第5章 连续时间系统的频域分析

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

5.1.1 频率响应特性

复指数函数 $x(t)=e^{j\Omega_0 t}$(-∞<t<+∞)，对于冲激响应为 $h(t)$ 的LTI系统的响应。

系统的零状态输出

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0(t-\tau)}d\tau=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0\tau}d\tau$$

非周期信号的傅里叶变换定义，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0\tau}d\tau=\mathcal{F}\left[h(t)\right]\Big|_{\Omega=\Omega_0}=H(j\Omega)\Big|_{\Omega=\Omega_0}$$

则： $y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}H(\mathrm{j}\Omega_0)$

对于复指数输信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}$，LTI系统的输出是具有相同频率的复数信号乘上复常数 $H(\mathrm{j}\Omega_0)$

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

$H(\mathrm{j}\Omega_0)$ 是一个复数，其值决定 Ω_0

若输入信号的频率 Ω 改变，

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\tau} d\tau = \mathcal{F}\left[h(t)\right] = H(j\Omega)$$

上式定义的量称为LTI连续时间系统的频率响应特性

提供了系统的一个频域描述，是系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。可以将频响特性表示为

$$H(\mathrm{j}\Omega) = \left|H(\mathrm{j}\Omega)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}$$

$\left|H(\mathrm{j}\Omega)\right|$ 是幅频响应特性（amplitude frequency response）（或称幅频特性）

$\varphi(\Omega)$ 是相频响应特性（phase frequency response）（或称相频特性）

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

若已知输入为 $x(t)$，系统冲激响应为 $h(t)$

则系统的零状态响应为 $y(t)=x(t)*h(t)$

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \qquad (5.1\text{-}8)$$

系统的频域分析法

从物理学的概念来分析，如果输入信号的频谱密度函数为 $X(j\Omega)$，则输出信号的频谱密度函数 $Y(j\Omega)$ 由频率响应 $H(j\Omega)$ 对输入信号各频率分量进行加权，某些频率分量幅度增强，而另些频率分量则相对削弱或不变。

同时对相位产生各自不同的相移，因此线性系统具有频率保持性质，即信号通过线性系统不会产生新的频率分量。

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

5.1.2 频率响应特性的求解

求系统的频率响应。一般有三种方法

第一种方法根据冲激响应和频响特性的关系，对系统的冲激响应求傅里叶变换，即可得到系统的频率响应；第二种方法是利用式(5.1-8)，对微分方程两边取傅里叶变换，利用傅里叶变换的微分性质，直接求得系统的频率响应；第三种方法是利用电路模型直接求解。

例5.1-1 已知系统的微分方程为

$$2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+5x(t)$$

求频率响应 $H(j\Omega)$

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

例5.1-1 已知系统的微分方程为

$$2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+5x(t)$$

求频率响应 $H(j\Omega)$

解法一：应用2.5节的方法，先求得系统的冲激响应

$$h(t)=(1.5\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

$$H(j\Omega)=\mathscr{F}\left[h(t)\right]=\frac{1.5}{j\Omega+0.5}-\frac{1}{j\Omega+2}$$

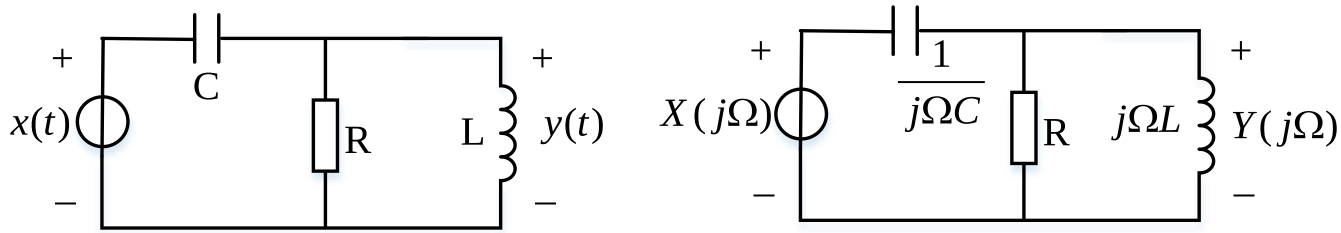
解法二：方程两边取傅里叶变换，得

$$2(j\Omega)^2Y(j\Omega)+5(j\Omega)Y(j\Omega)+2Y(j\Omega)=(j\Omega)X(j\Omega)+5X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{j\Omega+5}{2(j\Omega)^2+5(j\Omega)+2}=\frac{1.5}{j\Omega+0.5}-\frac{1}{j\Omega+2}$$

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

例5.1-2 如图所示，若电感两端电压作为系统输出，求该电路的频响特性



解： 用 $1/j\Omega C,\ j\Omega L$ 分别表示容抗与感抗

在频域分析时，将时域的电路模型用频域模型代替

写出电路各元件的频域约束关系，根据输出电压与输入电压的关系，有

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{\dfrac{j\Omega LR}{j\Omega L+R}}{\dfrac{1}{j\Omega C}+\dfrac{j\Omega LR}{j\Omega L+R}}=\frac{j\Omega LR}{j\Omega L+R-\Omega^2 RLC}$$

5.1.3 线性系统对激励信号的响应

例5.1-3 已知系统的频率响应 $H(j\Omega)=\dfrac{1}{j\Omega+1}$，输入信号 $x(t)=(1+e^{-t})u(t)$，试利用频率应求系统输出 $y(t)$

解：输入信号频谱为：$X(j\Omega)=\mathcal{F}\left[x(t)\right]=\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{j\Omega}+\dfrac{1}{j\Omega+1}$

输出信号频谱为：

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega+1}[\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}+\frac{1}{j\Omega+1}]$$

$$=\frac{1}{j\Omega+1}\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega(j\Omega+1)}+\frac{1}{(j\Omega+1)^2}$$

$$=\pi\delta(\Omega)+[\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{j\Omega+1}]+\frac{1}{(j\Omega+1)^2}$$

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)=\pi\delta(\Omega)+[\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{j\Omega+1}]+\frac{1}{(j\Omega+1)^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\pi\delta(\Omega)]=\frac{1}{2} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{j\Omega+1}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)-e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(j\Omega+1)^2}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[j\frac{d}{d\Omega}(\frac{1}{j\Omega+1})\right]=j[-jte^{-t}u(t)]=te^{-t}u(t)$$

输出信号为：

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)-e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t) \quad =[1-e^{-t}+te^{-t}]u(t)$$

傅里叶分析方法从频谱改变的角度解释输入与输出信号的变换，物理概念清楚，但求解过程相对比较烦琐

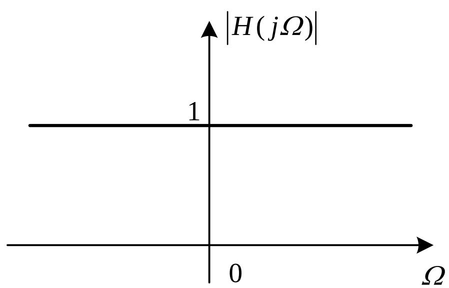
5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

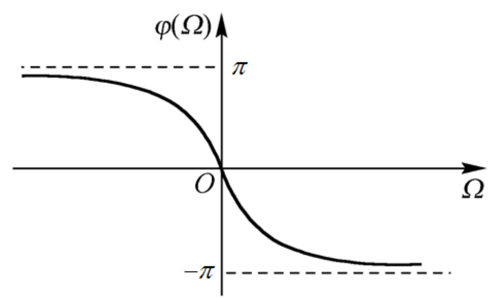
例5.1-4 已知LTI系统的频率响应为：$H(j\Omega)=\dfrac{j\Omega-1}{j\Omega+1}$，输入信号 $x(t)=\sin t+\sin 2t$，试画出 $H(j\Omega)$ 的幅频特性与相频特性，并求输出 $y(t)$

解： 幅频特性 $|H(j\Omega)|=\sqrt{\dfrac{\Omega^2+1}{\Omega^2+1}}=1$

相频特性 $\varphi(\Omega)=2\arctan(-\Omega)$

频率响应可以写成：$H(j\Omega)=e^{j2\arctan(-\Omega)}$





该系统的幅频特性为常数，对输入信号所有的频率分量都可以通过，因此称为全通系统。

5.1 线性时不变连续时间系统的频率响应特性

输入信号频谱为：

$$X(j\Omega)=F[x(t)]=\mathrm{j}\pi[\delta(\Omega+1)-\delta(\Omega-1)]+\mathrm{j}\pi[\delta(\Omega+2)-\delta(\Omega-2)]$$

输出信号频谱为

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

$$=e^{j2\arctan(-\Omega)}\{\mathrm{j}\pi[\delta(\Omega+1)-\delta(\Omega-1)]+\mathrm{j}\pi[\delta(\Omega+2)-\delta(\Omega-2)]\}$$

$$=\mathrm{j}\pi[e^{j2\arctan 1}\delta(\Omega+1)-e^{-j2\arctan 1}\delta(\Omega-1)]+\mathrm{j}\pi[e^{j2\arctan 2}\delta(\Omega+2)-e^{-j2\arctan 2}\delta(\Omega-2)]\}$$

输出信号为：

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(j\Omega)]\;=\frac{\mathrm{j}}{2}[e^{j90^o}e^{-jt}-e^{-j90^o}e^{jt}]+\frac{\mathrm{j}}{2}[e^{j126^o87'}e^{-j2t}-e^{-j126^o87'}e^{j2t}]$$

$$=\sin(t-90^o)+\sin(2t-126^o87')$$

输入信号与输出信号为同频率正弦波，虽然全通系统的幅频特性为常数，但相频特性为非线性，因而输入信号的不同频率分量对应的延迟时间不同，造成输出信号的相位失真。

5.2 信号的传输与滤波

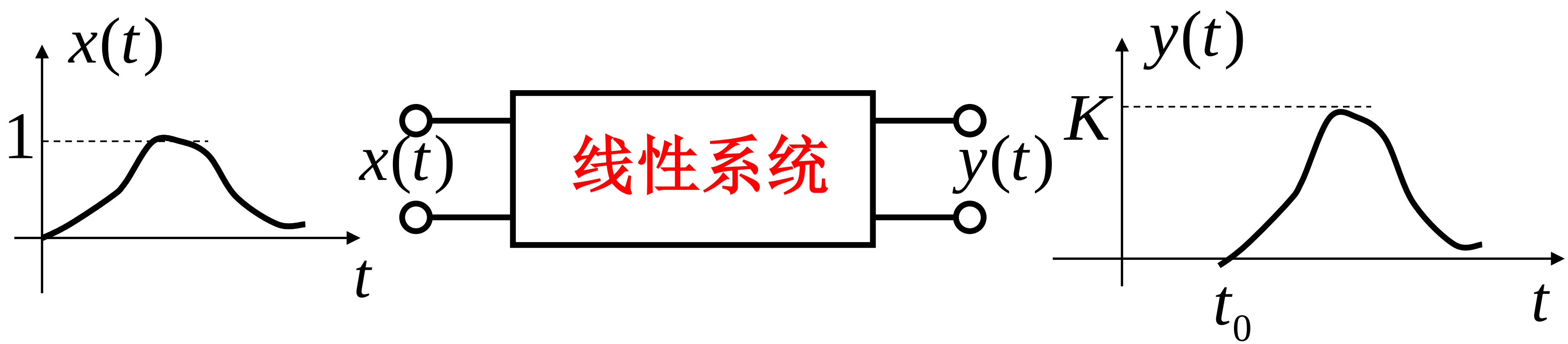
5.2.1 无失真传输

信号无失真传输是指响应信号与激励信号相比，只有幅度大小和出现时间的不同，而没有波形上的变化。

1. 时域条件

$$y(t)=Kx(t-t_0) \qquad (5.2-1)$$

其中： K ------- 常数， t_0 ------- 滞后时间



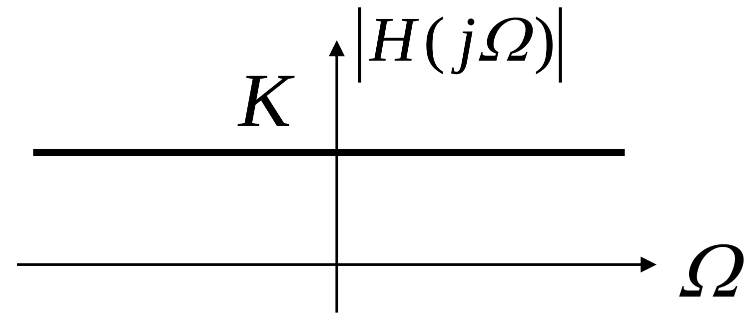
5.2.1 无失真传输

2. 频域条件

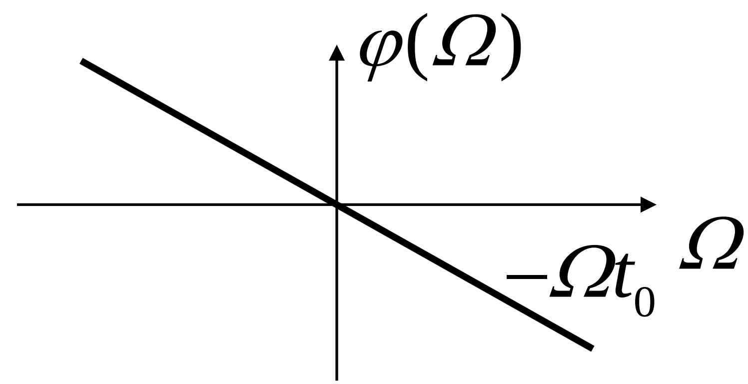
$$y(t)=Kx(t-t_0) \qquad (5.2-1)$$

对式（5.2-1）两边取傅氏变换，得：

$$Y(j\Omega)=Ke^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$$
$$=H(j\Omega)X(j\Omega)$$



$$\therefore\ H(\mathrm{j}\Omega)=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t_0} \qquad (5.2-2)$$



即

$$\begin{cases}|H(\mathrm{j}\Omega)|=K\\ \varphi(\Omega)=-\Omega t_0\end{cases} \qquad (5.2-3)$$

5.2.1 无失真传输

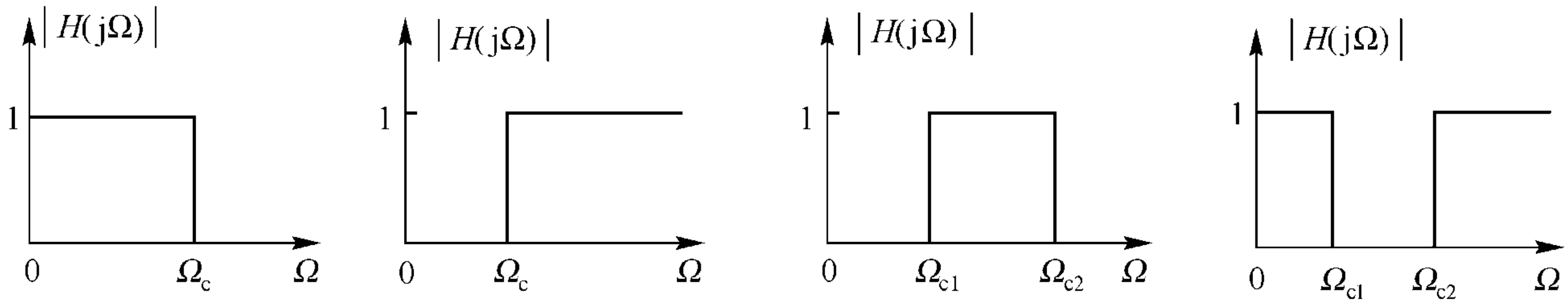
无失真传输系统应满足如下两个条件：

（1）系统的幅频特性在整个频率范围内为常数；

（2）系统的相频特性在整个频率范围内应与 Ω 成正比变化。

5.2.2 理想滤波器

理想滤波器：在通带（pass-band）内，滤波器的幅频特性为常数，相频特性呈线性；而在阻带（stop-band）内，滤波器的幅频特性立即降为零。



(a) 低通　(b) 高通　(c) 带通　(d) 带阻

5.2.2 理想滤波器

1. 理想低通滤波器

理想低通滤波器是将频率低于 Ω_c 的所有信号予以无失真地传输，而将频率高于 Ω_c 的信号完全抑制。

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\left|H(\mathrm{j}\Omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t_0} & |\Omega|<\Omega_c \\ 0 & |\Omega|>\Omega_c\end{cases} \qquad (5.2-4)$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t_0}[u(\Omega+\Omega_c)-u(\Omega-\Omega_c)]$$

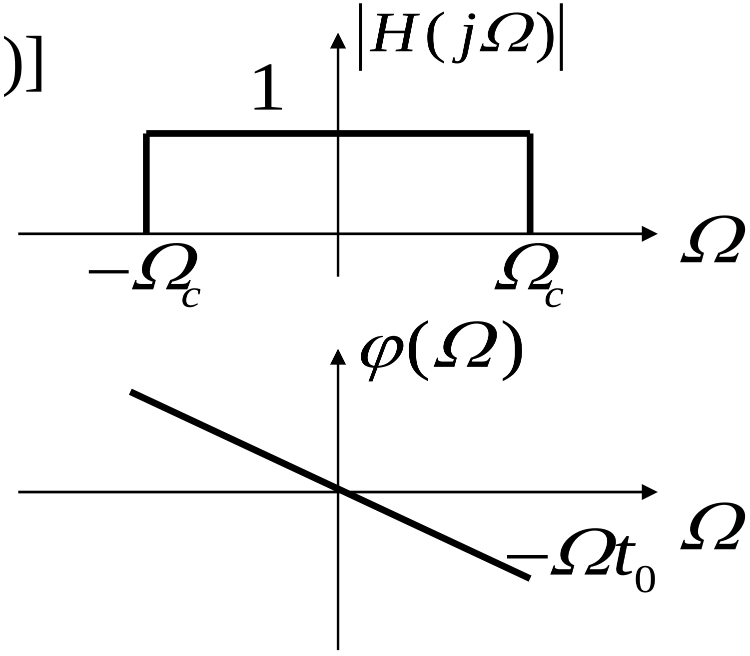
或

$$\left|H(j\Omega)\right|=\begin{cases}1 & |\Omega|<\Omega_c \\ 0 & |\Omega|>\Omega_c\end{cases}$$

$$=u(\Omega+\Omega_c)-u(\Omega-\Omega_c)$$

$$\varphi(\Omega)=-\Omega t_0$$

Ω_c --------- 截止频率



5.2.2 理想滤波器

（1） 冲激响应

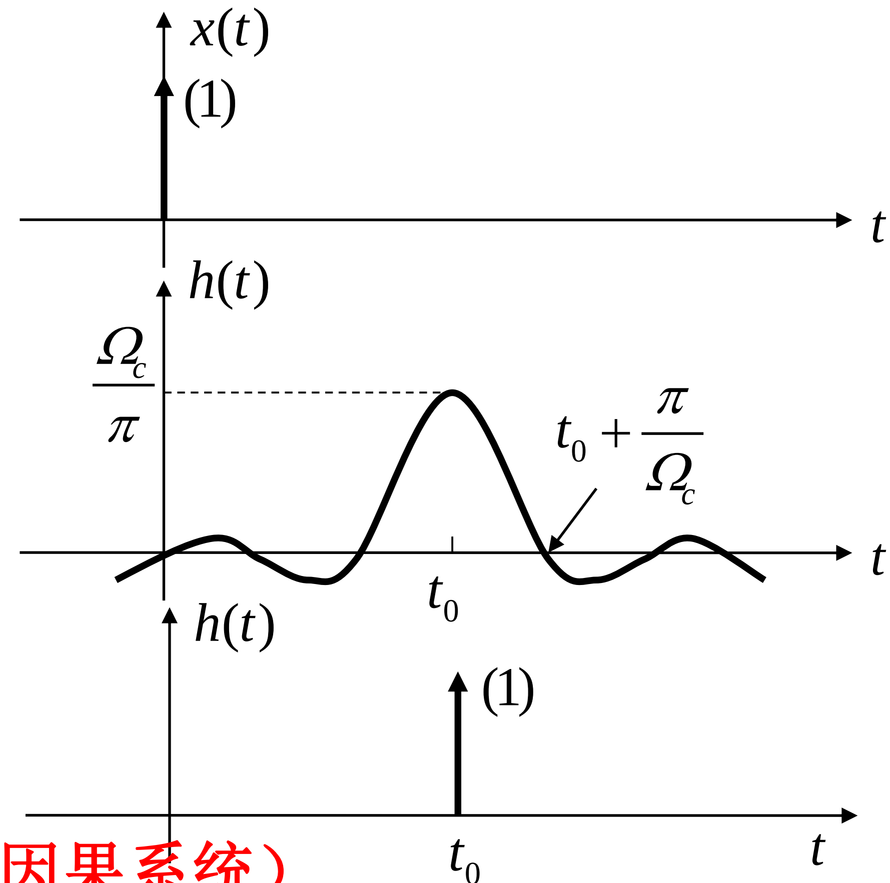
$$H(j\Omega)=|H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}=\begin{cases}e^{-j\Omega t_0} & |\Omega|<\Omega_c\\ 0 & |\Omega|>\Omega_c\end{cases}$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(j\Omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c}e^{-j\Omega t_0}e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$=\frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(t-t_0)]$$



当 $\Omega_c\to\infty$时，$h(t)=\delta(t-t_0)$

$h(t)$的特点：

响应超前于激励（非因果系统）

5.2.2 理想滤波器

（2） 阶跃响应

$$h(t)=\frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(t-t_0)]$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\frac{\Omega_c}{\pi}\int_{-\infty}^{t}\frac{\sin[\Omega_c(\tau-t_0)]}{\Omega_c(\tau-t_0)}\mathrm{d}\tau$$

令 $x=\Omega_c(\tau-t_0)$, 则

$d\tau=\frac{1}{\Omega_c}dx$, 当$\tau=-\infty$时，$x=-\infty$, 当$\tau=t$ 时，$x=\Omega_c(t-t_0)$

$$g(t)=\frac{\Omega_c}{\pi}\int_{-\infty}^{\Omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\Omega_c}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx$$

5.2.2 理想滤波器

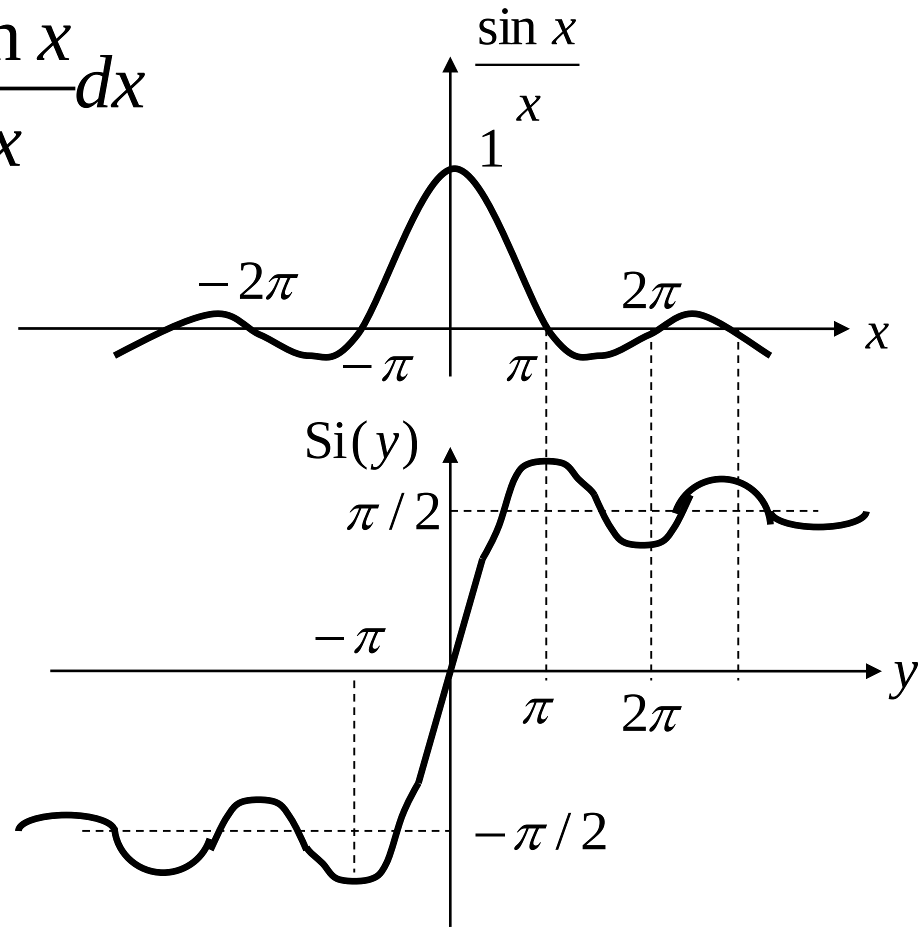
$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\Omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}dx=\mathrm{Si}(y)$$

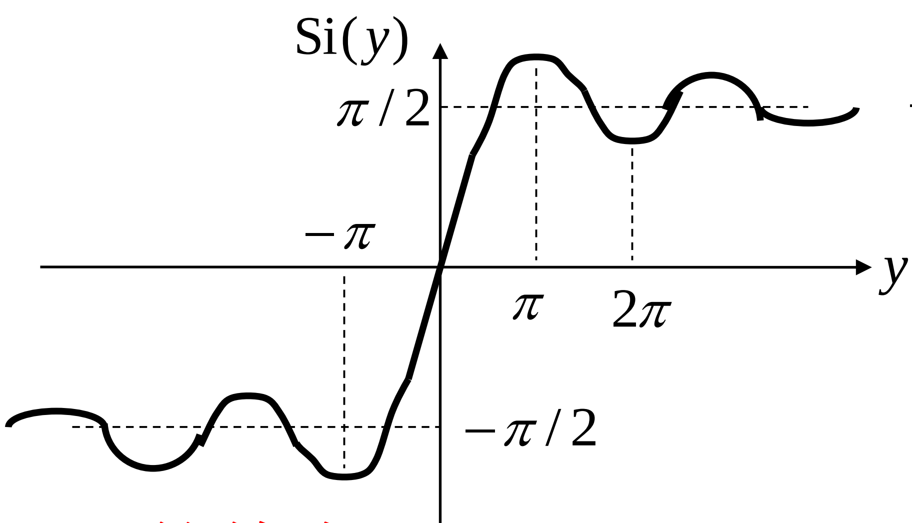
--------- 正弦积分

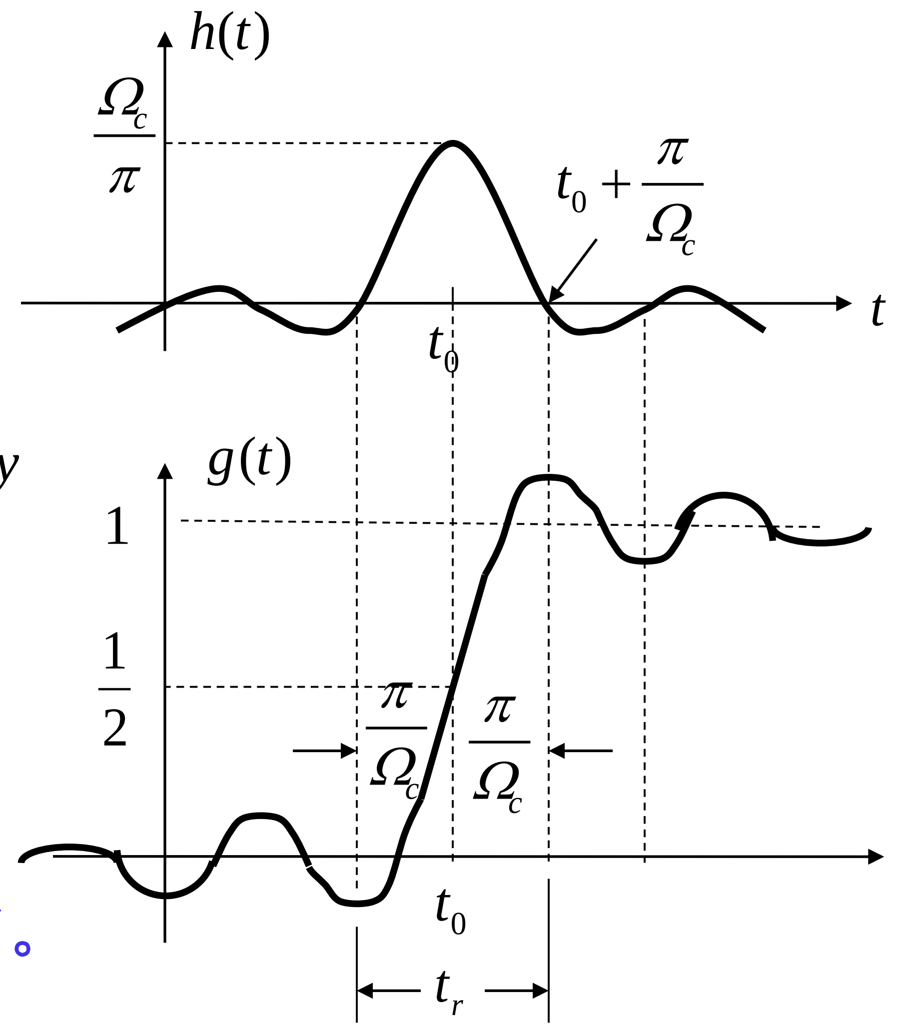
$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\Omega_c(t-t_0)]$$



5.2.2 理想滤波器

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\Omega_c(t-t_0)]$$



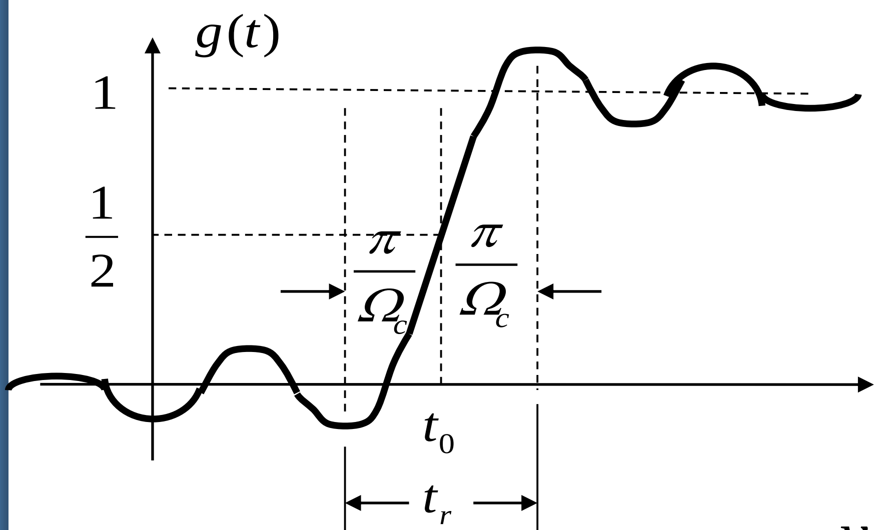


g(t)的特点：

1） 响应波形的前沿是倾斜的，响应信号的建立需要一段时间。

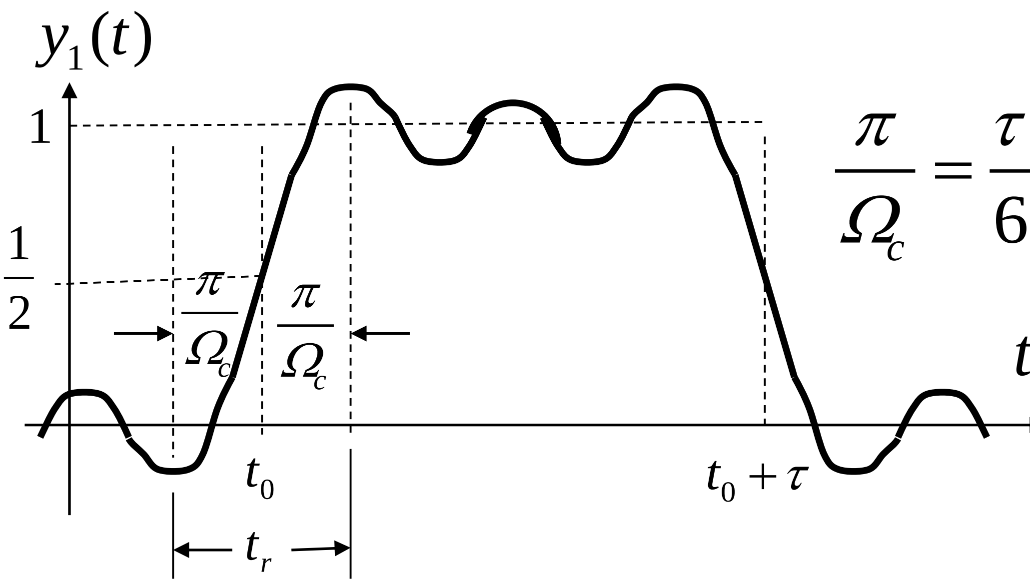
$$t_r=\frac{2\pi}{\Omega_c}=\frac{1}{f_c}=\frac{1}{B}$$ ----阶跃响应的建立（上升）时间

5.2.2 理想滤波器



$$x_1(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\Omega_c(t-t_0)]$$

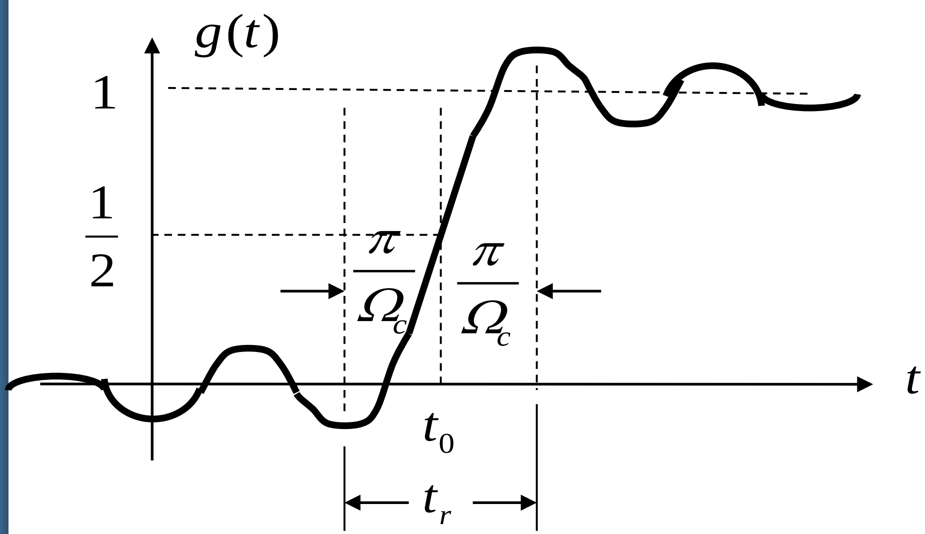


$$\frac{\pi}{\Omega_c}=\frac{\tau}{6}$$

理想低通滤波器阶跃响应的建立（上升）时间与滤波器的截止频率成反比。

$$y_1(t)=\{\mathrm{Si}[\Omega_c(t-t_0)]-\mathrm{Si}[\Omega_c(t-t_0-\tau)]\}/\pi$$

5.2.2 理想滤波器



2）响应与激励相比有波纹。

最大波峰的高度约为跳变值的**8.95%**左右（波峰值为**1.0895**),它与Ω_c无关。

-------- 吉伯斯现象

阶跃响应***g*(*t*)**的第一个极大值发生在 $t=t_0+\pi/\Omega_c$ 处，将它代入到式**(5.2-8)**中，得到阶跃响应的极大值

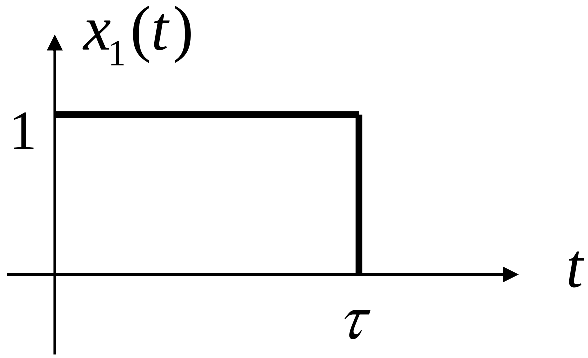
$$g_{\max}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\Omega_c(t-t_0)\right]\Big|_{t=t_0+\pi/\Omega_c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\pi)\approx 1.0895$$

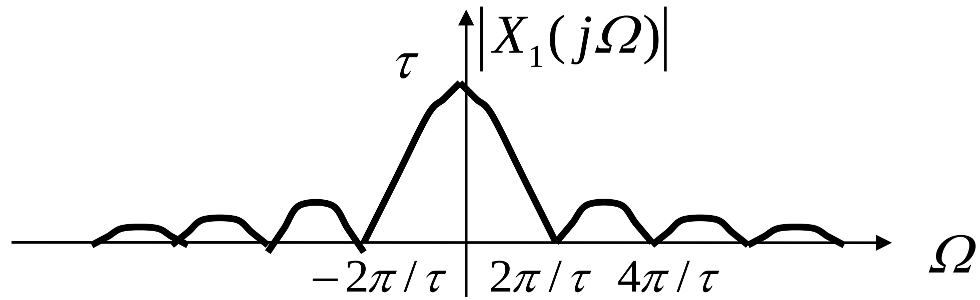
5.2.2 理想滤波器

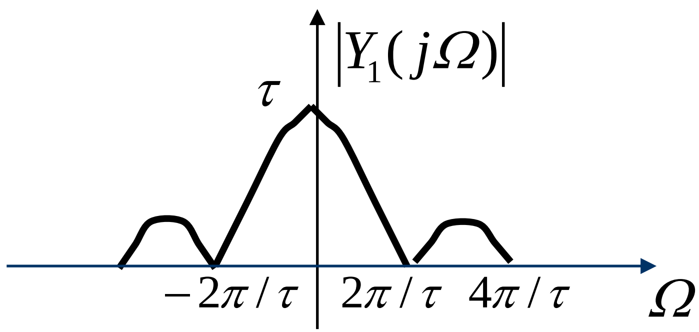
在下述情况下，会产生**吉伯斯现象：**

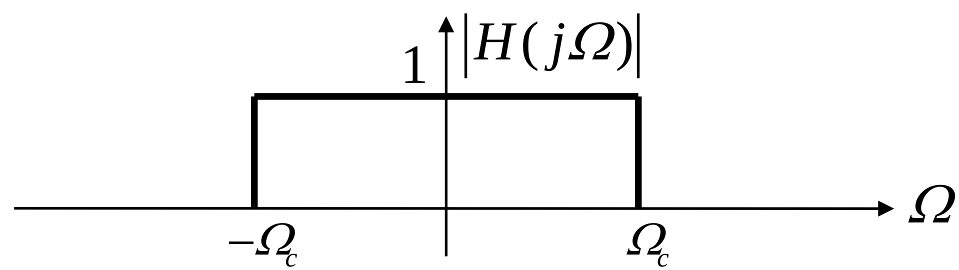
（1）激励有跳变；

（2）系统的带宽为有限值。



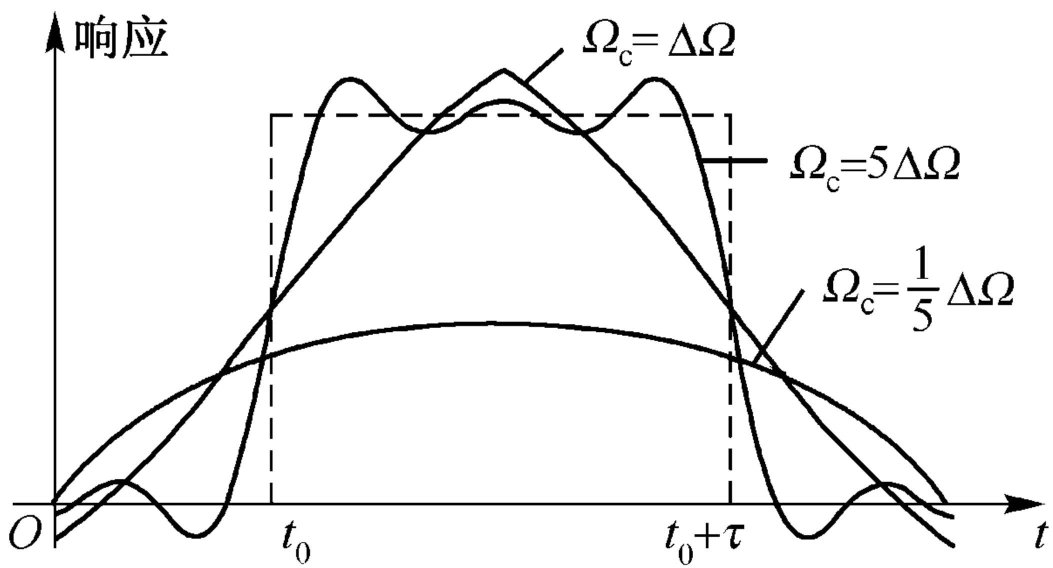






5.2.2 理想滤波器

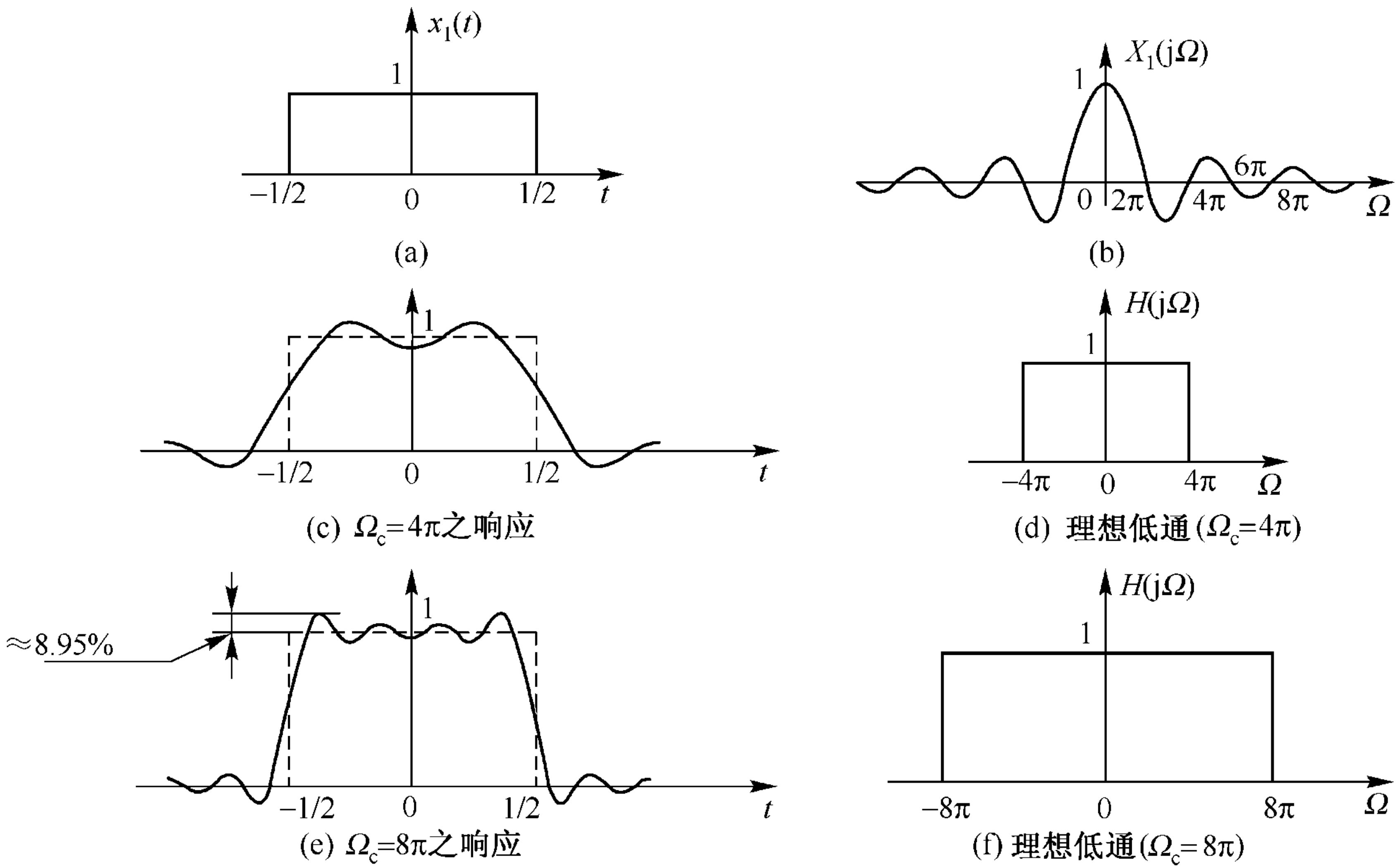
3） 矩形脉冲响应除了比矩形脉冲输入延迟一段时间 t_0外，矩形脉冲响应的波形也不再是矩形脉冲，即产生了失真。失真的程度既与理想低通滤波器的频带宽度有关，也与矩形脉冲的频带宽度或脉冲宽度有关。



$\Delta\Omega$ 为矩形脉冲的频带宽度

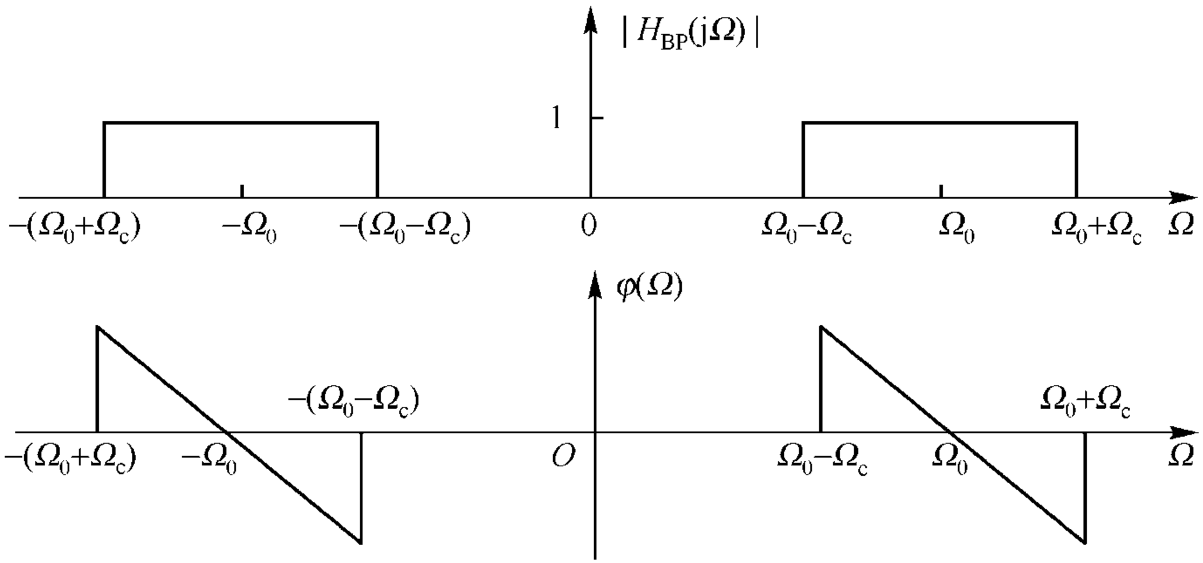
5.2.2 理想滤波器

4）不同Ω_c的理想低通滤波器对矩形脉冲的响应



5.2.2 理想滤波器

2. 理想带通滤波器



$$H_{LP}(j\Omega)=\begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega|<\Omega_c \\ 0 & |\Omega|>\Omega_c \end{cases}$$

$$H_{BP}(j\Omega)=H_{LP}(j\Omega)*\left[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)\right]$$

5.2.2 理想滤波器

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[H_{\mathrm{BP}}(\mathrm{j}\varOmega)\right]=2\pi\mathcal{F}^{-1}\left[H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{j}\varOmega)\right]\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\varOmega+\varOmega_0)+\delta(\varOmega-\varOmega_0)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{j}\varOmega)\right]=\frac{\varOmega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\varOmega_{\mathrm{c}}(t-t_0)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(\varOmega+\varOmega_0)+\delta(\varOmega-\varOmega_0)\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varOmega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varOmega_0 t}\right]=\frac{1}{\pi}\cos\varOmega_0 t$$

$$h(t)=2\pi\cdot\frac{\varOmega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\varOmega_{\mathrm{c}}(t-t_0)\right]\cdot\frac{1}{\pi}\cos\varOmega_0 t=\frac{2\varOmega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}\left[\varOmega_{\mathrm{c}}(t-t_0)\right]\cos\varOmega_0 t$$

这是以等效低通滤波器的冲激响应为包络的正弦调幅信号。

Nyquist (1889-1976)
物理学家（美国）

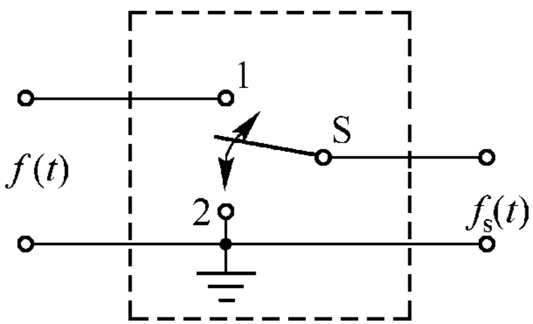
成就：
《电报传输理论的一定论题》，
《影响电报速度传输速度的因素》

奈奎斯特，美国物理学家。
1889年出生在瑞典韦姆兰省。
1912年考入美国北达科他州立大学。
1914年获得理学学士学位。
1915年获得理学硕士学位。
1917年获得耶鲁大学哲学博士学位。
1917-1934年间在AT&T公司工作。
1934-1954年间在贝尔实验室工作。

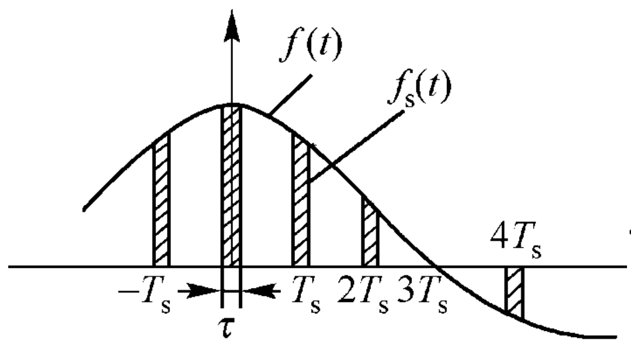
5.3 信号的采样

5.3.1 信号采样的概念

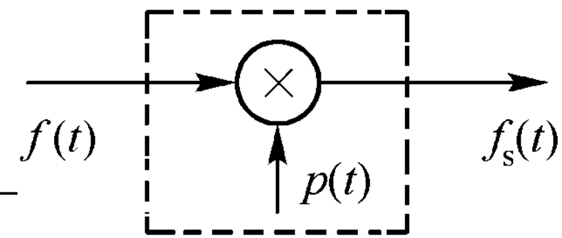
所谓“采样”就是利用采样脉冲序列$p(t)$从连续信号$f(t)$中“采样”一系列的离散样值，这种离散信号通常称为“采样信号”。



(a)



(b)



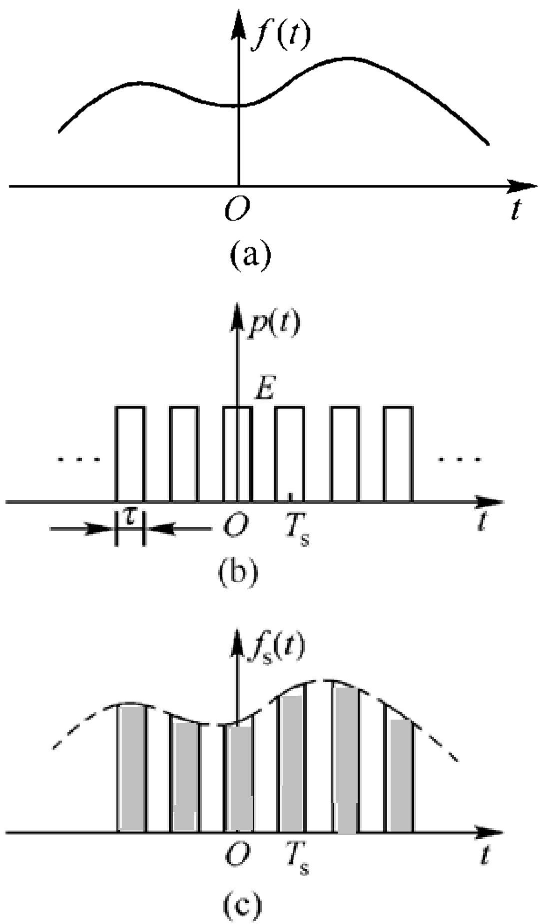
采样后信号$f_s(t)$，可以看成是原信号 $f(t)$和一采样脉冲序列$p(t)$的乘积。

$$f_s(t) = f(t)p(t) \qquad (5.3-1)$$

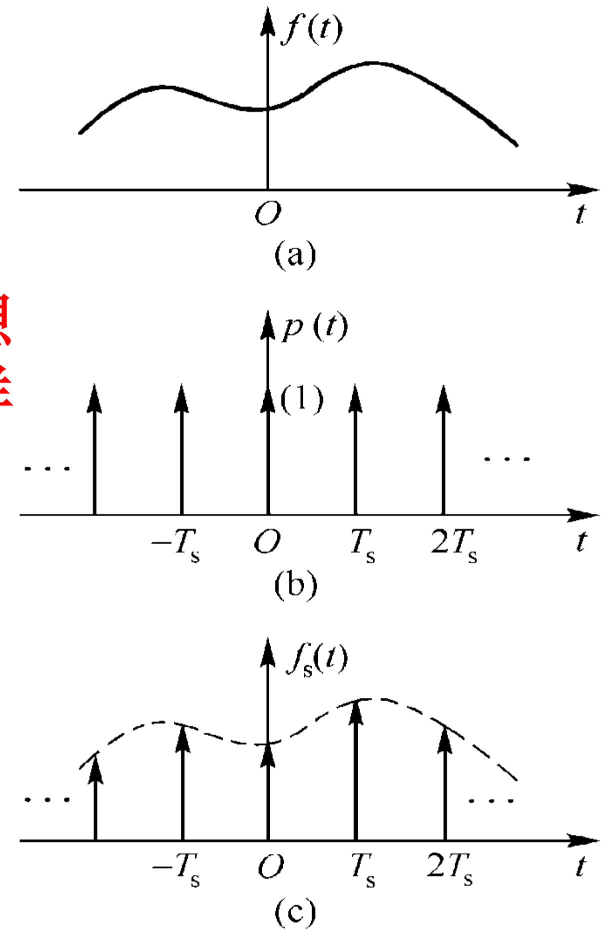
5.3.1 信号采样的概念

当采样脉冲是周期矩形序列，将这种采样称为矩形脉冲采样或称为自然采样。当采样脉冲是单位冲激序列，这种采样称为冲激采样或理想采样。

自然采样



理想采样



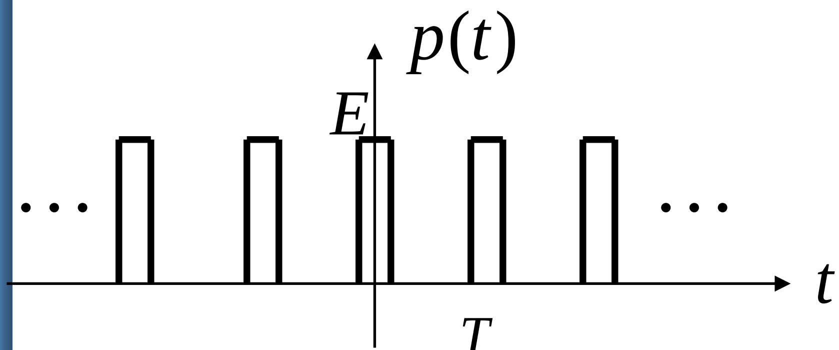
5.3.1 信号采样的概念

令连续信号**f(t)**的傅里叶变换为$F(j\Omega)$

采样脉冲**p(t)**的傅里叶变换为 $P(j\Omega)$

采样后信号**$f_s(t)$**的傅里叶变换为$F_s(j\Omega)$

$$\Omega_s(=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T_s})$$



$$f_s(t)=f(t)\cdot p(t)$$

$$P(j\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

其中：$P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}p(t)e^{-jn\Omega_s t}dt$

$$F_s(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\Omega)*P(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\Omega)*2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

所以，$\boxed{F_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F[j(\Omega-n\Omega_s)] \qquad (5.3-4)}$

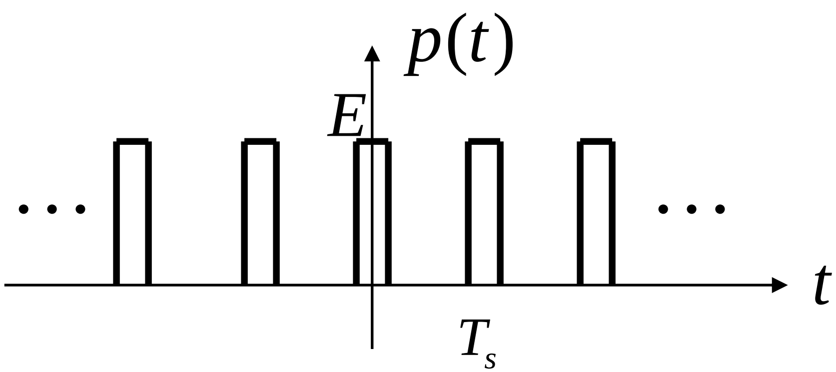
5.3.1 信号采样的概念

（1）矩形脉冲采样

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)e^{-jn\Omega_s t}dt$$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-jn\Omega_s t}dt$$

$$= \frac{E\tau}{T_s}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega_s\tau}{2})$$

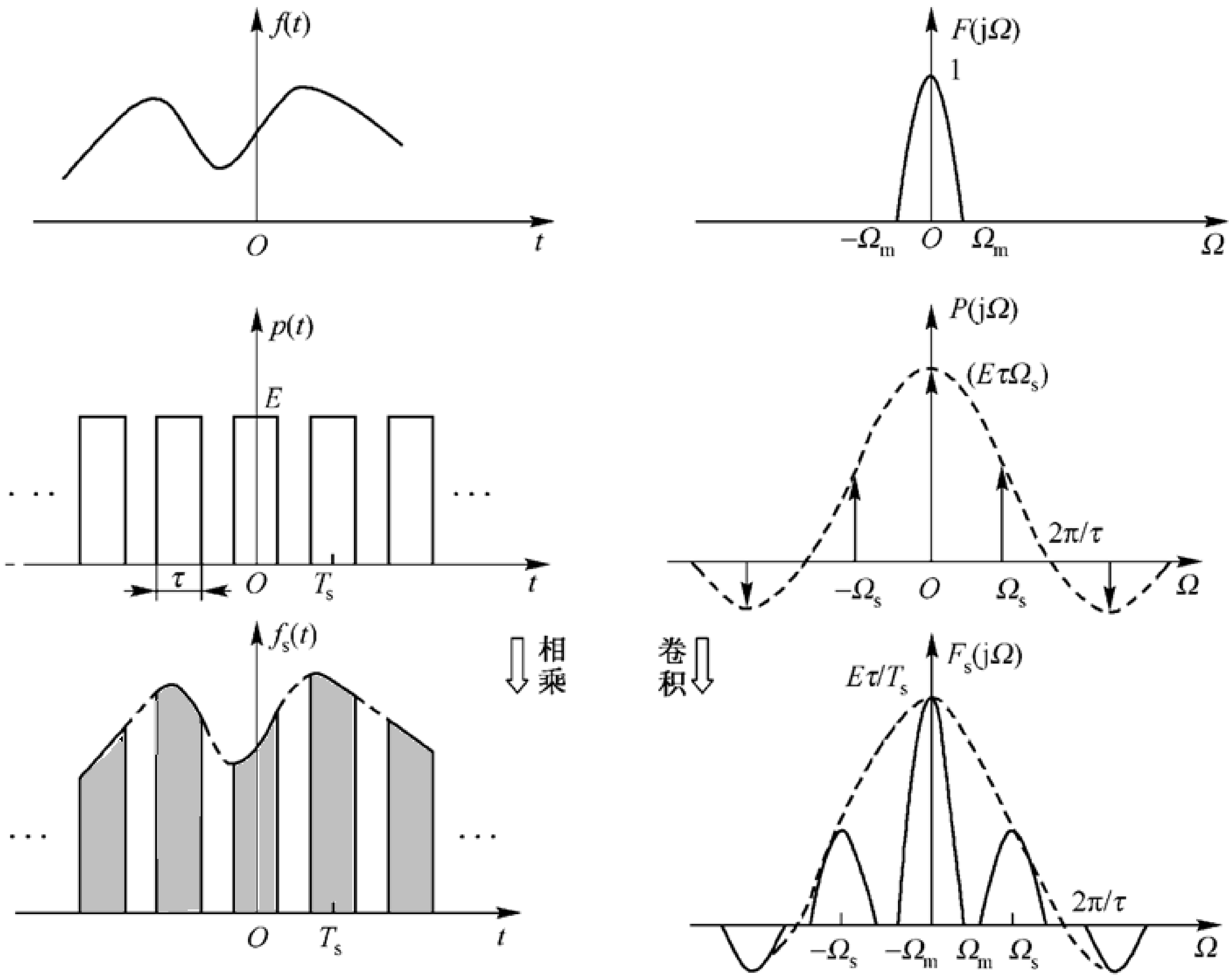


$$F_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[j(\Omega - n\Omega_s)]$$

$$F_s(j\Omega) = \frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega_s\tau}{2})F[j(\Omega - n\Omega_s)] \qquad (5.3-6)$$

$F_s(j\Omega)$ 是将 **$F(j\Omega)$** 在以 Ω_s 为周期的重复过程中幅度以 $\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega_s\tau}{2})$ 的规律变化。

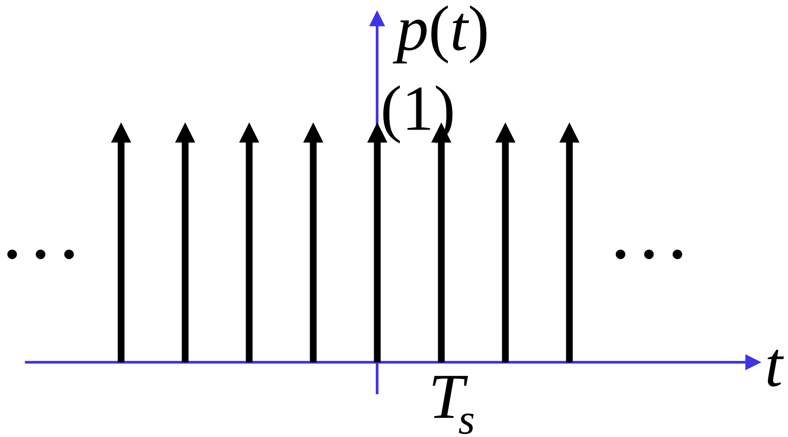
5.3.1 信号采样的概念



f(t)
O
t
F(jΩ)
1
−Ωm
O
Ωm
Ω
p(t)
E
τ
O
Ts
t
P(jΩ)
(EτΩs)
2π/τ
−Ωs
O
Ωs
Ω
fs(t)
O
Ts
t
相乘
卷积
Fs(jΩ)
Eτ/Ts
2π/τ
−Ωs
−Ωm
Ωm
Ωs
Ω

（2）冲激采样

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$



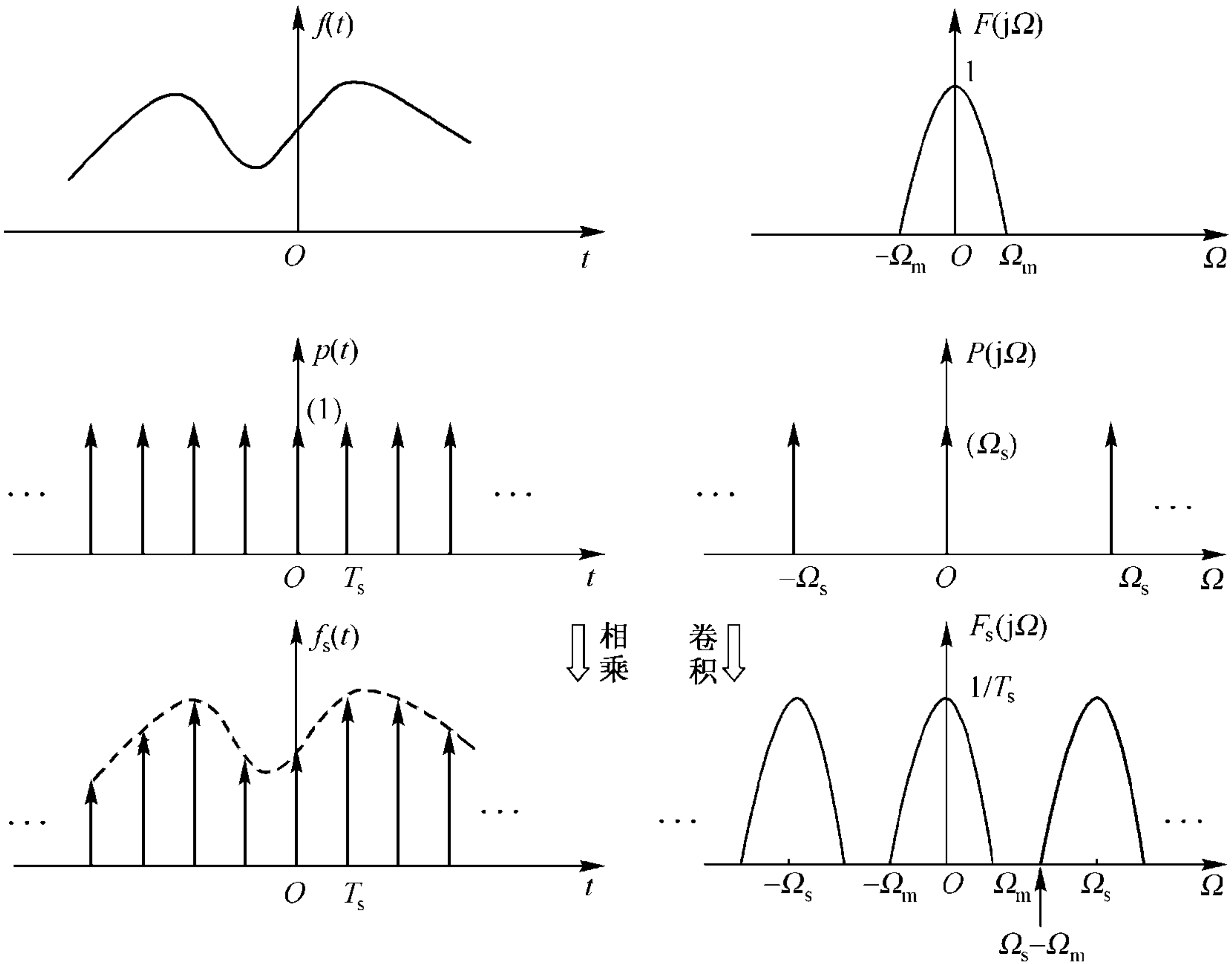
$$P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\Omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F[j(\Omega-n\Omega_s)]$$

$$\boxed{F_s(j\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[j(\Omega-n\Omega_s)]\qquad(5.3-8)}$$

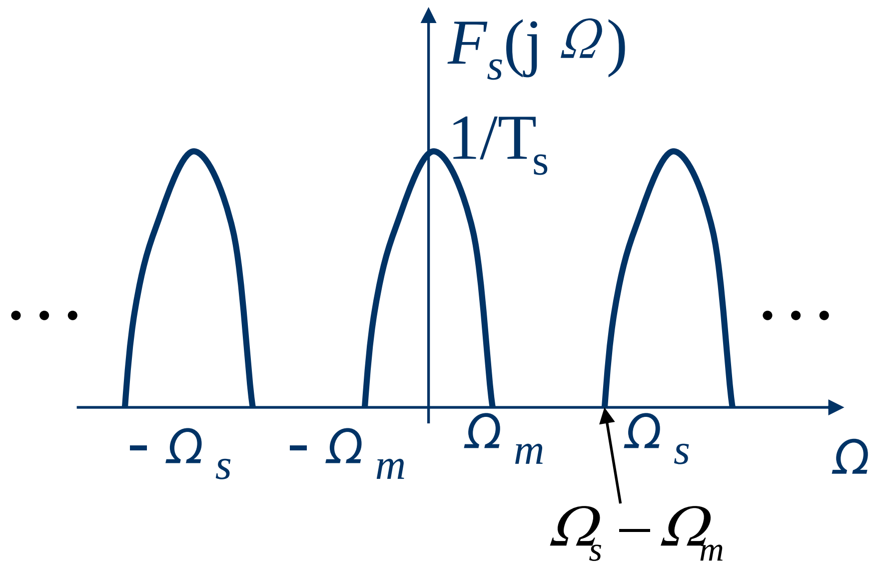
由于冲激序列的傅里叶系数P_n为常数，所以$F(j\Omega)$是以Ω_s为周期等幅地重复。

5.3.2 采样信号的傅里叶变换



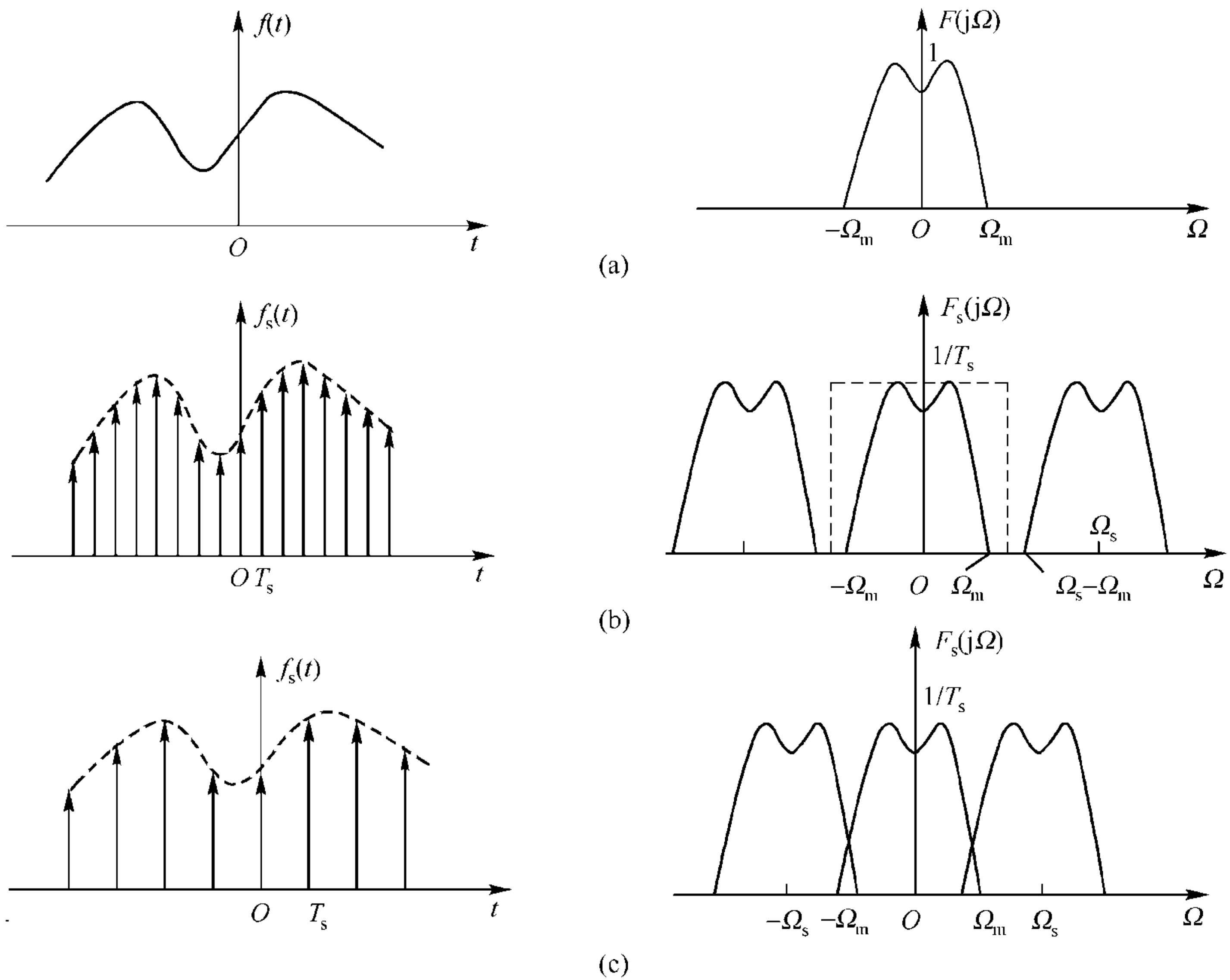
5.3.3 时域采样定理

用采样脉冲对连续信号进行采样，采样周期取多大合适呢？并且如何从采样信号中恢复原连续信号？



从上图可知：只有满足$\Omega_s > 2\Omega_m$，$F_s(j\Omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。这时只要将 $f_s(t)$施加于“**理想低通滤波器**”，就可恢复原信号$f(t)$ 。

5.3.3 时域采样定理



当 $\Omega_s < 2\Omega_m$ 时，$F_s(j\Omega)$ 将产生混叠

5.3.3 时域采样定理

时域采样定理：一个频谱受限的信号 $f(t)$，如果频谱只占据 $-\Omega_m \sim \Omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的采样值来唯一地表示。而采样间隔必须小于 $1/(2f_m)$ (其中 $\Omega_m=2\pi f_m$)，或者说，最低采样频率为 $2f_m$。

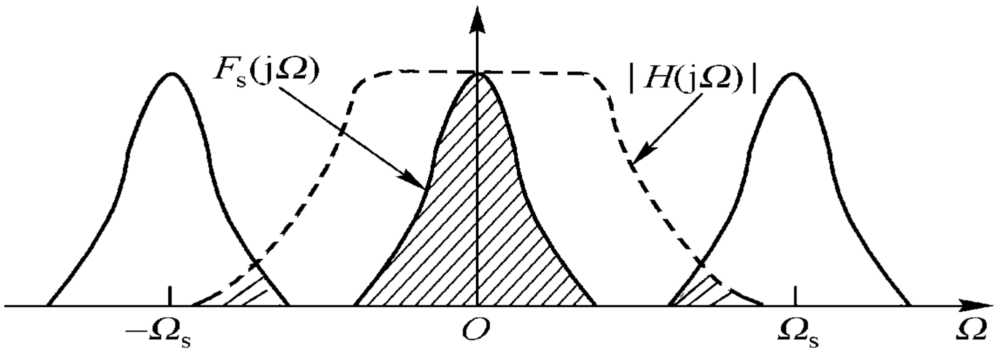
通常把最低允许的采样率称为奈奎斯特采样率，把最大允许的采样间隔称为奈奎斯特间隔。即

$$\Omega_{s\min} = 2\Omega_m \quad \text{或：} \quad f_{s\min} = 2f_m$$

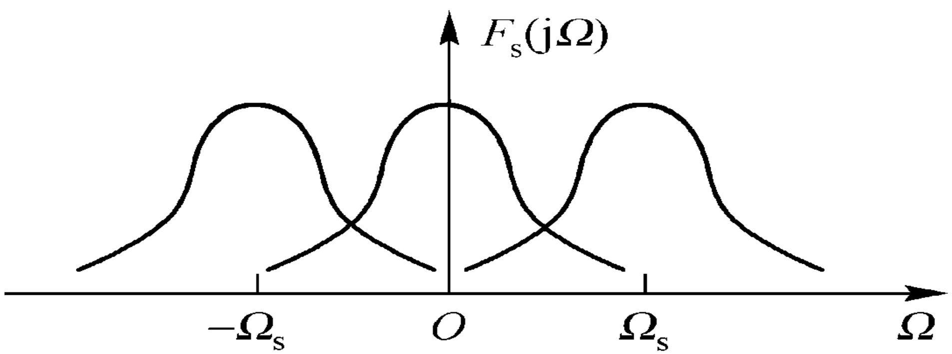
$$T_{s\max} = \frac{1}{f_{s\min}} = \frac{1}{2f_m}$$

5.3.3 时域采样定理

实际上，理想低通滤波器是不可能实现的。另一方面，实际被传输的信号，一般不是频带受限信号。工程中，采样频率一般取最高频率的**3~5倍**。



采样信号通过实际低通滤波器



非频谱受限信号采样后频谱的混叠现象

连续信号采样率的选择，影响雷达系统对目标跟踪的性能，采样率高数据量大，速度下降；采样率低易混叠，精度下降，选择合适的采样率，要求设计者**尊重科学规律，发扬精益求精地现代工匠精神。**

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

为了从频谱 $F_s(\mathrm{j}\Omega)$ 中无失真地选出 $F(\mathrm{j}\Omega)$ ，可以将采样信号通过一理想低通滤波器，其频率特性为

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases}T_s, & |\Omega|<\Omega_c \\ 0, & |\Omega|>\Omega_c\end{cases}$$

其中 $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$

从频域角度讲，滤波器输出端的频谱 $F(\mathrm{j}\Omega)$ 就是 $H(\mathrm{j}\Omega)$ 与 $F_s(\mathrm{j}\Omega)$ 相乘。

$$F(\mathrm{j}\Omega)=H(\mathrm{j}\Omega)F_s(\mathrm{j}\Omega)$$

滤波器的输出端可以得到频谱为 $F(\mathrm{j}\Omega)$ 的连续信号 $f(t)$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

下面再从时域角度来看如何由采样信号 $f_s(t)$ 恢复 $f(t)$

$$f(t) = h(t) * f_s(t)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\Omega)]$$

$$h(t) = \frac{T_s\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\Omega_c t)$$

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

$$f(t)=h(t)*f_s(t)=\frac{T_s\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\Omega_c t)*\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]$$

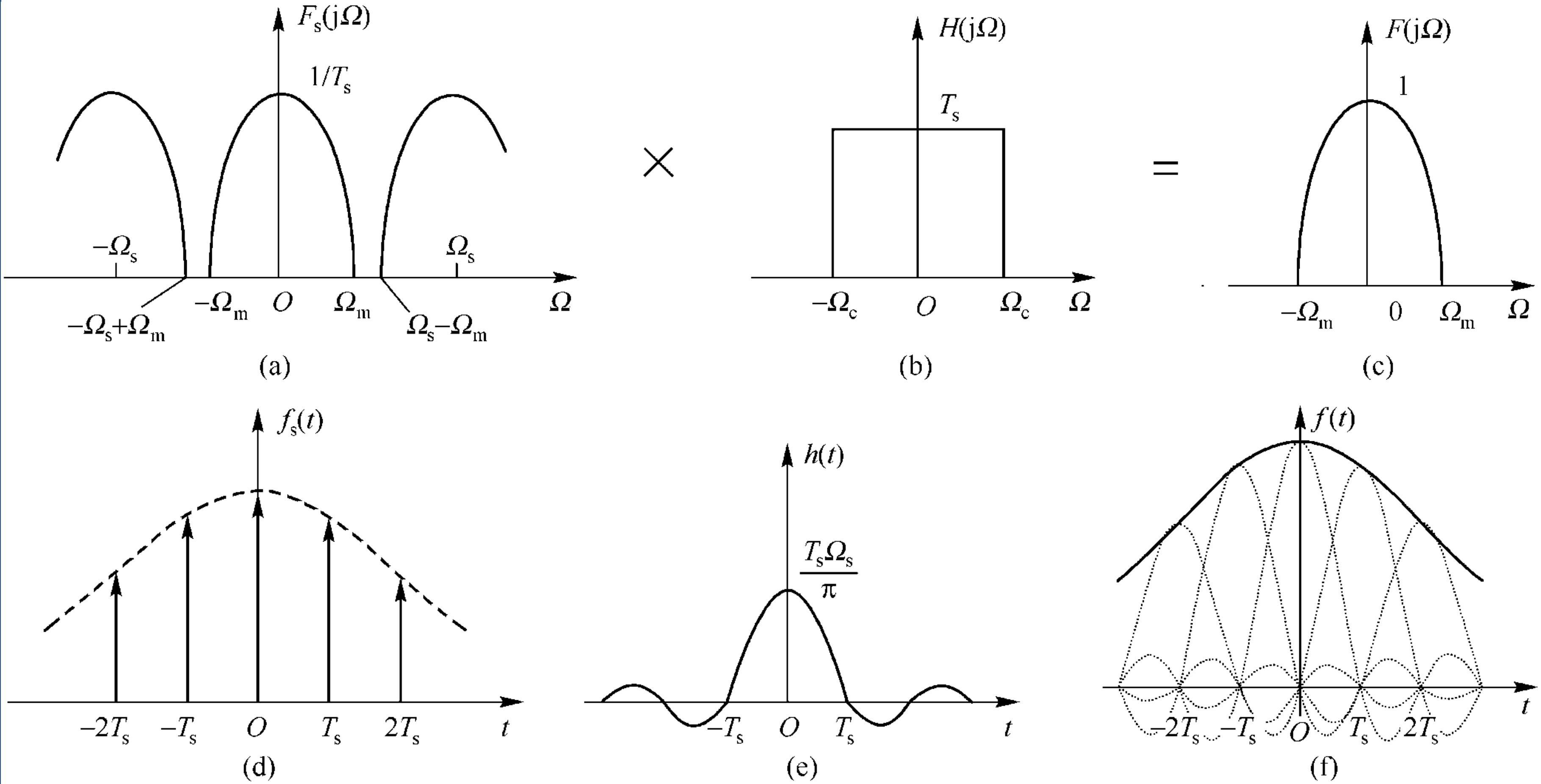
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T_s\Omega_c}{\pi}f(nT_s)\mathrm{Sa}\left[\Omega_c(t-nT_s)\right]$$

若取 $\Omega_s=2\Omega_m$，$\Omega_c=\Omega_m$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\Omega_m(t-nT_s)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}(\Omega_m t-n\pi)$$

上式说明，连续信号 ***f*(*t*)** 可以展开成正交抽样函数（**Sa**函数）的无穷级数，级数的系数等于采样值 $f(nT_s)$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号



5.3.4 从采样信号恢复连续信号

例5.3-1： 已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行采样，

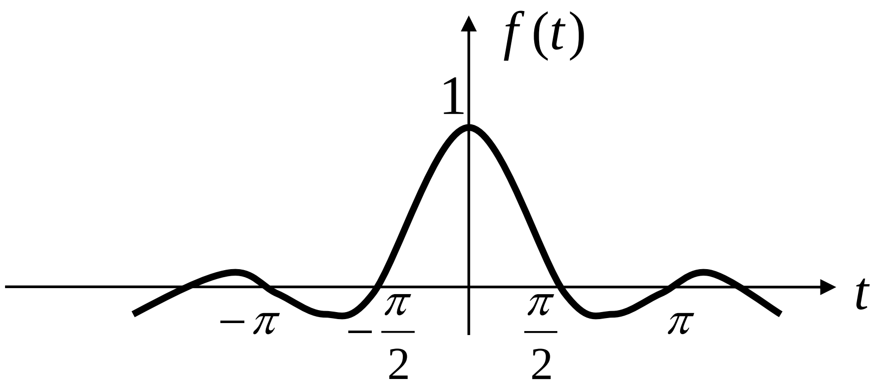
（1）确定奈奎斯特采样率；

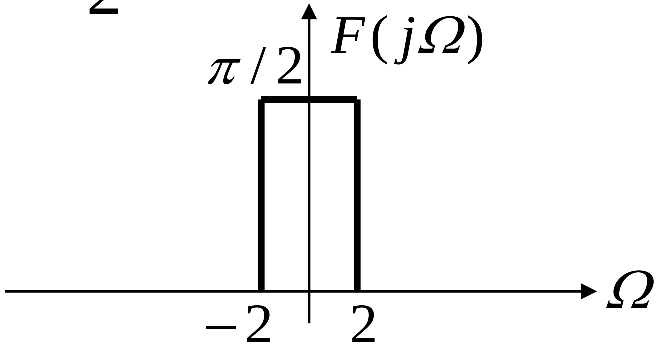
（2）若取 $\Omega_s=6\Omega_m$，求采样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$，并画出波形图；

（3）求 $F_s(j\Omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 Ω_c。

解:（1）$\because\ f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ $\quad\therefore F(j\Omega)=\dfrac{\pi}{2}[u(\Omega+2)-u(\Omega-2)]$

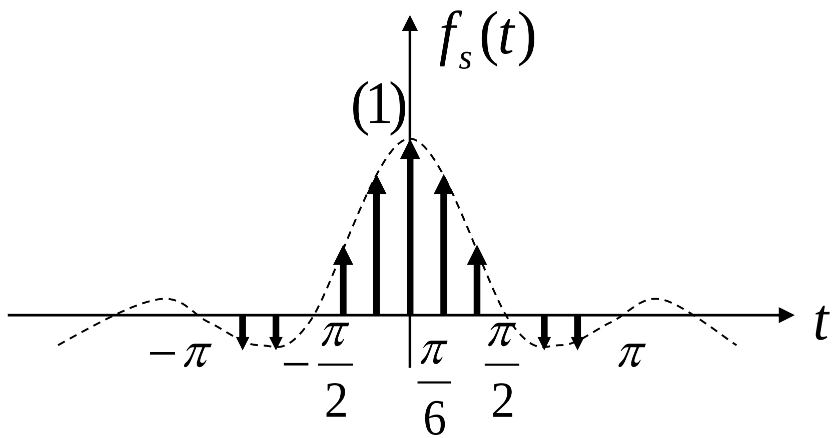




奈奎斯特采样率为: $\Omega_{s\min}=2\Omega_m=2\times2=4\ \ \mathrm{rad/s}$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

（2）$\because \Omega_s = 6\Omega_m = 12\ \text{rad/s}\quad \therefore T_s = \dfrac{2\pi}{\Omega_s} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}\ \text{s}$



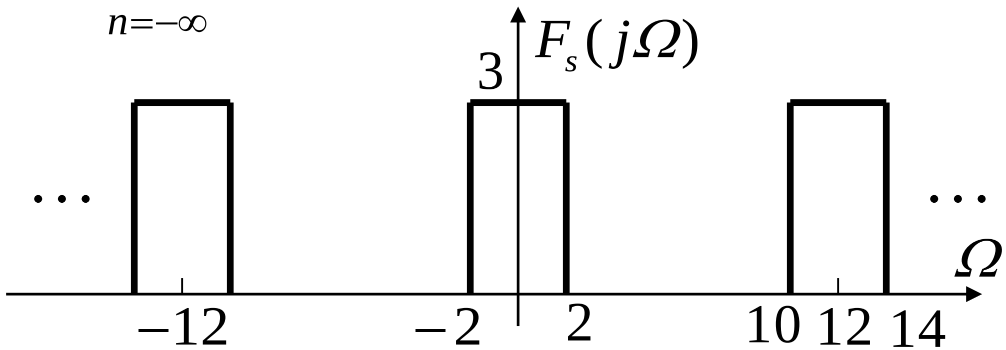
$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\delta\left(t - \frac{n\pi}{6}\right)$$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

(3) $$F_s(j\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[j(\Omega-n\Omega_s)]=\frac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[j(\Omega-12n)]$$

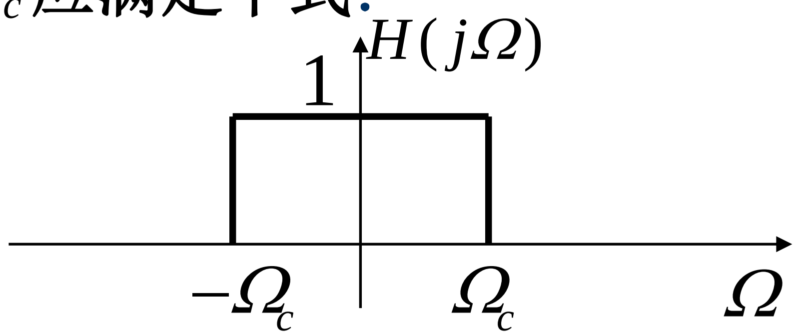
$$=3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\Omega+2-12n)-u(\Omega-2-12n)]$$



(4) 低通滤波器的截止频率Ω_c应满足下式:

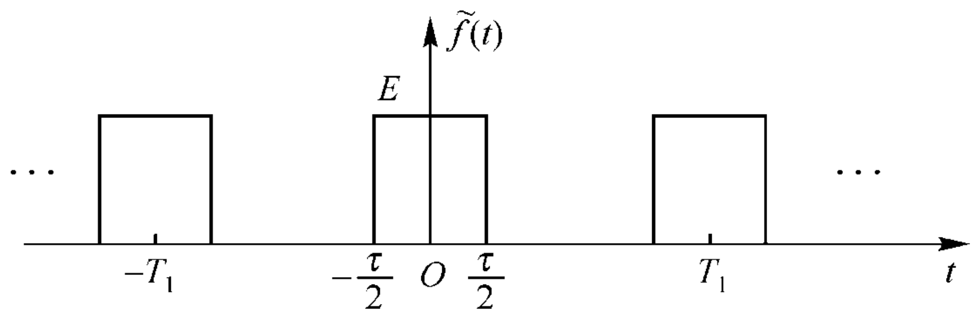
$$\Omega_m\le\Omega_c\le\Omega_s-\Omega_m$$

即 $$2\le\Omega_c\le10$$



5.3.4 从采样信号恢复连续信号

例5.3-2： 大致画出下图所示周期矩形信号$\tilde{f}(t)$冲激采样后信号的频谱。若$\tilde{f}(t)$被间隔为T_s的冲激序列所取样，令采样后的信号为$\tilde{f}_s(t)$，求其傅里叶变换。

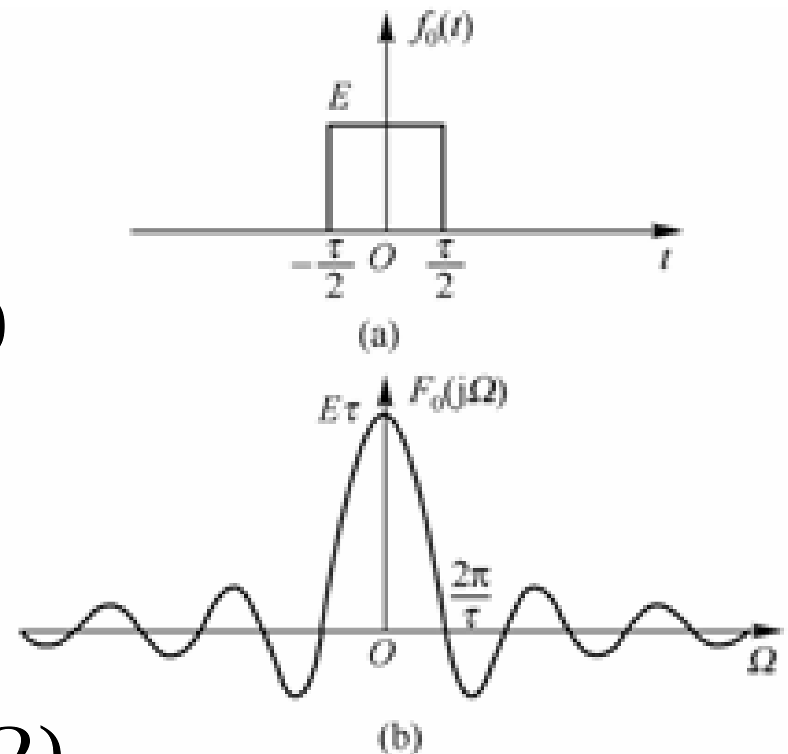


解： 首先求出对应于$\tilde{f}(t)$的单脉冲信号$f_0(t)$的傅氏变换

$$F_0(\mathrm{j}\Omega) = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

5.3.4 从采样信号恢复连续信号

$$F_0(\mathrm{j}\Omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$



若$f_0(t)$ 以T_1为周期重复，构成 $\tilde{f}(t)$

$$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t-nT_1)$$

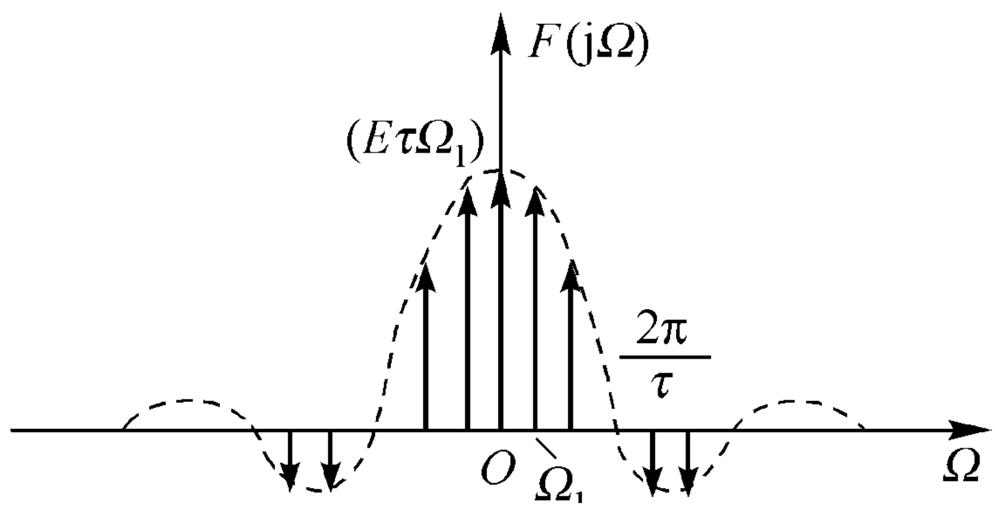
$$F(j\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\Omega-n\Omega_1)$$

其中：

$$F_n=\frac{F_0(j\Omega)}{T_1}\bigg|_{\Omega=n\Omega_1}=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$$

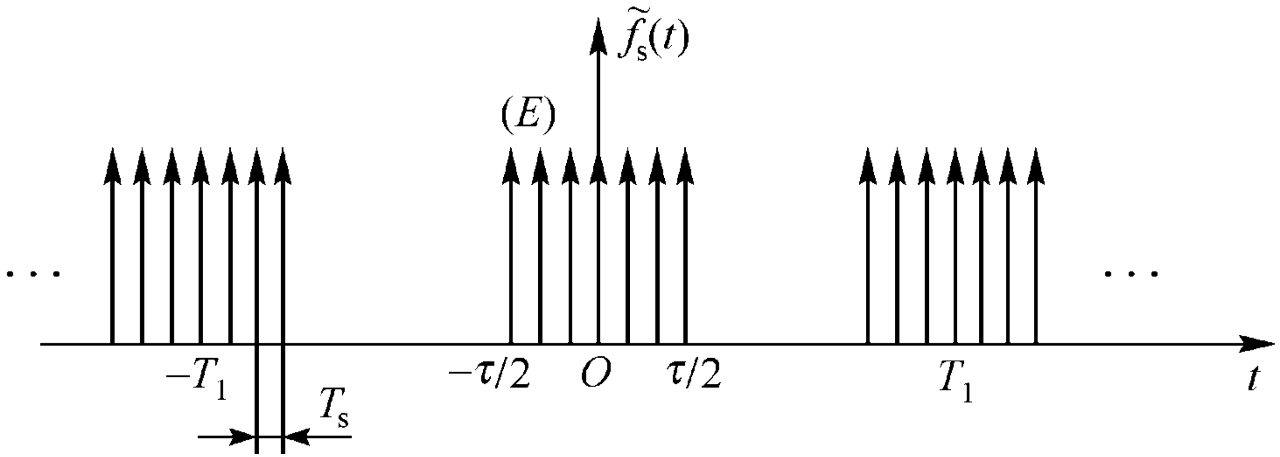
5.3.4 从采样信号恢复连续信号

所以 $$F(j\Omega)=\Omega_1 E\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)\delta(\Omega-n\Omega_1)$$



5.3.4 从采样信号恢复连续信号

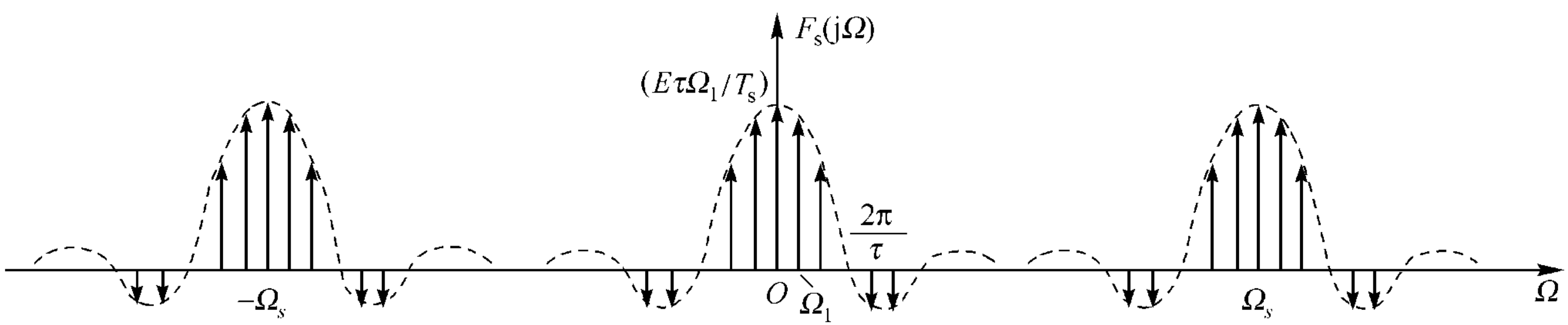
若 $\tilde{f}(t)$ 被间隔为 T_s 的冲激序列所采样，便构成了周期矩形采样信号



5.3.4 从采样信号恢复连续信号

$$F_s(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F\left[\mathrm{j}(\Omega-m\Omega_s)\right]$$

$$=\frac{E\tau\Omega_1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)\delta(\Omega-m\Omega_s-n\Omega_1)$$



5.4 调制与解调

5.4.1 调制的概念及调制的分类

1. 调制的目的

（1）便于信号的辐射

（2）便于多路通信

2. 调制的分类

（1）按调制信号$g(t)$的不同进行分类

a）模拟调制：$g(t)$为模拟信号。典型波形为单频正弦波。

b）数字调制：$g(t)$为数字信号。典型代表为二进制数字脉冲序列。

（2）按载波信号$c(t)$的不同进行分类

a）连续波调制：$c(t)$为连续波形。典型代表为正弦波。

b）脉冲调制：$c(t)$为脉冲波形。典型代表为矩形脉冲序列。

5.4.1 调制的概念及调制的分类

（3）按调制器的功能不同进行分类

a）幅度调制（调幅）： $g(t)$改变$c(t)$的幅度参数（即：载波$c(t)$的幅度随$g(t)$成比例地变化）。如：常规调幅（AM)、脉冲调幅(PAM)、抑制载波调幅(SC-AM)等。

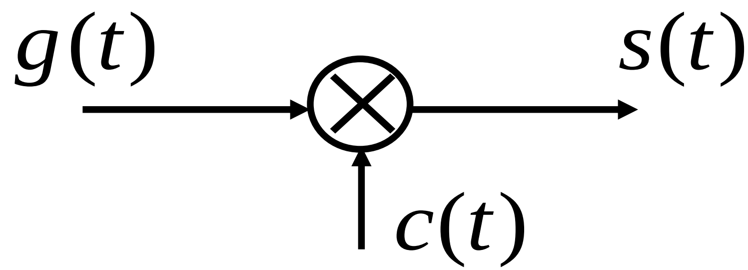
b）频率调制（调频）： $g(t)$改变$c(t)$的频率参数（即：载波$c(t)$的频率随$g(t)$成比例地变化）。如：调频（FM)、脉冲调频(PFM)等。

c）相位调制（调相）： $g(t)$改变$c(t)$的相位参数（即：载波$c(t)$的相位随$g(t)$成比例地变化）。如：调相（PM)、脉冲调相(PPM)等。

调频与调相都表现为总相角受到调制，所以总称为角度调制（调角）。幅度调制为线性调制，角度调制为非线性调制。

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

调幅的一般模型



$g(t)$ -------- 调制信号

$c(t)$ -------- 载波信号

$s(t)$ -------- 已调制信号

$$s(t)=g(t)c(t) \qquad (5.4-1)$$

根据$g(t)$与$c(t)$的不同，可分为以下几种情况：

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

1. 常规调幅（AM）

$$g(t) = A_0 + f(t);\ c(t) = \cos(\Omega_0 t + \theta_0)$$

A_0 -------- $g(t)$中的直流分量

$f(t)$ -------- $g(t)$中载有信息的交变分量

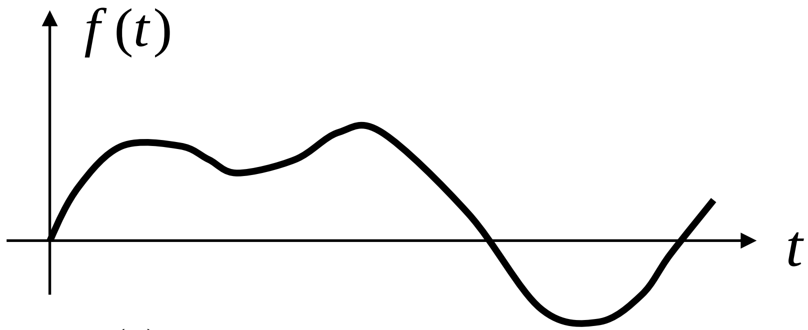
为讨论问题方便起见，设 $\theta_0 = 0$， 则

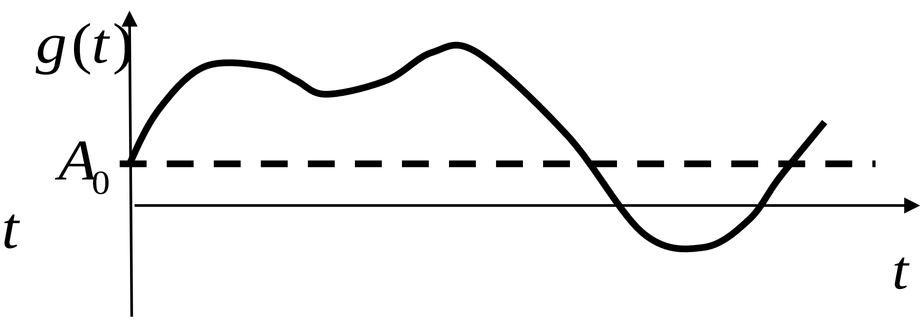
$$s_{AM}(t) = [A_0 + f(t)]\cos\Omega_0 t$$

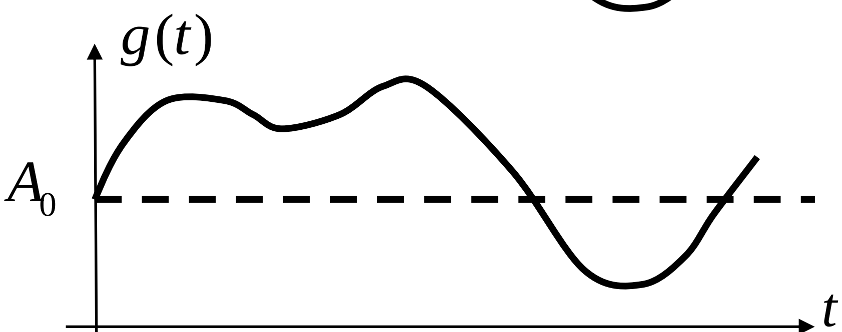
$$= A_0\cos\Omega_0 t + f(t)\cos\Omega_0 t \qquad (5.4-5)$$

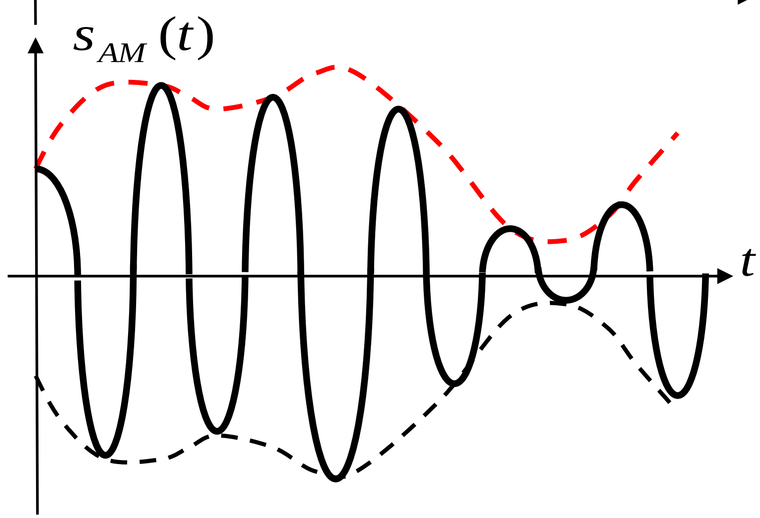
由式（5.4-5）可知，在$f(t)$上增加一直流项A_0，相当于在乘法器的输出中增加一与调制信号无关的载波项（不含任何信息）

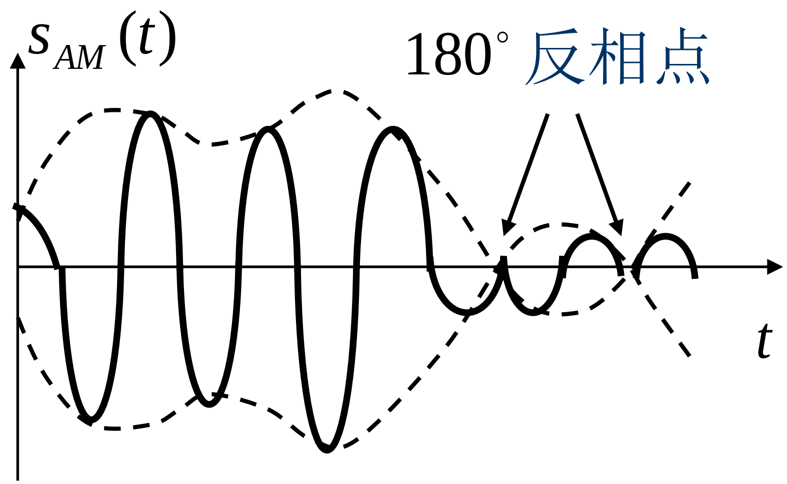
5.4.2 调幅信号的傅里叶变换











过调制失真

AM调制不失真的条件是:

$$A_0 > |f(t)|_{\max}$$

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = A_0 \cos \Omega_0 t + f(t) \cos \Omega_0 t$$

设：$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \qquad \mathcal{F}[s_{AM}(t)] = S_{AM}(j\Omega)$

$$\because \mathcal{F}[\cos \Omega_0 t] = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\cos \Omega_0 t] = \frac{1}{2}\{F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)]\}$$

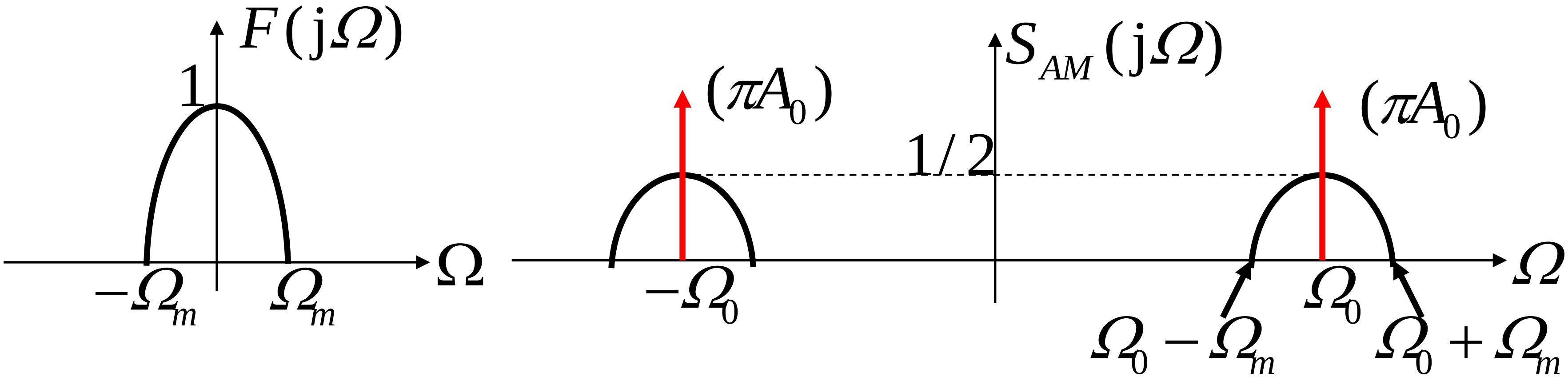
$$\therefore S_{\mathrm{AM}}(j\Omega) = \mathcal{F}[s_{AM}(t)] = \pi A_0[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$+ \frac{1}{2}\{F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)]\} \quad (7.3-6)$$

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

$$S_{AM}(j\Omega)=\mathcal{F}[s_{AM}(t)]=\pi A_0[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)]$$

$$+\frac{1}{2}\{F[j(\Omega+\Omega_0)]+F[j(\Omega-\Omega_0)]\}$$



把若干个要传送的信号分别搬移到不同的载频上，就可以在同一信道内同时传送几个信号。用这种办法构成的一个通信系统称为频分多路复用（**FDM**，**frequency-division multiplex**）系统。

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

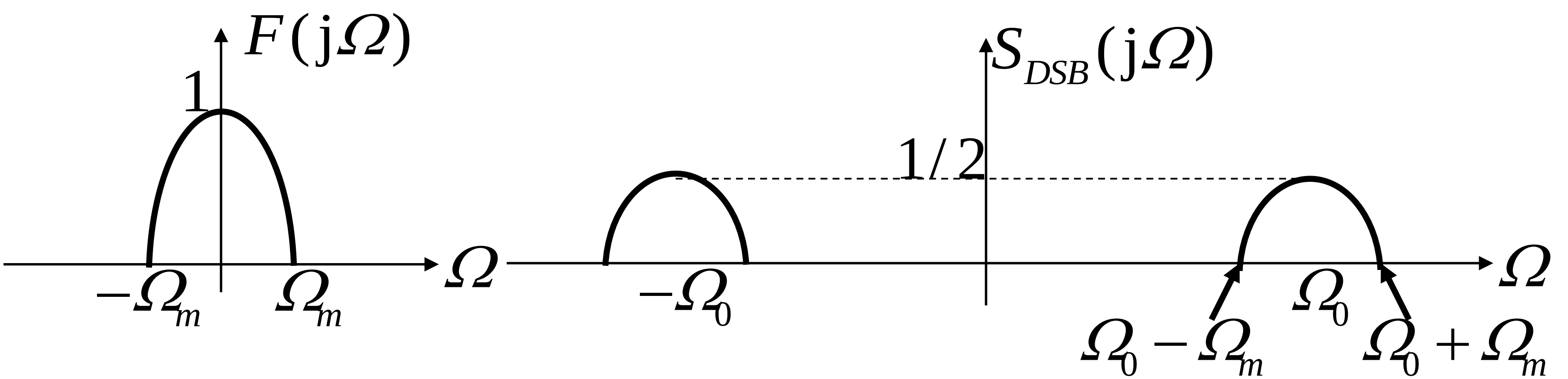
2. 双边带抑制载波调幅（DSB）

$$s_{AM}(t)=[A_0+f(t)]\cos\Omega_0 t$$

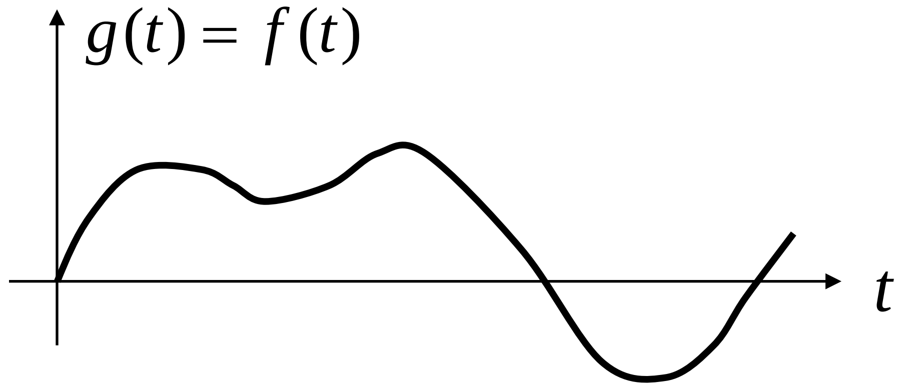
在上式中令 $A_0=0$,　　则

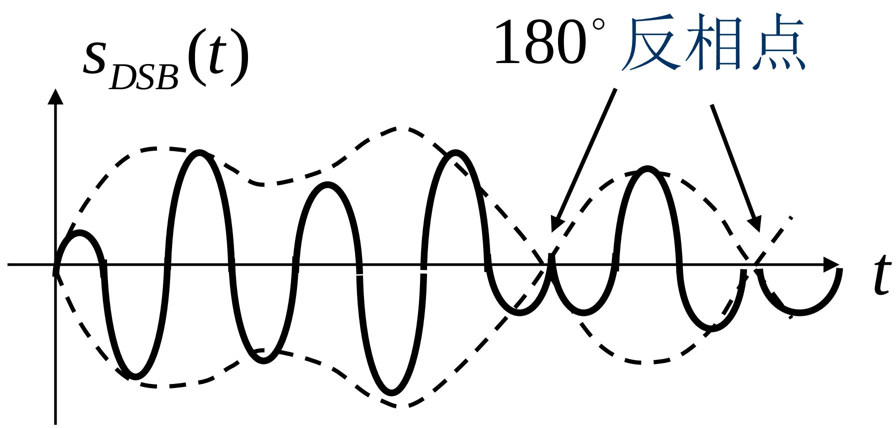
$$s_{DSB}(t)=f(t)\cos\Omega_0 t \qquad (5.4-7)$$

$$S_{DSB}(j\Omega)=\frac{1}{2}\{F[j(\Omega+\Omega_0)]+F[j(\Omega-\Omega_0)]\} \quad (5.4-8)$$



5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

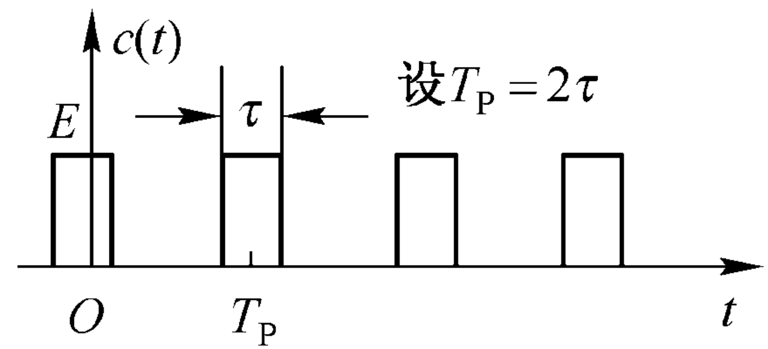




3. 脉冲幅度调制

载波信号是一个矩形脉冲串时，这种类型的幅度调制称为脉冲幅度调制（**PAM**）。

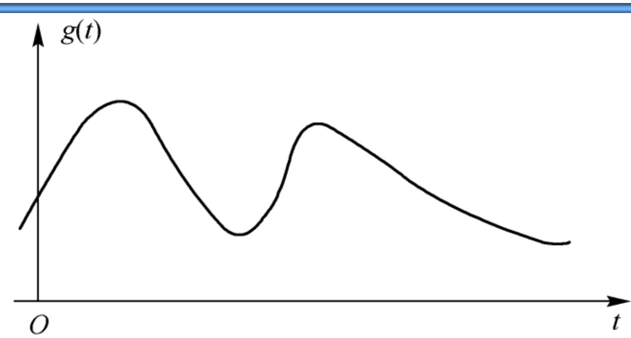
$$s_{\mathrm{PAM}}(t)=g(t)c(t)$$



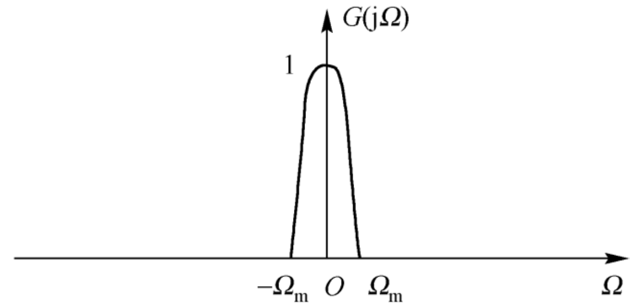
$$C(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2\pi E\tau}{T_p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_p\tau}{2}\right)\delta(\Omega-n\Omega_p)$$

$$S_{\mathrm{PAM}}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{E\tau}{T_p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_p\tau}{2}\right)G\left[\mathrm{j}(\Omega-n\Omega_p)\right]$$

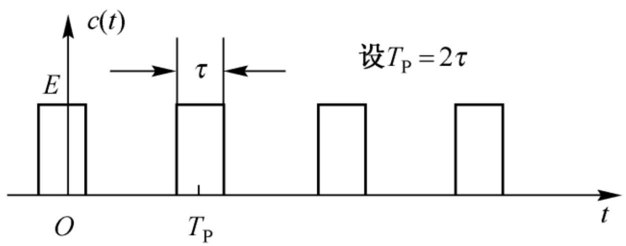
5.4.2 调幅信号的傅里叶变换



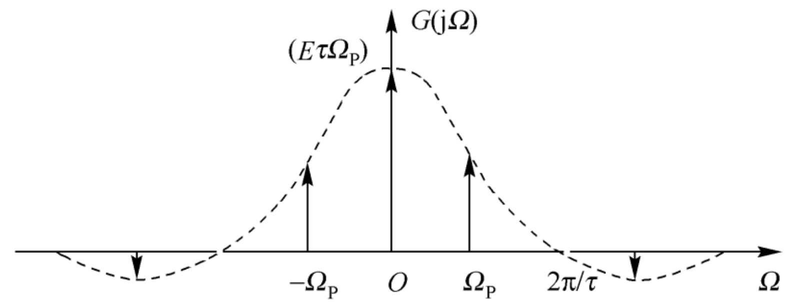
(a) 调制信号$g(t)$



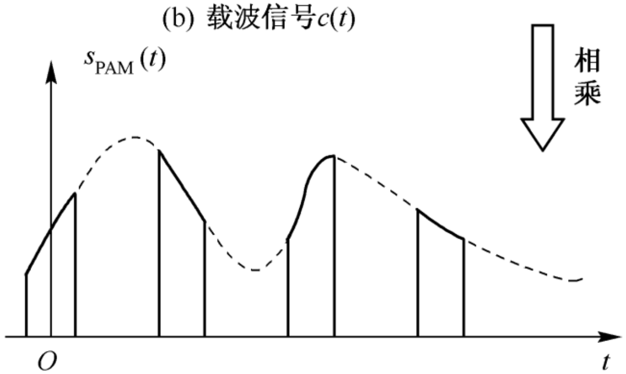
(d) $g(t)$的频谱$G(\mathrm{j}\Omega)$



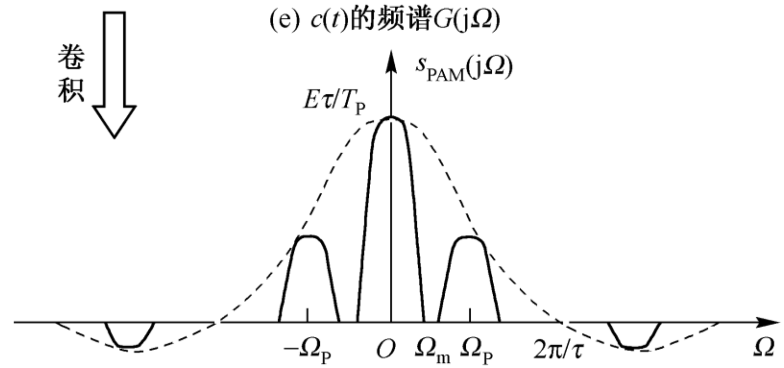
(b) 载波信号$c(t)$



(e) $c(t)$的频谱$G(\mathrm{j}\Omega)$



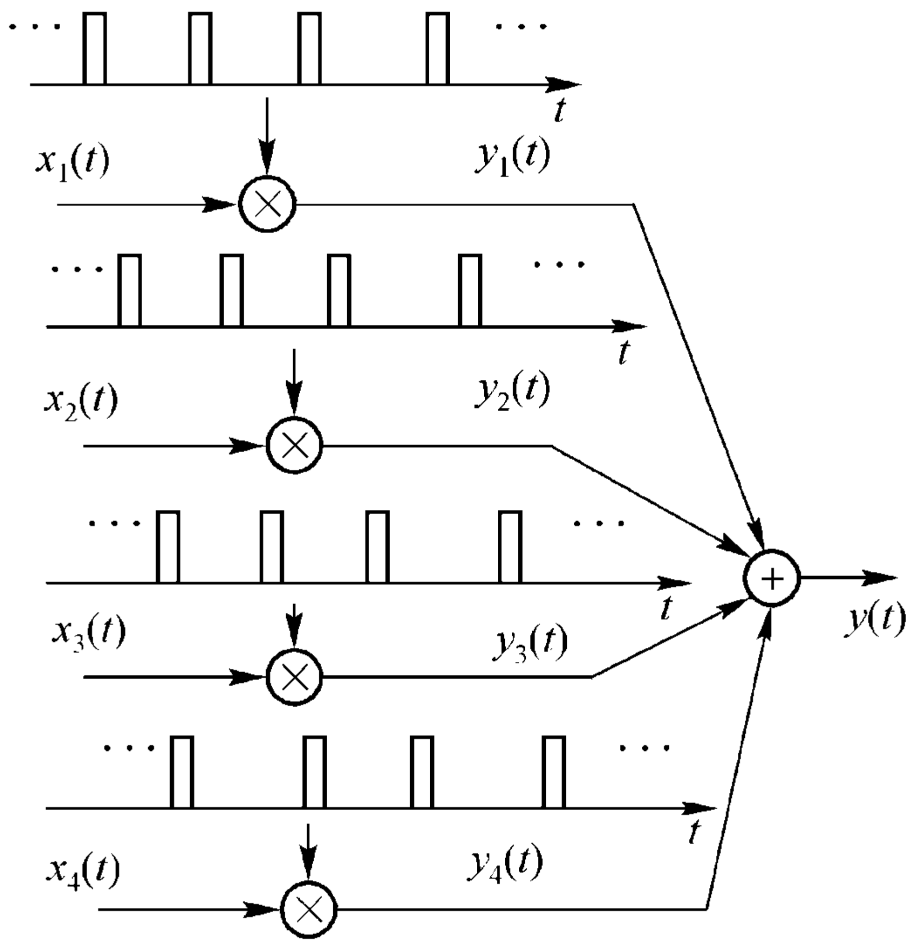
(c) 脉冲幅度调制信号$s_{PAM}(t)$



(f) $s_{PAM}(t)$的频谱$s_{PAM}(\mathrm{j}\Omega)$

5.4.2 调幅信号的傅里叶变换

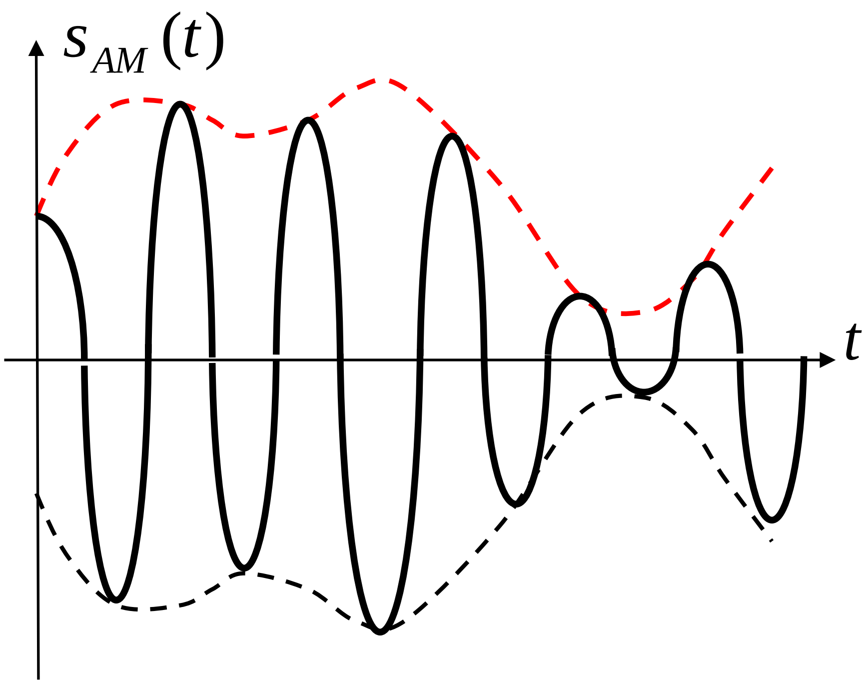
脉冲幅度调制的重要应用之一是在一个单一的信道上传输多路信号。可以实现时分多路复用（**time-division multiplex**）



5.4.3 解调概念

解调又称为检波，它是从$s(t)$恢复$g(t)$的过程。

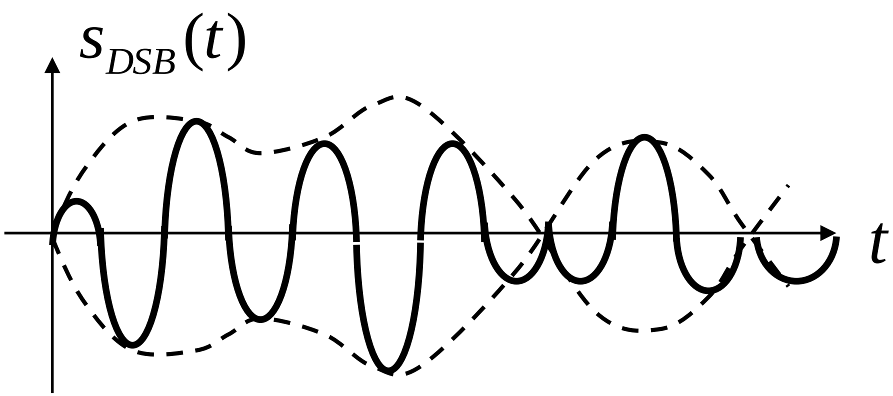
1. 常规调幅信号的解调



由左图可见：$s_{AM}(t)$ 的包络与$g(t)$成线性关系。因此，可以采用最简单、廉价的**包络检波器**（由二极管、电阻、电容组成）来恢复原调制信号。

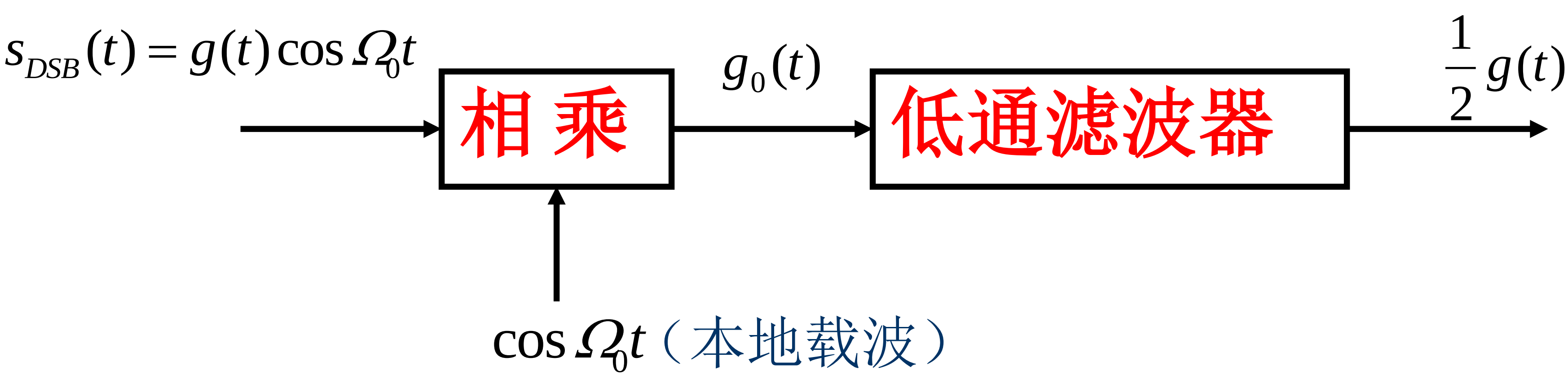
5.4.3 解调概念

2. 双边带抑制载波调幅信号的解调

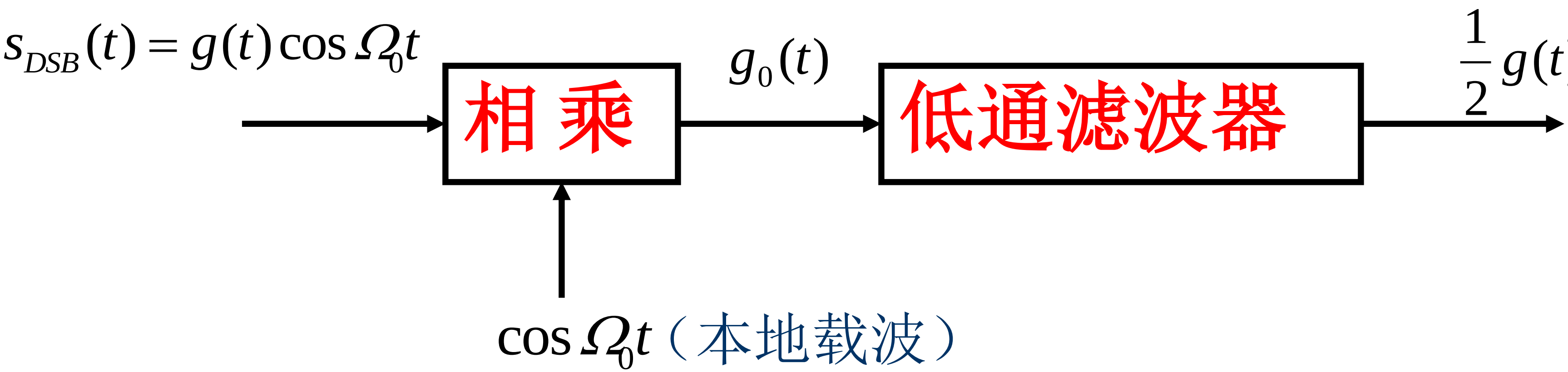


由左图可见：$s_{DSB}(t)$的包络并不与$g(t)$成线性关系，而是随 $|g(t)|$ 而变化，因此其包络并不包含$g(t)$的全部信息。因而不能采用包络检波的方法。

双边带抑制载波调幅信号的解调必须采用**相干（同步）解调**的方法。



5.4.3 解调概念



$$S_{DSB}(j\Omega)=\frac{1}{2}\{F[j(\Omega+\Omega_0)]+F[j(\Omega-\Omega_0)]\} \quad (5.4-8)$$

$$G_0(j\Omega)=\frac{1}{2}\{S_{DSB}[j(\Omega+\Omega_0)]+S_{DSB}[j(\Omega-\Omega_0)]\}$$

将式（5.4-8）代入上式得：

$$G_0(j\Omega)=\frac{1}{2}F(j\Omega)+\frac{1}{4}\{F[j(\Omega+2\Omega_0)]+F[j(\Omega-2\Omega_0)]\}$$

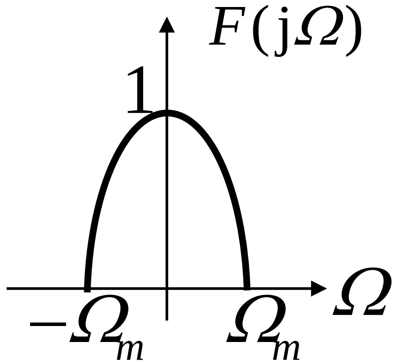
（5.4-12）

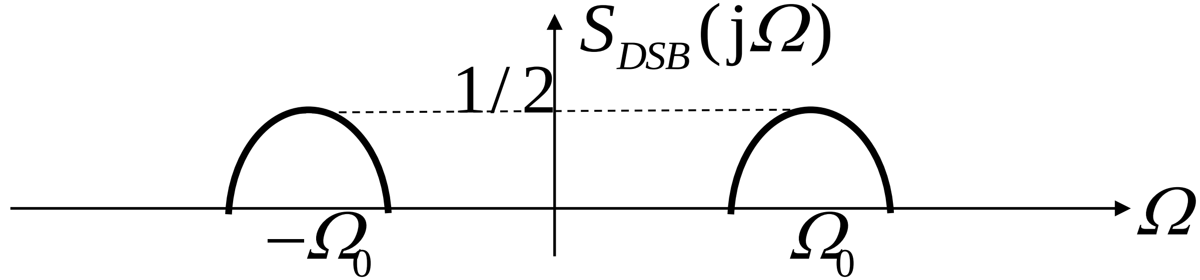
5.4.3 解调概念

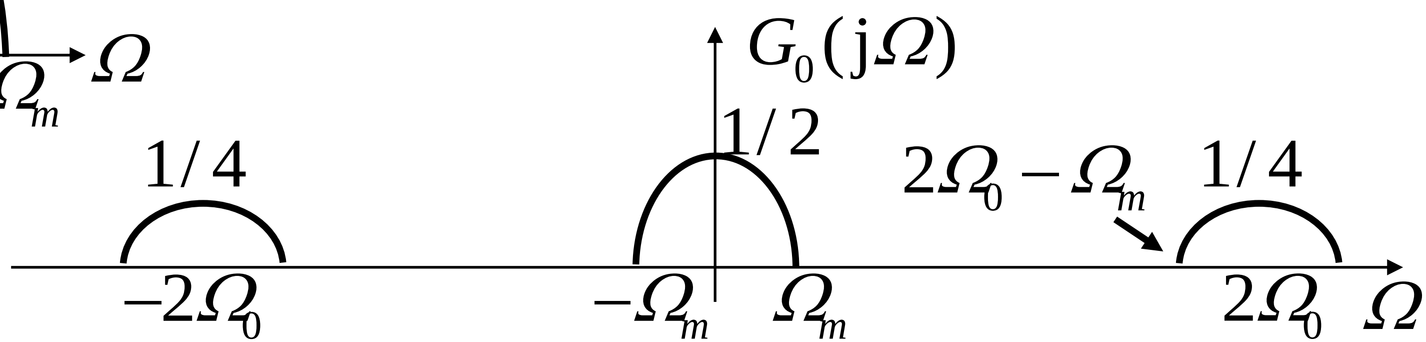
再通过一个理想低通滤波器，其截止频率 Ω_c 满足

$$\Omega_m \le \Omega_c \le 2\Omega_0 - \Omega_m$$ 即可取出 $\dfrac{1}{2}g(t)$

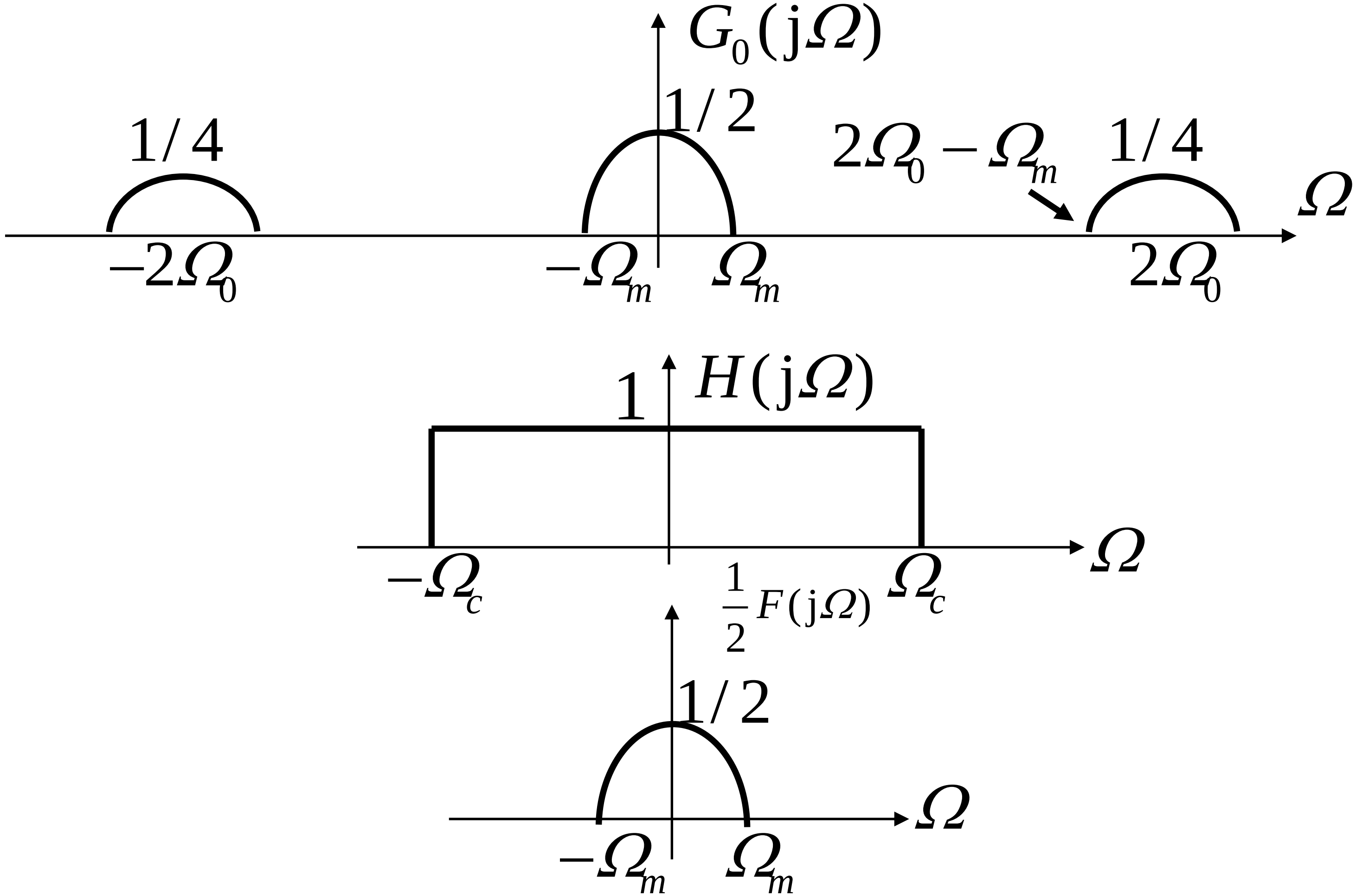
$$G_0(j\Omega)=\frac{1}{2}F(j\Omega)+\frac{1}{4}\{F[j(\Omega+2\Omega_0)]+F[j(\Omega-2\Omega_0)]\}$$







5.4.3 解调概念



$$H(j\Omega)=[u(\Omega+\Omega_c)-u(\Omega-\Omega_c)]$$

$$\Omega_m \le \Omega_c \le 2\Omega_0-\Omega_m$$

5.5 信号的频域采样与复用

5.5.1 信号的频域采样

设非周期连续信号$f(t)$的傅里叶变换为$F(\mathrm{j}\Omega)$，也是连续的，仿照时域采样的方法，用周期性冲激谱序列$\delta_\Omega(\Omega)$对$F(\mathrm{j}\Omega)$进行“采样”，这种做法称为频域采样，其中

$$\delta_\Omega(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

采样后的离散频谱$F_s(\mathrm{j}\Omega)$为：

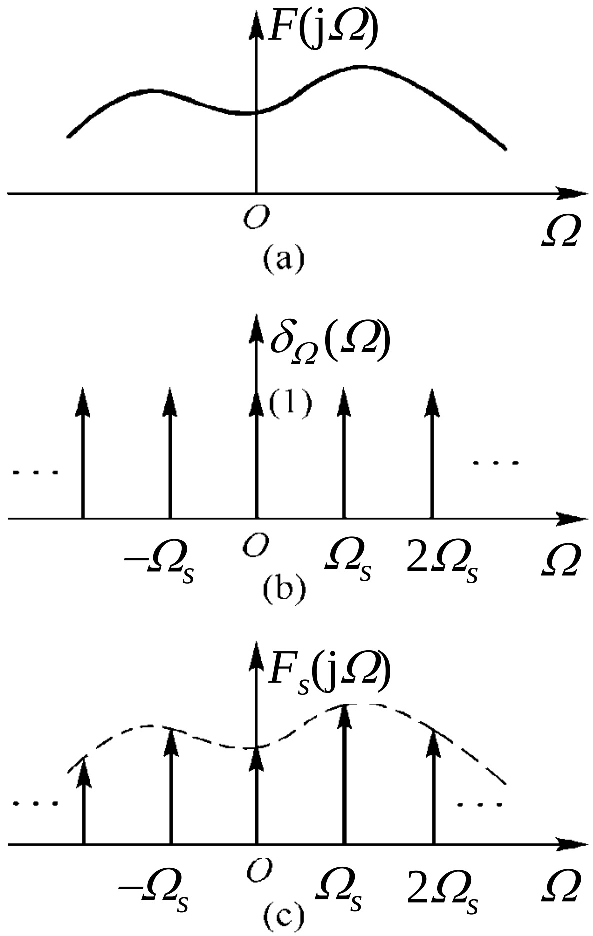
$$\boxed{F_s(\mathrm{j}\Omega)=F(\mathrm{j}\Omega)\delta_\Omega(\Omega) \qquad (5.5-1)}$$

令连续频谱$F(\mathrm{j}\Omega)$的傅里叶逆变换为：$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\Omega)]$

采样谱脉冲$\delta_\Omega(\Omega)$的傅里叶逆变换为：$\delta_T(t)=\mathscr{F}^{-1}[\delta_\Omega(\Omega)]$

采样频谱$F_s(\mathrm{j}\Omega)$ 的傅里叶逆变换为：$f_s(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_s(\mathrm{j}\Omega)]$

则频率采样间隔为Ω_s，则连续频谱$F(\mathrm{j}\Omega)$、采样谱脉冲$\delta_\Omega(\Omega)$和采样后频谱$F_s(\mathrm{j}\Omega)$如图所示。



$$\delta_\Omega(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

$$\delta_T(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_s t}=\frac{1}{\Omega_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_s)$$

其中： $T_s=\dfrac{2\pi}{\Omega_s}$

$$F_s(\mathrm{j}\Omega)=F(\mathrm{j}\Omega)\delta_\Omega(\Omega)$$

$$=F(\mathrm{j}\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}n\Omega_s)\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

5.5.1 信号的频域采样

依据卷积定理：

$$F_s(\mathrm{j}\Omega)=F(\mathrm{j}\Omega)\delta_\Omega(\Omega)=F(\mathrm{j}\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_s)$$

则：

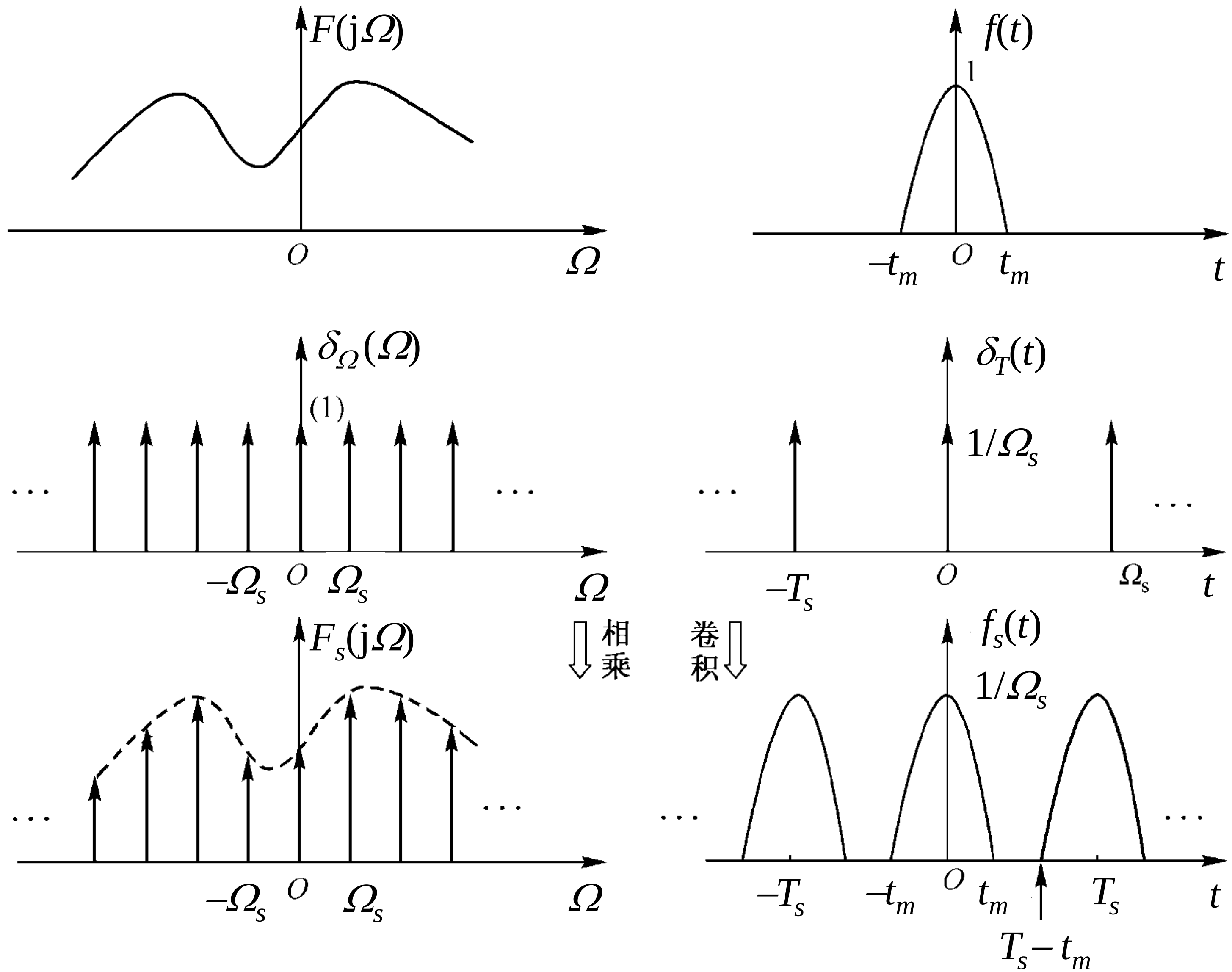
$$f_s(t)=f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\frac{1}{\Omega_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_s)$$

即：

$$f_s(t)=\frac{1}{\Omega_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(t-mT_s)$$

该式说明：若频谱$F(\mathrm{j}\Omega)$被间隔为Ω_s的周期冲激谱序列$\delta_\Omega(\Omega)$采样，得到采样频谱$F_s(\mathrm{j}\Omega)$，则在时域中等效于信号$f(t)$以T_s（$T_s=2\pi/\Omega_s$）为周期进行重复。如图所示：

5.5.1 采样信号的傅里叶变换



5.5.1 信号的频域采样

频域采样定理：一个时间受限在范围（$-t_m$，t_m）的信号 $f(t)$，其频谱$F(j\Omega)$在频域中被间隔为Ω_s的冲激谱序列采样，则采样后的频谱$F_s(j\Omega)$可以唯一表示原来信号$f(t)$的条件是：重复周期T_s必须满足

$$T_s \geq 2t_m$$

或频率采样间隔：

$$f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} \leq \frac{1}{2t_m}$$

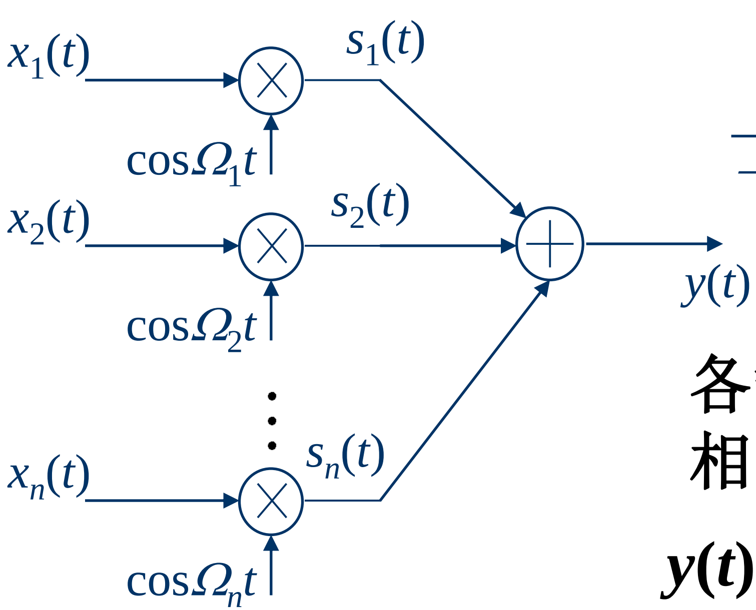
其中：

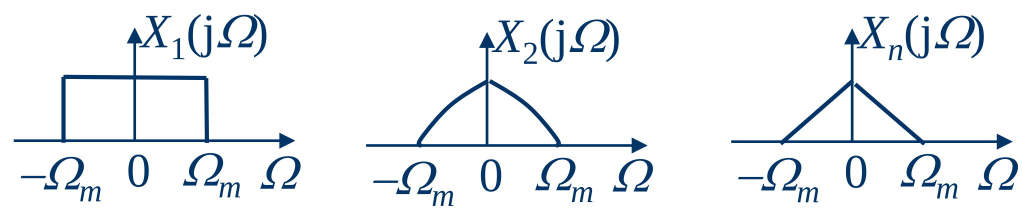
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

5.5.2 频分复用和时分复用

多路复用： 为了提高信道利用效率，使多个信号沿同一信道传输而互相不干扰，称为多路复用。

1. 频分复用： 设信号的频谱分别如图所示





各载波频率为Ω_1、Ω_2、…、Ω_n互不相同；则

$$y(t) = s_1(t)+s_2(t)+\ldots+s_n(t)$$

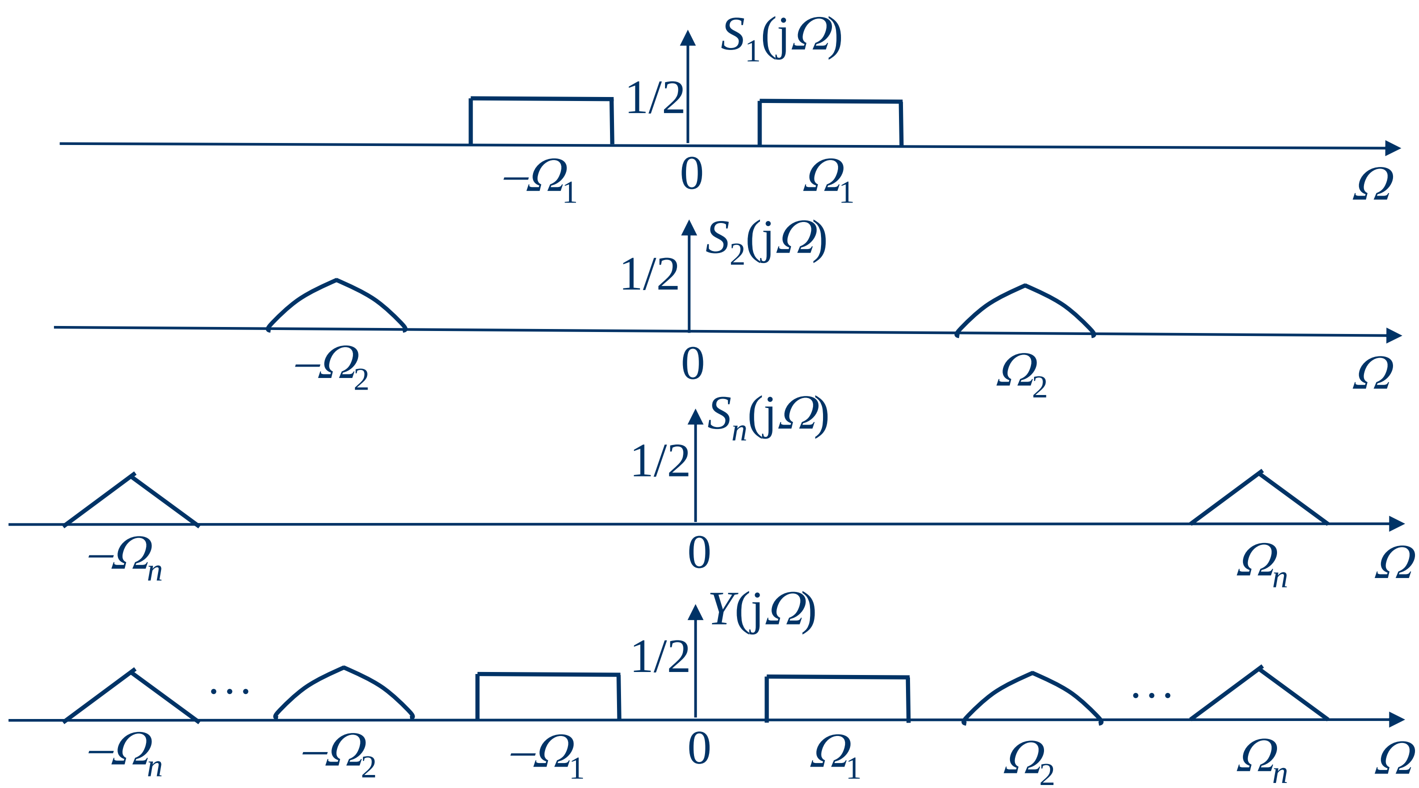
$$Y(\mathrm{j}\Omega) = S_1(\mathrm{j}\Omega)+S_2(\mathrm{j}\Omega)+\ldots+S_n(\mathrm{j}\Omega)$$

5.5.2 频分复用和时分复用

1. 频分复用： 设信号$x_1(t)$、$x_2(t)$、…、$x_n(t)$的频谱分别如图所示

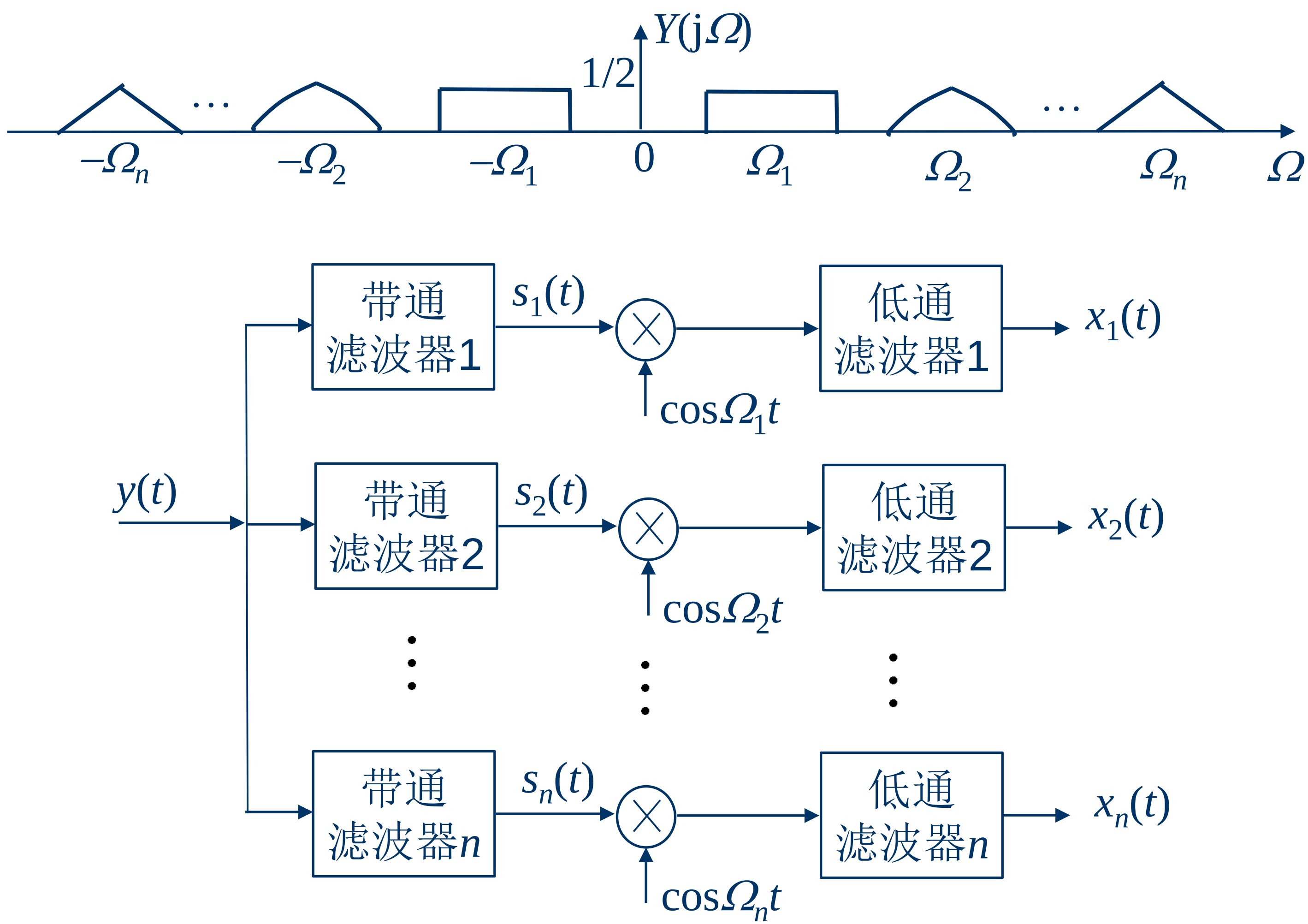
$s_i(t) = x_i(t)\cos\Omega_i t$

$$S_i(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{2}\left[X_i(\mathrm{j}\Omega + \mathrm{j}\Omega_i) + X_i(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}\Omega_i)\right]$$



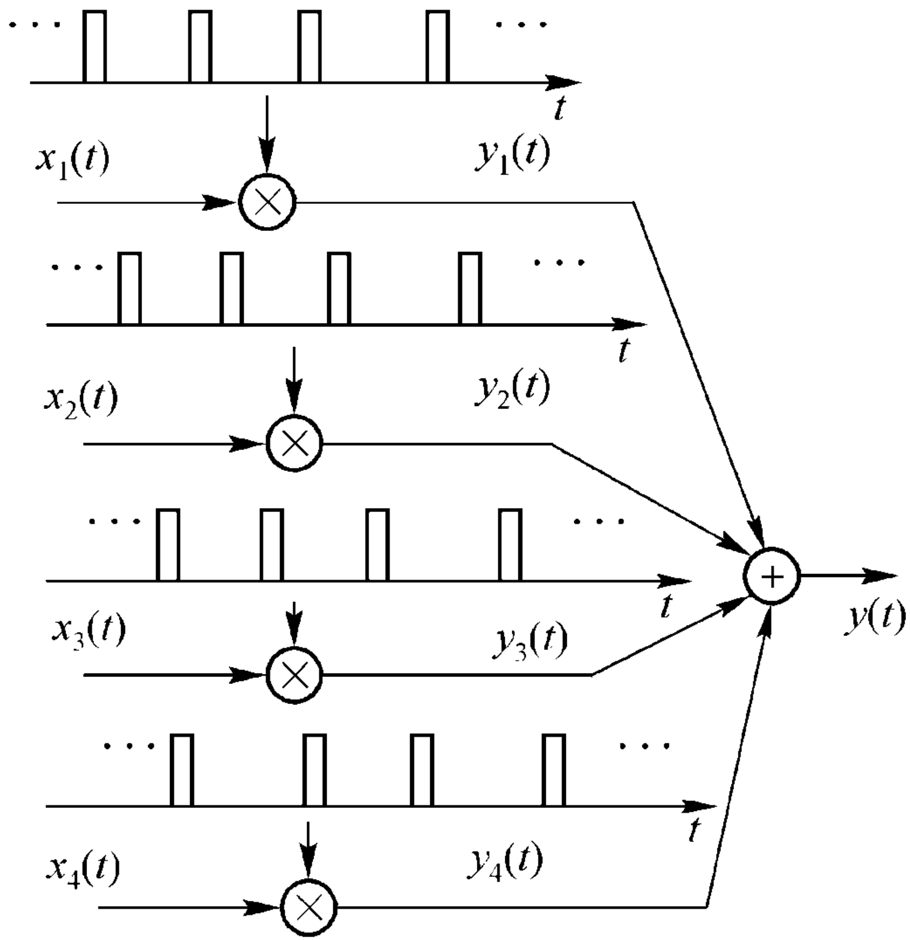
5.5.2 频分复用和时分复用

1. 频分复用：接收时



5.5.2 频分复用和时分复用

2. 时分复用： 脉冲幅度调制的应用中，离散时间信号处理中大量使用



5.6 MATLAB在信息处理与通信中的应用

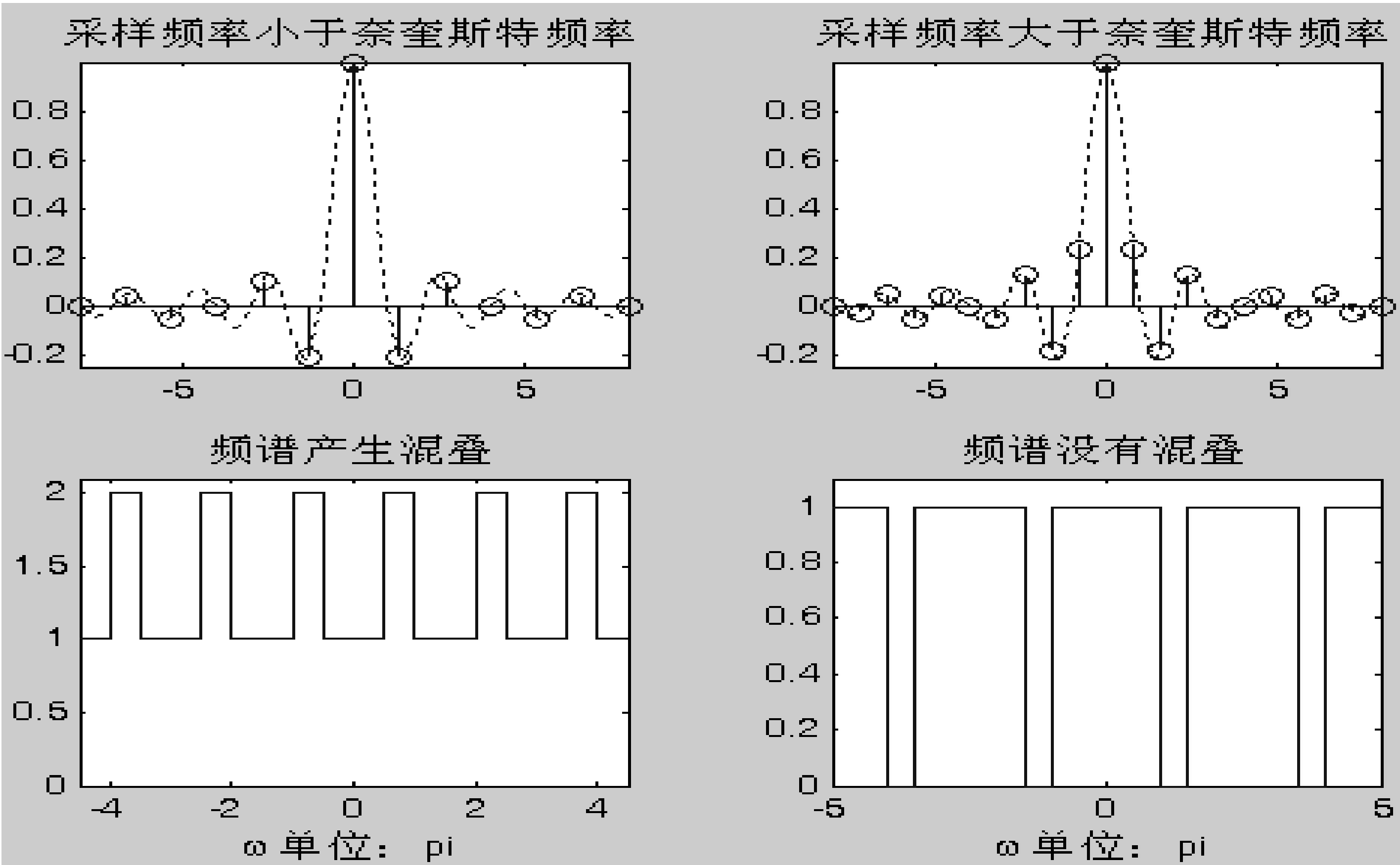
例5.6-2 设时域信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(\pi t)$，**现用采样频率** $\Omega_1=1.5\pi\ \mathrm{rad/s}$ **和** $\Omega_2=2.5\pi\ \mathrm{rad/s}$ **对其进行采样，用MATLAB绘制其时域采样信号序列及对应的频域信号的幅度谱。**

解: 根据采样定理可知，信号奈奎斯特采样频率为2π,故采样频率Ω$_1$会发生频谱混叠,采样频率Ω$_2$不会发生频谱混叠。

```
n1=-8:4/3:8;f1=sinc(n1);subplot(2,2,1);
stem(n1,f1);hold on;t1=-8:0.1:8;
f2=sinc(t1);plot(t1,f2,':');                    %绘制Sa函数包络
title('采样频率小于奈奎斯特频率');axis([-8 8 -0.25 1]);
n2=-8:4/5:8;f3=sinc(n2);subplot(2,2,2);
stem(n2,f3);hold on;t2=-8:0.1:8;
f4=sinc(t2);plot(t2,f4,':');
title('采样频率大于奈奎斯特频率');axis([-8 8 -0.25 1]);
x1=[-4.5*pi:0.001:4.5*pi];d1=[-4.5*pi:1.5*pi:4.5*pi];subplot(2,2,3);
y1=pulstran(x1+0.75*pi,d1,‘rectpuls’,0.5*pi);           %产生脉冲串
plot(x1/pi,y1+1);axis([-4.5 4.5 0 2.1]);
```

5.6 MATLAB在信息处理与通信中的应用

```
title('频谱产生混叠');xlabel('\omega 单位：  pi');
x2=[-5*pi:0.001:5*pi];d2=[-5*pi:2.5*pi:5*pi];subplot(2,2,4);
y2=pulstran(x2,d2,'rectpuls',2*pi);                    %产生脉冲串
plot(x2/pi,y2);axis([-5 5 0 1.1]);
title('频谱没有混叠');xlabel('\omega 单位：  pi');
```



5.6 MATLAB在信息处理与通信中的应用

例5.6-3 已知信号 $g_1(t)=1+0.6\cos\pi t$ 和 $g_2(t)=1+1.4\cos\pi t$；通过载波信号 $c(t)=\cos 500t$ 的调制，画出 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 的波形，并画出已调制信号的波形及其频谱。根据调制信号波形，哪种信号可以满足常规调幅的条件？

解：调制信号 $g_1(t)$和 $g_2(t)$ 与高频载波相乘后得到已调制信号

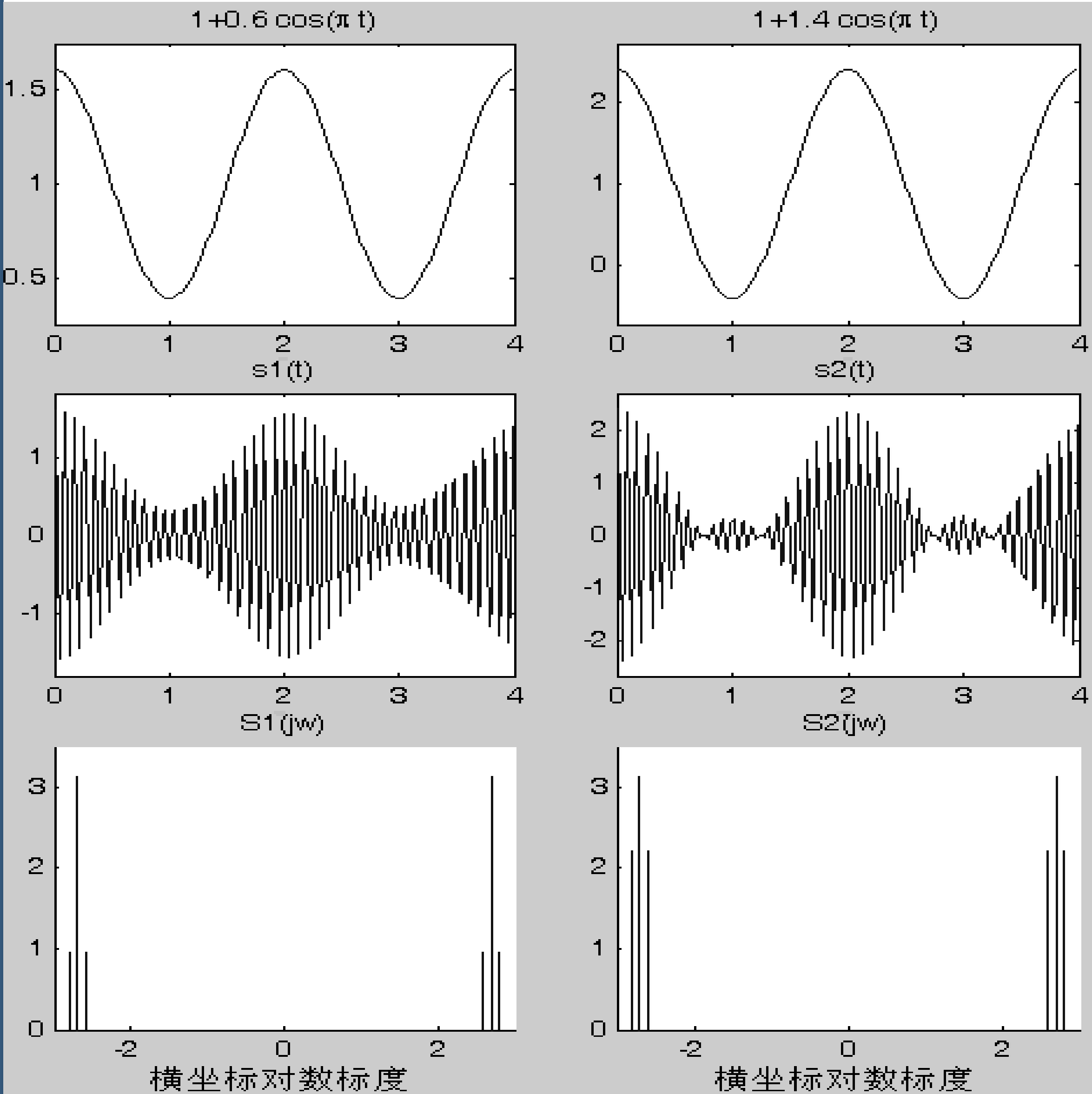
$s_1(t)=g_1(t)c(t)$ 和 $s_2(t)=g_2(t)c(t)$

用**MATLAB**绘制的信号波形和频谱的程序如下：

5.6 MATLAB在信息处理与通信中的应用

```
syms t;g1='1+0.6*cos(pi*t)';g2='1+1.4*cos(pi*t)';
subplot(321);ezplot(g1,[0,4]);
subplot(322);ezplot(g2,[0,4]);
s1='cos(500*t)*(1+0.6*cos(pi*t))';
s2='cos(500*t)*(1+1.4*cos(pi*t))';              %计算已调制信号
subplot(323);ezplot(s1,[0,4]);title('s1(t)');
subplot(324);ezplot(s2,[0,4]);title('s2(t)');
subplot(325);line([-2.8 -2.8],[0.3*pi 0]);xlabel('横坐标对数标度');
line([-2.7 -2.7],[0 pi]);line([-2.6 -2.6],[0.3*pi 0]);
line([2.8 2.8],[0.3*pi 0]);line([2.7 2.7],[0 pi]);
line([2.6 2.6],[0.3*pi 0]);axis([-3 3 0 3.5]);title('S1(jw)');
subplot(326);line([-2.8 -2.8],[0.7*pi 0]);xlabel('横坐标对数标度');
line([-2.7 -2.7],[0 pi]);line([-2.6 -2.6],[0.7*pi 0]);
line([2.8 2.8],[0.7*pi 0]);line([2.7 2.7],[0 pi]);
line([2.6 2.6],[0.7*pi 0]);axis([-3 3 0 3.5]);title('S2(jw)');
```

5.6 MATLAB在信息处理与通信中的应用



常规调幅的要求 $g(t)$ 始终大于零，显然信号 $g_1(t)$ 满足常规调幅条件，$s_1(t)$ 的包络与 $g_1(t)$ 成正比。而信号 $g_2(t)$ 不满足常规调幅条件，$s_2(t)$ 的包络与 $g_2(t)$ 不成正比。

本章小结

1. 线性时不变连续时间系统的频率响应特性
2. 无失真传输系统和理想低通滤波器
   频率响应及冲激响应
3. 连续时间信号的采样及采样定理
4. 调制与解调的基本概念
   幅度调制和相干解调
5. 频域采样及复用技术