دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

گزارش پروژه
درس تئوری آشکارسازی و تخمین

One-Bit Spectrum Sensing for Cognitive Radio

نگارش

علی الهی راد

استاد راهنما

دکتر علی الفت

مرداد ۱۴۰۴

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱
۱-۱ چرا تک‌بیتی؟ ۱
۱-۲ آشکارسازی کور ۲
۱-۳ آشکارساز EMR ۲
۱-۴ توزیع آشکارساز ۲

۲ مدل سیگنال ۴

۳ به دست آوردن تست Rao ۷

۴ توزیع‌های آشکارساز ۱۵
۴-۱ خاصیت CFAR ۱۵
۴-۲ توزیع تحت فرض H_0 ۱۷
۴-۳ توزیع تحت فرض H_1 ۱۹

۵ تحلیل عملکرد ۲۴
۵-۱ حالت ∞-bit ۲۴
۵-۲ حالت تک‌بیت ۲۵

مراجع ۳۱

فهرست جداول

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

Spectrum Sensing یک نیاز اساسی برای تخصیص منابع طیفی در شبکه‌های Cognitive Radio(CR) به صورت پویا است؛ به این صورت که که مسئول پیدا کردن کانال‌های خالی (به عنوان Spectrum Holes هم شناخته می‌شوند) است. در این پروژه، ما روشی از Spectrum Sensing را که برای مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال (ADC) تک‌بیتی طراحی شده است را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱ چرا تک‌بیتی؟

در خیلی از سناریوها، وظیفه‌ی Spectrum Sensing مانیتور کردن کانال‌های باندوسیع است؛ که این، به معنای نیاز به نمونه‌برداری سریع است. از طرفی نیز روش‌های معمول Spectrum Sensing، نیاز به کوانتیزاسیون با دقت بالا برای رسیدن به عملکرد ایده‌آل دارند. ترکیب سرعت بالای نمونه‌برداری و دقت بالای کوانتیزاسیون باعث مصرف انرژی بالایی می‌شود و از لحاظ عملی مشکل ایجاد خواهد کرد.
یک روش موثر برای حل این مشکل، کم کردن دقت کوانتیزاسیون است؛ به معنای دقیق‌تر استفاده از تنها یک بیت برای مبدل آنالوگ به دیجیتال است. ADCهای تک‌بیتی تنها از یک مقایسه‌گر برای انجام نمونه‌برداری و کوانتیزاسیون استفاده می‌کنند؛ که مزیت‌هایی مانند نرخ نمونه‌برداری بالا، پیچیدگی سخت‌افزار کمتر و مصرف انرژی کمتر را به ارمغان می‌آورند. به عنوان مثال برای نرخ نمونه‌برداری 3.2 GSPS/s، یک ADC ۸ بیتی $105m$Watt توان مصرف می‌کند. در حالی که این عدد برای ADC تک بیتی 20μWatt است. افت عملکرد ناشی از کاهش دقت کوانتیزاسیون، تنها در حدود $(\pi/2)$ 2dB در SNRهای پایین است که با افزایش نمونه‌ها با ضریب $\pi/2$ قابل جبران است. توضیحات بالا، میل به استفاده از روش‌های تک‌بیتی را توجیه می‌کند.

۱-۲ آشکارسازی کور

بسیاری از روش‌های آشکارسازی تک‌بیتی فرض را بر در دسترس بودن اطلاعات پیشین از جمله توان نویز، اطلاعات کانال و ویژگی‌های سیگنال می‌گذارند. اما این مقاله بر روی Spectrum Sensing تک‌بیتی در عدم حضور اطلاعات پیشین یا اصطلاحا آشکارسازی کور کار می‌کند که با نام Blind Spectrum Sensing شناخته می‌شود. در این حالت، PMF[۱] مشاهدات تک‌بیتی، برابر حاصل‌ضرب احتمالات Orthant می‌شود که فرم بسته ندارد؛ پس نیاز به روش‌های عددی مثل GLRT[۲] برای طراحی آشکارساز وجود دارد. از طرفی روش‌های عددی، هزینه‌ی محاسباتی و زمانی بالایی دارند که در تضاد با Spectrum Sensing ساده است که ما به آن علاقه‌مندیم. در نتیجه، خواسته‌ی ما، یک آشکارساز با معادلات فرم بسته است.

۱-۳ آشکارساز EMR

آشکارسازی تحت عنوان One-Bit EMR[۳] در [۱] با الهام از آشکارساز EMR [۲] (∞-bit) معرفی شد که نسبت به حالت ∞ در حدود 3 dB ضعیف‌تر بود، اما بعد از آن اثبات شد که در SNRهای پایین، افت عملکرد، تنها در حدود 2 dB است.

علت زیاد بودن افت عملکرد به این دلیل است که برای one-bit EMR، ابتدا قسمت‌های حقیقی و موهومی مشاهدات در کنار هم قرار داده می‌شود و سپس EMR مربوط به ماتریس کوواریانس (دارای مقادیر حقیقی) محاسبه می‌شود. این امر باعث نادیده گرفته شدن خاصیت Circularity سیگنال‌های کوانتیزه‌شده می‌شود. در این مقاله، آشکارسازی برای مشاهدات تک‌بیتی معرفی شده است که به وسیله تست Rao به دست می‌آید و جهت افزایش کارایی، خاصیت Circularity را نیز در نظر می‌گیرد. نتیجه، به صورت EMR مرتبه دوم ماتریس sample covariance (دارای مقادیر مختلط) است (برعکس روش قبلی که ماتریس کوواریانس گسترش یافته حقیقی را استفاده می‌کرد).

۱-۴ توزیع آشکارساز

برای تایید افت 2 dB و مقایسه با رقبای ∞-bit نیاز به یافتن توزیع آشکارساز است. در این مقاله، توزیع‌هایی تقریبی فقط برای حالت حضور نویز و SNR پایین معرفی شده است که قابل مقایسه با توزیع های معرفی

[1]Probability mass function
[2]Generalized likelihood ratio test
[3]One-Bit eigenvalue moment ratio

شده در [۳] هستند. جزئیات این مورد در بخش‌های بعد توضیح داده خواهد شد.

فصل ۲

مدل سیگنال

یک سیستم Cognitive Radio که MIMO[1] است را در نظر بگیرید که p کاربر primary تک آنتن و m آنتن گیرنده در کاربر secondary در آن وجود دارند. ورودی‌های ADCها تحت فرض‌های H_0 و H_1 به صورت زیر هستند.

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t), \tag{۲-۱}$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t) \tag{۲-۲}$$

که $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{mxp}$ نمایانگر ضرایب کانال در حین sensing است که نامشخص و یقینی است. همچنین $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), ..., s_p(t)]^T$ و $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), ..., w_m(t)]^T$ به ترتیب، بردارهای سیگنال و نویز هستند. قابل ذکر است که توزیع نویز $\mathbf{w}(t)$، i.i.d ZMCSCG[2] با ماتریس کوواریانس $\mathbf{R}_\mathbf{w} = \mathrm{diag}(\sigma_{w_1}, ..., \sigma_{w_m})$ است که المان‌های قطری آن در صورت عدم کالیبره، می‌توانند نابرابر باشد. سیگنال از نویز مستقل است و برای سادگی در تحلیل‌ها، سیگنال را تصادفی و با توزیع i.i.d ZMCSCG و ماتریس کوواریانس نامشخص $\mathbf{R}_\mathbf{s}$ در نظر می‌گیریم. برای یک بردار تصادفی، PCM[3] به صورت $\mathbf{R}_\mathbf{x} = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$ تعریف می‌شود و برای هر دو فرض داریم:

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{R}_\mathbf{x} = \mathbf{R}_\mathbf{w}, \tag{۲-۳}$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{R}_\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{R}_\mathbf{s}\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_\mathbf{w} \tag{۲-۴}$$

[1] Multiple Input Multiple Output
[2] Zero mean circular symmetric complex Gaussian
[3] Population covariance matrix

که قابل ساده‌سازی به زیر است:

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathrm{diag}(\sigma_{w_1}, ..., \sigma_{w_m}), \tag{۵-۲}$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \neq \mathrm{diag}(\sigma_{w_1}, ..., \sigma_{w_m}) \tag{۶-۲}$$

که مشخصا سناریوی کالیبره نبودن گیرنده‌ها نیز در این فرمول‌بندی در نظر گرفته شده است.
بعد از کوانتیزه شدن تک‌بیتی داریم:

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}(t)) = \mathrm{sign}(\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))) + j\mathrm{sign}(\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t)))$$

که $\mathcal{Q}$ نمایانگر عملگر کوانتیزاسیون تک‌بیتی است و برای هر دو فرض داریم:

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{w}(t)), \tag{۷-۲}$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(\mathbf{Hs}(t) + \mathbf{w}(t)) \tag{۸-۲}$$

در [۴] نشان داده شده است که PMF مربوط به $\mathbf{y}(t)$ با احتمالات Orthant توصیف می‌شود. برای سادگی محاسبه‌ی این احتمالات، بردار مشاهدات را با کنار هم قرار دادن بخش‌های حقیقی و موهومی به برداری حقیقی تبدیل می‌کنیم.

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{y}(t))^T & \mathrm{Im}(\mathbf{y}(t))^T\end{bmatrix}^T \tag{۹-۲}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))^T & \mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))^T\end{bmatrix}^T \tag{۱۰-۲}$$

در [۴] اثبات شده است که احتمالات Orthant تنها با ماتریس Coherence تعیین می‌شوند. پس مسئله تست فرض به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{P} = \mathbf{I}_{2m}, \tag{۱۱-۲}$$

$$\mathcal{H}_1 : \mathbf{P} \neq \mathbf{I}_{2m} \tag{۱۲-۲}$$

که $\mathbf{P} = \mathrm{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}\mathrm{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{1}{2}}$، ماتریس Coherence مربوط به $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ و $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}$، PCM آن است.

با توجه به Circular بودن $\mathbf{x}(t)$، می‌توان $\mathbf{P}$ را به صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{P}_{\mathbf{x}}) & -\mathrm{Im}(\mathbf{P}_{\mathbf{x}}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{P}_{\mathbf{x}}) & \mathrm{Re}(\mathbf{P}_{\mathbf{x}})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4\end{bmatrix} \tag{۱۳-۲}$$

که $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$، ماتریس Coherence مربوط به $\mathbf{x}$ است. با در نظر گرفتن این نکته که $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_4$ و $\mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_3$ است، تعداد پارامترهای نامعلوم $\mathbf{P}$ به $m^2 - m$ کاهش می‌یابد. می‌توانیم بردار پارامترهای نامعلوم را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\theta = [\rho_{1,2}, ..., \rho_{m-1,m}, \rho_{1+m,2}, ..., \rho_{2m-1,m}]^T \tag{۱۴-۲}$$

که $\rho_{i,j}$، المان (i, j) از $\mathbf{P}$ است. در نتیجه مسئله‌ی آشکارسازی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 0, \tag{۱۵-۲}$$

$$\mathcal{H}_1 : \theta \neq 0 \tag{۱۶-۲}$$

قابل توجه است که این مقاله، با استفاده از این تقارن‌ها، درجه‌ی آزادی را کاهش می‌دهد و به طور قابل توجهی کارایی را افزایش می‌دهد.

فصل ۳

به دست آوردن تست Rao

در مسائل تشخیص با پارامترهای نامعلوم، تست GLRT به دلیل عملکرد بهینه‌ی مجانبی و نتایج مناسب حتی در شرایط با داده‌های محدود، پرکاربردترین روش محسوب می‌شود. با این حال، زمانی که داده‌های کوانتیزه‌ی تک‌بیتی به کار گرفته می‌شوند، حل عددی MLE[1] ضروری است، زیرا likelihood تحت فرض $H_۱$ فرم بسته ندارد و این امر پیچیدگی محاسباتی ایجاد می‌کند. تست‌های Wald و Rao به عنوان جایگزین‌های GLRT همان عملکرد مجانبی را ارائه می‌دهند و در کاربردهای مختلف نتایج رضایت‌بخشی داشته‌اند. با وجود این، تست Wald نیز نیازمند حل MLE تحت فرض $H_۱$ است، در حالی که تست Rao بدون نیاز به حل MLE به ساختارهای ساده‌تر و کاراتر به‌ویژه در حالتی که فرض $H_۰$ ساده است، منجر می‌شود. از این‌رو، در طراحی آشکارساز حاضر، تست Rao انتخاب شده است.

برای سادگی در محاسبات، ابتدا مشاهدات را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{y}}(۱), ..., \tilde{\mathbf{y}}(n)] \qquad (۳-۱)$$

که $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ در فصل قبل تعریف شد.

اگر $\tilde{\mathbf{y}}$ را یک نمونه از فضای حالات مختلف $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ در نظر بگیریم، $۲^{۲m}$ حالت خواهد داشت که $\tilde{\mathbf{y}}^k(k = ۰, ۱, ..., ۲^{۲m} - ۱)$ نمایانگر هریک از این حالات خواهد بود.

همچنین $\mathbb{X}_k$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{۲m\times۱}$ تعریف می‌کنیم که به کوانتیزاسیون تک‌بیتی $\tilde{\mathbf{y}}^k$ به صورت زیر نگاشت می‌شود:

$$\mathbb{X}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{۲m\times۱} | \mathrm{sign}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{۲m\times۱} | \mathrm{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k)\mathbf{x} > ۰\} \qquad (۳-۲)$$

[1] Maximum likelihood estimation

پس احتمال این که $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k$ باشد برابر است با :

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \Pr\{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}_k\} = \int_{\mathbb{X}_k} \frac{۱}{(۲\pi)^m \left|\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}\right|^{\frac{۱}{۲}}} e^{-\frac{۱}{۲}\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-۱} \tilde{\mathbf{x}}} d\tilde{\mathbf{x}} \tag{۳-۳}$$

با تغییر متغیر $\tilde{\mathbf{x}} \to \tilde{\tau} = \text{Diag}\,(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{-\frac{۱}{۲}}\, \tilde{\mathbf{x}}$ داریم:

$$\{\tilde{\tau} \in \mathbb{R}^{۲m\times ۱} | \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k)\text{Diag}\,(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{\frac{۱}{۲}}\, \tilde{\boldsymbol{\tau}} > ۰\} \tag{۴-۳}$$

$$J = \left|\text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}})^{\frac{۱}{۲}}\right|$$

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \Pr\{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{X}_k\} = \int_{\mathbb{X}_k} \frac{۱}{(۲\pi)^m \left|\mathbf{P}\right|^{\frac{۱}{۲}}} e^{-\frac{۱}{۲}\tilde{\tau}^T \mathbf{P}^{-۱} \tilde{\tau}} d\tilde{\boldsymbol{\tau}} \tag{۵-۳}$$

جزئیات و اثبات رسیدن به (۳-۵) از (۳-۳) که در مقاله به آن اشاره‌ای نشده است، در ادامه می‌آید.
ابتدا تبدیل مختصات زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{D} := \text{Diag}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}), \qquad \mathbf{P} := \mathbf{D}^{-۱/۲}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}\mathbf{D}^{-۱/۲}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\tau}} := \mathbf{D}^{-۱/۲}\tilde{\mathbf{x}}, \tag{۶-۳}$$

که در نتیجه داریم:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{۱/۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \qquad d\tilde{\mathbf{x}} = |\mathbf{D}^{۱/۲}|\, d\tilde{\boldsymbol{\tau}} = |\mathbf{D}|^{۱/۲} d\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \qquad \mathbb{X}_k = \left\{\tilde{\boldsymbol{\tau}} \,\middle|\, \text{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^{\,k})\mathbf{D}^{۱/۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}} > ۰\right\}. \tag{۷-۳}$$

اکنون جمله نمایی را بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{x}}^\top \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-۱}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{D}^{۱/۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}})^\top \big(\mathbf{D}^{-۱/۲}\mathbf{P}^{-۱}\mathbf{D}^{-۱/۲}\big)\big(\mathbf{D}^{۱/۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\big) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}^\top \mathbf{P}^{-۱}\tilde{\boldsymbol{\tau}}. \tag{۸-۳}$$

برای تعیین دترمینان داریم:

$$|\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}| = \left|\mathbf{D}^{۱/۲}\mathbf{P}\mathbf{D}^{۱/۲}\right| = |\mathbf{D}|\,|\mathbf{P}| \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\mathbf{D}|^{۱/۲}}{|\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{۱/۲}} = \frac{۱}{|\mathbf{P}|^{۱/۲}}. \tag{۹-۳}$$

حال معادله (۳-۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^{\,k}\} &= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{۱}{(۲\pi)^m\, |\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{۱/۲}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\tilde{\mathbf{x}}^\top \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-۱}\tilde{\mathbf{x}}\big)\; d\tilde{\mathbf{x}} \\
&= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{|\mathbf{D}|^{۱/۲}}{(۲\pi)^m\, |\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}|^{۱/۲}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\top \mathbf{P}^{-۱}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\big)\; d\tilde{\boldsymbol{\tau}} \\
&= \int_{\mathbb{X}_k} \frac{۱}{(۲\pi)^m\, |\mathbf{P}|^{۱/۲}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\top \mathbf{P}^{-۱}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\big)\; d\tilde{\boldsymbol{\tau}}.
\end{aligned} \tag{۱۰-۳}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\zeta}_k = \operatorname{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k)\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \tag{۳-۱۱}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} &= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲\pi)^m\,|\mathbf{P}|^{۱/۲}} \exp\left(-\tfrac{۱}{۲}\boldsymbol{\zeta}_k^{\top}\mathbf{S}_k^{-۱}\boldsymbol{\zeta}_k\right)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}_k \\ &= \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲\pi)^m\,|\mathbf{P}|^{۱/۲}} \exp\left(-\tfrac{۱}{۲}\tilde{\mathbf{x}}^{\top}\mathbf{S}_k^{-۱}\tilde{\mathbf{x}}\right)\, \mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}},\end{aligned} \tag{۳-۱۲}$$

که در آن:

$$\mathbf{S}_k = \operatorname{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k)\mathbf{P}\operatorname{diag}(\tilde{\mathbf{y}}^k). \tag{۳-۱۳}$$

از آنجایی که $|\mathbf{S}_k| = |\mathbf{P}|$، بنابراین:

$$\Pr\{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}^k\} = \phi[\mathbf{S}_k], \tag{۳-۱۴}$$

که تابع $\phi(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi[\boldsymbol{\Sigma}] = \int_{۰}^{\infty}\cdots\int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲\pi)^m\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{۱/۲}} \exp\left(-\tfrac{۱}{۲}\mathbf{x}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-۱}\mathbf{x}\right)\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{۳-۱۵}$$

که همان «احتمال Orthant مرکزی» است.

تابع likelihood برای $\tilde{\mathbf{Y}}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$p(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=۱}^{n} p\big(\tilde{\mathbf{y}}(t);\boldsymbol{\theta}\big) = \prod_{t=۱}^{n} \phi\big[\mathbf{S}(t)\big], \tag{۳-۱۶}$$

که در آن:

$$\mathbf{S}(t) = \operatorname{diag}(\tilde{\mathbf{y}}(t))\,\mathbf{P}\operatorname{diag}(\tilde{\mathbf{y}}(t)). \tag{۳-۱۷}$$

بنابراین log-likelihood به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=۱}^{n} \log\left(\phi\big[\mathbf{S}(t)\big]\right). \tag{۳-۱۸}$$

آماره‌ی تست Rao به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_R = \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_۰}\right)^T \mathbf{F}^{-۱}(\boldsymbol{\theta}_۰) \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_۰}\right), \tag{۳-۱۹}$$

که در آن $\boldsymbol{\theta}_۰ = ۰ \in \mathbb{R}^{(m^۲-m)\times ۱}$ مربوط به پارامترها تحت فرض $H_۰$ است و $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$، FIM[2] است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}\right]. \tag{۳-۲۰}$$

قضیه‌ی ۳-۱ *آماره‌ی Rao مربوط به تست فرض ما به صورت زیر است:*

$$T_R = \frac{n}{۲}\sum_{\substack{i,j=۱\\ i<j}}^{m} |\hat{r}_{ij}|^۲ \tag{۳-۲۱}$$

که $\hat{r}_{ij}$ المان (i,j) از SCM[3] تک‌بیتی مختلط است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n} \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t) \tag{۳-۲۲}$$

اثبات. داریم :

$$\begin{aligned}
\phi[\mathbf{I}_{۲m}] &= \int_۰^\infty \cdots \int_۰^\infty \frac{۱}{(۲\pi)^m |\mathbf{I}_{۲m}|^{۱/۲}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\mathbf{x}^\top \mathbf{I}_{۲m}^{-۱}\mathbf{x}\big)\ \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_۰^\infty \cdots \int_۰^\infty \frac{۱}{(۲\pi)^m} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\big)\ \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{۱}{(۲\pi)^m}\int_۰^\infty \cdots \int_۰^\infty \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}\left[x_۱^۲ + ... + x_{۲m}^۲\right]\big)\ \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}x_۱^۲\big)\ \mathrm{d}\mathbf{x}_۱ \cdots \int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\big(-\tfrac{۱}{۲}x_{۲m}^۲\big)\ \mathrm{d}\mathbf{x}_{۲m} = \\
&\rightarrow \phi[\mathbf{I}_{۲m}] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲m}
\end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

در نتیجه برای حالت $\theta = \theta_۰ = ۰$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta}=۰) = \sum_{t=۱}^{n} \log\left(\phi\left[\mathbf{I}_{۲m}\right]\right) = \sum_{t=۱}^{n} \log\Big(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲m}\Big) = -۲mn\log(۲) \tag{۳-۲۴}$$

اکنون $\phi[\boldsymbol{\Sigma}]$ را با یک تبدیل مختصاتی مبتنی بر ماتریس جایگشتی به صورت $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{E}_{ab}\mathbf{x}$ بازنویسی می‌کنیم. $\mathbf{E}_{ab}$ ماتریسی همانی است که ردیف‌های a و b آن جابجا شده است؛ در این صورت $\mathbf{E}_{ab}^{-۱} = \mathbf{E}_{ab}$ و $|\mathbf{E}_{ab}| = \pm ۱$. از آن‌جایی که برای $a = b$، $|\mathbf{E}_{ab}| = -۱$ و برای $a \neq b$، $|\mathbf{E}_{ab}| = +۱$ است، مقدار مطلق

[2] Fisher information matrix
[3] Sample covariance matrix

دترمینان ژاکوبین همیشه ۱ است. پس داریم :

$$\begin{aligned}\phi[\mathbf{\Sigma}] &= \int_{\mathbb{R}_+^{2m}} \frac{1}{(2\pi)^m\,|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\Big(-\tfrac{1}{2} \left(\mathbf{E}_{ab}^{-1} y\right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{E}_{ab}^{-1} y\right) \Big)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{2m}} \frac{1}{(2\pi)^m\,|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\Big(-\tfrac{1}{2} y^T (\mathbf{E}_{ab}\mathbf{\Sigma}\mathbf{E}_{ab})^{-1} y\Big)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{2m}} \frac{1}{(2\pi)^m\,|\mathbf{E}_{ab}\mathbf{\Sigma}\mathbf{E}_{ab}|^{1/2}} \exp\Big(-\tfrac{1}{2} y^T (\mathbf{E}_{ab}\mathbf{\Sigma}\mathbf{E}_{ab})^{-1} y\Big)\, dy = \phi[\mathbf{E}_{ab}\mathbf{\Sigma}\mathbf{E}_{ab}], \quad (۳-۲۵)\end{aligned}$$

و نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\phi[\mathbf{\Sigma}] = \phi[\mathbf{E}_{ab}\mathbf{\Sigma}\mathbf{E}_{ab}]. \quad (۳-۲۶)$$

اکنون عملگر زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{T}_1(i,j) = \mathbf{E}_{4,j'}\,\mathbf{E}_{3,i'}\,\mathbf{E}_{2,j}\,\mathbf{E}_{1,i}, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m, \quad \{i',j'\} = \{i,j\} + m.$$

با استفاده از رابطهٔ بالا، می‌توان نوشت

$$\phi[\mathbf{S}(t)] = \phi\big(\mathbf{T}_1(i,j)\, S(t)\, \mathbf{T}_1^T(i,j)\big). \quad (۳-۲۷)$$

برای $\theta = \theta_{i,j}$ (یعنی تنها ρ_{ij} غیرصفر است)، ماتریس داخل ϕ به صورت بلوکی در می‌آید:

$$\mathbf{T}_1(i,j)\,\mathbf{S}(t)\,\mathbf{T}_1^T(i,j) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ij}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{i'j'}(t) & 0 \\ 0 & 0 & I_{2m-4} \end{bmatrix}, \quad (۳-۲۸)$$

که در آن

$$\mathbf{S}_{ab}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\,\rho_{ab} \\ \tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\,\rho_{ab} & 1 \end{bmatrix}. \quad (۳-۲۹)$$

بنابراین

$$\phi[\mathbf{S}(t)]\Big|_{\theta=\theta_{i,j}} = \phi\big(\mathbf{S}_{ij}(t)\big)\,\phi\big(\mathbf{S}_{i'j'}(t)\big)\,\phi[I_{2m-4}]. \quad (۳-۳۰)$$

به‌طور مشابه، اگر

$$\mathbf{T}_2(i,j) = \mathbf{E}_{4,j'}\,\mathbf{E}_{3,i}\,\mathbf{E}_{2,j}\,\mathbf{E}_{1,i'},$$

آنگاه برای $\theta = \theta_{i',j}$ خواهیم داشت

$$\phi[\mathbf{S}(t)]\Big|_{\theta=\theta_{i',j}} = \phi\big(\mathbf{S}_{i'j}(t)\big)\,\phi\big(\mathbf{S}_{ij'}(t)\big)\,\phi[I_{۲m-۴}]. \qquad (۳\text{-}۳۱)$$

از سوی دیگر، هر $\phi[\mathbf{S}_{ab}(t)]$ احتمال اورتان مرکزی یک گاوسی دوبُعدیِ صفرمیانگین با کوواریانس $\mathbf{S}_{ab}(t)$ است و مقدار بستهٔ آن

$$\phi\big(\mathbf{S}_{ab}(t)\big) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲\pi}\,\arcsin\big(\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\,\rho_{ab}\big) \qquad (۳\text{-}۳۲)$$

می‌باشد. لذا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=\theta_{i,j}) &= \sum_{t=۱}^{n}\log\Big(\phi\big(\mathbf{S}_{ij}(t)\big)\,\phi\big(\mathbf{S}_{i'j'}(t)\big)\,\phi[I_{۲m-۴}]\Big)\\ &= \sum_{t=۱}^{n}\log\big(f_۱(i,j,t)\big) - (۲m-۴)\,n\log(۲),\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۳)$$

و نیز

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=\theta_{i',j}) &= \sum_{t=۱}^{n}\log\Big(\phi\big(\mathbf{S}_{i'j}(t)\big)\,\phi\big(\mathbf{S}_{ij'}(t)\big)\,\phi[I_{۲m-۴}]\Big)\\ &= \sum_{t=۱}^{n}\log\big(f_۲(i,j,t)\big) - (۲m-۴)\,n\log(۲),\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۴)$$

که در آن با توجه به $\rho_{i'j'} = \rho_{ij}$ و $\rho_{ij'} = -\rho_{i'j}$:

$$f_۱(i,j,t) = \Big(\tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۲\pi}\,\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t)\,\arcsin\rho_{ij}\Big)\Big(\tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۲\pi}\,\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_{j'}(t)\,\arcsin\rho_{ij}\Big), \qquad (۳\text{-}۳۵)$$

$$f_۲(i,j,t) = \Big(\tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۲\pi}\,\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t)\,\arcsin\rho_{i'j}\Big)\Big(\tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۱}{۲\pi}\,\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t)\,\arcsin(-\rho_{i'j})\Big). \qquad (۳\text{-}۳۶)$$

اکنون با استفاده از تعریف مشتقِ جزئی و قاعدهٔ لوپیتال، مشتق‌های گرادیان را در صفر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta)}{\partial\rho_{ij}}\bigg|_{\theta=۰} &= \lim_{\rho_{ij}\to ۰}\frac{\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=\theta_{i,j}) - \mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=۰)}{\rho_{ij}}\\ &= \frac{۲}{\pi}\sum_{t=۱}^{n}\big(\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t) + \tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_{j'}(t)\big) = \frac{۲n}{\pi}\,\mathrm{Re}\{\hat{r}_{ij}\},\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۷)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta)}{\partial\rho_{i'j}}\bigg|_{\theta=۰} &= \lim_{\rho_{i'j}\to ۰}\frac{\mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=\theta_{i',j}) - \mathcal{L}(\tilde{Y};\theta=۰)}{\rho_{i'j}}\\ &= \frac{۲}{\pi}\sum_{t=۱}^{n}\big(\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t)\big) = \frac{۲n}{\pi}\,\mathrm{Im}\{\hat{r}_{ij}\},\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۸)$$

که در آن، $\hat{r}_{ij}$ المان (i,j) از SCM تعریف شده در (۳-۲۲) است.

با تعریف

$$\hat{\mathbf{r}} = \big[\hat{r}_{۱,۲}, \hat{r}_{۱,۳}, \hat{r}_{۲,۳}, \ldots, \hat{r}_{m-۱,m}\big]^T, \qquad \tilde{\mathbf{r}} = \big[\mathrm{Re}(\hat{r})^T,\ \mathrm{Im}(\hat{r})^T\big]^T,$$

رابطهٔ گرادیان به صورت فشرده

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{Y};\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_۰} = \frac{۲n}{\pi}\,\tilde{\mathbf{r}} \tag{۳-۳۹}$$

درمی‌آید.

ماتریس اطلاعات فیشر (FIM)

$$\mathbf{F}(\theta) = \mathbb{E}\bigg[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right)^T\bigg]$$

تحت فرض $H_۰$ به شکل

$$\mathbf{F}(\theta_۰) = \frac{۴n^۲}{\pi^۲}\,\mathbb{E}\big[\tilde{\mathbf{r}}\,\tilde{\mathbf{r}}^T\big] \tag{۳-۴۰}$$

خواهد بود. از آن‌جا که تحت $H_۰$ توزیع $\tilde{Y}$ برابر $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲mn}$ است و مؤلفه‌ها مستقل‌اند، برای $۱ \leqslant i < j \leqslant m$ و $۱ \leqslant k < l \leqslant m$ داریم

$$\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{ij})\,\mathrm{Re}(\hat{r}_{kl})] = \mathbb{E}[\mathrm{Im}(\hat{r}_{ij})\,\mathrm{Im}(\hat{r}_{kl})] = \frac{۲}{n}\,\delta_{ik}\delta_{jl}, \tag{۳-۴۱}$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{ij})\,\mathrm{Im}(\hat{r}_{kl})] = ۰, \tag{۳-۴۲}$$

در نتیجه

$$\mathbb{E}\big[\tilde{\mathbf{r}}\,\tilde{\mathbf{r}}^T\big] = \frac{۲}{n}\,\mathbf{I}_{m^۲-m} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}(\theta_۰) = \frac{۸n}{\pi^۲}\,\mathbf{I}_{m^۲-m}. \tag{۳-۴۳}$$

اکنون آمارهٔ رائو

$$T_R = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\bigg|_{\theta_۰}\right)^T \mathbf{F}^{-۱}(\theta_۰)\,\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\bigg|_{\theta_۰}\right)$$

را محاسبه می‌کنیم. با جانشانی نتایج بالا به‌دست می‌آید

$$T_R = \left(\tfrac{۲n}{\pi}\tilde{r}\right)^T\left(\tfrac{\pi^۲}{۸n}I\right)\left(\tfrac{۲n}{\pi}\tilde{r}\right) = \frac{n}{۲}\,\|\tilde{r}\|^۲ = \frac{n}{۲}\sum_{i<j}\Big(\mathrm{Re}^۲\{\hat{r}_{ij}\} + \mathrm{Im}^۲\{\hat{r}_{ij}\}\Big) = \frac{n}{۲}\sum_{i<j}\big|\hat{r}_{ij}\big|^۲.$$

پس آمارهٔ رائو برای مسألهٔ حاضر

$$T_R = \frac{n}{۲}\sum_{i<j}\big|\hat{r}_{ij}\big|^۲, \qquad \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} = \frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t),$$

و قاعدهٔ تصمیم

$$T_R \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_R$$

خواهد بود.

□

آشکارساز ∞-bit EMR مرتبه‌ی دوم که در مقالات قبلی معرفی و به آن اشاره شده است به صورت زیر است :

$$T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}_\mathbf{x}}) = \frac{\frac{1}{m}\,\|\hat{\mathbf{R}_\mathbf{x}}\|^2}{\left(\frac{1}{m}\,\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{R}_\mathbf{x}})\right)^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_{\text{EMR}} \qquad (\text{۳-۴۴})$$

که $\mathbf{R}_\mathbf{x}$، SCM محاسبه شده از نمونه‌های کوانتیزه نشده‌ی $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1), ..., \mathbf{x}(n)]$ است.
با توجه به این نکته که المان‌های قطری $\mathbf{R}_\mathbf{y}$ برابر با ۲ است، داریم :

$$\begin{aligned}
T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}_\mathbf{y}}) &= \frac{\frac{1}{m}\,\|\hat{\mathbf{R}_\mathbf{y}}\|^2}{\left(\frac{1}{m}\,\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{R}_\mathbf{y}})\right)^2} = \frac{\frac{1}{m}\,\left(2\sum_{i<j}\left|\hat{r}_{ij}\right|^2 + m\times 4\right)}{\left(\frac{1}{m}\times 2m\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{m}\sum_{i<j}\left|\hat{r}_{ij}\right|^2 + 4\right)}{4} = \frac{1}{2m}\sum_{i<j}\left|\hat{r}_{ij}\right|^2 + 1
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم :

$$T_{\text{EMR}}(\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{y}) = \frac{1}{mn}T_R + 1 \qquad (\text{۳-۴۵})$$

و با توجه به این رابطه، می‌توان گفت تست Rao معادل تست EMR است که از SCM مختلط نمونه‌های تک‌بیتی استفاده می‌کند.

فصل ۴

توزیع‌های آشکارساز

در این قسمت، ابتدا خاصیت CFAR [1] آشکارساز معرفی شده را بررسی می‌کنیم. سپس، توزیع مجانبی T_R را تحت فرض‌های $H_۰$ و $H_۱$ به دست می‌آوریم. از آن‌جایی که T_R محدود به بازه‌ی $[۰, nm(m-۱)]$ است، می‌توانیم یک توزیع بتا را برای توزیع تقریبی آشکارساز انتخاب کنیم. نحوه به دست آوردن توزیع به این صورت است که ابتدا، ممان های مرتبه اول و دوم آشکارساز را به دست می‌آوریم و با ممان های متناظر توزیع بتا مطابقت می‌دهیم تا پارامترها را پیدا کنیم.

۴-۱ خاصیت CFAR

برای بررسی ویژگی CFAR آشکارساز پیشنهادی، از نظریه‌ی invariant استفاده می‌کنیم. فرض کنید Σ' یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری نامعلوم و مثبت باشد. برای اثبات ویژگی CFAR کافی است دو نکته را تحت $H_۰$ نشان دهیم:

۱. کوانتیزه‌سازی یک‌بیتی تبدیل $\Sigma'^{۱/۲}\mathbf{x}(t)$، که با $\mathcal{Q}(\Sigma'^{۱/۲}\mathbf{x}(t))$ نشان داده می‌شود، متعلق به همان خانواده‌ی توزیع داده‌های اولیه‌ی یک‌بیتی $\mathbf{y}(t)$ است.

۲. آشکارساز پیشنهادی $\mathcal{Q}(\Sigma'^{۱/۲}\mathbf{x}(t))$ را دقیقاً به همان نتیجه‌ای نگاشت می‌کند که $\mathbf{y}(t)$ را می‌کند.

از آن‌جا که Σ' قطری با درایه‌های مثبت است و با توجه به خاصیت $\mathrm{sign}(ax) = \mathrm{sign}(x)$ برای $a > ۰$،

[1] Constant false alarm rate

داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{x}(t)) &= \operatorname{sign}\big(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))\big) + j\,\operatorname{sign}\big(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))\big)\\ &= \operatorname{sign}\big(\mathrm{Re}(\mathbf{x}(t))\big) + j\,\operatorname{sign}\big(\mathrm{Im}(\mathbf{x}(t))\big)\\ &= \mathbf{y}(t). \end{aligned} \tag{۴-۱}$$

بنابراین $\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{x}(t))$ و $\mathbf{y}(t)$ دارای توزیع یکسانی هستند.

اکنون مقدار آماره‌ی آزمون رائو برای داده‌های تبدیل‌شده بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned}T_R\big(\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{X})\big) &= \frac{n}{۲}\sum_{i,j=۱,\ i<j}^{m}\left|\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\mathbf{Q}(\sigma'_i x_i(t))\,\mathbf{Q}(\sigma'_j x_j(t))^*\right|^{۲}\\ &= \frac{n}{۲}\sum_{i,j=۱,\ i<j}^{m}\left|\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n} y_i(t)\,y_j^*(t)\right|^{۲}\\ &= T_R(\mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{۴-۲}$$

که در آن $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(۱), \ldots, \mathbf{y}(n)]$ و σ'_i درایه‌ی (i,i) ماتریس $\mathbf{\Sigma}'$ است.

به طور مشابه، برای آزمون EMR یک‌بیتی داریم:

$$T_O = ۱ + \frac{۱}{m}\sum_{i,j=۱,\ i<j}^{۲m}|\hat{r}_{\tilde{\mathbf{y}}}(i,j)|^{۲}, \tag{۴-۳}$$

که در آن $\hat{r}_{\tilde{\mathbf{y}}}(i,j)$ درایه‌ی (i,j) ماتریس کوواریانس یک‌بیتی گسترش‌یافته $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ است. اگر بردار $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{tra}}(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{tra}}(t) = \left[\,\mathrm{Re}(\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{x}(t)))^T,\ \mathrm{Im}(\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{x}(t)))^T\,\right]^T,$$

خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{tra}}} = \frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{tra}}(t)\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{tra}}^T(t) = \frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^T(t) = \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{y}}}. \tag{۴-۴}$$

در نتیجه

$$T_O\big(\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma}'^{۱/۲}\mathbf{X})\big) = T_O(\mathbf{Y}).$$

نتیجه‌گیری: بنابراین هم روش پیشنهادی و هم آزمون EMR یک‌بیتی حتی در شرایط نامعینی واریانس نویز، آستانه‌ی آشکارسازی ثابتی را حفظ می‌کنند. به بیان دیگر، هر دو روش دارای ویژگی CFAR هستند. این خاصیت نیز با شبیه‌سازی‌های فصل‌های بعد تأیید می‌شود.

۴-۲ توزیع تحت فرض H_0

برای آن که آشکارساز به بازه‌ی $[0,1]$ نگاشت شود، آماره‌ی جدید T'_R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T'_R = \frac{1}{nm(m-1)} T_R \tag{4-5}$$

ممان‌های مرتبه اول و دوم این آماره، در قضیه زیر داده شده‌اند.

قضیه‌ی ۴-۱ *تحت فرض H_0، میانگین و واریانس T'_R به صورت زیر هستند :*

$$\mu_0 = \frac{1}{n} \tag{4-6}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^3} \tag{4-7}$$

اثبات. از آن‌جا که مشاهدات در زمان‌های مختلف مستقل هستند و هر مؤلفه‌ی $\tilde{y}_a(t)$ تنها می‌تواند مقادیر ± 1 بگیرد، داریم

$$\mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{n}\prod_{a=1}^{2m}\left(\tilde{y}_a(t)\right)^{\eta_{at}}\right] = \prod_{t=1}^{n}\mathbb{E}\left[\prod_{a=1}^{2m}\left(\tilde{y}_a(t)\right)^{\mathrm{mod}(\eta_{at},2)}\right], \tag{4-8}$$

که در آن $\eta_{at} \in \mathbb{N}$ و $\mathrm{mod}(\eta, 2)$ باقیمانده‌ی تقسیم η بر ۲ است.

تحت H_0، تابع جرم احتمال $p(\tilde{\mathbf{Y}};\theta=\theta_0)$ برابر است با

$$p(\tilde{\mathbf{Y}};\theta=\theta_0) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2mn}.$$

در نتیجه مؤلفه‌های $\tilde{Y}$ مستقل‌اند و

$$\Pr\{\tilde{y}_a(t)=1\} = \Pr\{\tilde{y}_a(t)=-1\} = \tfrac{1}{2}.$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{n}\prod_{a=1}^{2m}\left(\tilde{y}_a(t)\right)^{\eta_{at}}\right] = \begin{cases} 1, & \text{اگر همه‌ی } \eta_{at} \text{ها زوج باشند}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

اگر $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j^*(t)$ باشد. با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم

$$\mathbb{E}\left[z_{ij}(t_1)z_{ij}^*(t_2)\right] = 4\,\delta_{t_1t_2}, \tag{4-9}$$

$$\mathbb{E}\left[z_{ij}(t_1)z_{ij}^*(t_2)z_{kl}(t_3)z_{kl}^*(t_4)\right] = 16\,\delta_{t_1t_2}\delta_{t_3t_4} + 16\,\delta_{ik}\delta_{jl}\,\delta_{t_1t_4}\delta_{t_2t_3}\,(1-\delta_{t_1t_2}\delta_{t_3t_4}), \tag{4-10}$$

که در آن $1 \leqslant i < j \leqslant m,\ 1 \leqslant k < l \leqslant m,\ 1 \leqslant t_1, t_2, t_3, t_4 \leqslant n$.

گام ۱: محاسبه‌ی میانگین T'_R.

داشتیم:

$$T'_R = \frac{1}{nm(m-1)} T_R.$$

پس میانگین آن برابر است با

$$\begin{aligned} \mu_0 = \mathbb{E}[T'_R] &= \frac{1}{2m(m-1)} \sum_{i,j=1,\, i<j}^{m} \mathbb{E}\left[|\hat{r}_{ij}|^2\right] \\ &= \frac{1}{2m(m-1)} \sum_{i,j=1,\, i<j}^{m} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t_1,t_2=1}^{n} z_{ij}(t_1) z^*_{ij}(t_2)\right] \\ &= \frac{1}{2m(m-1)} \sum_{i,j=1,\, i<j}^{m} \frac{1}{n^2} \sum_{t_1,t_2=1}^{n} \mathbb{E}[z_{ij}(t_1) z^*_{ij}(t_2)]. \end{aligned} \tag{۴-۱۱}$$

با استفاده از (۴-۹)، تنها حالت $t_1 = t_2$ باقی می‌ماند و

$$\mu_0 = \frac{1}{n}.$$

گام ۲: محاسبه‌ی واریانس T'_R.

واریانس را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \mathbb{E}[(T'_R)^2] - \mu_0^2 \\ &= \frac{1}{4m^2(m-1)^2} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i<j,\, k<l}}^{m} \mathbb{E}\left[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\right] - \mu_0^2. \end{aligned} \tag{۴-۱۲}$$

اکنون

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^4} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=1}^{n} z_{ij}(t_1) z^*_{ij}(t_2) z_{kl}(t_3) z^*_{kl}(t_4)\right] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{t_1,t_2,t_3,t_4=1}^{n} \mathbb{E}\left[z_{ij}(t_1) z^*_{ij}(t_2) z_{kl}(t_3) z^*_{kl}(t_4)\right]. \end{aligned} \tag{۴-۱۳}$$

با جایگذاری (۴-۱۰) در رابطه‌ی بالا

$$\mathbb{E}\left[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\right] = \mathbb{E}[|\hat{r}_{ij}|^2]\, \mathbb{E}[|\hat{r}_{kl}|^2] + \frac{16(n^2-n)}{n^4} \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{۹۲}$$

با جایگذاری در (۴-۱۲) و ساده‌سازی

$$\sigma_0^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^3}. \tag{۹۳}$$

نتیجه: تحت فرض H_0، آماره‌ی نرمالیزه‌شده‌ی T'_R میانگین $\mu_0 = \frac{1}{n}$ و واریانس $\sigma_0^2 = \frac{2(n-1)}{m(m-1)n^3}$ دارد.

□

تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, B(x;\alpha,\beta), \tag{۴۱}$$

که در آن تابع بتای ناقص برابر است با

$$B(x;\alpha,\beta) = \int_0^x z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\, dz, \tag{۴۲}$$

و $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$، برای $x > 0$، تابع گاما است.

علاوه بر این، میانگین و واریانس یک توزیع بتا به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \tag{۴-۱۴}$$

با تطبیق روابط (۴-۱۴) با نتایج (۴-۶) و (۴-۷)، توزیع تقریبی Null (فرض H_0) آماره‌ی T'_R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Pr\{T'_R < \gamma\} \approx \frac{\Gamma(\alpha_0+\beta_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)}\, B(\gamma;\alpha_0,\beta_0), \tag{۴۴}$$

که در آن

$$\alpha_0 = \frac{nm(m-1)-2}{2n}, \tag{۴۵}$$

$$\beta_0 = \frac{(n-1)\big[nm(m-1)-2\big]}{2n}. \tag{۴۶}$$

۴-۳ توزیع تحت فرض H_1

میانگین و واریانس T'_R تحت فرض H_1 در قضیه‌ی زیر آمده است.

قضیه‌ی ۴-۲ *تحت فرض H_1، میانگین و واریانس T'_R به صورت زیر هستند.*

$$\mu_1 = \frac{1}{2m(m-1)} \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} g_{ij} \tag{۴-۱۵}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4m^2(m-1)^2} \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i<j,k<l}}^{m} (f_{ijkl} - g_{ijkl}) \tag{۴-۱۶}$$

که g_{ij}، g_{ijkl} و f_{ijkl} در اثباتی که در ادامه می‌آید تعریف می‌شوند.

اثبات. با ترکیب حل‌های بسته برای «احتمال‌های orthant مرکزی» مرتبهٔ دوم و سوم با $p(\tilde{\mathbf{Y}};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=۱}^{n} p\big(\tilde{\mathbf{y}}(t);\boldsymbol{\theta}\big) = \prod_{t=۱}^{n} \phi\big[\mathbf{S}(t)\big]$ به نتایج زیر می‌انجامد:

$$h_{ab} \;=\; \mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t)\,\tilde{y}_b(t)\big] \;=\; \frac{۲}{\pi}\,\arcsin\rho_{ab}, \qquad (۱۷\text{–}۴)$$

و

(۱۸–۴)

$$h_{abcd} \;=\; \mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\tilde{y}_c(t)\tilde{y}_d(t)\big] \;=\; ۱۶\,P_{abcd} - ۱ - \big(h_{ab} + h_{ac} + h_{ad} + h_{bc} + h_{bd} + h_{cd}\big),$$

که در آن $۱ \leqslant a \neq b \neq c \neq d \leqslant ۲m$ و

$$P_{abcd} \;=\; \Pr\{\tilde{x}_a(t) > ۰,\; \tilde{x}_b(t) > ۰,\; \tilde{x}_c(t) > ۰,\; \tilde{x}_d(t) > ۰\}\,. \qquad (۱۹\text{–}۴)$$

با توجه به تقارن‌های ساختاری

$$\rho_{i'j'} = \rho_{ij}, \qquad \rho_{i'j} = -\,\rho_{ij'}, \qquad ۱ \leqslant i < j \leqslant m, \qquad (۲۰\text{–}۴)$$

و استفاده از (۴–۸) و (۴–۱۷) و (۴–۱۸) داریم

$$\mathbb{E}\big[z_{ij}(t)\big] = \mathbb{E}\big[y_i(t)y_j^*(t)\big] = ۲\big(h_{ij} + \mathrm{i}\,h_{i'j}\big), \qquad (۲۱\text{–}۴)$$

و امیدهای ضرب‌های دوتایی به‌صورت زیرند:

(۲۲–۴)

$$\mathbb{E}\big[z_{ij}(t)\,z_{kl}(t)\big] = \begin{cases} ۴\,h_{ii'jj'}, & i{=}k,\; j{=}l,\\ ۲\left[h_{ii'jl'} + h_{ii'j'l} + \mathrm{i}\big(h_{ii'jl} - h_{ii'j'l'}\big)\right], & i{=}k,\; j \neq l,\\ ۴\big(h_{kj} + \mathrm{i}\,h_{k'j}\big), & i{=}l,\\ ۴\big(h_{il} + \mathrm{i}\,h_{i'l}\big), & j{=}k,\\ ۲\left[h_{jj'ik'} + h_{jj'i'k} + \mathrm{i}\big(h_{jj'i'k'} - h_{jj'ik}\big)\right], & j{=}l,\; i \neq k,\\ \upsilon_۱(i,j,k,l) - \upsilon_۲(i,j,k,l) + \mathrm{i}\big[\upsilon_۳(i,j,k,l) + \upsilon_۴(i,j,k,l)\big], & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases}$$

و

(۲۳-۴)

$$\mathbb{E}\big[z_{ij}(t)\, z^*_{kl}(t)\big] = \begin{cases} ۴, & i{=}k,\ j{=}l, \\ ۴\big(h_{lj} + \mathrm{i}\, h_{l'j}\big), & i{=}k,\ j \neq l, \\ ۲\left[h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k} + \mathrm{i}\big(h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'}\big)\right], & i{=}l, \\ ۲\left[h_{jj'il'} + h_{jj'i'l} + \mathrm{i}\big(h_{jj'i'l'} - h_{jj'il}\big)\right], & j{=}k, \\ ۴\big(h_{ik} + \mathrm{i}\, h_{i'k}\big), & j{=}l,\ i \neq k, \\ \upsilon_۱(i,j,k,l) + \upsilon_۲(i,j,k,l) + \mathrm{i}\big[\upsilon_۳(i,j,k,l) - \upsilon_۴(i,j,k,l)\big], & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases}$$

که در آن (برای $۱ \leqslant i < j \leqslant m,\ ۱ \leqslant k < l \leqslant m$)

$$\upsilon_۱(i,j,k,l) = h_{ijkl} + h_{ijk'l'} + h_{i'j'kl} + h_{i'j'k'l'}, \quad (\text{۲۴-۴آ})$$

$$\upsilon_۲(i,j,k,l) = h_{i'jk'l} - h_{i'jkl'} - h_{ij'k'l} + h_{ij'kl'}, \quad (\text{۲۴-۴ب})$$

$$\upsilon_۳(i,j,k,l) = h_{i'jkl} + h_{i'jk'l'} - h_{ij'kl} - h_{ij'k'l'}, \quad (\text{۲۴-۴ج})$$

$$\upsilon_۴(i,j,k,l) = h_{ijk'l} - h_{ijkl'} + h_{i'j'k'l} - h_{i'j'kl'}. \quad (\text{۲۴-۴د})$$

میانگین. با یادآوری

$$T'_R = \frac{۱}{nm(m-۱)}\, T_R = \frac{۱}{۲m(m-۱)} \sum_{i<j} \big|\hat{r}_{ij}\big|^۲,$$

میانگین تحت $H_۱$ برابر است با

$$\mu_۱ = \frac{۱}{۲m(m-۱)} \sum_{i<j} \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^۲\big] = \frac{۱}{۲m(m-۱)} \sum_{i<j} g_{ij}, \quad (۲۵\text{-}۴)$$

که

$$g_{ij} = \frac{۴}{n^۲}\Big[n + A_{n,۲}\big(h^۲_{ij} + h^۲_{i'j}\big)\Big]. \quad (۲۶\text{-}۴)$$

تذکر (تصحیح): در متن مقاله برای $A_{n,m}$ (تعداد جایگشت‌های بدون تکرارِ انتخاب m عنصر از n عنصر) به‌اشتباه فرمول دیگری نوشته شده بود. تعریف درست که در این‌جا به کار می‌بریم به صورت زیر است:

$$A_{n,m} \;=\; \frac{n!}{(n-m)!}$$

که در این اثبات $A_{n,۲} = n(n-۱)$

واریانس. واریانس T'_R برابر است با

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4m^2(m-1)^2} \sum_{i<j} \sum_{k<l} \left(\mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\big] - \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2\big] \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{kl}|^2\big] \right) . \tag{۴-۲۷}$$

چون مشاهدات زمانی مستقل‌اند، هرگاه $\delta_{t_1 t_2} + \delta_{t_3 t_4} \geqslant 1$ یا $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_4$، داریم

$$\mathbb{E}\big[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2) z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4)\big] = \mathbb{E}\big[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2)\big] \, \mathbb{E}\big[z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4)\big] . \tag{۴-۲۸}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\big] = \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2\big] \, \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{kl}|^2\big] &+ \frac{1}{n^4} \sum_{(t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{T}} \mathbb{E}\big[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2) z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4)\big] \\ &- \frac{1}{n^4} \sum_{(t_1,t_2,t_3,t_4) \in \mathcal{T}} \mathbb{E}\big[z_{ij}(t_1) z_{ij}^*(t_2)\big] \, \mathbb{E}\big[z_{kl}(t_3) z_{kl}^*(t_4)\big] , \end{aligned} \tag{۴-۲۹}$$

که در آن

$$\mathcal{T} = \big\{ (a,b,c,d) \,\big|\, \delta_{ab} + \delta_{cd} = 0, \quad \delta_{ac} + \delta_{ad} + \delta_{bc} + \delta_{bd} \geqslant 1 \big\} . \tag{۱۰۷}$$

پس از جایگذاری (۴-۲۱) و (۴-۲۲) و (۴-۲۳) و ساده‌سازی، خواهیم داشت

$$\mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2 \, |\hat{r}_{kl}|^2\big] = \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{ij}|^2\big] \, \mathbb{E}\big[|\hat{r}_{kl}|^2\big] + f_{ijkl} - g_{ijkl} , \tag{۴-۳۰}$$

که

$$g_{ijkl} = \frac{32(n-1)(2n-3)}{n^3} \big(h_{ij}^2 + h_{i'j}^2\big)\big(h_{kl}^2 + h_{k'l}^2\big) , \tag{۴-۳۱}$$

و

$$f_{ijkl} = \begin{cases} \tau_1(i,j), & i=k, \; j=l, \\ \tau_2(i,j,l), & i=k, \; j \neq l, \\ \tau_2(i,j,k), & i=l, \\ \tau_2(j,i,l), & j=k, \\ \tau_2(j,i,k), & j=l, \; i \neq k, \\ \tau_3(j,i,k,l), & i \neq j \neq k \neq l, \end{cases} \tag{۴-۳۲}$$

با

$$\tau_1(i,j) = \frac{16}{n^4} A_{n,2} \big[1 + h_{ii'jj'}^2\big] + \frac{32}{n^4} A_{n,3} \big[\big(h_{ij}^2 + h_{i'j}^2\big) + h_{ii'jj'} \big(h_{ij}^2 - h_{i'j}^2\big)\big] , \tag{۴-۳۳}$$

(۳۴-۴)

$$\tau_۲(i,j,k) = \frac{۴}{n^۴} A_{n,۲} \Big(۴\big(h_{jk}^۲ + h_{jk'}^۲\big) + \big(h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k}\big)^۲ + \big(h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'}\big)^۲ \Big)$$
$$+ \frac{۱۶}{n^۴} A_{n,۳} \Big(\big(h_{ii'jk} - h_{ii'j'k'}\big)(h_{ik}h_{i'j} + h_{ij}h_{i'k}) + \big(h_{ii'jk'} + h_{ii'j'k}\big)(h_{ik}h_{ij} - h_{i'j}h_{i'k})$$
$$+ ۲h_{jk}(h_{ik}h_{ij} + h_{i'j}h_{i'k}) + ۲h_{jk'}(h_{ik}h_{i'j} - h_{ij}h_{i'k}) \Big),$$

و

(۳۵-۴)

$$\tau_۳(i,j,k,l) = \frac{۲}{n^۴} A_{n,۲} \sum_{t=۱}^{۴} \upsilon_t^۲(i,j,k,l) + \frac{۱۶}{n^۴} A_{n,۳} \Big(\upsilon_۱(i,j,k,l)\, h_{ij}h_{kl} + \upsilon_۲(i,j,k,l)\, h_{i'j}h_{k'l}$$
$$+ \upsilon_۳(i,j,k,l)\, h_{kl}h_{i'j} + \upsilon_۴(i,j,k,l)\, h_{ij}h_{k'l} \Big).$$

در نهایت،

$$\sigma_۱^۲ = \frac{۱}{۴m^۲(m-۱)^۲} \sum_{i<j} \sum_{k<l} \big(f_{ijkl} - g_{ijkl}\big), \qquad (۳۶-۴)$$

که همان بیان واریانس T'_R تحت $H_۱$ است.

□

مشابه حالت $H_۰$، تابع توزیع تجمعی (CDF) آماره‌ی T'_R تحت $H_۱$ نیز می‌تواند با یک توزیع بتا تقریب زده شود:

$$\Pr\{T'_R < \gamma\} \;\approx\; \frac{\Gamma(\alpha_۱ + \beta_۱)}{\Gamma(\alpha_۱)\,\Gamma(\beta_۱)}\, B(\gamma; \alpha_۱, \beta_۱), \qquad (۳۷-۴)$$

که در آن

$$\alpha_۱ = \frac{\mu_۱\big(\mu_۱ - \mu_۱^۲ - \sigma_۱^۲\big)}{\sigma_۱^۲}, \qquad (۳۸-۴)$$

$$\beta_۱ = \frac{(۱-\mu_۱)\big(\mu_۱ - \mu_۱^۲ - \sigma_۱^۲\big)}{\sigma_۱^۲}. \qquad (۳۹-۴)$$

فصل ۵

تحلیل عملکرد

در این بخش، افت کارایی در آشکارسازی هنگام استفاده از مبدل‌های آنالوگ—دیجیتال یک‌بیتی 1-bit ADCs در مقایسه با مبدل‌های ∞–بیتی بررسی می‌شود. توجه کنید که آشکارساز ∞–بیتی EMR در دسته‌ی آزمون‌های sphercity قرار می‌گیرد؛ آزمون‌هایی که هم استقلال بین متغیرهای تصادفی و هم برابری واریانس‌های آن‌ها را در نظر می‌گیرند. با این حال، به دلیل از دست رفتن اطلاعات دامنه در حالت یک‌بیتی، مقایسه‌ی واریانس‌ها غیرممکن می‌شود. بنابراین، نتیجه‌ی ما با آزمون LMPIT[1] مقایسه می‌شود. در حقیقت، وقتی SNR پایین باشد، درایه‌های قطری ماتریس کوواریانس تقریباً برابر می‌شوند و آزمون sphercity کارایی نزدیک به آزمون استقلال دارد، که این موضوع با شبیه‌سازی در [۵] نشان داده شده است.

۵–۱ حالت ∞-bit

مسئله‌ی آشکارسازی برای ∞–بیت ADC مطابق زیر است.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &: \mathbf{R}_\mathbf{x} = \mathrm{diag}(\sigma_{w_1}, ..., \sigma_{w_m}),\\ \mathcal{H}_1 &: \mathbf{R}_\mathbf{x} \neq \mathrm{diag}(\sigma_{w_1}, ..., \sigma_{w_m})\end{aligned}$$

LMPIT برای این مسئله به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$T_L = n\,\mathrm{tr}\Big[\big(\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{x}\,\mathrm{Diag}(\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{x})^{-1} - \mathbf{I}_m\big)^2\Big] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_L, \qquad (۵–۱)$$

[1] Locally Most Powerful Invariant Test

که توزیع مجانبی آن در [۳] تحلیل شده است:

$$T_L \sim \begin{cases} \chi_k^{۲}, & H_{۰}, \\ \\ \chi_k^{۲}(\delta_\infty^{۲}), & H_{۱}, \end{cases} \qquad (۵-۲)$$

که در آن $k = m^{۲} - m$ و $\delta_\infty^{۲} = n\,\mathrm{tr}\big[(\mathbf{P_x} - \mathbf{I}_m)^{۲}\big] = ۲n\|\theta\|^{۲}$

۵-۲ حالت تک‌بیت

در بخش قبل، توزیع آماره‌ی T_R را با توزیع بتا تقریب زدیم. با این حال، این تقریب برای مقایسه با آشکارسازهای ∞ـ بیتی جهت تحلیل افت کارایی مناسب نیست. بنابراین، در این‌جا یک تقریب جدید برای توزیع T_R در SNR پایین استخراج می‌کنیم که در قالب توزیع کای‌ـ دو غیرمرکزی بیان می‌شود.

ابتدا می‌نویسیم:

$$T_R = \|\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}\|^{۲}, \qquad (۵-۳)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}} = \sqrt{\frac{n}{۲}}\,\tilde{\mathbf{r}}$ و $\tilde{\mathbf{r}} = \big[\mathrm{Re}(\hat{\mathbf{r}})^T,\ \mathrm{Im}(\hat{\mathbf{r}})^T\big]^T$. خود $\hat{\mathbf{r}}$ نیز قبلا به صورت زیر تعریف شد.

$$\hat{\mathbf{r}} = \big[\hat{r}_{۱,۲}, \hat{r}_{۱,۳}, \hat{r}_{۲,۳}, \ldots, \hat{r}_{m-۱,m}\big]^T$$

قضیه‌ی ۵-۱ *در SNR پایین که θ از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(n^{-۱/۲})$ است، بردار تصادفی $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$ به صورت مجانبی از یک توزیع گاوسی چندبعدی حقیقی با میانگین و کوواریانس زیر پیروی می‌کند:*

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}] = \frac{۲}{\pi}\sqrt{۲n}\,\theta + \mathcal{O}(n^{-۱/۲}), \qquad (۵-۴)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}} = \mathbf{I}_{m^{۲}-m} + \mathcal{O}(n^{-۱/۲}). \qquad (۵-۵)$$

اثبات.

میانگین و واریانس $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$

برای اختصار، هر بردار با اندیس sc به‌صورت مقیاس‌یافته تعریف می‌شود:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{sc}} \triangleq \sqrt{\frac{n}{۲}}\,\mathbf{r}. \qquad (۵-۶)$$

بنابراین

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}} = \Big[\mathrm{Re}\big(\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}\big)^T \quad \mathrm{Im}\big(\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}\big)^T\Big]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}} = \big[\,(\hat{r}_{۱,۲})_{\mathrm{sc}}, (\hat{r}_{۱,۳})_{\mathrm{sc}}, (\hat{r}_{۲,۳})_{\mathrm{sc}}, \ldots, (\hat{r}_{m-۱,m})_{\mathrm{sc}}\,\big]^T.$$

با فرض $\theta = \mathcal{O}(n^{-۱/۲})$، بسط تیلور $p(\tilde{\mathbf{y}}(t);\theta)$ پیرامون $\theta_۰ = ۰$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{y}}(t);\theta) &= p(\tilde{\mathbf{y}}(t);\theta_۰) + \theta^T \frac{\partial p(\tilde{\mathbf{y}}(t))}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_۰} + \mathcal{O}(n^{-۱}) \\ &= \frac{۱}{۲^{۲m}} + \frac{۱}{۲^{۲m-۱}\pi} \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant m} \mathrm{Re}\big(z_{ij}(t)\big)\,\rho_{ij} + \frac{۱}{۲^{۲m-۱}\pi} \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant m} \mathrm{Im}\big(z_{ij}(t)\big)\,\rho_{i'j} + \mathcal{O}(n^{-۱}), \end{aligned} \tag{۵-۷}$$

که در آن با استفاده از $\rho_{i'j'} = \rho_{ij}$، $\rho_{ij'} = -\rho_{i'j}$ و $\mathrm{diag}(\mathrm{Im}(\mathbf{P}_x)) = ۰$ را مشابه (۳-۳۷) و (۳-۳۸) می‌توان نوشت

$$p(\tilde{\mathbf{y}}(t);\theta) = \frac{۱}{۲^{۲m}} + \frac{۱}{۲^{۲m-۱}\pi} \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant ۲m} \tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t)\,\rho_{ij} + \mathcal{O}(n^{-۱}). \tag{۵-۸}$$

سپس می‌توان نتیجه گرفت که :

$$p\big(\tilde{y}_a(t),\tilde{y}_b(t);\theta\big) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲\pi}\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\,\rho_{ab} + \mathcal{O}(n^{-۱}), \tag{۵-۹}$$

$$\begin{aligned} &p\big(\tilde{y}_a(t),\tilde{y}_b(t),\tilde{y}_c(t),\tilde{y}_d(t);\theta\big) = \frac{۱}{۱۶} + \\ &\frac{۱}{۸\pi}[\tilde{y}_a\tilde{y}_b\,\rho_{ab} + \tilde{y}_a\tilde{y}_c\,\rho_{ac} + \tilde{y}_a\tilde{y}_d\,\rho_{ad} + \tilde{y}_b\tilde{y}_c\,\rho_{bc} + \tilde{y}_b\tilde{y}_d\,\rho_{bd} + \tilde{y}_c\tilde{y}_d\,\rho_{cd}] + \mathcal{O}(n^{-۱}) \end{aligned} \tag{۵-۱۰}$$

که $۱ \leqslant a \neq b \neq c \neq d \leqslant ۲m$

در نتیجه

$$\mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\big] = \sum_{\substack{\tilde{y}_e(t)=\pm ۱\\ e=a,b}} \tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)p\big(\tilde{y}_a(t),\tilde{y}_b(t);\theta\big) = \frac{۲}{\pi}\rho_{ab} + \mathcal{O}(n^{-۱}), \tag{۵-۱۱}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\tilde{y}_c(t)\tilde{y}_d(t)\big] &= \sum_{\substack{\tilde{y}_e(t)=\pm ۱\\ e=a,b,c,d}} \tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\tilde{y}_c(t)\tilde{y}_d(t)p\big(\tilde{y}_a(t),\tilde{y}_b(t),\tilde{y}_c(t),\tilde{y}_d(t);\theta\big) \\ &= \mathcal{O}(n^{-۱}), \end{aligned} \tag{۵-۱۲}$$

وقتی تمام اندیس‌های a,b,c,d یکسان باشند، می‌توان با استفاده از (۴-۸)، می‌توان $\mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t)\tilde{y}_b(t)\tilde{y}_c(t)\tilde{y}_d(t)\big]$ را ساده کرد. پس می‌توان نشان داد که :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat{r}_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big] &= \sqrt{\tfrac{n}{۲}}\,\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{ij})] \\ &= \sqrt{\tfrac{n}{۲}}\,\mathbb{E}\left[\frac{۱}{n}\sum_{t=۱}^{n}\big(\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_j(t) + \tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_{j'}(t)\big)\right] \\ &= \sqrt{\tfrac{n}{۲}}\left[\frac{۲}{\pi}\rho_{ij} + \frac{۲}{\pi}\rho_{i'j'} + \mathcal{O}(n^{-۱})\right] \\ &= \frac{۲\sqrt{۲n}}{\pi}\,\rho_{ij} + \mathcal{O}(n^{-۱/۲}), \end{aligned} \tag{۵-۱۳}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathrm{Im}\big((\hat{r}_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big] &= \sqrt{\tfrac{n}{2}}\,\mathbb{E}[\mathrm{Im}(\hat{r}_{ij})] \\
&= \sqrt{\tfrac{n}{2}}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\big(\tilde{y}_{i'}(t)\tilde{y}_j(t)-\tilde{y}_i(t)\tilde{y}_{j'}(t)\big)\right] \\
&= \sqrt{\tfrac{n}{2}}\,\left[\frac{2}{\pi}\rho_{i'j}-\frac{2}{\pi}\rho_{ij'}+\mathcal{O}(n^{-1})\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2n}}{\pi}\,\rho_{i'j}+\mathcal{O}(n^{-1/2}).
\end{aligned}
\tag{۱۴-۵}
$$

پس میانگین بردار

$$
\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}] = \frac{2\sqrt{2n}}{\pi}\,\theta+\mathcal{O}(n^{-1/2}).
\tag{۱۵-۵}
$$

از استقلال زمانی، برای $t_1 \neq t_2$ داریم

$$
\mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t_1)\tilde{y}_b(t_1)\tilde{y}_c(t_2)\tilde{y}_d(t_2)\big] = \mathbb{E}\big[\tilde{y}_a(t_1)\tilde{y}_b(t_1)\big]\,\mathbb{E}\big[\tilde{y}_c(t_2)\tilde{y}_d(t_2)\big].
\tag{۱۶-۵}
$$

اکنون کوواریانس‌های مؤلفه‌ها را محاسبه می‌کنیم. با تعریف $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j^*(t)$ داریم :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat{r}_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\,\mathrm{Re}\big((\hat{r}_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]-\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat{r}_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big]\;\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat{r}_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big] \\
&= \tfrac{n}{2}\,\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{ij})\,\mathrm{Re}(\hat{r}_{kl})]-\tfrac{n}{2}\,\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{ij})]\;\mathbb{E}[\mathrm{Re}(\hat{r}_{kl})] \\
&= \tfrac{1}{2n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{t_1=1}^{n}\sum_{t_2=1}^{n}\mathrm{Re}\big(z_{ij}(t_1)\big)\,\mathrm{Re}\big(z_{kl}(t_2)\big)\right]-\tfrac{1}{2n}\,\mathbb{E}\left[\sum_{t_1=1}^{n}\mathrm{Re}\big(z_{ij}(t_1)\big)\right]\;\mathbb{E}\left[\sum_{t_2=1}^{n}\mathrm{Re}\big(z_{kl}(t_2)\big)\right] \\
&= \tfrac{1}{2n}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big(z_{ij}(t)\big)\,\mathrm{Re}\big(z_{kl}(t)\big)\big]-\tfrac{1}{2n}\sum_{t=1}^{n}\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big(z_{ij}(t)\big)\big]\;\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big(z_{kl}(t)\big)\big] \\
&= \begin{cases}
1-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}^2+\mathcal{O}(n^{-1}), & i{=}k,\ j{=}l, \\
\frac{2}{\pi}\rho_{jl}-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}\rho_{il}+\mathcal{O}(n^{-1}), & i{=}k,\ j\neq l, \\
\frac{2}{\pi}\rho_{jk}-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}\rho_{ki}+\mathcal{O}(n^{-1}), & i{=}l, \\
\frac{2}{\pi}\rho_{il}-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}\rho_{jl}+\mathcal{O}(n^{-1}), & j{=}k, \\
\frac{2}{\pi}\rho_{ik}-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}\rho_{kj}+\mathcal{O}(n^{-1}), & j{=}l,\ i\neq k, \\
-\frac{8}{\pi^2}\rho_{ij}\rho_{kl}+\mathcal{O}(n^{-1}), & i\neq j\neq k\neq l,
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{۱۷-۵}
$$

که با توجه به $\theta = \mathcal{O}(n^{-۱/۲})$ معادله بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\,\mathrm{Re}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]-\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big]\ \mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]=\begin{cases}۱+\mathcal{O}(n^{-۱}), & i=k,\ j=l,\\ \mathcal{O}(n^{-۱/۲}), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{۱۸-۵}$$

که $۱ \leqslant i < j \leqslant m$ و $۱ \leqslant k < l \leqslant m$

به طرز مشابه خواهیم داشت :

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\,\mathrm{Im}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]-\mathbb{E}\big[\mathrm{Re}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big]\ \mathbb{E}\big[\mathrm{Im}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]=\mathcal{O}(n^{-\frac{۱}{۲}}). \tag{۱۹-۵}$$

و

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{Im}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\,\mathrm{Im}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]-\mathbb{E}\big[\mathrm{Im}\big((\hat r_{ij})_{\mathrm{sc}}\big)\big]\ \mathbb{E}\big[\mathrm{Im}\big((\hat r_{kl})_{\mathrm{sc}}\big)\big]=\begin{cases}۱+\mathcal{O}(n^{-۱}), & i=k,\ j=l,\\ \mathcal{O}(n^{-۱/۲}), & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{۲۰-۵}$$

در نتیجه ماتریس کوواریانس $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$ در SNR پایین

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}}=\mathbf{I}_{m^{۲}-m}+\mathcal{O}(n^{-۱/۲}). \tag{۲۱-۵}$$

اثبات گوسی بودن $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$

برای اتمام اثبات قضیهٔ ۴ نشان می‌دهیم $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$ به‌صورت مجانبی، گاوسی است. از نسخهٔ چندمتغیرهٔ قضیهٔ حد مرکزی استفاده می‌کنیم:

لم (*CLT Multivariate*). اگر $\mathbf{s}=\sum_{t=۱}^{n}\mathbf{b}_t$، که $\mathbf{b}_t \in \mathbb{R}^{d\times ۱}$ مستقل و با میانگین صفرند، آنگاه برای $n\to\infty$، $\mathbf{s}$ با میانگین صفر و کوواریانس $\mathbf{C}$ مجانبی گاوسی است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=۱}^{n}\mathbb{E}\Big[\big\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\mathbf{b}_t\big\|^{۳}\Big]=۰. \tag{۲۲-۵}$$

برای به‌کارگیری لم، تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\mathbf{z}}_t=\sqrt{\frac{۱}{۲n}}\Big[\mathrm{Re}(\mathbf{z}_t)^T\quad \mathrm{Im}(\mathbf{z}_t)^T\Big]^T, \tag{۲۳-۵}$$

$$\mathbf{z}_t=\big[z_{۱,۲}(t), z_{۱,۳}(t),\dots,z_{m-۱,m}(t)\big]^T, \tag{۲۴-۵}$$

$$\mathbf{b}_t=\tilde{\mathbf{z}}_t-\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]. \tag{۲۵-۵}$$

با استفاده از (۴-۲۱) داریم

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t] = \left(\frac{۸}{n\pi^۲}\right)^{۱/۲} \arcsin(\theta), \quad \text{(اعمالِ arcsin به‌صورت درایه‌به‌درایه)}. \tag{۵-۲۶}$$

همچنین

$$\mathbf{s} = \sum_{t=۱}^{n} \mathbf{b}_t, \tag{۵-۲۷}$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}} = \mathbf{s} + \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}], \tag{۵-۲۸}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}] = \sum_{t=۱}^{n} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t] = \left(\frac{۸n}{\pi^۲}\right)^{۱/۲} \arcsin(\theta), \tag{۵-۲۹}$$

و $\mathbf{C} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{r}}_{\text{sc}}}$.

یادآوری می‌کنیم که نامساوی کوشی‌ـ شوارتز به صورت زیر است :

$$\left\|\mathbf{c}_i \mathbf{b}_t\right\|^۲ \leqslant \left\|\mathbf{c}_i\right\|^۲ \left\|\mathbf{b}_t\right\|^۲ \tag{۵-۳۰}$$

حال با استفاده از این نامساوی داریم :

$$\left\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\mathbf{b}_t\right\|^۳ = \left(\sum_i \|\mathbf{c}_i \mathbf{b}_t\|^۲\right)^{۳/۲} \leqslant \left(\sum_i \|\mathbf{c}_i\|^۲ \|\mathbf{b}_t\|^۲\right)^{۳/۲} = \left\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\right\|^۳ \|\mathbf{b}_t\|^۳. \tag{۵-۳۱}$$

از نامساوی $\mathbb{E}[f(x)] \geqslant \mathbb{E}[g(x)]$ برای $f(x) \geqslant g(x) \geqslant ۰$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\mathbb{E}[\left\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\mathbf{b}_t\right\|^۳] \leqslant \left\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\right\|^۳ \mathbb{E}[\|\mathbf{b}_t\|^۳] \tag{۵-۳۲}$$

با استفاده از این نامساوی و این نکته که $\left\|\mathbf{C}^{-۱/۲}\mathbf{b}_t\right\|^۳$ محدود است، کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=۱}^{n} \mathbb{E}\left[\|\mathbf{b}_t\|^۳\right] = ۰, \tag{۵-۳۳}$$

تا شرط لم برقرار باشد. با قانون متوازی‌الاضلاع داریم

$$\|\mathbf{b}_t\|^۲ + \|\tilde{\mathbf{z}}_t + \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^۲ = ۲\left(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^۲ + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^۲\right) \;\Rightarrow\; \|\mathbf{b}_t\|^۲ \leqslant ۲\left(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^۲ + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^۲\right). \tag{۵-۳۴}$$

سپس داریم :

$$\begin{aligned} \max\|\mathbf{b}_t\|^۲ \;&\leqslant\; \max ۲\left(\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|^۲ + \|\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}_t]\|^۲\right) = \max ۲\left(\frac{m(m-۱)}{n} + \frac{۸}{n\pi^۲}\|\arcsin\theta\|^۲\right) \\ &= \frac{۲m(m-۱)}{n} + \frac{۱۶}{n\pi^۲}\max_\theta\|\arcsin\theta\|^۲ = \frac{۶m(m-۱)}{n}. \end{aligned} \tag{۵-۳۵}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=۱}^{n}\mathbb{E}\left[\|\mathbf{b}_t\|^{۳}\right] \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{t=۱}^{n}\max\|\mathbf{b}_t\|^{۳}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{t=۱}^{n}\left[\left(\max\|\mathbf{b}_t\|^{۲}\right)^{۳/۲}\right] \leqslant [۶m(m-۱)]^{۳/۲}\lim_{n\to\infty} n^{-۱/۲} = ۰. \quad (۳۶-۵)$$

و بنابراین طبق لم، $\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{sc}}$ مجانبی گاوسی است.
اکنون، اثبات قضیه به اتمام رسید.

□

با توجه به نتایج بالا نتیجه می‌گیریم:

$$T_R \sim \begin{cases} \chi_k^{۲}, & H_۰, \\ \chi_k^{۲}(\delta_۱^{۲}), & H_۱, \end{cases} \quad (۳۷-۵)$$

که در آن

$$\delta_۱^{۲} = \frac{۸n}{\pi^{۲}}\|\theta\|^{۲} = \frac{۴}{\pi^{۲}}\delta_\infty^{۲}. \quad (۳۸-۵)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که افت کارایی در SNR پایین تقریباً برابر است با:

$$۱۰\log_{۱۰}\left(\sqrt{\frac{\delta_\infty^{۲}}{\delta_۱^{۲}}}\right) \approx ۲\ \mathrm{dB}.$$

به بیان دیگر، این افت کارایی را می‌توان با افزایش اندازه‌ی نمونه‌ها به میزان $\frac{\delta_\infty^{۲}}{\delta_۱^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۴} \approx ۲/۴۷$ جبران کرد.

شایان ذکر است که در [۷] افت 2 dB تنها با افزایش تعداد نمونه‌ها به اندازه‌ی $\pi/۲ \approx ۱/۵۷$ برابر جبران‌پذیر گزارش شده بود. در مقایسه با نتیجه‌ی این مقاله، روشن می‌شود که بازده non-coherent accumulation برابر با ریشه‌ی دوم بازده coherent accumulation است.

Bibliography

[1] Y. Zhao, X. Ke, B. Zhao, Y. Xiao, and L. Huang. One-bit spectrum sensing based on statistical covariances: Eigenvalue moment ratio approach. *IEEE Wireless Communications Letters*, 10(11):2474–2478, Nov 2021.

[2] L. Huang, J. Fang, K. Liu, H. C. So, and H. Li. An eigenvalue moment-ratio approach to blind spectrum sensing for cognitive radio under sample-starving environment. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(8):3465–3480, Aug 2015.

[3] Y.-H. Xiao, L. Huang, J. Xie, and H. C. So. Approximate asymptotic distribution of locally most powerful invariant test for independence: Complex case. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(3):1784–1799, Mar 2018.

[4] O. Bar-Shalom and A. J. Weiss. Doa estimation using one-bit quantized measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(3):868–884, Jul 2002.

[5] L. Huang, C. Qian, Y. Xiao, and Q. T. Zhang. Performance analysis of volume-based spectrum sensing for cognitive radio. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 14(1):317–330, Jan 2015.

[6] D. Ramírez, J. Vía, I. Santamaría, and L. L. Scharf. Locally most powerful invariant tests for correlation and sphericity of gaussian vectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 59(4):2128–2141, Apr 2013.

[7] Y.-H. Xiao, D. Ramírez, P. J. Schreier, C. Qian, and L. Huang. One-bit target detection in collocated mimo radar and performance degradation analysis. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 71(9):9363–9374, Sep 2022.