



دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

گزارش پروژه
درس تئوری آشکارسازی و تخمین

One-Bit Spectrum Sensing for Cognitive Radio

نگارش

علی الهی راد

استاد راهنما

دکتر علی الفت

مرداد ۱۴۰۴



فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۱	۱-۱ چرا تکبیتی؟	۱
۲	۲-۱ آشکارسازی کور	۲
۲	۳-۱ آشکارساز EMR	۲
۲	۴-۱ توزیع آشکارساز	۲
۴	۲ مدل سیگنال	۴
۷	۳ به دست آوردن تست Rao	۷
۱۵	۴ توزیع های آشکارساز	۱۵
۱۵	۱-۴ خاصیت CFAR	۱۵
۱۷	۲-۴ توزیع تحت فرض H_0	۱۷
۱۹	۳-۴ توزیع تحت فرض H_1	۱۹
۲۴	۵ تحلیل عملکرد	۲۴
۲۴	۱-۵ حالت ∞ -bit	۲۴
۲۵	۲-۵ حالت تکبیت	۲۵
۳۱	۶ نتایج عددی	۳۱
۳۲	۱-۶ توزیع Null	۳۲

۲-۶ توزیع Non-Null ۳۴

۳-۶ عملکرد آشکارسازی ۳۶

۴-۶ افت کارایی ۳۷

۳۹ مراجع

فهرست جداول

۳۴	۱-۶ خطای توزیع‌های تقریبی نال
۳۴	۲-۶ خطای توزیع‌های تقریبی نانال

فهرست تصاویر

۳۲	۱-۶	احتمال false alarm بر حسب آستانه
۳۳	۲-۶	احتمال false alarm بر حسب آستانه برای n های مختلف
۳۵	۳-۶	احتمال آشکارسازی بر حسب آستانه
۳۶	۴-۶	ROC های تجربی
۳۸	۵-۶	احتمال آشکارسازی بر حسب SNR

فصل ۱

مقدمه

Spectrum Sensing یک نیاز اساسی برای تخصیص منابع طیفی در شبکه‌های Cognitive Radio (CR) به صورت پویا است؛ به این صورت که مسؤل پیدا کردن کانال‌های خالی (به عنوان Spectrum Holes هم شناخته می‌شوند) است. در این پروژه، ما روشی از Spectrum Sensing را که برای مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال (ADC) تک‌بیتی طراحی شده است را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱ چرا تک‌بیتی؟

در خیلی از سناریوها، وظیفه‌ی Spectrum Sensing مانیتور کردن کانال‌های باندوسیع است؛ که این، به معنای نیاز به نمونه‌برداری سریع است. از طرفی نیز روش‌های معمول Spectrum Sensing، نیاز به کوانتیزاسیون با دقت بالا برای رسیدن به عملکرد ایده‌آل دارند. ترکیب سرعت بالای نمونه‌برداری و دقت بالای کوانتیزاسیون باعث مصرف انرژی بالایی می‌شود و از لحاظ عملی مشکل ایجاد خواهد کرد. یک روش موثر برای حل این مشکل، کم کردن دقت کوانتیزاسیون است؛ به معنای دقیق‌تر استفاده از تنها یک بیت برای مبدل آنالوگ به دیجیتال است. ADCهای تک‌بیتی تنها از یک مقایسه‌گر برای انجام نمونه‌برداری و کوانتیزاسیون استفاده می‌کنند؛ که مزیت‌هایی مانند نرخ نمونه‌برداری بالا، پیچیدگی سخت‌افزار کمتر و مصرف انرژی کمتر را به ارمغان می‌آورند. به عنوان مثال برای نرخ نمونه‌برداری 3.2 GSPS/s، یک ADC ۸ بیتی 105mWatt توان مصرف می‌کند. در حالی که این عدد برای ADC تک‌بیتی 20μWatt است. افت عملکرد ناشی از کاهش دقت کوانتیزاسیون، تنها در حدود 2dB ($\pi/2$) در SNRهای پایین است که با افزایش نمونه‌ها با ضریب $\pi/2$ قابل جبران است. توضیحات بالا، میل به استفاده از روش‌های تک‌بیتی را توجیه می‌کند.

۲-۱ آشکارسازی کور

بسیاری از روش‌های آشکارسازی تک‌بیتی فرض را بر در دسترس بودن اطلاعات پیشین از جمله توان نویز، اطلاعات کانال و ویژگی‌های سیگنال می‌گذارند. اما این مقاله بر روی Spectrum Sensing تک‌بیتی در عدم حضور اطلاعات پیشین یا اصطلاحاً آشکارسازی کور کار می‌کند که با نام Blind Spectrum Sensing شناخته می‌شود. در این حالت، ^۱PMF مشاهدات تک‌بیتی، برابر حاصل ضرب احتمالات Orthant می‌شود که فرم بسته ندارد؛ پس نیاز به روش‌های عددی مثل ^۲GLRT برای طراحی آشکارساز وجود دارد. از طرفی روش‌های عددی، هزینه‌ی محاسباتی و زمانی بالایی دارند که در تضاد با Spectrum Sensing ساده است که ما به آن علاقه‌مندیم. در نتیجه، خواسته‌ی ما، یک آشکارساز با معادلات فرم بسته است.

۳-۱ آشکارساز EMR

آشکارسازی تحت عنوان One-Bit EMR ^۳ در [۱] با الهام از آشکارساز EMR [۲] (∞ -bit) معرفی شد که نسبت به حالت ∞ در حدود 3 dB ضعیف‌تر بود، اما بعد از آن اثبات شد که در SNRهای پایین، افت عملکرد، تنها در حدود 2 dB است.

علت زیاد بودن افت عملکرد به این دلیل است که برای one-bit EMR، ابتدا قسمت‌های حقیقی و موهومی مشاهدات در کنار هم قرار داده می‌شود و سپس EMR مربوط به ماتریس کوواریانس (دارای مقادیر حقیقی) محاسبه می‌شود. این امر باعث نادیده گرفته شدن خاصیت Circularity سیگنال‌های کوانتیزه شده می‌شود. در این مقاله، آشکارسازی برای مشاهدات تک‌بیتی معرفی شده است که به وسیله تست Rao به دست می‌آید و جهت افزایش کارایی، خاصیت Circularity را نیز در نظر می‌گیرد. نتیجه، به صورت EMR مرتبه دوم ماتریس sample covariance (دارای مقادیر مختلط) است (برعکس روش قبلی که ماتریس کوواریانس گسترش یافته حقیقی را استفاده می‌کرد).

۴-۱ توزیع آشکارساز

برای تایید افت 2 dB و مقایسه با رقبای ∞ -bit نیاز به یافتن توزیع آشکارساز است. در این مقاله، توزیع‌هایی تقریبی فقط برای حالت حضور نویز و SNR پایین معرفی شده است که قابل مقایسه با توزیع‌های معرفی

¹Probability mass function

²Generalized likelihood ratio test

³One-Bit eigenvalue moment ratio

شده در [۳] هستند. جزئیات این مورد در بخش‌های بعد توضیح داده خواهد شد.

فصل ۲

مدل سیگنال

یک سیستم Cognitive Radio که MIMO^۱ است را در نظر بگیرید که p کاربر primary تک آنتن و m آنتن گیرنده در کاربر secondary در آن وجود دارند. ورودی‌های ADCها تحت فرض‌های H_0 و H_1 به صورت زیر هستند.

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t), \quad (۱-۲)$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (۲-۲)$$

که $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times p}$ نمایانگر ضرایب کانال در حین sensing است که نامشخص و یقینی است. همچنین $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), \dots, w_m(t)]^T$ و $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_p(t)]^T$ به ترتیب، بردارهای سیگنال و نویز هستند. قابل ذکر است که توزیع نویز $\mathbf{w}(t)$ ، i.i.d ZMCSCG ^۲، با ماتریس کوواریانس $\mathbf{R}_w = \text{diag}(\sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_m})$ است که المان‌های قطری آن در صورت عدم کالبره، می‌توانند نابرابر باشد. سیگنال از نویز مستقل است و برای سادگی در تحلیل‌ها، سیگنال را تصادفی و با توزیع i.i.d ZMCSCG و ماتریس کوواریانس نامشخص \mathbf{R}_s در نظر می‌گیریم. برای یک بردار تصادفی، PCM^۳ به صورت $\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$ تعریف می‌شود و برای هر دو فرض داریم:

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{R}_x = \mathbf{R}_w, \quad (۳-۲)$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{R}_x = \mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_w \quad (۴-۲)$$

^۱Multiple Input Multiple Output

^۲Zero mean circular symmetric complex Gaussian

^۳Population covariance matrix

که قابل ساده سازی به زیر است:

$$\mathcal{H}_\bullet : \mathbf{R}_x = \text{diag}(\sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_m}), \quad (5-2)$$

$$\mathcal{H}_\backslash : \mathbf{R}_x \neq \text{diag}(\sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_m}) \quad (6-2)$$

که مشخصاً سناریوی کالیبره نبودن گیرنده ها نیز در این فرمول بندی در نظر گرفته شده است. بعد از کوانتیزه شدن تکبیتی داریم:

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}(t)) = \text{sign}(\text{Re}(\mathbf{x}(t))) + j\text{sign}(\text{Im}(\mathbf{x}(t)))$$

که \mathcal{Q} نمایانگر عملگر کوانتیزاسیون تکبیتی است و برای هر دو فرض داریم:

$$\mathcal{H}_\bullet : \mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{w}(t)), \quad (7-2)$$

$$\mathcal{H}_\backslash : \mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{H}\mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t)) \quad (8-2)$$

در [۴] نشان داده شده است که PMF مربوط به $\mathbf{y}(t)$ با احتمالات Orthant توصیف می شود. برای سادگی محاسبه ی این احتمالات، بردار مشاهدات را با کنار هم قرار دادن بخش های حقیقی و موهومی به برداری حقیقی تبدیل می کنیم.

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{y}(t))^T & \text{Im}(\mathbf{y}(t))^T \end{bmatrix}^T \quad (9-2)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{x}(t))^T & \text{Im}(\mathbf{x}(t))^T \end{bmatrix}^T \quad (10-2)$$

در [۴] اثبات شده است که احتمالات Orthant تنها با ماتریس Coherence تعیین می شوند. پس مسئله تست فرض به صورت زیر ساده می شود:

$$\mathcal{H}_\bullet : \mathbf{P} = \mathbf{I}_{2m}, \quad (11-2)$$

$$\mathcal{H}_\backslash : \mathbf{P} \neq \mathbf{I}_{2m} \quad (12-2)$$

که $\mathbf{P} = \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{1}{2}}$ ، ماتریس Coherence مربوط به $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ و $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ ، PCM آن است.

با توجه به Circular بودن $\mathbf{x}(t)$ ، می توان \mathbf{P} را به صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{P}_x) & -\text{Im}(\mathbf{P}_x) \\ \text{Im}(\mathbf{P}_x) & \text{Re}(\mathbf{P}_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 \end{bmatrix} \quad (13-2)$$

که P_x ، ماتریس Coherence مربوط به x است. با در نظر گرفتن این نکته که $P_1 = P_4$ و $P_2 = -P_3$ است، تعداد پارامترهای نامعلوم P به $m^2 - m$ کاهش می‌یابد. می‌توانیم بردار پارامترهای نامعلوم را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\theta = [\rho_{1,2}, \dots, \rho_{m-1,m}, \rho_{1+m,2}, \dots, \rho_{2m-1,m}]^T \quad (14-2)$$

که $\rho_{i,j}$ ، المان (i, j) از P است. در نتیجه مسئله‌ی آشکارسازی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 0, \quad (15-2)$$

$$\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0 \quad (16-2)$$

قابل توجه است که این مقاله، با استفاده از این تقارن‌ها، درجه‌ی آزادی را کاهش می‌دهد و به طور قابل توجهی کارایی را افزایش می‌دهد.

فصل ۳

به دست آوردن تست Rao

در مسائل تشخیص با پارامترهای نامعلوم، تست GLRT به دلیل عملکرد بهینه‌ی مجانبی و نتایج مناسب حتی در شرایط با داده‌های محدود، پرکاربردترین روش محسوب می‌شود. با این حال، زمانی که داده‌های کوانتیزه‌ی تک‌بیتی به کار گرفته می‌شوند، حل عددی MLE^۱ ضروری است، زیرا likelihood تحت فرض H_1 فرم بسته ندارد و این امر پیچیدگی محاسباتی ایجاد می‌کند. تست‌های Wald و Rao به عنوان جایگزین‌های GLRT همان عملکرد مجانبی را ارائه می‌دهند و در کاربردهای مختلف نتایج رضایت‌بخشی داشته‌اند. با وجود این، تست Wald نیز نیازمند حل MLE تحت فرض H_1 است، در حالی که تست Rao بدون نیاز به حل MLE به ساختارهای ساده‌تر و کاراتر به‌ویژه در حالتی که فرض H_0 ساده است، منجر می‌شود. از این‌رو، در طراحی آشکارساز حاضر، تست Rao انتخاب شده است.

برای سادگی در محاسبات، ابتدا مشاهدات را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{y}(1), \dots, \tilde{y}(n)] \quad (۱-۳)$$

که $\tilde{y}(t)$ در فصل قبل تعریف شد.

اگر $\tilde{\mathbf{y}}$ را یک نمونه از فضای حالات مختلف $\tilde{y}(t)$ در نظر بگیریم، 2^m حالت خواهد داشت که $(1, 2, \dots, 2^m - 1, 2^m)$ نمایانگر هریک از این حالات خواهد بود. همچنین \mathbb{X}_k را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{2^m \times 1}$ تعریف می‌کنیم که به کوانتیزاسیون تک‌بیتی \tilde{y}^k به صورت زیر نگاشت می‌شود:

$$\mathbb{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2^m \times 1} \mid \text{sign}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2^m \times 1} \mid \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k)\mathbf{x} > 0\} \quad (۲-۳)$$

^۱Maximum likelihood estimation

پس احتمال این که $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k$ باشد برابر است با :

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \Pr\{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}_k\} = \int_{\mathbb{X}_k} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}} d\tilde{\mathbf{x}} \quad (3-3)$$

با تغییر متغیر $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{x}}$ داریم:

$$\{\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \mid \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k) \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\tau}} > \mathbf{0}\} \quad (4-3)$$

$$J = \left| \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{\frac{1}{2}} \right|$$

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \Pr\{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}_k\} = \int_{\mathbb{X}_k} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}} d\tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (5-3)$$

جزئیات و اثبات رسیدن به (5-3) از (3-3) که در مقاله به آن اشاره‌ای نشده است، در ادامه می‌آید. ابتدا تبدیل مختصات زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{D} := \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}), \quad \mathbf{P} := \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{D}^{-1/2}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} := \mathbf{D}^{-1/2} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (6-3)$$

که در نتیجه داریم:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad d\tilde{\mathbf{x}} = |\mathbf{D}^{1/2}| d\tilde{\boldsymbol{\tau}} = |\mathbf{D}|^{1/2} d\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad \mathbb{X}_k = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mid \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k) \mathbf{D}^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\tau}} > \mathbf{0} \right\}. \quad (7-3)$$

اکنون جمله نمایی را بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{D}^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\tau}})^T (\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}^{-1/2}) (\mathbf{D}^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (8-3)$$

برای تعیین دترمینان داریم:

$$|\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}| = |\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2}| = |\mathbf{D}| |\mathbf{P}| \implies \frac{|\mathbf{D}|^{1/2}}{|\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{1/2}} = \frac{1}{|\mathbf{P}|^{1/2}}. \quad (9-3)$$

حال معادله (3-3) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} &= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}\right) d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{|\mathbf{D}|^{1/2}}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ &= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{P}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\tau}}. \end{aligned} \quad (10-3)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\zeta_k = \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k) \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (۱۱-۳)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} &= \int_{\cdot}^{\infty} \cdots \int_{\cdot}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{P}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_k^{\top} \mathbf{S}_k^{-1} \zeta_k\right) d\zeta_k \\ &= \int_{\cdot}^{\infty} \cdots \int_{\cdot}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{P}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^{\top} \mathbf{S}_k^{-1} \tilde{\mathbf{x}}\right) d\tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

که در آن:

$$\mathbf{S}_k = \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k) \mathbf{P} \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k). \quad (۱۳-۳)$$

از آنجایی که $|\mathbf{S}_k| = |\mathbf{P}|$ ، بنابراین:

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \phi[\mathbf{S}_k], \quad (۱۴-۳)$$

که تابع $\phi(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi[\Sigma] = \int_{\cdot}^{\infty} \cdots \int_{\cdot}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^{\top} \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}, \quad (۱۵-۳)$$

که همان «احتمال Orthant مرکزی» است.

تابع likelihood برای $\tilde{\mathbf{Y}}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^n p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^n \phi[\mathbf{S}(t)], \quad (۱۶-۳)$$

که در آن:

$$\mathbf{S}(t) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}(t)) \mathbf{P} \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}(t)). \quad (۱۷-۳)$$

بنابراین log-likelihood به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n \log(\phi[\mathbf{S}(t)]). \quad (۱۸-۳)$$

آماره‌ی تست Rao به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_R = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right)^T \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right), \quad (۱۹-۳)$$

که در آن $\theta, = \bullet \in \mathbb{R}^{(m^2-m) \times 1}$ مربوط به پارامترها تحت فرض H است و $F(\theta)$ ، FIM^۲ است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$F(\theta) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta)}{\partial \theta^T} \right]. \quad (20-3)$$

قضیه‌ی ۱-۳ آماره‌ی Rao مربوط به تست فرض ما به صورت زیر است:

$$T_R = \frac{n}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m |\hat{r}_{ij}|^2 \quad (21-3)$$

که \hat{r}_{ij} المان (i, j) از SCM^۳ تک‌بیتی مختلط است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{R}_y = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y(t) y^H(t) \quad (22-3)$$

اثبات. داریم:

$$\begin{aligned} \phi[\mathbf{I}_{2m}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^m |\mathbf{I}_{2m}|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{I}_{2m}^{-1} \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^m} \exp(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2} [x_1^2 + \dots + x_{2m}^2]) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} x_1^2) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} x_{2m}^2) dx_{2m} = \\ &\rightarrow \phi[\mathbf{I}_{2m}] = \left(\frac{1}{2}\right)^m \end{aligned} \quad (23-3)$$

در نتیجه برای حالت $\theta = \theta, = \bullet$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \bullet) = \sum_{t=1}^n \log(\phi[\mathbf{I}_{2m}]) = \sum_{t=1}^n \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m\right) = -2mn \log(2) \quad (24-3)$$

اکنون $\phi[\Sigma]$ را با یک تبدیل مختصاتی مبتنی بر ماتریس جایگشتی به صورت $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{E}_{ab} \mathbf{x}$ بازنویسی می‌کنیم. \mathbf{E}_{ab} ماتریسی همانی است که ردیف‌های a و b آن جابجا شده است؛ در این صورت $\mathbf{E}_{ab}^{-1} = \mathbf{E}_{ab}$ و $|\mathbf{E}_{ab}| = \pm 1$. از آنجایی که برای $a = b$ ، $|\mathbf{E}_{ab}| = -1$ و برای $a \neq b$ ، $|\mathbf{E}_{ab}| = +1$ است، مقدار مطلق

²Fisher information matrix

³Sample covariance matrix

دترمینان ژاکوبین همیشه ۱ است. پس داریم :

$$\begin{aligned}\phi[\Sigma] &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{E}_{ab}^{-1} y)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{E}_{ab}^{-1} y)\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^T (\mathbf{E}_{ab} \Sigma \mathbf{E}_{ab})^{-1} y\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^m} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m |\mathbf{E}_{ab} \Sigma \mathbf{E}_{ab}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^T (\mathbf{E}_{ab} \Sigma \mathbf{E}_{ab})^{-1} y\right) dy = \phi[\mathbf{E}_{ab} \Sigma \mathbf{E}_{ab}], \quad (25-3)\end{aligned}$$

و نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\phi[\Sigma] = \phi[\mathbf{E}_{ab} \Sigma \mathbf{E}_{ab}]. \quad (26-3)$$

اکنون عملگر زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{T}_1(i, j) = \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, j'} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, i'} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, j} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, i}, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad \{i', j'\} = \{i, j\} + m.$$

با استفاده از رابطه بالا، می‌توان نوشت

$$\phi[\mathbf{S}(t)] = \phi(\mathbf{T}_1(i, j) \mathbf{S}(t) \mathbf{T}_1^T(i, j)). \quad (27-3)$$

برای $\theta = \theta_{i, j}$ (یعنی تنها ρ_{ij} غیر صفر است)، ماتریس داخل ϕ به صورت بلوکی در می‌آید:

$$\mathbf{T}_1(i, j) \mathbf{S}(t) \mathbf{T}_1^T(i, j) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ij}(t) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{S}_{i'j'}(t) & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{m-4} \end{bmatrix}, \quad (28-3)$$

که در آن

$$\mathbf{S}_{ab}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \rho_{ab} \\ \tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \rho_{ab} & 1 \end{bmatrix}. \quad (29-3)$$

بنابراین

$$\phi[\mathbf{S}(t)] \Big|_{\theta=\theta_{i, j}} = \phi(\mathbf{S}_{ij}(t)) \phi(\mathbf{S}_{i'j'}(t)) \phi[I_{m-4}]. \quad (30-3)$$

به‌طور مشابه، اگر

$$\mathbf{T}_2(i, j) = \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, j'} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, i} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, j} \mathbf{E}_{\mathfrak{r}, i'},$$

آنگاه برای $\theta = \theta_{i',j}$ خواهیم داشت

$$\phi[\mathbf{S}(t)] \Big|_{\theta=\theta_{i',j}} = \phi(\mathbf{S}_{i'j}(t)) \phi(\mathbf{S}_{ij'}(t)) \phi[I_{\mathfrak{Z}m-\mathfrak{F}}]. \quad (31-3)$$

از سوی دیگر، هر $\phi[\mathbf{S}_{ab}(t)]$ احتمال orthant مرکزی یک گوسی دوبعدی با میانگین صفر و کوواریانس $\mathbf{S}_{ab}(t)$ است و مقدار بسته آن

$$\phi(\mathbf{S}_{ab}(t)) = \frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\pi} \arcsin(\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\rho_{ab}) \quad (32-3)$$

می‌باشد. لذا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \theta_{i,j}) &= \sum_{t=1}^n \log \left(\phi(\mathbf{S}_{ij}(t)) \phi(\mathbf{S}_{i'j'}(t)) \phi[I_{\mathfrak{Z}m-\mathfrak{F}}] \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \log(f_{\mathfrak{I}}(i, j, t)) - (\mathfrak{Z}m - \mathfrak{F}) n \log(\mathfrak{Z}), \end{aligned} \quad (33-3)$$

و نیز

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \theta_{i',j}) &= \sum_{t=1}^n \log \left(\phi(\mathbf{S}_{i'j}(t)) \phi(\mathbf{S}_{ij'}(t)) \phi[I_{\mathfrak{Z}m-\mathfrak{F}}] \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \log(f_{\mathfrak{Z}}(i, j, t)) - (\mathfrak{Z}m - \mathfrak{F}) n \log(\mathfrak{Z}), \end{aligned} \quad (34-3)$$

که در آن با توجه به $\rho_{ij'} = -\rho_{i'j}$ و $\rho_{i'j'} = \rho_{ij}$

$$f_{\mathfrak{I}}(i, j, t) = \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\pi} \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t) \arcsin \rho_{ij} \right) \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\pi} \tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_{j'}(t) \arcsin \rho_{ij} \right), \quad (35-3)$$

$$f_{\mathfrak{Z}}(i, j, t) = \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\pi} \tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t) \arcsin \rho_{ij} \right) \left(\frac{1}{\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\pi} \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t) \arcsin(-\rho_{ij}) \right). \quad (36-3)$$

اکنون با استفاده از تعریف مشتق جزئی و قاعده لوپیتال، مشتق‌های گرادیان را در صفر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta)}{\partial \rho_{ij}} \right|_{\theta=\bullet} &= \lim_{\rho_{ij} \rightarrow \bullet} \frac{\mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \theta_{i,j}) - \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \bullet)}{\rho_{ij}} \\ &= \frac{\mathfrak{Z}}{\pi} \sum_{t=1}^n (\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t) + \tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_{j'}(t)) = \frac{\mathfrak{Z}n}{\pi} \text{Re}\{\hat{r}_{ij}\}, \end{aligned} \quad (37-3)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta)}{\partial \rho_{i'j}} \right|_{\theta=\bullet} &= \lim_{\rho_{i'j} \rightarrow \bullet} \frac{\mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \theta_{i',j}) - \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta = \bullet)}{\rho_{i'j}} \\ &= \frac{\mathfrak{Z}}{\pi} \sum_{t=1}^n (\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t)) = \frac{\mathfrak{Z}n}{\pi} \text{Im}\{\hat{r}_{ij}\}, \end{aligned} \quad (38-3)$$

که در آن، \hat{r}_{ij} المان (i, j) از SCM تعریف شده در (۲۲-۳) است. با تعریف

$$\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_{1,2}, \hat{r}_{1,3}, \hat{r}_{2,3}, \dots, \hat{r}_{m-1,m}]^T, \quad \tilde{\mathbf{r}} = [\text{Re}(\hat{r})^T, \text{Im}(\hat{r})^T]^T,$$

رابطه گرادیان به صورت فشرده

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y}; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} = \frac{\gamma n}{\pi} \tilde{\mathbf{r}} \quad (39-3)$$

درمی آید.

ماتریس اطلاعات فیشر (FIM)

$$\mathbf{F}(\theta) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right)^T \right]$$

تحت فرض H به شکل

$$\mathbf{F}(\theta_*) = \frac{\gamma n^2}{\pi^2} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T] \quad (40-3)$$

خواهد بود. از آنجا که تحت H توزیع \tilde{Y} برابر $(\frac{1}{\gamma})^{\gamma mn}$ است و مؤلفه‌ها مستقل اند، برای $1 \leq i < j \leq m$ و $1 \leq k < l \leq m$ داریم

$$\mathbb{E}[\text{Re}(\hat{r}_{ij}) \text{Re}(\hat{r}_{kl})] = \mathbb{E}[\text{Im}(\hat{r}_{ij}) \text{Im}(\hat{r}_{kl})] = \frac{\gamma}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (41-3)$$

$$\mathbb{E}[\text{Re}(\hat{r}_{ij}) \text{Im}(\hat{r}_{kl})] = 0, \quad (42-3)$$

در نتیجه

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T] = \frac{\gamma}{n} \mathbf{I}_{m^2-m} \implies \mathbf{F}(\theta_*) = \frac{\gamma n}{\pi^2} \mathbf{I}_{m^2-m}. \quad (43-3)$$

اکنون آماره رانو

$$T_R = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_*} \right)^T \mathbf{F}^{-1}(\theta_*) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Big|_{\theta_*} \right)$$

را محاسبه می‌کنیم. با جانشانی نتایج بالا به دست می‌آید

$$T_R = \left(\frac{\gamma n}{\pi} \tilde{\mathbf{r}} \right)^T \left(\frac{\pi}{\gamma n} \mathbf{I} \right) \left(\frac{\gamma n}{\pi} \tilde{\mathbf{r}} \right) = \frac{n}{\gamma} \|\tilde{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{n}{\gamma} \sum_{i < j} \left(\text{Re}\{\hat{r}_{ij}\} + \text{Im}\{\hat{r}_{ij}\} \right) = \frac{n}{\gamma} \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^2.$$

پس آماره رانو برای مسأله حاضر

$$T_R = \frac{n}{\gamma} \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^2, \quad \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{y}(t) \mathbf{y}^H(t),$$

و قاعدهٔ تصمیم

$$T_R \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma_R$$

خواهد بود.

□

آشکارساز ∞ -bit EMR مرتبه‌ی دوم که در مقالات قبلی معرفی و به آن اشاره شده است به صورت زیر است :

$$T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}) = \frac{\frac{1}{m} \|\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}\|^2}{\left(\frac{1}{m} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}})\right)^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma_{\text{EMR}} \quad (44-3)$$

که $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ ، SCM محاسبه شده از نمونه‌های کوانتیزه نشده‌ی $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n)]$ است. با توجه به این نکته که المان‌های قطری $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ برابر با ۲ است، داریم :

$$\begin{aligned} T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}) &= \frac{\frac{1}{m} \|\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\|^2}{\left(\frac{1}{m} \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}})\right)^2} = \frac{\frac{1}{m} \left(2 \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^2 + m \times 4\right)}{\left(\frac{1}{m} \times 2m\right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{m} \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^2 + 4\right)}{4} = \frac{1}{2m} \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^2 + 1 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم :

$$T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}) = \frac{1}{mn} T_R + 1 \quad (45-3)$$

و با توجه به این رابطه، می‌توان گفت تست Rao معادل تست EMR است که از SCM مختلط نمونه‌های تک‌بیتی استفاده می‌کند.

فصل ۴

توزیع‌های آشکارساز

در این قسمت، ابتدا خاصیت CFAR^۱ آشکارساز معرفی شده را بررسی می‌کنیم. سپس، توزیع مجانبی T_R را تحت فرض‌های H_0 و H_1 به دست می‌آوریم. از آنجایی که T_R محدود به بازه $[0, nm(m-1)]$ است، می‌توانیم یک توزیع بتا را برای توزیع تقریبی آشکارساز انتخاب کنیم. نحوه به دست آوردن توزیع به این صورت است که ابتدا، ممان‌های مرتبه اول و دوم آشکارساز را به دست می‌آوریم و با ممان‌های متناظر توزیع بتا مطابقت می‌دهیم تا پارامترها را پیدا کنیم.

۴-۱ خاصیت CFAR

برای بررسی ویژگی CFAR آشکارساز پیشنهادی، از نظریه invariant استفاده می‌کنیم. فرض کنید Σ' یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری نامعلوم و مثبت باشد. برای اثبات ویژگی CFAR کافی است دو نکته را تحت H_0 نشان دهیم:

۱. کوانتیزه‌سازی یک‌بیتی تبدیل $\Sigma'^{1/2}\mathbf{x}(t)$ ، که با $Q(\Sigma'^{1/2}\mathbf{x}(t))$ نشان داده می‌شود، متعلق به همان خانواده‌ی توزیع داده‌های اولیه‌ی یک‌بیتی $\mathbf{y}(t)$ است.

۲. آشکارساز پیشنهادی $Q(\Sigma'^{1/2}\mathbf{x}(t))$ را دقیقاً به همان نتیجه‌ای نگاشت می‌کند که $\mathbf{y}(t)$ را می‌کند.

از آنجا که Σ' قطری با درایه‌های مثبت است و با توجه به خاصیت $\text{sign}(ax) = \text{sign}(x)$ برای $a > 0$,

¹Constant false alarm rate

داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{x}(t)) &= \text{sign}(\Sigma'^{1/2} \text{Re}(\mathbf{x}(t))) + j \text{sign}(\Sigma'^{1/2} \text{Im}(\mathbf{x}(t))) \\ &= \text{sign}(\text{Re}(\mathbf{x}(t))) + j \text{sign}(\text{Im}(\mathbf{x}(t))) \\ &= \mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (1-4)$$

بنابراین $\mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{x}(t))$ و $\mathbf{y}(t)$ دارای توزیع یکسانی هستند.

اکنون مقدار آماری آزمون راثو برای داده‌های تبدیل شده بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned} T_R(\mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{X})) &= \frac{n}{2} \sum_{i,j=1, i < j}^m \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{Q}(\sigma'_i x_i(t)) \mathbf{Q}(\sigma'_j x_j(t))^* \right|^2 \\ &= \frac{n}{2} \sum_{i,j=1, i < j}^m \left| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_i(t) y_j^*(t) \right|^2 \\ &= T_R(\mathbf{Y}), \end{aligned} \quad (2-4)$$

که در آن $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n)]$ و σ'_i درایه‌ی (i, i) ماتریس Σ' است.

به طور مشابه، برای آزمون EMR یکبیتی داریم:

$$T_O = 1 + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1, i < j}^m |\hat{r}_{\tilde{\mathbf{y}}}(i, j)|^2, \quad (3-4)$$

که در آن $\hat{r}_{\tilde{\mathbf{y}}}(i, j)$ درایه‌ی (i, j) ماتریس کوواریانس یکبیتی گسترش یافته $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ است. اگر بردار $\tilde{\mathbf{y}}_{\text{tra}}(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\text{tra}}(t) = [\text{Re}(\mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{x}(t))), \text{Im}(\mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{x}(t)))^T]^T,$$

خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}_{\text{tra}}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{\mathbf{y}}_{\text{tra}}(t) \tilde{\mathbf{y}}_{\text{tra}}^T(t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{\mathbf{y}}(t) \tilde{\mathbf{y}}^T(t) = \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}}. \quad (4-4)$$

در نتیجه

$$T_O(\mathcal{Q}(\Sigma'^{1/2} \mathbf{X})) = T_O(\mathbf{Y}).$$

نتیجه‌گیری: بنابراین هم روش پیشنهادی و هم آزمون EMR یکبیتی حتی در شرایط نامعینی واریانس نویز، آستانه‌ی آشکارسازی ثابتی را حفظ می‌کنند. به بیان دیگر، هر دو روش دارای ویژگی CFAR هستند. این خاصیت نیز با شبیه‌سازی‌های فصل‌های بعد تأیید می‌شود.

۲-۴ توزیع تحت فرض H .

برای آن که آشکارساز به بازه $[0, 1]$ نگاشت شود، آماره‌ی جدید T'_R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T'_R = \frac{1}{nm(m-1)} T_R \quad (۵-۴)$$

ممان‌های مرتبه اول و دوم این آماره، در قضیه زیر داده شده‌اند.

قضیه‌ی ۱-۴ تحت فرض H ، میانگین و واریانس T'_R به صورت زیر هستند:

$$\mu_{\bullet} = \frac{1}{n} \quad (۶-۴)$$

$$\sigma_{\bullet}^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^3} \quad (۷-۴)$$

اثبات. از آنجا که مشاهدات در زمان‌های مختلف مستقل هستند و هر مؤلفه‌ی $\tilde{y}_a(t)$ تنها می‌تواند مقادیر ± 1 بگیرد، داریم

$$\mathbb{E} \left[\prod_{t=1}^n \prod_{a=1}^m (\tilde{y}_a(t))^{\eta_{at}} \right] = \prod_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\prod_{a=1}^m (\tilde{y}_a(t))^{\text{mod}(\eta_{at}, 2)} \right], \quad (۸-۴)$$

که در آن $\eta_{at} \in \mathbb{N}$ و $\text{mod}(\eta, 2)$ باقیمانده‌ی تقسیم η بر ۲ است.

تحت H ، تابع جرم احتمال $p(\tilde{\mathbf{Y}}; \theta = \theta_{\bullet})$ برابر است با

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}; \theta = \theta_{\bullet}) = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sum mn}.$$

در نتیجه مؤلفه‌های \tilde{Y} مستقل‌اند و

$$\Pr\{\tilde{y}_a(t) = 1\} = \Pr\{\tilde{y}_a(t) = -1\} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\prod_{t=1}^n \prod_{a=1}^m (\tilde{y}_a(t))^{\eta_{at}} \right] = \begin{cases} 1, & \text{اگر همه‌ی } \eta_{at} \text{ ها زوج باشند} \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اگر $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j^*(t)$ باشد. با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t_1)z_{ij}^*(t_2)] = 2\delta_{t_1 t_2}, \quad (۹-۴)$$

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t_1)z_{ij}^*(t_2)z_{kl}(t_3)z_{kl}^*(t_4)] = 4\delta_{t_1 t_2}\delta_{t_3 t_4} + 4\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{t_1 t_3}\delta_{t_2 t_4}(1 - \delta_{t_1 t_2}\delta_{t_3 t_4}), \quad (۱۰-۴)$$

که در آن $1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq m, 1 \leq t_1, t_2, t_3, t_4 \leq n$.

گام ۱: محاسبه‌ی میانگین T'_R .

داشتیم:

$$T'_R = \frac{1}{nm(m-1)} T_R.$$

پس میانگین آن برابر است با

$$\begin{aligned} \mu_{\bullet} &= \mathbb{E}[T'_R] = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1, i < j}^m \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2] \\ &= \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1, i < j}^m \mathbb{E} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t_1, t_2=1}^n z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2) \right] \\ &= \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j=1, i < j}^m \frac{1}{n^2} \sum_{t_1, t_2=1}^n \mathbb{E}[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2)]. \end{aligned} \quad (11-4)$$

با استفاده از (4-9)، تنها حالت $t_1 = t_2$ باقی می ماند و

$$\mu_{\bullet} = \frac{1}{n}.$$

گام ۲: محاسبه‌ی واریانس T'_R .

واریانس را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} \sigma_{\bullet}^2 &= \mathbb{E}[(T'_R)^2] - \mu_{\bullet}^2 \\ &= \frac{1}{m^2(m-1)^2} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j, k < l}}^m \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2 |\hat{r}_{kl}|^2] - \mu_{\bullet}^2. \end{aligned} \quad (12-4)$$

اکنون

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2 |\hat{r}_{kl}|^2] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n^4} \sum_{t_1, t_2, t_3, t_4=1}^n z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2) z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4) \right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{t_1, t_2, t_3, t_4=1}^n \mathbb{E}[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2) z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4)]. \end{aligned} \quad (13-4)$$

با جایگذاری (4-10) در رابطه‌ی بالا

$$\mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2 |\hat{r}_{kl}|^2] = \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2] \mathbb{E}[|\hat{r}_{kl}|^2] + \frac{16(n^2 - n)}{n^4} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (92)$$

با جایگذاری در (4-12) و ساده سازی

$$\sigma_{\bullet}^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^2}. \quad (93)$$

نتیجه: تحت فرض H_0 ، آماره‌ی نرمالیزه‌شده‌ی T'_R میانگین $\mu_0 = \frac{1}{n}$ و واریانس $\sigma_0^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^2}$ دارد.

□

تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(x; \alpha, \beta), \quad (41)$$

که در آن تابع بتای ناقص برابر است با

$$B(x; \alpha, \beta) = \int_0^x z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz, \quad (42)$$

و $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ، برای $x > 0$ ، تابع گاما است.

علاوه بر این، میانگین و واریانس یک توزیع بتا به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (43-14)$$

با تطبیق روابط (43-14) با نتایج (43-6) و (43-7)، توزیع تقریبی Null (فرض H_0) آماره‌ی T'_R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Pr\{T'_R < \gamma\} \approx \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)} B(\gamma; \alpha_0, \beta_0), \quad (43-15)$$

که در آن

$$\alpha_0 = \frac{nm(m-1) - 2}{2n}, \quad (43-16)$$

$$\beta_0 = \frac{(n-1)[nm(m-1) - 2]}{2n}. \quad (43-17)$$

۳-۴ توزیع تحت فرض H_1

میانگین و واریانس T'_R تحت فرض H_1 در قضیه‌ی زیر آمده است.

قضیه‌ی ۲-۴ تحت فرض H_1 ، میانگین و واریانس T'_R به صورت زیر هستند.

$$\mu_1 = \frac{1}{2m(m-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m g_{ij} \quad (43-18)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4m^2(m-1)^2} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j, k < l}}^m (f_{ijkl} - g_{ijkl}) \quad (43-19)$$

که g_{ij} ، f_{ijkl} و g_{ijkl} در اثباتی که در ادامه می‌آید تعریف می‌شوند.

اثبات. با ترکیب حل‌های بسته برای «احتمال‌های orthant مرکزی» مرتبه دوم و سوم با $p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^n p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^n \phi[\mathbf{S}(t)]$ به نتایج زیر می‌انجامد:

$$h_{ab} = \mathbb{E}[\tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t)] = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ab}, \quad (20-4)$$

و

$$(21-4)$$

$$h_{abcd} = \mathbb{E}[\tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \tilde{y}_c(t) \tilde{y}_d(t)] = 16 P_{abcd} - 1 - (h_{ab} + h_{ac} + h_{ad} + h_{bc} + h_{bd} + h_{cd}),$$

که در آن $1 \leq a \neq b \neq c \neq d \leq 2m$ و

$$P_{abcd} = \Pr\{\tilde{x}_a(t) > 0, \tilde{x}_b(t) > 0, \tilde{x}_c(t) > 0, \tilde{x}_d(t) > 0\}. \quad (22-4)$$

با توجه به تقارن‌های ساختاری

$$\rho_{i'j'} = \rho_{ij}, \quad \rho_{i'j} = -\rho_{ij'}, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad (23-4)$$

و استفاده از (8-4) و (20-4) و (21-4) داریم

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t)] = \mathbb{E}[y_i(t) y_j^*(t)] = 2(h_{ij} + i h_{i'j}), \quad (24-4)$$

و امیدهای ضرب‌های دوتایی به صورت زیرند:

$$(25-4)$$

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t) z_{kl}(t)] = \begin{cases} 4 h_{ii'jj'}, & i=k, j=l, \\ 2 [h_{ii'jl'} + h_{ii'j'l} + i(h_{ii'jl} - h_{ii'j'l'})], & i=k, j \neq l, \\ 4(h_{kj} + i h_{k'j}), & i=l, \\ 4(h_{il} + i h_{i'l}), & j=k, \\ 2 [h_{jj'ik'} + h_{jj'i'k} + i(h_{jj'i'k'} - h_{jj'ik})], & j=l, i \neq k, \\ v_1(i, j, k, l) - v_2(i, j, k, l) + i[v_3(i, j, k, l) + v_4(i, j, k, l)], & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases}$$

و

$$(۲۶-۴)$$

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t) z_{kl}^*(t)] = \begin{cases} \mathfrak{F}, & i=k, j=l, \\ \mathfrak{F}(h_{lj} + \mathfrak{i} h_{l'j}), & i=k, j \neq l, \\ \mathfrak{F}[h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k} + \mathfrak{i}(h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'})], & i=l, \\ \mathfrak{F}[h_{jj'il'} + h_{jj'i'l} + \mathfrak{i}(h_{jj'i'l'} - h_{jj'ul})], & j=k, \\ \mathfrak{F}(h_{ik} + \mathfrak{i} h_{i'k}), & j=l, i \neq k, \\ v_{\mathfrak{A}}(i, j, k, l) + v_{\mathfrak{V}}(i, j, k, l) + \mathfrak{i}[v_{\mathfrak{F}}(i, j, k, l) - v_{\mathfrak{F}}(i, j, k, l)], & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases}$$

که در آن (برای $1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq m$)

$$v_{\mathfrak{A}}(i, j, k, l) = h_{ijkl} + h_{ijk'l'} + h_{i'j'kl} + h_{i'j'k'l'}, \quad (۱۲۷-۴)$$

$$v_{\mathfrak{V}}(i, j, k, l) = h_{i'jk'l} - h_{i'jkl'} - h_{ij'k'l} + h_{ij'kl'}, \quad (۲۷-۴ ب)$$

$$v_{\mathfrak{F}}(i, j, k, l) = h_{i'jkl} + h_{i'j'k'l'} - h_{ij'kl} - h_{ij'k'l'}, \quad (۲۷-۴ ج)$$

$$v_{\mathfrak{F}}(i, j, k, l) = h_{ijk'l} - h_{ijk'l'} + h_{i'j'k'l} - h_{i'j'k'l'}. \quad (۲۷-۴ د)$$

میانگین. با یادآوری

$$T'_R = \frac{1}{nm(m-1)} T_R = \frac{1}{\mathfrak{F}m(m-1)} \sum_{i < j} |\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{F}},$$

میانگین تحت H_1 برابر است با

$$\mu_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{\mathfrak{F}m(m-1)} \sum_{i < j} \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{F}}] = \frac{1}{\mathfrak{F}m(m-1)} \sum_{i < j} g_{ij}, \quad (۲۸-۴)$$

که

$$g_{ij} = \frac{\mathfrak{F}}{n^{\mathfrak{F}}} \left[n + A_{n,\mathfrak{F}}(h_{ij}^{\mathfrak{F}} + h_{i'j}^{\mathfrak{F}}) \right]. \quad (۲۹-۴)$$

تذکر (تصحیح): در متن مقاله برای $A_{n,m}$ (تعداد جایگشت‌های بدون تکرار انتخاب m عنصر از n عنصر) به اشتباه فرمول دیگری نوشته شده بود. تعریف درست که در این جا به کار می‌بریم به صورت زیر است:

$$A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

که در این اثبات $A_{n,\mathfrak{F}} = n(n-1)$

واریانس. واریانس T'_R برابر است با

$$\sigma_{\mathfrak{I}} = \frac{1}{\mathfrak{F}m^{\mathfrak{I}}(m-1)^{\mathfrak{I}}} \sum_{i < j} \sum_{k < l} (\mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}} |\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}] - \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}}] \mathbb{E}[|\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}]) . \quad (30-4)$$

چون مشاهدات زمانی مستقل اند، هرگاه $\delta_{t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}} + \delta_{t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}} \geq 1$ یا $t_{\mathfrak{I}} \neq t_{\mathfrak{I}} \neq t_{\mathfrak{I}} \neq t_{\mathfrak{I}}$ داریم

$$\mathbb{E}[z_{ij}(t_{\mathfrak{I}})z_{ij}^*(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}^*(t_{\mathfrak{I}})] = \mathbb{E}[z_{ij}(t_{\mathfrak{I}})z_{ij}^*(t_{\mathfrak{I}})] \mathbb{E}[z_{kl}(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}^*(t_{\mathfrak{I}})] . \quad (31-4)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}} |\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}] &= \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}}] \mathbb{E}[|\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}] + \frac{1}{n^{\mathfrak{F}}} \sum_{(t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}) \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[z_{ij}(t_{\mathfrak{I}})z_{ij}^*(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}^*(t_{\mathfrak{I}})] \\ &\quad - \frac{1}{n^{\mathfrak{F}}} \sum_{(t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}, t_{\mathfrak{I}}) \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[z_{ij}(t_{\mathfrak{I}})z_{ij}^*(t_{\mathfrak{I}})] \mathbb{E}[z_{kl}(t_{\mathfrak{I}})z_{kl}^*(t_{\mathfrak{I}})] , \end{aligned} \quad (32-4)$$

که در آن

$$\mathcal{T} = \{(a, b, c, d) \mid \delta_{ab} + \delta_{cd} = \bullet, \delta_{ac} + \delta_{ad} + \delta_{bc} + \delta_{bd} \geq 1\} . \quad (107)$$

پس از جایگذاری (4-24) و (4-25) و (4-26) و ساده‌سازی، خواهیم داشت

$$\mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}} |\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}] = \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^{\mathfrak{I}}] \mathbb{E}[|\hat{r}_{kl}|^{\mathfrak{I}}] + f_{ijkl} - g_{ijkl}, \quad (33-4)$$

که

$$g_{ijkl} = \frac{\mathfrak{I}\mathfrak{I}(n-1)(\mathfrak{I}n-\mathfrak{I})}{n^{\mathfrak{I}}} (h_{ij}^{\mathfrak{I}} + h_{i'j}^{\mathfrak{I}})(h_{kl}^{\mathfrak{I}} + h_{k'l}^{\mathfrak{I}}), \quad (34-4)$$

و

$$f_{ijkl} = \begin{cases} \tau_{\mathfrak{I}}(i, j), & i=k, j=l, \\ \tau_{\mathfrak{I}}(i, j, l), & i=k, j \neq l, \\ \tau_{\mathfrak{I}}(i, j, k), & i=l, \\ \tau_{\mathfrak{I}}(j, i, l), & j=k, \\ \tau_{\mathfrak{I}}(j, i, k), & j=l, i \neq k, \\ \tau_{\mathfrak{I}}(j, i, k, l), & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases} \quad (35-4)$$

با

$$\tau_{\mathfrak{I}}(i, j) = \frac{16}{n^{\mathfrak{F}}} A_{n, \mathfrak{I}} [1 + h_{ii'jj'}^{\mathfrak{I}}] + \frac{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}{n^{\mathfrak{F}}} A_{n, \mathfrak{I}} [(h_{ij}^{\mathfrak{I}} + h_{i'j}^{\mathfrak{I}}) + h_{ii'jj'}(h_{ij}^{\mathfrak{I}} - h_{i'j}^{\mathfrak{I}})] , \quad (36-4)$$

(۳۷-۴)

$$\begin{aligned}\tau_{\mathfrak{r}}(i, j, k) &= \frac{\mathfrak{r}}{n^{\mathfrak{r}}} A_{n, \mathfrak{r}} \left(\mathfrak{r} (h_{jk}^{\mathfrak{r}} + h_{jk'}^{\mathfrak{r}}) + (h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k})^{\mathfrak{r}} + (h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'})^{\mathfrak{r}} \right) \\ &+ \frac{\mathfrak{r}}{n^{\mathfrak{r}}} A_{n, \mathfrak{r}} \left((h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'}) (h_{ik} h_{i'j} + h_{ij} h_{i'k}) + (h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k}) (h_{ik} h_{ij} - h_{i'j} h_{i'k}) \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{r} h_{jk} (h_{ik} h_{ij} + h_{i'j} h_{i'k}) + \mathfrak{r} h_{jk'} (h_{ik} h_{i'j} - h_{ij} h_{i'k}) \right),\end{aligned}$$

و

(۳۸-۴)

$$\begin{aligned}\tau_{\mathfrak{r}}(i, j, k, l) &= \frac{\mathfrak{r}}{n^{\mathfrak{r}}} A_{n, \mathfrak{r}} \sum_{t=1}^{\mathfrak{r}} v_t^{\mathfrak{r}}(i, j, k, l) + \frac{\mathfrak{r}}{n^{\mathfrak{r}}} A_{n, \mathfrak{r}} \left(v_1(i, j, k, l) h_{ij} h_{kl} + v_{\mathfrak{r}}(i, j, k, l) h_{i'j} h_{k'l} \right. \\ &\quad \left. + v_{\mathfrak{r}}(i, j, k, l) h_{kl} h_{i'j} + v_{\mathfrak{r}}(i, j, k, l) h_{ij} h_{k'l} \right).\end{aligned}$$

در نهایت،

$$\sigma_1^{\mathfrak{r}} = \frac{1}{\mathfrak{r} m^{\mathfrak{r}} (m-1)^{\mathfrak{r}}} \sum_{i < j} \sum_{k < l} (f_{ijkl} - g_{ijkl}), \quad (۳۹-۴)$$

که همان بیان واریانس T'_R تحت H_1 است.

□

مشابه حالت H ، تابع توزیع تجمعی (CDF) آماره T'_R تحت H_1 نیز می‌تواند با یک توزیع بتا تقریب

زده شود:

$$\Pr\{T'_R < \gamma\} \approx \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1)} B(\gamma; \alpha_1, \beta_1), \quad (۴۰-۴)$$

که در آن

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1 (\mu_1 - \mu_1^{\mathfrak{r}} - \sigma_1^{\mathfrak{r}})}{\sigma_1^{\mathfrak{r}}}, \quad (۴۱-۴)$$

$$\beta_1 = \frac{(1 - \mu_1) (\mu_1 - \mu_1^{\mathfrak{r}} - \sigma_1^{\mathfrak{r}})}{\sigma_1^{\mathfrak{r}}}. \quad (۴۲-۴)$$

فصل ۵

تحلیل عملکرد

در این بخش، افت کارایی در آشکارسازی هنگام استفاده از مبدل‌های آنالوگ-دیجیتال یک‌بیتی 1-bit ADCs در مقایسه با مبدل‌های ∞ -بیتی بررسی می‌شود. توجه کنید که آشکارساز ∞ -بیتی EMR در دسته‌ی آزمون‌های sphericity قرار می‌گیرد؛ آزمون‌هایی که هم استقلال بین متغیرهای تصادفی و هم برابری واریانس‌های آن‌ها را در نظر می‌گیرند. با این حال، به دلیل از دست رفتن اطلاعات دامنه در حالت یک‌بیتی، مقایسه‌ی واریانس‌ها غیرممکن می‌شود. بنابراین، نتیجه‌ی ما با آزمون LMPIT^۱ مقایسه می‌شود. در حقیقت، وقتی SNR پایین باشد، درایه‌های قطری ماتریس کوواریانس تقریباً برابر می‌شوند و آزمون sphericity کارایی نزدیک به آزمون استقلال دارد، که این موضوع با شبیه‌سازی در [۵] نشان داده شده است.

۵-۱ حالت ∞ -bit

مسئله‌ی آشکارسازی برای ∞ -بیت ADC مطابق زیر است.

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{R}_x = \text{diag}(\sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_m}),$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{R}_x \neq \text{diag}(\sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_m})$$

LMPIT برای این مسئله به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$T_L = n \text{tr} \left[\left(\hat{\mathbf{R}}_x \text{Diag}(\hat{\mathbf{R}}_x)^{-1} - \mathbf{I}_m \right)^2 \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma_L, \quad (۱-۵)$$

^۱Locally Most Powerful Invariant Test

که توزیع مجانبی آن در [۳] تحلیل شده است:

$$T_L \sim \begin{cases} \chi_k^2, & H_0, \\ \chi_k^2(\delta_\infty^2), & H_1, \end{cases} \quad (2-5)$$

که در آن $k = m^2 - m$ و $\delta_\infty^2 = n \operatorname{tr}[(\mathbf{P}_x - \mathbf{I}_m)^2] = 2n\|\theta\|^2$

۲-۵ حالت تکبیت

در بخش قبل، توزیع آماری T_R را با توزیع بتا تقریب زدیم. با این حال، این تقریب برای مقایسه با آشکارسازهای ∞ -بیتی جهت تحلیل افت کارایی مناسب نیست. بنابراین، در این جا یک تقریب جدید برای توزیع T_R در SNR پایین استخراج می‌کنیم که در قالب توزیع کای-دو غیرمرکزی بیان می‌شود. ابتدا می‌نویسیم:

$$T_R = \|\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}\|^2, \quad (3-5)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \tilde{\mathbf{r}}$ و $\tilde{\mathbf{r}} = [\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{r}})^T, \operatorname{Im}(\hat{\mathbf{r}})^T]^T$ خود $\hat{\mathbf{r}}$ نیز قبلاً به صورت زیر تعریف شد.

$$\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_{1,2}, \hat{r}_{1,3}, \hat{r}_{2,3}, \dots, \hat{r}_{m-1,m}]^T$$

قضیه ۱-۵ در SNR پایین که θ از مرتبه $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ است، بردار تصادفی $\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}$ به صورت مجانبی از یک توزیع گاوسی چندبعدی حقیقی با میانگین و کوواریانس زیر پیروی می‌کند:

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}] = \frac{2}{\pi} \sqrt{2n} \theta + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \quad (4-5)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}} = \mathbf{I}_{m^2-m} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \quad (5-5)$$

اثبات.

میانگین و واریانس $\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}$

برای اختصار، هر بردار با اندیس sc به صورت مقیاس یافته تعریف می‌شود:

$$\mathbf{r}_{\text{sc}} \triangleq \sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{r}. \quad (6-5)$$

بنابراین

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\hat{\mathbf{r}}_{\text{sc}})^T & \operatorname{Im}(\hat{\mathbf{r}}_{\text{sc}})^T \end{bmatrix}^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_{\text{sc}} = [(\hat{r}_{1,2})_{\text{sc}}, (\hat{r}_{1,3})_{\text{sc}}, (\hat{r}_{2,3})_{\text{sc}}, \dots, (\hat{r}_{m-1,m})_{\text{sc}}]^T.$$

با فرض $\theta = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ ، بسط تیلور $p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \theta)$ پیرامون θ_* به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \theta) &= p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \theta_*) + \theta^T \left. \frac{\partial p(\tilde{\mathbf{y}}(t))}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \operatorname{Re}(z_{ij}(t)) \rho_{ij} + \frac{1}{2^{m-1}\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq m} \operatorname{Im}(z_{ij}(t)) \rho_{i'j} + \mathcal{O}(n^{-1}), \end{aligned} \quad (7-5)$$

که در آن با استفاده از $\rho_{ij} = -\rho_{i'j}$ ، $\rho_{i'j} = \rho_{ij}$ و $\operatorname{diag}(\operatorname{Im}(\mathbf{P}_x)) = \mathbf{0}$ را مشابه (3-37) و (3-38) می‌توان نوشت

$$p(\tilde{\mathbf{y}}(t); \theta) = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq 2m} \tilde{y}_i(t) \tilde{y}_j(t) \rho_{ij} + \mathcal{O}(n^{-1}). \quad (8-5)$$

سپس می‌توان نتیجه گرفت که :

$$p(\tilde{y}_a(t), \tilde{y}_b(t); \theta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \rho_{ab} + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (9-5)$$

$$\begin{aligned} p(\tilde{y}_a(t), \tilde{y}_b(t), \tilde{y}_c(t), \tilde{y}_d(t); \theta) &= \frac{1}{16} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\tilde{y}_a \tilde{y}_b \rho_{ab} + \tilde{y}_a \tilde{y}_c \rho_{ac} + \tilde{y}_a \tilde{y}_d \rho_{ad} + \tilde{y}_b \tilde{y}_c \rho_{bc} + \tilde{y}_b \tilde{y}_d \rho_{bd} + \tilde{y}_c \tilde{y}_d \rho_{cd}] + \mathcal{O}(n^{-1}) \end{aligned} \quad (10-5)$$

که $1 \leq a \neq b \neq c \neq d \leq 2m$

در نتیجه

$$\mathbb{E}[\tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t)] = \sum_{\substack{\tilde{y}_e(t)=\pm 1 \\ e=a,b}} \tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) p(\tilde{y}_a(t), \tilde{y}_b(t); \theta) = \frac{2}{\pi} \rho_{ab} + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad (11-5)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \tilde{y}_c(t) \tilde{y}_d(t)] &= \sum_{\substack{\tilde{y}_e(t)=\pm 1 \\ e=a,b,c,d}} \tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \tilde{y}_c(t) \tilde{y}_d(t) p(\tilde{y}_a(t), \tilde{y}_b(t), \tilde{y}_c(t), \tilde{y}_d(t); \theta) \\ &= \mathcal{O}(n^{-1}), \end{aligned} \quad (12-5)$$

وقتی تمام اندیس‌های a, b, c, d یکسان باشند، می‌توان با استفاده از (4-8)، می‌توان $\mathbb{E}[\tilde{y}_a(t) \tilde{y}_b(t) \tilde{y}_c(t) \tilde{y}_d(t)]$ را ساده کرد. پس می‌توان نشان داد که :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\operatorname{Re}((\hat{r}_{ij})_{sc})] &= \sqrt{\frac{n}{2}} \mathbb{E}[\operatorname{Re}(\hat{r}_{ij})] \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\tilde{y}_i(t) \tilde{y}_j(t) + \tilde{y}_{i'}(t) \tilde{y}_{j'}(t)) \right] \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} \left[\frac{2}{\pi} \rho_{ij} + \frac{2}{\pi} \rho_{i'j'} + \mathcal{O}(n^{-1}) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{2n}}{\pi} \rho_{ij} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \end{aligned} \quad (13-5)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{Im}((\hat{r}_{ij})_{\text{sc}})] &= \sqrt{\frac{n}{\Upsilon}} \mathbb{E}[\text{Im}(\hat{r}_{ij})] \\
&= \sqrt{\frac{n}{\Upsilon}} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t))\right] \\
&= \sqrt{\frac{n}{\Upsilon}} \left[\frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{i'j} - \frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{ij'} + \mathcal{O}(n^{-1})\right] \\
&= \frac{\Upsilon\sqrt{\Upsilon n}}{\pi} \rho_{i'j} + \mathcal{O}(n^{-1/\Upsilon}). \tag{۱۴-۵}
\end{aligned}$$

پس میانگین بردار

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}] = \frac{\Upsilon\sqrt{\Upsilon n}}{\pi} \theta + \mathcal{O}(n^{-1/\Upsilon}). \tag{۱۵-۵}$$

از استقلال زمانی، برای $t_1 \neq t_2$ داریم

$$\mathbb{E}[\tilde{y}_a(t_1)\tilde{y}_b(t_1)\tilde{y}_c(t_2)\tilde{y}_d(t_2)] = \mathbb{E}[\tilde{y}_a(t_1)\tilde{y}_b(t_1)] \mathbb{E}[\tilde{y}_c(t_2)\tilde{y}_d(t_2)]. \tag{۱۶-۵}$$

اکنون کوواریانس‌های مؤلفه‌ها را محاسبه می‌کنیم. با تعریف $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j^*(t)$ داریم :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{\text{sc}}) \text{Re}((\hat{r}_{kl})_{\text{sc}})] - \mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{\text{sc}})] \mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{kl})_{\text{sc}})] \\
&= \frac{n}{\Upsilon} \mathbb{E}[\text{Re}(\hat{r}_{ij}) \text{Re}(\hat{r}_{kl})] - \frac{n}{\Upsilon} \mathbb{E}[\text{Re}(\hat{r}_{ij})] \mathbb{E}[\text{Re}(\hat{r}_{kl})] \\
&= \frac{1}{\Upsilon n} \mathbb{E}\left[\sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \text{Re}(z_{ij}(t_1)) \text{Re}(z_{kl}(t_2))\right] - \frac{1}{\Upsilon n} \mathbb{E}\left[\sum_{t_1=1}^n \text{Re}(z_{ij}(t_1))\right] \mathbb{E}\left[\sum_{t_2=1}^n \text{Re}(z_{kl}(t_2))\right] \\
&= \frac{1}{\Upsilon n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\text{Re}(z_{ij}(t)) \text{Re}(z_{kl}(t))] - \frac{1}{\Upsilon n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\text{Re}(z_{ij}(t))] \mathbb{E}[\text{Re}(z_{kl}(t))] \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}^{\Upsilon} + \mathcal{O}(n^{-1}), & i=k, j=l, \\ \frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{jl} - \frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}\rho_{il} + \mathcal{O}(n^{-1}), & i=k, j \neq l, \\ \frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{jk} - \frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}\rho_{ki} + \mathcal{O}(n^{-1}), & i=l, \\ \frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{il} - \frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}\rho_{jl} + \mathcal{O}(n^{-1}), & j=k, \\ \frac{\Upsilon}{\pi}\rho_{ik} - \frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}\rho_{kj} + \mathcal{O}(n^{-1}), & j=l, i \neq k, \\ -\frac{\Lambda}{\pi^{\Upsilon}}\rho_{ij}\rho_{kl} + \mathcal{O}(n^{-1}), & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases} \tag{۱۷-۵}
\end{aligned}$$

که با توجه به $\theta = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ معادله بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

(۱۸-۵)

$$\mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{sc}) \text{Re}((\hat{r}_{kl})_{sc})] - \mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{sc})] \mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{kl})_{sc})] = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(n^{-1}), & i = k, j = l, \\ \mathcal{O}(n^{-1/2}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

که $1 \leq k < l \leq m$ و $1 \leq i < j \leq m$

به طرز مشابه خواهیم داشت :

$$\mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{sc}) \text{Im}((\hat{r}_{kl})_{sc})] - \mathbb{E}[\text{Re}((\hat{r}_{ij})_{sc})] \mathbb{E}[\text{Im}((\hat{r}_{kl})_{sc})] = \mathcal{O}(n^{-1/2}). \quad (۱۹-۵)$$

و

(۲۰-۵)

$$\mathbb{E}[\text{Im}((\hat{r}_{ij})_{sc}) \text{Im}((\hat{r}_{kl})_{sc})] - \mathbb{E}[\text{Im}((\hat{r}_{ij})_{sc})] \mathbb{E}[\text{Im}((\hat{r}_{kl})_{sc})] = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(n^{-1}), & i = k, j = l, \\ \mathcal{O}(n^{-1/2}), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

در نتیجه ماتریس کوواریانس $\tilde{\mathbf{r}}_{sc}$ در SNR پایین

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{sc}} = \mathbf{I}_{m^2-m} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \quad (۲۱-۵)$$

اثبات گوسی بودن $\tilde{\mathbf{r}}_{sc}$

برای اتمام اثبات قضیه ۴ نشان می‌دهیم $\tilde{\mathbf{r}}_{sc}$ به صورت مجانبی، گاوسی است. از نسخه چندمتغیره قضیه

حد مرکزی استفاده می‌کنیم:

لم (*CLT Multivariate*). اگر $\mathbf{s} = \sum_{t=1}^n \mathbf{b}_t$ که $\mathbf{b}_t \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ مستقل و با میانگین صفرند، آنگاه برای

\mathbf{s} با میانگین صفر و کوواریانس \mathbf{C} مجانبی گاوسی است هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\|\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{b}_t\|^2] = 0. \quad (۲۲-۵)$$

برای به کارگیری لم، تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = \sqrt{\frac{1}{2n}} \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{z}_t)^T & \text{Im}(\mathbf{z}_t)^T \end{bmatrix}^T, \quad (۲۳-۵)$$

$$\mathbf{z}_t = [z_{1,2}(t), z_{1,3}(t), \dots, z_{m-1,m}(t)]^T, \quad (۲۴-۵)$$

$$\mathbf{b}_t = \tilde{\mathbf{z}}_t - \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]. \quad (۲۵-۵)$$

با استفاده از (۲۴-۲) داریم

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t] = \left(\frac{\Lambda}{n\pi^2}\right)^{1/2} \arcsin(\theta), \quad (\text{اعمال } \arcsin \text{ به صورت درایه به درایه}). \quad (۲۶-۵)$$

همچنین

$$\mathbf{s} = \sum_{t=1}^n \mathbf{b}_t, \quad (۲۷-۵)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}} = \mathbf{s} + \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}], \quad (۲۸-۵)$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t] = \left(\frac{\Lambda n}{\pi^2}\right)^{1/2} \arcsin(\theta), \quad (۲۹-۵)$$

و $\mathbf{C} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}}$

یادآوری می‌کنیم که نامساوی کوشی-شوارتز به صورت زیر است :

$$\|\mathbf{c}_i \mathbf{b}_t\|^2 \leq \|\mathbf{c}_i\|^2 \|\mathbf{b}_t\|^2 \quad (۳۰-۵)$$

حال با استفاده از این نامساوی داریم :

$$\|\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{b}_t\|^3 = \left(\sum_i \|\mathbf{c}_i \mathbf{b}_t\|^2\right)^{3/2} \leq \left(\sum_i \|\mathbf{c}_i\|^2 \|\mathbf{b}_t\|^2\right)^{3/2} = \|\mathbf{C}^{-1/2}\|^3 \|\mathbf{b}_t\|^3. \quad (۳۱-۵)$$

از نامساوی $\mathbb{E}[f(x)] \geq \mathbb{E}[g(x)]$ برای $f(x) \geq g(x) \geq 0$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{b}_t\|^3] \leq \|\mathbf{C}^{-1/2}\|^3 \mathbb{E}[\|\mathbf{b}_t\|^3] \quad (۳۲-۵)$$

با استفاده از این نامساوی و این نکته که $\|\mathbf{C}^{-1/2} \mathbf{b}_t\|^3$ محدود است، کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\|\mathbf{b}_t\|^3] = 0, \quad (۳۳-۵)$$

تا شرط لم برقرار باشد. با قانون متوازی‌الاضلاع داریم

$$\|\mathbf{b}_t\|^2 + \|\tilde{\mathbf{z}}_t + \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^2 = 2(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^2 + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^2) \Rightarrow \|\mathbf{b}_t\|^2 \leq 2(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^2 + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^2). \quad (۳۴-۵)$$

سپس داریم :

$$\begin{aligned} \max \|\mathbf{b}_t\|^2 &\leq \max 2(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^2 + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^2) = \max 2\left(\frac{m(m-1)}{n} + \frac{\Lambda}{n\pi^2} \|\arcsin \theta\|^2\right) \\ &= \frac{2m(m-1)}{n} + \frac{16}{n\pi^2} \max_{\theta} \|\arcsin \theta\|^2 = \frac{6m(m-1)}{n}. \end{aligned} \quad (۳۵-۵)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\|\mathbf{b}_t\|^{\mathfrak{r}}] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \max \|\mathbf{b}_t\|^{\mathfrak{r}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \left[(\max \|\mathbf{b}_t\|^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}/\mathfrak{r}} \right] \leq [6m(m-1)]^{\mathfrak{r}/\mathfrak{r}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\mathfrak{r}} = 0. \end{aligned} \quad (36-5)$$

و بنابراین طبق لم، $\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}$ مجانبی گاوسی است.
اکنون، اثبات قضیه به اتمام رسید.

□

با توجه به نتایج بالا نتیجه می‌گیریم:

$$T_R \sim \begin{cases} \chi_k^{\mathfrak{r}}, & H_0, \\ \chi_k^{\mathfrak{r}}(\delta_1^{\mathfrak{r}}), & H_1, \end{cases} \quad (37-5)$$

که در آن

$$\delta_1^{\mathfrak{r}} = \frac{\lambda n}{\pi^{\mathfrak{r}}} \|\theta\|^{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{r}}{\pi^{\mathfrak{r}}} \delta_{\infty}^{\mathfrak{r}}. \quad (38-5)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که افت کارایی در SNR پایین تقریباً برابر است با:

$$10 \log_{10} \left(\sqrt{\frac{\delta_{\infty}^{\mathfrak{r}}}{\delta_1^{\mathfrak{r}}}} \right) \approx 2 \text{ dB}.$$

به بیان دیگر، این افت کارایی را می‌توان با افزایش اندازه‌ی نمونه‌ها به میزان $2/47 \approx \pi^{\mathfrak{r}}/\mathfrak{r} = \delta_{\infty}^{\mathfrak{r}}/\delta_1^{\mathfrak{r}}$ جبران کرد.

شایان ذکر است که در [۷] افت 2 dB تنها با افزایش تعداد نمونه‌ها به اندازه‌ی $1/57 \approx \pi/2$ برابر جبران‌پذیر گزارش شده بود. در مقایسه با نتیجه‌ی این مقاله، روشن می‌شود که بازده non-coherent accumulation برابر با ریشه‌ی دوم بازده coherent accumulation است.

فصل ۶

نتایج عددی

در این بخش، نتایج آزمایش‌های مونت‌کارلو ارائه می‌شود. ابتدا ویژگی CFAR آشکارساز پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس دقت تقریب توزیعی که برای آماره‌ی آشکارساز تحت SNRهای مختلف به‌دست آورده‌ایم، ارزیابی می‌شود. در ادامه، کارایی آشکارساز پیشنهادی با آشکارساز One-Bit EMR مقایسه خواهد شد. در نهایت نیز تحلیل تئوری ارائه‌شده با نشان دادن اینکه افت کارایی کمتر از ۲ دسی‌بل است، تأیید می‌شود.

برای تمامی آزمایش‌ها تعداد 10^6 تکرار مونت‌کارلو در نظر گرفته شده است. نسبت سیگنال به نویز (SNR) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{\sigma}_s^2}{\bar{\sigma}_w^2} \right), \quad (1-6)$$

که در آن $\bar{\sigma}_w^2 = \text{tr}(\mathbf{R}_w)/m$ و $\bar{\sigma}_s^2 = \text{tr}(\mathbf{R}_s)/p$ هستند.

برای ارزیابی دقت تقریب توزیع‌های به‌دست‌آمده، از معیار Cramér-von Mises goodness-of-fit استفاده می‌کنیم. این معیار آماری به طور گسترده برای سنجش نزدیکی یک توزیع تقریبی به توزیع واقعی استفاده می‌شود و در حوزه‌هایی نظیر تحلیل داده‌های کلانر کاربرد فراوان دارد.

این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left| F(\xi_i) - \hat{F}(\xi_i) \right|^2, \quad (2-6)$$

که در آن K تعداد آستانه‌های نمونه‌برداری شده، ξ_i مقدار آستانه‌ی i ام، و $F(\xi_i)$ و $\hat{F}(\xi_i)$ به ترتیب توزیع تجمعی تجربی و توزیع تجمعی تقریبی هستند.

۱-۶ توزیع Null

ابتدا ویژگی CFAR آشکارساز پیشنهادی و نیز آشکارساز EMR یکبیتی ارزیابی می‌شود. پارامترها به صورت $n = 128, m = 4$ و سه سناریوی متفاوت برای واریانس‌های نویز در هر گیرنده در نظر گرفته می‌شوند:

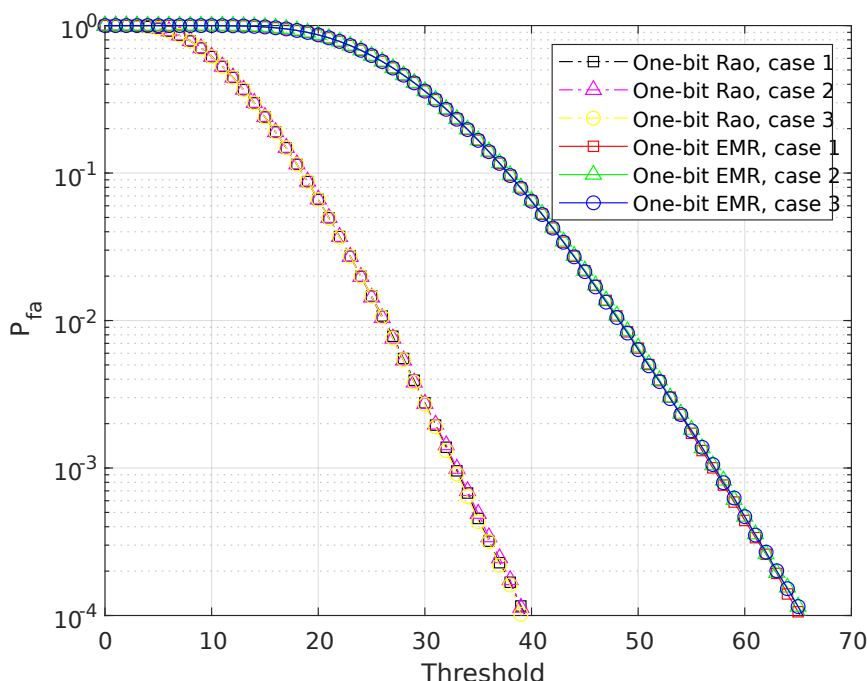
$$[\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2, \sigma_{w3}^2, \sigma_{w4}^2] \in \{[1, 1, 1, 1], [0.4, 0.8, 1/2, 1/6], [0.5, 0.75, 1/2, 1/5]\}.$$

توجه: در متن مقاله به اشتباه نماد σ_{wi} (بدون توان دو) برای این مقادیر آمده است، اما از آنجا که این مقادیر مستقیماً به عنوان درایه‌های قطری R_w (ماتریس کوواریانس نویز) استفاده می‌شوند، باید آن‌ها را واریانس در نظر گرفت.

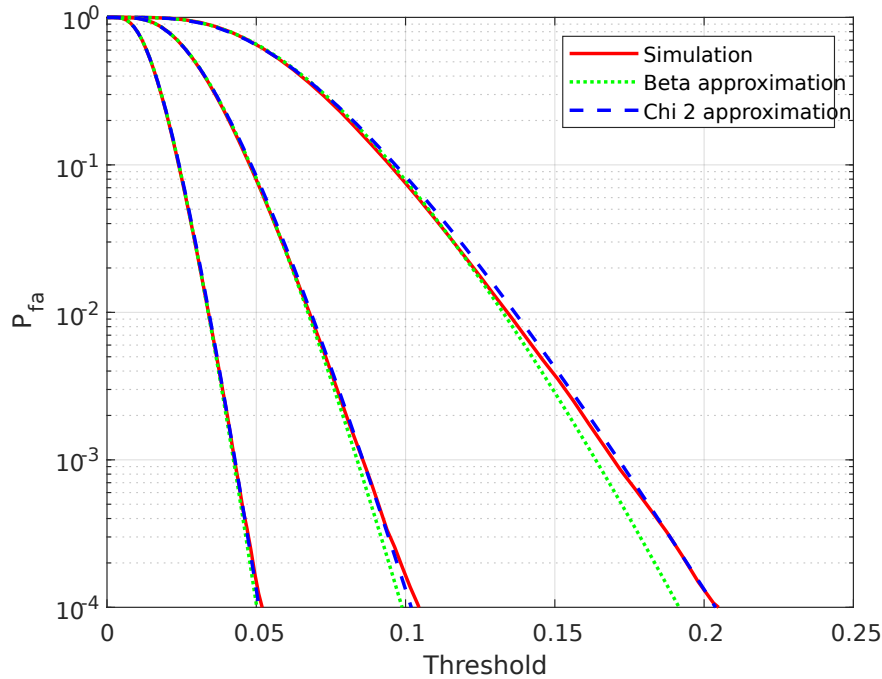
نتایج در شکل ۱-۶ (شکل ۱ مقاله) نمایش داده شده‌اند. برای آن‌که خروجی آزمون EMR یکبیتی و آشکارساز پیشنهادی در یک بازه مشابه قرار گیرند، آماره EMR یکبیتی مطابق

$$T'_O = mn(T_O - 1)$$

مقیاس‌بندی می‌شود. شکل ۱-۶ نشان می‌دهد هر دو آشکارساز دارای خاصیت CFAR هستند که با نتایج



شکل ۱-۶: احتمال false alarm برحسب آستانه برای $m = 4$ و $n = 128$ و سه حالت case1، case2 و case3 که به ترتیب متناظر با مقادیر $[1, 1, 1, 1]$ ، $[0.4, 0.8, 1/2, 1/6]$ و $[0.5, 0.75, 1/2, 1/5]$ برای $[\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2, \sigma_{w3}^2, \sigma_{w4}^2]$ هستند



شکل ۶-۲: احتمال false alarm بر حسب آستانه برای $m = 4$ و $n = 16, 32, 64$

تحلیلی بخش‌های قبلی سازگار است.

در ادامه، دقت توزیع‌های نال (تحت H_0) آشکارساز پیشنهادی بررسی می‌شود. توزیع‌های تقریبی مورد مقایسه، (۴-۱۵) و (۵-۳۷) هستند. نتایج شبیه‌سازی در شکل ۶-۲ (شکل ۲ مقاله) آمده است. برای این بخش $m = 4$ و $n \in \{16, 32, 64\}$ در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که از آماره نرمالیزه شده T'_R تعریف شده در رابطه (۴-۵) استفاده می‌کنیم، زیرا $T'_R \in [0, 1]$ است. به طور هم‌زمان، نتیجه رابطه (۵-۳۷) نیز با تعریف

$$\gamma' = \frac{\gamma}{mn(m-1)}$$

نرمالیزه می‌شود.

شکل ۶-۲ نشان می‌دهد که برای $n = 16$ ، هر دو توزیع بتا و χ^2 در مقادیر بزرگ P_{fa} برازش خوبی نسبت به توزیع تجربی دارند، در حالی که توزیع χ^2 در مقادیر کوچک P_{fa} برازش بهتری ارائه می‌کند. با افزایش n ، هر دو تقریب بتا و χ^2 به تدریج به توزیع تجربی نزدیک‌تر می‌شوند و برای $n = 64$ برازش رضایت‌بخشی حاصل می‌گردد. این مشاهده با خطای تقریبی گزارش شده در جدول ۶-۱ توصیف می‌شود؛ این جدول نشان می‌دهد به طور کلی توزیع بتا نسبت به χ^2 برازش کلی بهتری ارائه می‌دهد.

جدول ۶-۱: خطای توزیع‌های تقریبی نال

$m = 4$			
تقریب	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$
بتا	9.9863e-06	2.4253e-06	7.4587e-07
کای-دو	1.5484e-05	3.531e-06	9.8966e-07

جدول ۶-۲: خطای توزیع‌های تقریبی نان‌نال

$SNR = 4dB, m = 4, p = 2$			$SNR = -9dB, m = 4, p = 2$			تقریب
$n = 256$	$n = 128$	$n = 64$	$n = 256$	$n = 128$	$n = 64$	
8.2032e-06	5.95e-06	2.7991e-06	5.2847e-087	1.8868e-07	1.1732e-06	بتا
0.0010241	0.00026271	4.5341e-05	1.969e-07	3.155e-07	1.4744e-06	کای-دو

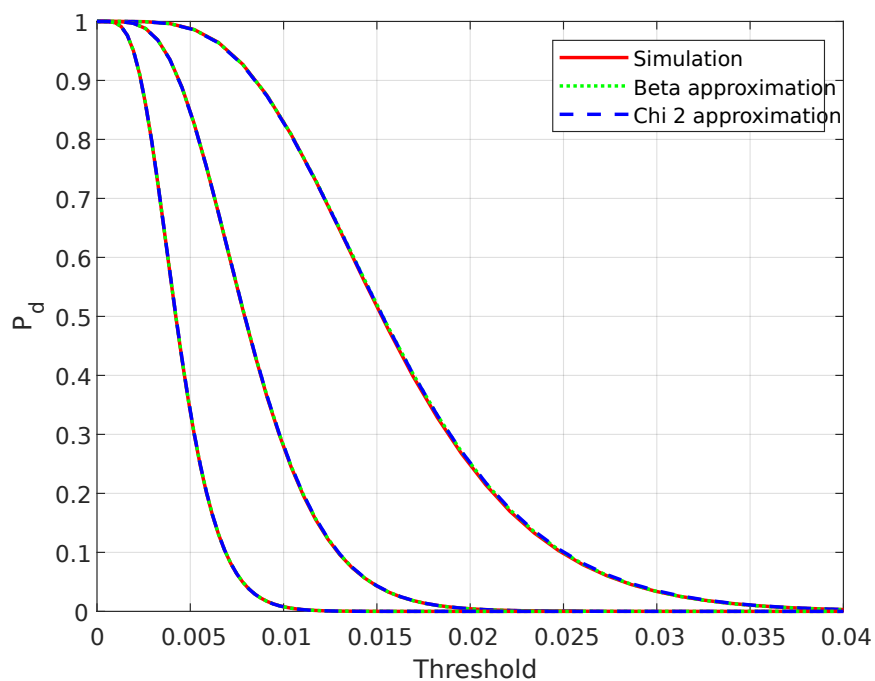
۲-۶ توزیع Non-Null

در این بخش، دقت تقریب‌های توزیع نان‌نال (تحت H_1) برای آشکارساز پیشنهادی بررسی می‌شود. تقریب‌های مورد مقایسه روابط (۴-۴۰) و (۵-۳۷) هستند. پارامترها به صورت $p = 2, m = 4$ ، $n = \{64, 128, 256\}$ و $SNR = \{-9 \text{ dB}, 4 \text{ dB}\}$ تنظیم شده‌اند. برای افزایش قابلیت بازتولید نتایج، ماتریس کانال به صورت زیر مشخص شده است:

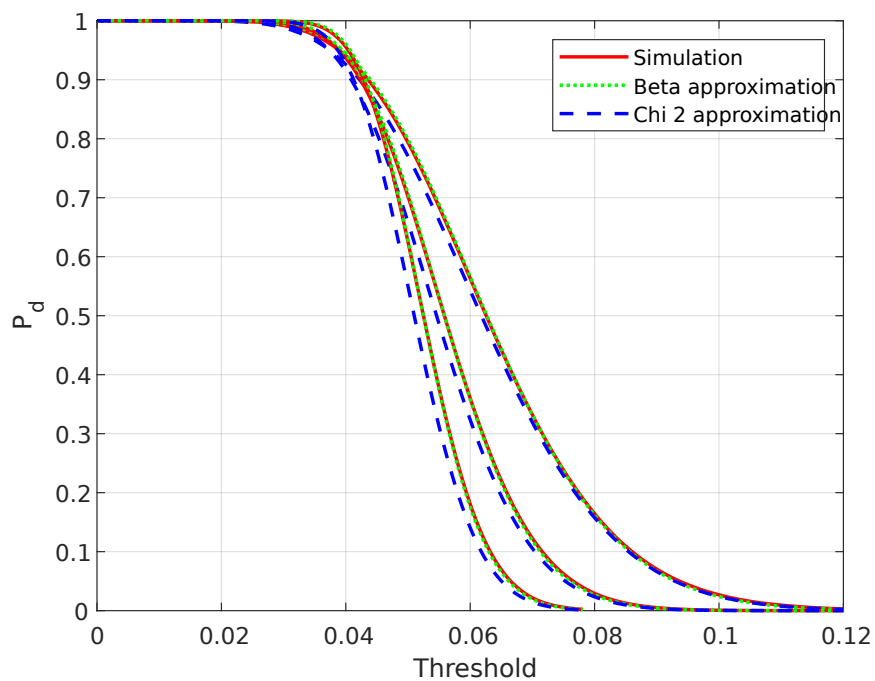
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.5282 - j0.0658 & -0.3370 - j0.4516 \\ 0.0294 + j0.3040 & 0.7462 + j0.1550 \\ -0.5102 - j0.2616 & -0.1954 - j0.0563 \\ -0.2539 - j0.4797 & 0.2375 - j0.0622 \end{bmatrix}.$$

شکل ۶-۳ نتایج را نشان می‌دهد. در شکل ۶-۳ (آ) (سناریوی SNR پایین)، هر دو تقریب برازش بسیار خوبی با توزیع تجربی دارند. در مقابل، شکل ۶-۳ (ب) (سناریوی SNR بالا) نشان می‌دهد که توزیع بتا، همچنان دقت مناسبی در برازش دارد، در حالی که توزیع χ^2 غیرمرکزی، دقت رضایت‌بخشی ندارد.

این نتایج با خطاهای تقریبی گزارش شده در جدول ۶-۲ نیز توصیف می‌شود. این جدول نشان می‌دهد که برای SNR پایین، هر دو تقریب دقت بالایی دارند، اما در SNR بالا تنها تقریب بتا قادر به برازش مناسب است. علت این تفاوت آن است که توزیع بتا با روش ممان‌ها (method of moments) به دست آمده و محدودیتی روی مقدار SNR ندارد، در حالی که توزیع χ^2 غیرمرکزی، تحت فرض SNR پایین



$SNR = -9dB$ (آ)



$SNR = 4dB$ (ب)

شکل ۳-۶: احتمال آشکارسازی برحسب آستانه برای $p = 2, m = 4$ و $n = 64, 128, 256$

استخراج شده است؛ از این رو در SNR بالا دقت خود را از دست می‌دهد.

۳-۶ عملکرد آشکارسازی

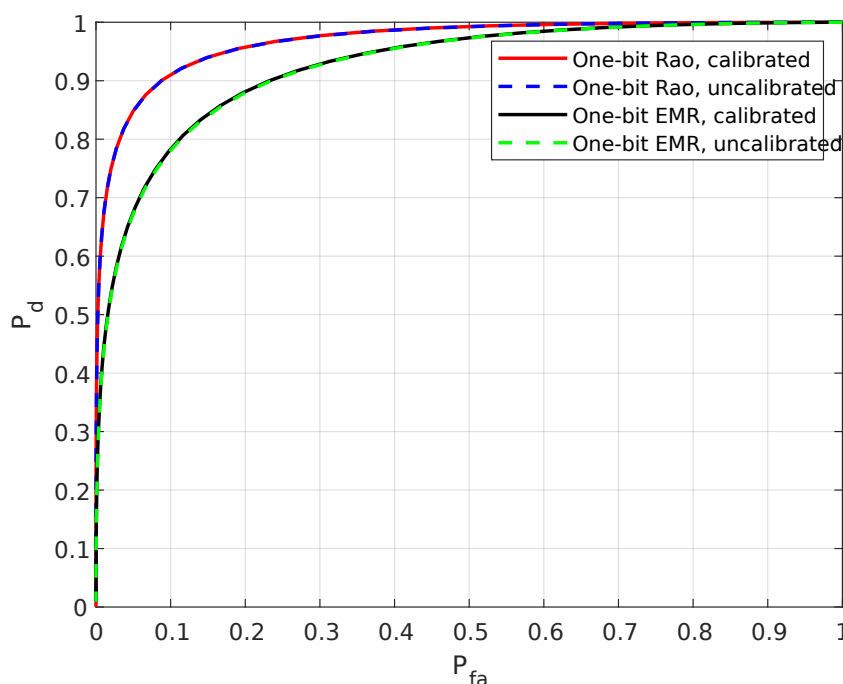
در این شبیه‌سازی، کارایی آشکارساز پیشنهادی با تست EMR یک‌بیتی از طریق منحنی‌های ROC مقایسه می‌شود.

پارامترها به صورت $n = 128, p = 2, m = 4$ و $SNR = -1$ dB در نظر گرفته شده‌اند. ماتریس کانال H همان مقدار بخش قبلی انتخاب می‌شود.

همچنین، برای بررسی اثر کالیبراسیون گیرنده، دو مجموعه‌ی متفاوت از واریانس‌های نویز به کار گرفته می‌شوند:

- در سناریوی اول، واریانس نویز همه‌ی گیرنده‌ها برابر با ۱ در نظر گرفته می‌شود.
- در سناریوی دوم، واریانس‌ها به صورت $[\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2, \sigma_{w3}^2, \sigma_{w4}^2] = [0.4, 0.8, 1/2, 1/6]$ تنظیم می‌شوند، به‌طوری که توان کل نویز در هر دو حالت ثابت باقی می‌ماند.

نتایج در شکل ۴-۶ (شکل ۴ مقاله) نشان داده شده‌اند. این نتایج بیانگر آن است که روش پیشنهادی



شکل ۴-۶: ROC های تجربی به دست آمده برای $n = 128, p = 2, m = 4$ و $SNR = -1$ dB

عملکرد بهتری نسبت به آشکارساز EMR یک‌بیتی دارد. علاوه بر این، قابل توجه است که کارایی هر دو آشکارساز (EMR و روش پیشنهادی) در حالت‌های کالیبره و غیرکالیبره یکسان باقی می‌ماند.

۴-۶ افت کارایی

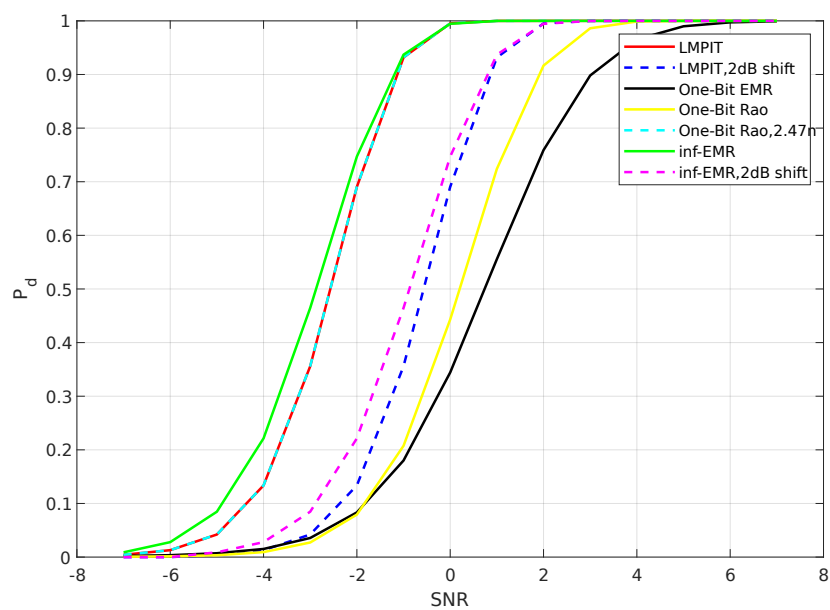
در این بخش، شکاف کارایی بین آشکارساز پیشنهادی یک‌بیتی و آشکارسازهای ∞ -بیتی بررسی می‌شود. برای این منظور، احتمال false alarm روی مقدار ثابت $P_{fa} = 10^{-4}$ نگه داشته شده و سپس تغییرات احتمال آشکارسازی نسبت به SNR بررسی می‌گردد.

پارامترها به صورت $m = 4$ ، $p = 2$ و $n \in \{128, 2048\}$ انتخاب شده‌اند. برای لحاظ کردن اثر احتمالی انتخاب ماتریس کانال H بر عملکرد آشکارسازی، از یک روش میانگین‌گیری وزنی استفاده می‌شود؛ به‌طور مشخص، در هر اجرای آزمایش، ماتریس H به‌طور تصادفی از یک توزیع گوسی مختلط دایره‌ای با میانگین صفر (ZMCSCG) تولید و سپس ستون‌های آن نرمالیزه می‌شوند.

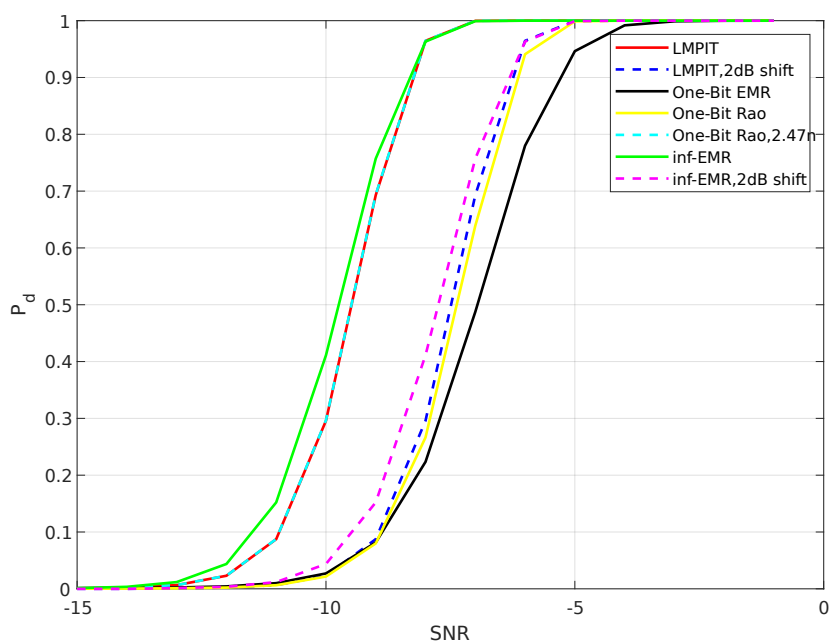
نتایج در شکل ۵-۶ (شکل ۵ مقاله) نشان داده شده‌اند. از این نتایج می‌توان مشاهده کرد که، با تعداد نمونه‌ی یکسان، افت کارایی آشکارساز پیشنهادی نسبت به آشکارساز EMR یک‌بیتی کمتر است. افزون بر این، ۵-۶ (آ) نشان می‌دهد که وقتی n به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد، شکاف کارایی بین آشکارساز پیشنهادی و آزمون LMPIT بیش از ۲ دسی‌بل است. در مقابل، ۵-۶ (ب) نشان می‌دهد که در SNR پایین و با n بزرگ، افت کارایی آشکارساز پیشنهادی نسبت به LMPIT تقریباً برابر با ۲ دسی‌بل است. این مشاهده با نتایج تحلیلی بخش‌های قبل سازگار است.

همچنین، با کاهش SNR شکاف کارایی بین آشکارساز پیشنهادی و تست ∞ -بیتی EMR نیز کاهش می‌یابد، اگرچه همچنان اندکی بالاتر از ۲ دسی‌بل باقی می‌ماند. علت این موضوع آن است که تست ∞ -بیتی EMR علاوه بر استقلال، برابری واریانس‌های نویز را نیز در نظر می‌گیرد، در حالی که در حالت یک‌بیتی با از دست رفتن اطلاعات دامنه، این ویژگی دیگر نقشی در توان آشکارسازی ندارد و موجب افزایش اندک افت کارایی می‌شود.

شکل ۵-۶ همچنین نشان می‌دهد که وقتی تعداد نمونه‌ها حدود $2/47n$ برابر افزایش یابد، منحنی عملکرد آشکارساز پیشنهادی با منحنی آزمون LMPIT به‌طور کامل هم‌پوشانی پیدا می‌کند. به‌ویژه، در شکل ۵-۶ (آ) بین منحنی آشکارساز پیشنهادی و LMPIT شکاف ۲ دسی‌بل وجود دارد، در حالی که آشکارساز پیشنهادی با $2/47n$ نمونه دقیقاً با منحنی LMPIT هم‌راستا می‌شود. این نتیجه اهمیت کلیدی افزایش اندازه‌ی نمونه‌ها را در صحت چارچوب تحلیلی ارائه‌شده در رابطه‌ی (۵-۳۷) نشان می‌دهد.



$n = 128$ (ا)



$n = 2048$ (ب)

شکل ۵-۶: احتمال آشکارسازی بر حسب SNR برای $m = 4$ ، $p = 2$ و $P_{fa} = 10^{-4}$

Bibliography

- [1] Y. Zhao, X. Ke, B. Zhao, Y. Xiao, and L. Huang. One-bit spectrum sensing based on statistical covariances: Eigenvalue moment ratio approach. *IEEE Wireless Communications Letters*, 10(11):2474–2478, Nov 2021.
- [2] L. Huang, J. Fang, K. Liu, H. C. So, and H. Li. An eigenvalue moment-ratio approach to blind spectrum sensing for cognitive radio under sample-starving environment. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(8):3465–3480, Aug 2015.
- [3] Y.-H. Xiao, L. Huang, J. Xie, and H. C. So. Approximate asymptotic distribution of locally most powerful invariant test for independence: Complex case. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(3):1784–1799, Mar 2018.
- [4] O. Bar-Shalom and A. J. Weiss. Doa estimation using one-bit quantized measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(3):868–884, Jul 2002.
- [5] L. Huang, C. Qian, Y. Xiao, and Q. T. Zhang. Performance analysis of volume-based spectrum sensing for cognitive radio. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 14(1):317–330, Jan 2015.
- [6] D. Ramírez, J. Vía, I. Santamaría, and L. L. Scharf. Locally most powerful invariant tests for correlation and sphericity of gaussian vectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 59(4):2128–2141, Apr 2013.
- [7] Y.-H. Xiao, D. Ramírez, P. J. Schreier, C. Qian, and L. Huang. One-bit target detection in colocated mimo radar and performance degradation analysis. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 71(9):9363–9374, Sep 2022.