. We conclude that

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} P(X > Y) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(X \leq Y) \geq 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{17}{n} = 1$$

implying that $\lim_{n\to\infty} P(X > Y) = 1$ as claimed.

יהי $n \geq 3$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים מטבע הוגן שצדדיו הם 0 ו-1, כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הפעמים שהתקבל הרצף 10, כלומר את מספר האינדקסים $1 \leq i \leq n-1$ כך שתוצאת ההטלה ה-i היא 1 ותוצאת ההטלה ה-$i+1$ היא 0. יהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הפעמים שהתקבל הרצף 101.

א. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.
ב. (9 נקודות) חשבו את השונות של X.
ג. (10 נקודות) חשבו את השונות המשותפת $Cov(X,Y)$ של X ושל Y.

(a) For every $1 \leq i \leq n-2$, let Y_i be the indicator random variable for the event: "the result of the ith coin toss is 1, the result of the $(i+1)$th coin toss is 0, and the result of the $(i+2)$th coin toss is 1". For every $1 \leq i \leq n-2$ we then have

$$\mathbb{E}(Y_i) = P(Y_i = 1) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8.$$

It thus follows by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{E}(Y_i) = (n-2)/8.$$

(b) For every $1 \leq i \leq n-1$, let X_i be the indicator random variable for the event: "the result of the ith coin toss is 1 and the result of the $(i+1)$th coin toss is 0". For every $1 \leq i \leq n-1$ we then have $\mathbb{E}(X_i) = P(X_i = 1) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ and thus

$$Var(X_i) = \mathbb{E}\left(X_i^2\right) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = P(X_i = 1) - P(X_i = 1)^2 = 1/4 - 1/16 = 3/16.$$

Now, fix some $1 \leq i < j \leq n-1$. If $j > i+1$, then X_i and X_j rely on disjoint pairs of coin tosses and are thus independent; in particular, $Cov(X_i, X_j) = 0$. On the other hand

$$Cov(X_i, X_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1) - 1/16 = -1/16.$$

We conclude that

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2 \sum_{1<i<j<n-1} Cov(X_i, X_j) = \frac{3(n-1)}{16} - \frac{2(n-2)}{16} = \frac{n+1}{16}.$$

(c) Fix some $1 \leq i \leq n-1$ and $1 \leq j \leq n-2$. Then

$$\begin{aligned} Cov(X_j, Y_j) &= \mathbb{E}(X_j Y_j) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(Y_j) = P(X_j = 1, Y_j = 1) - 1/4 \cdot 1/8 \\ &= 1/8 - 1/32 = 3/32, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_j, Y_{j+1}) &= \mathbb{E}(X_j Y_{j+1}) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(Y_{j+1}) = P(X_j = 1, Y_{j+1} = 1) - 1/4 \cdot 1/8 \\ &= 0 - 1/32 = -1/32, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_j, Y_{j-1}) &= \mathbb{E}(X_j Y_{j-1}) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(Y_{j-1}) = P(X_j = 1, Y_{j-1} = 1) - 1/4 \cdot 1/8 \\ &= 0 - 1/32 = -1/32, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_j, Y_{j-2}) &= \mathbb{E}(X_j Y_{j-2}) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(Y_{j-2}) = P(X_j = 1, Y_{j-2} = 1) - 1/4 \cdot 1/8 \\ &= 1/16 - 1/32 = 1/32. \end{aligned}$$

For all other values of $1 \leq i \leq n-1$ and $1 \leq j \leq n-2$, the random variables X_i and Y_j rely on disjoint sets of coin tosses and are thus independent; in particular, $Cov(X_i, Y_j) = 0$. Using the properties of covariance which were proved in the lectures, we conclude that

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-2} Cov(X_i, Y_j) = \frac{3(n-2)}{32} - \frac{n-3}{32} - \frac{n-2}{32} + \frac{n-3}{32} \\ &= \frac{n-2}{16}. \end{aligned}$$