第1章 连续时间信号的时域分析

1.1 信号的分类

对于各种信号，可以从不同角度进行分类。

1、连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外），都可给出确定的函数值，这样的信号称为连续时间信号。

在时间的离散点上信号才有值与之对应，其它时间无定义，这样的信号称为离散时间信号。

$$\text{离散信号}\begin{cases}\text{取样信号：时间不连续、幅度连续}\\\text{数字信号：时间不连续、幅度也不连续}\end{cases}$$

2、周期信号与非周期信号

在规则信号中又可分为周期信号与非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始，而且是无始无终的信号。时间上不满足周而复始特性的信号称为非周期信号。

$$\tilde{f}(t) = f(t + nT) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\tilde{f}[n] = f[n + mN] \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

3、确定性信号与随机性信号

对于确定的时刻，信号有确定的数值与之对应，这样的信号称为确定性信号。不可预知的信号称为随机信号。

例： $$x(t) = 300\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$$

4、因果信号与非因果信号

将 $t \geq 0$ 接入系统的信号（即在 $t < 0$ 时为零的信号），称为因果信号。反之，若 $t < 0$ 时不等于零的信号，则称为非因果信号。

5、一维（1-D）信号与多维（M-D）信号

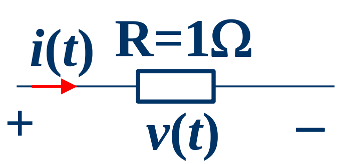
如果信号只有一个独立的自变量， 这个信号就是一维信号，而如果信号的自变量不止一个，就是多维信号。

6、能量信号与功率信号

时间T内的能量/功率　　　时间（$-\infty$，∞）内的能量/功率

$$E_T=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow E_\infty=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

$$P_T=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$



电阻R产生的热量：$E=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}R|i(t)|^2\,\mathrm{d}t$

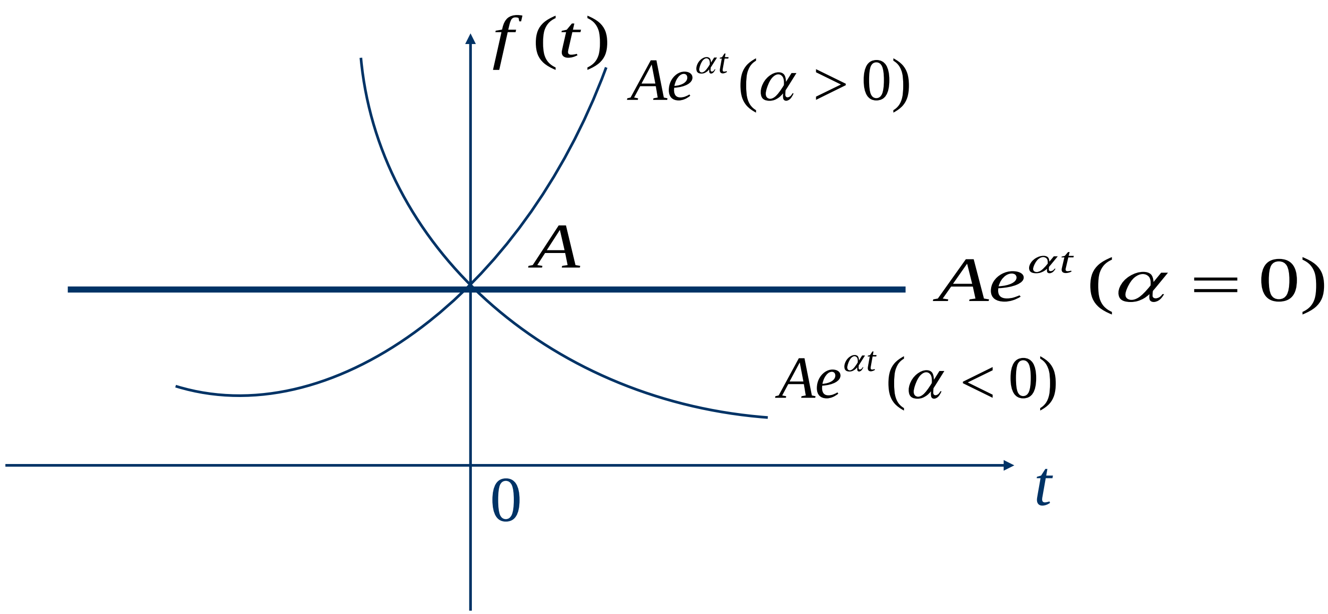
1.2 常用的连续时间信号

下面，我们将给出一些典型信号的表达式和波形。

1. 实指数信号

指数信号的表达式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \qquad (1.2-1)$$

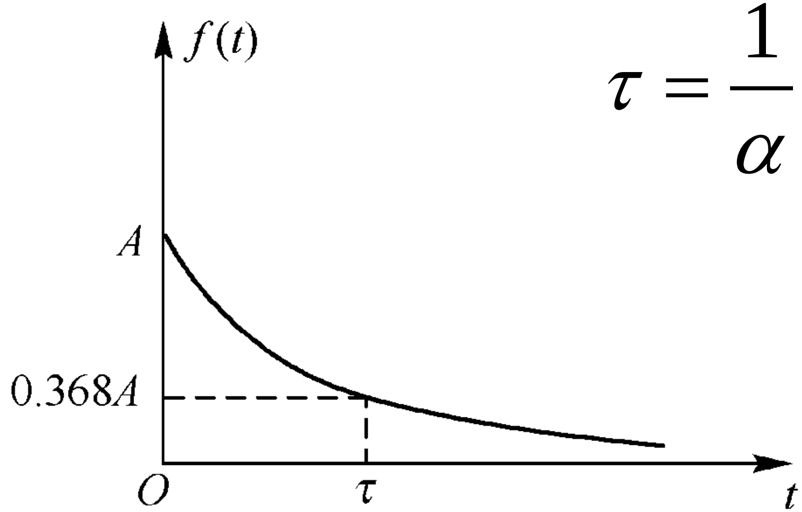


1.2　常用的连续时间信号

常见的指数信号是单边指数衰减信号，其表达式为

$$f(t)=\begin{cases}Ae^{-\alpha t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (1.2-2)$$

式中，α >0。其波形如下图所示：



$$\tau=\frac{1}{\alpha}$$

通常将τ称为指数信号的时间常数。

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,dt=\frac{A^2}{2\alpha}$$

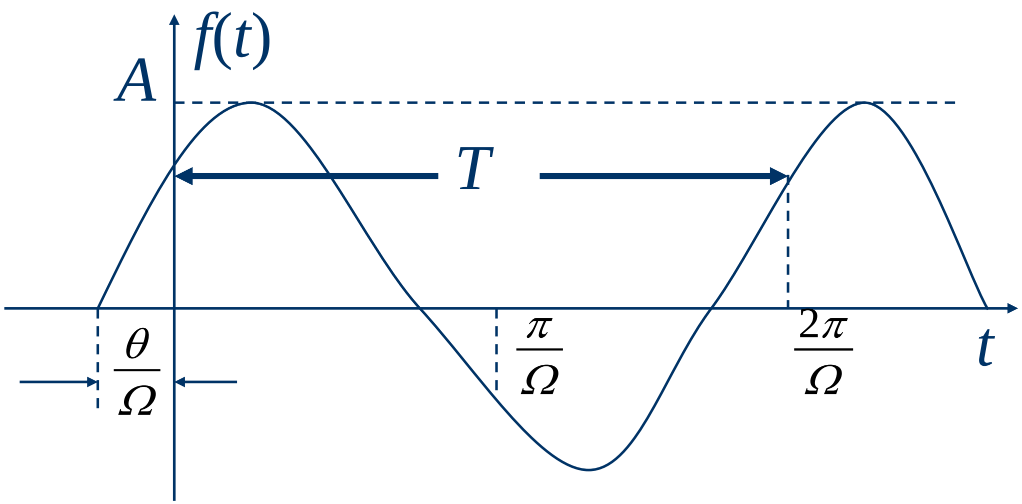
----能量有限信号

重要特性：指数信号的微分或积分，仍然是指数信号。

2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差$\frac{\pi}{2}$，统称为正弦信号，一般写作

$$f(t) = A\sin(\Omega t + \theta) \qquad (1.2-3)$$



Ω：角频率（rad/sec）

A：振幅（物理量的单位）

θ：相位

T：周期（sec）

f：频率（1/sec或Hz）

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{f}$$

特点：导数或积分仍然是正弦函数！

欧拉（Euler)公式：

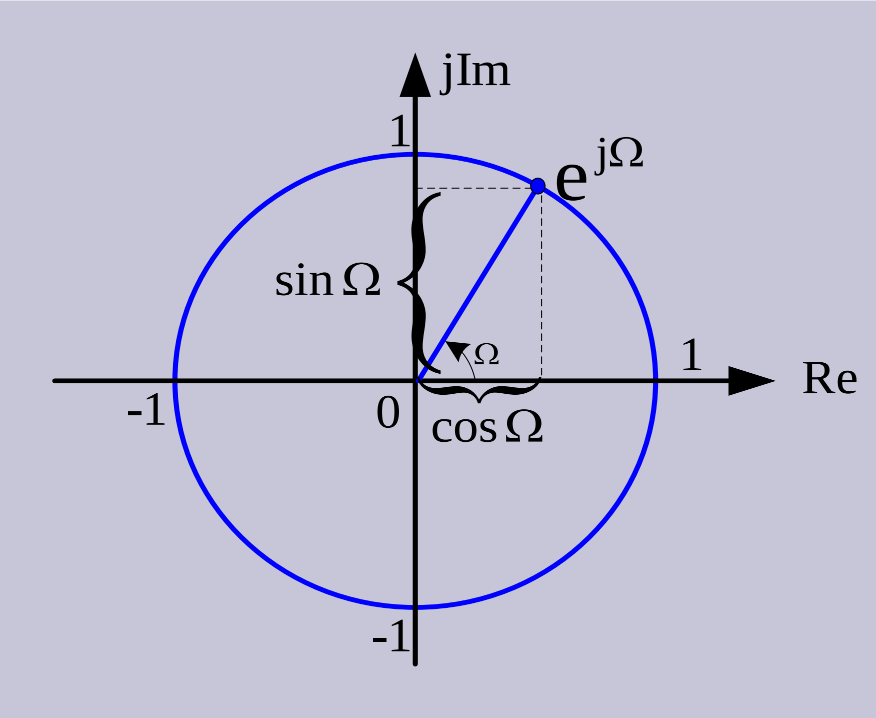
极坐标形式：$1\angle\Omega = e^{j\Omega}$ 直角坐标形式：$\cos\Omega + j\sin\Omega$

$$\sin\Omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t})$$

$$\cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$$

$$e^{j\Omega t} = \cos\Omega t + j\sin\Omega t$$

$$e^{-j\Omega t} = \cos\Omega t - j\sin\Omega t$$

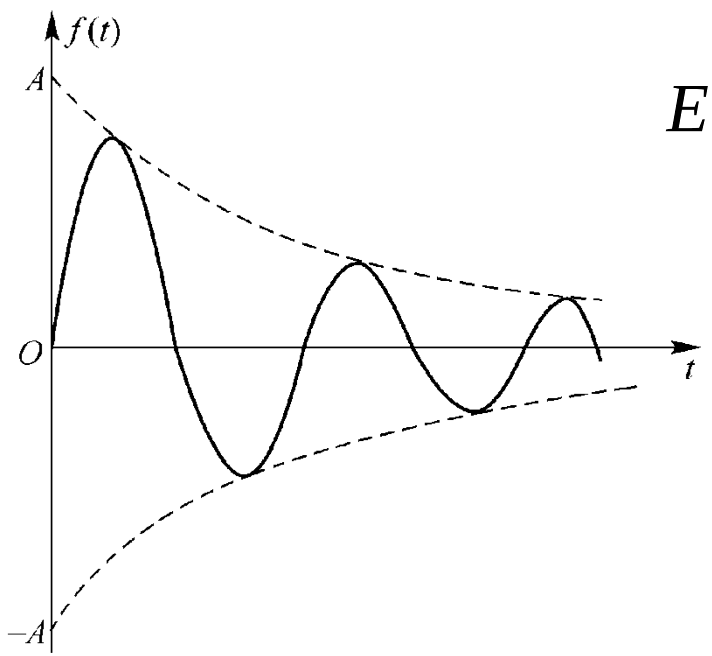


1.2 常用的连续时间信号

在信号与系统分析中，经常要遇到单边指数衰减的正弦信号，其表达式为

$$f(t)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\Omega t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (1.2-4)$$

其波形如图所示：



$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{A^2\Omega^2}{4\alpha(\alpha^2+\Omega^2)}$$

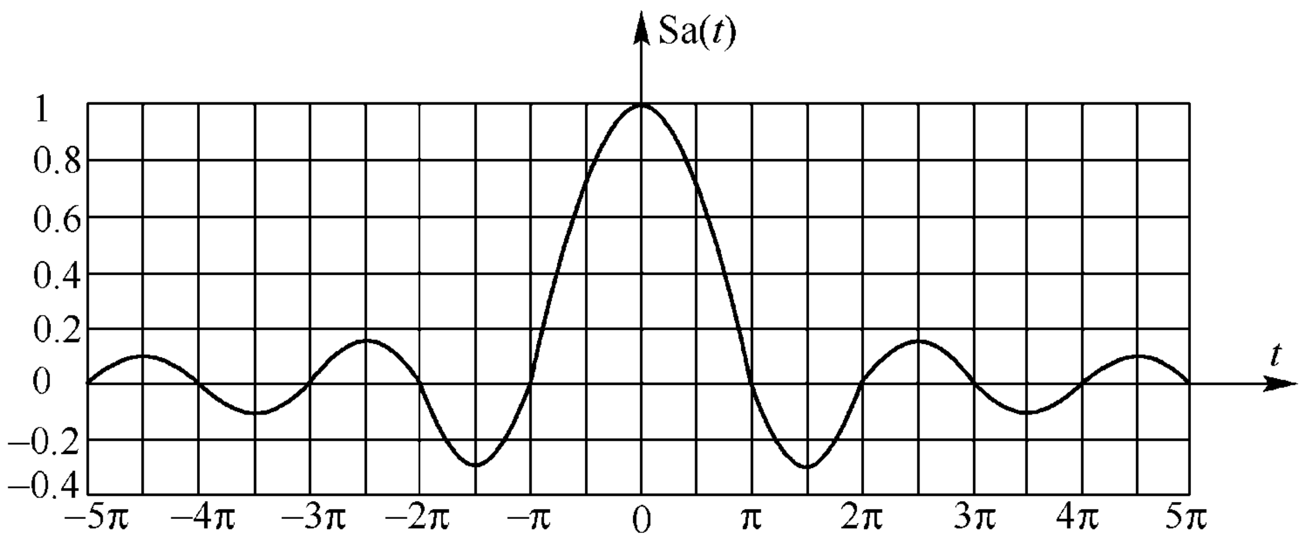
----能量有限信号

3.抽样函数（Sa(*t*)函数）

所谓抽样函数是指sin *t*与 *t* 之比构成的函数，以符号Sa(*t*)表示

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t}$$

波形如图:



$\mathrm{Sa}(t)$的性质：

（1）$\mathrm{Sa}(t)$ 是偶函数，在 t 正负两方向振幅都逐渐衰减。

（2）$$\int_0^{\infty} \mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t)\mathrm{d}t = \pi$$

（3）$$\mathrm{Sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

4. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为复数，则称为复指数信号，其表达式为

$$f(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\Omega)t} = Ae^{\sigma t}\cos\Omega t + \mathrm{j}Ae^{\sigma t}\sin\Omega t$$

复指数信号概括了多种情况，可以利用复指数信号来描述各种基本信号，如直流信号 $(\sigma = 0, \Omega = 0)$、指数信号 $(\sigma \neq 0, \Omega = 0)$、正弦或余弦信号 $(\sigma = 0, \Omega \neq 0)$，以及增长或衰减的正弦与余弦信号 $(\sigma \neq 0, \Omega \neq 0)$。

1.3 奇异信号

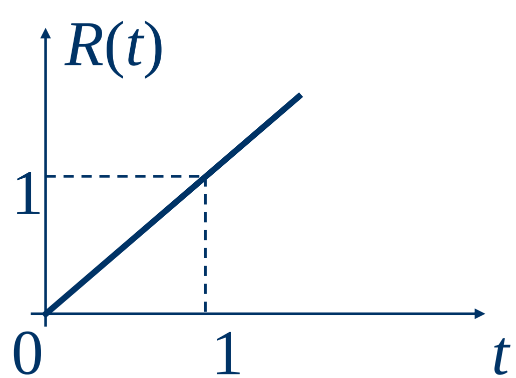
在信号与系统分析中，经常要遇到函数本身有不连续点或其导数与积分有不连续点的情况，这类函数统称为奇异函数或奇异信号。

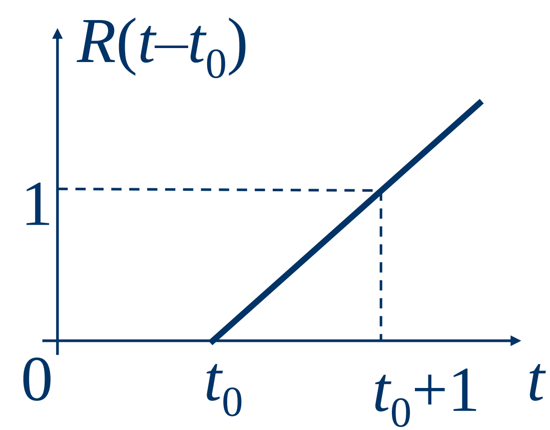
1.3.1 单位斜变信号

单位斜变信号指的是从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。其表达式为

$$R(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (1.3-1)$$

$$R(t-t_0)=\begin{cases} t-t_0 & t\geq t_0 \\ 0 & t<t_0 \end{cases} \qquad (1.3-2)$$

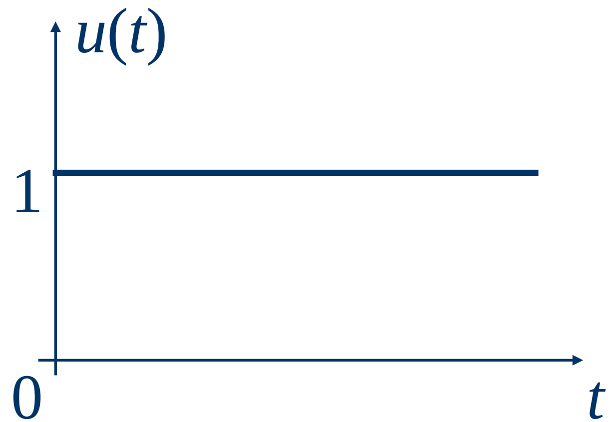




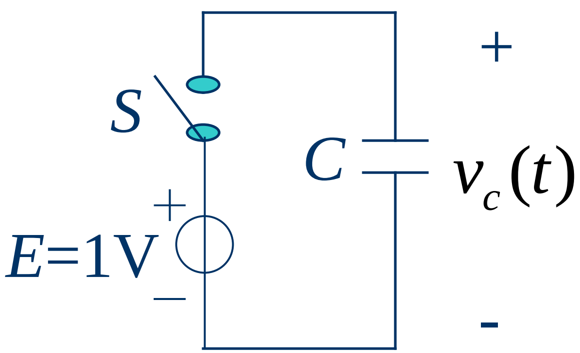
1.3 奇异信号

1.3.2 单位阶跃信号

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (1.3-3)$$



- 工程中会不会出现 ***u*（*t*）**呢？请看下例：



例：图中假设S、E、C都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$ 时S闭合，求电容C上的电压。

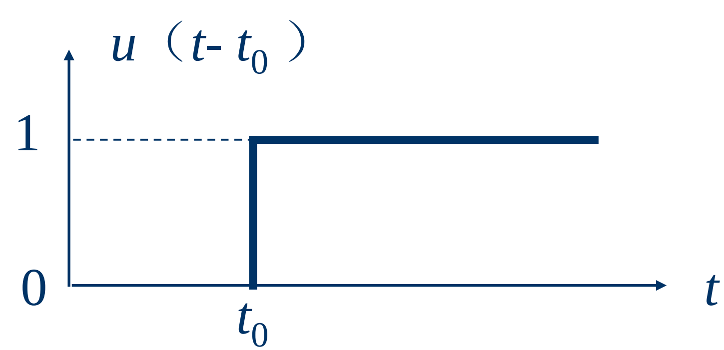
解： 由于S、E、C 都是理想元件，所以，回路无内阻，当S 闭合后，C上的电压会产生跳变，从而形成阶跃电压。即：

$$v_c(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=u(t)$$

如果开关 S 在$t=t_0$ 时闭合，

则电容上的电压为$u(t-t_0)$。

$u(t-t_0)$ 波形如下图所示：



1.3 奇异信号

$u(t)$与$R(t)$的关系：

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (1.3-5)$$

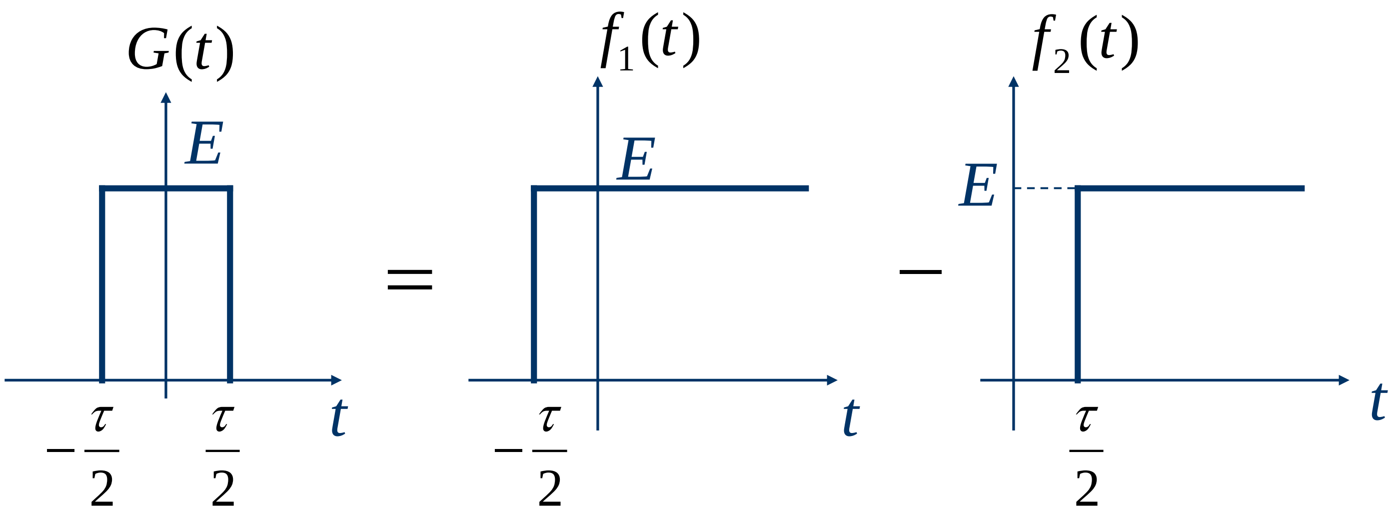
$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.3-6)$$

$u(t)$的性质：单边特性，即：

$$f(t)u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ f(t) & t>0\end{cases}$$

某些脉冲信号可以用阶跃信号来表示。

例1:



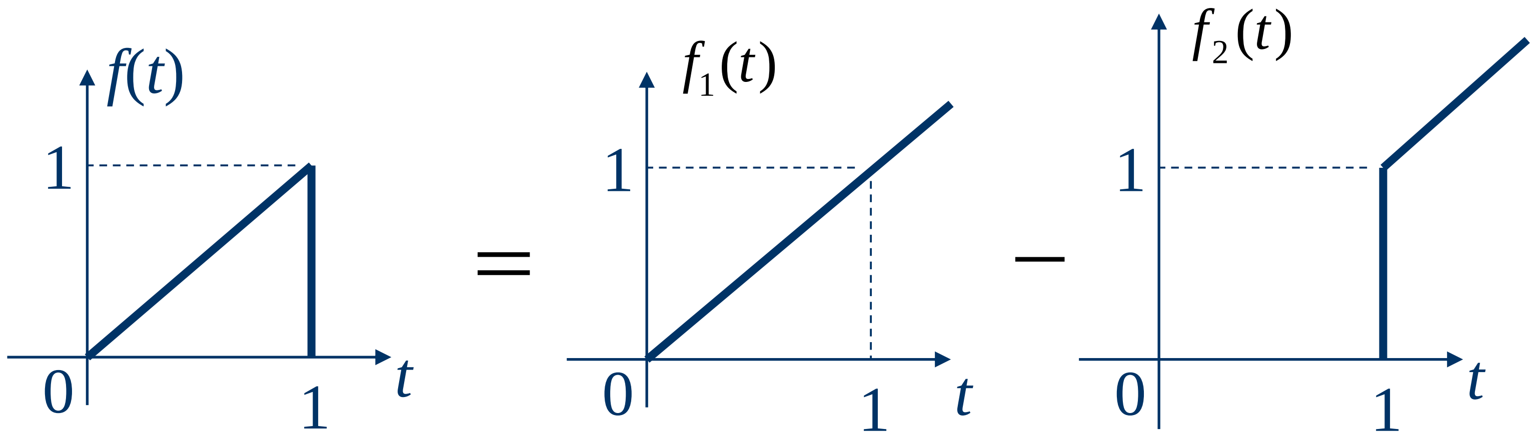
因为 $f_1(t) = Eu(t+\frac{\tau}{2}),\quad f_2(t) = Eu(t-\frac{\tau}{2}),$

所以，矩形脉冲$G(t)$可表示为

$$G(t) = f_1(t) - f_2(t) = E[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})]$$

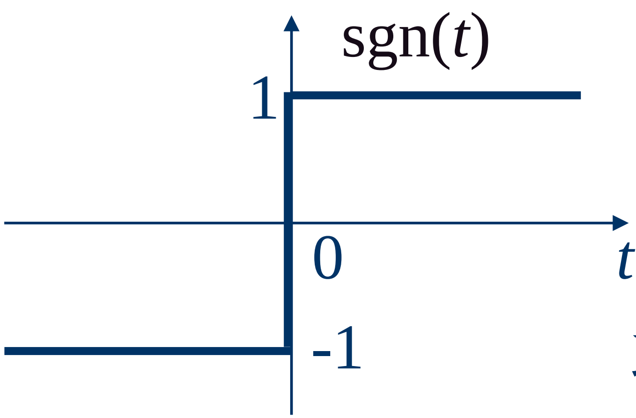
1.3　奇异信号

例2：



$$f(t)=t[u(t)-u(t-1)]$$

例3： 利用阶跃信号来表示"符号函数"（**signum**）



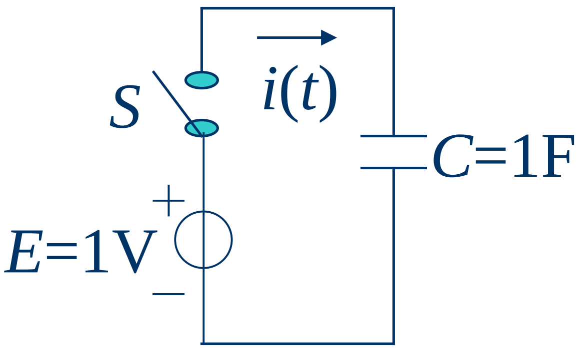
$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}=2u(t)-1$$

或：

$$u(t)=\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(t)+1]$$

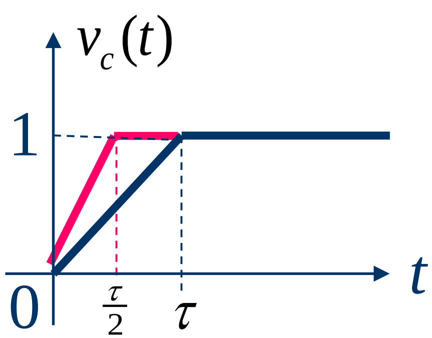
1.3.3 单位冲激信号

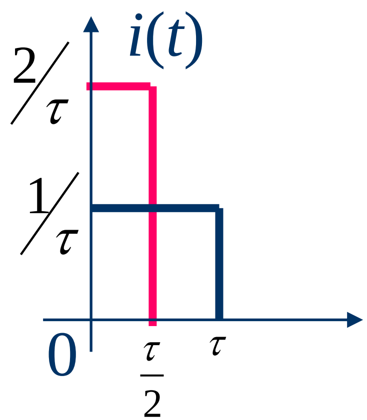
我们先从物理概念上理解如何产生冲激函数$\delta(t)$

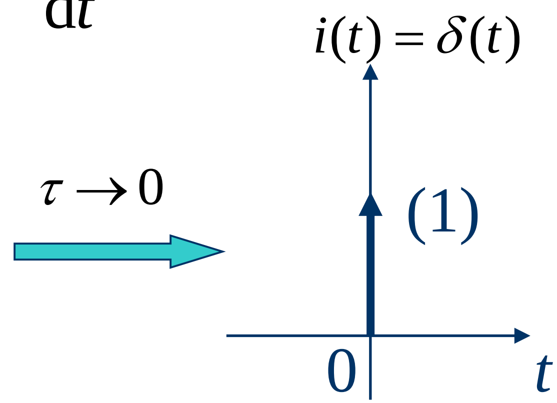


例： 图中假设S、E、C都是理想元件（内阻为0），当 t = 0时S闭合，求回路电流i（t）。

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$







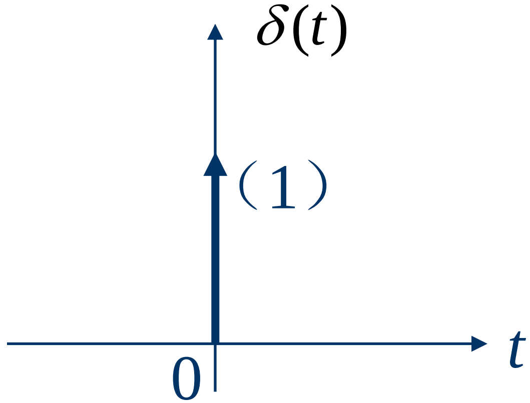
Show

1.3 奇异信号

1.$\delta(t)$ 的定义方法

（1）用表达式定义

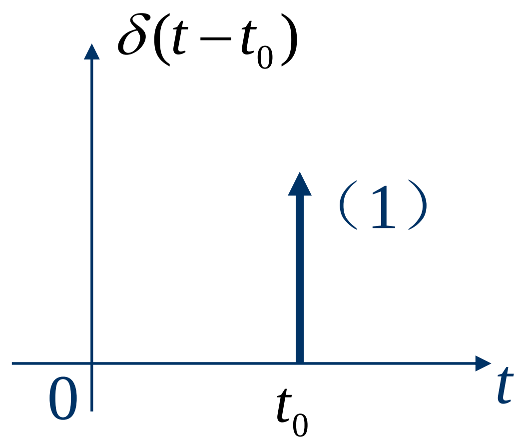
$$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases} \qquad (1.3-11)$$



这种定义方式是狄拉克提出来的，因此，$\delta(t)$又称为狄拉克（Dirac）函数。

同理可以定义 $\delta(t-t_0)$，即

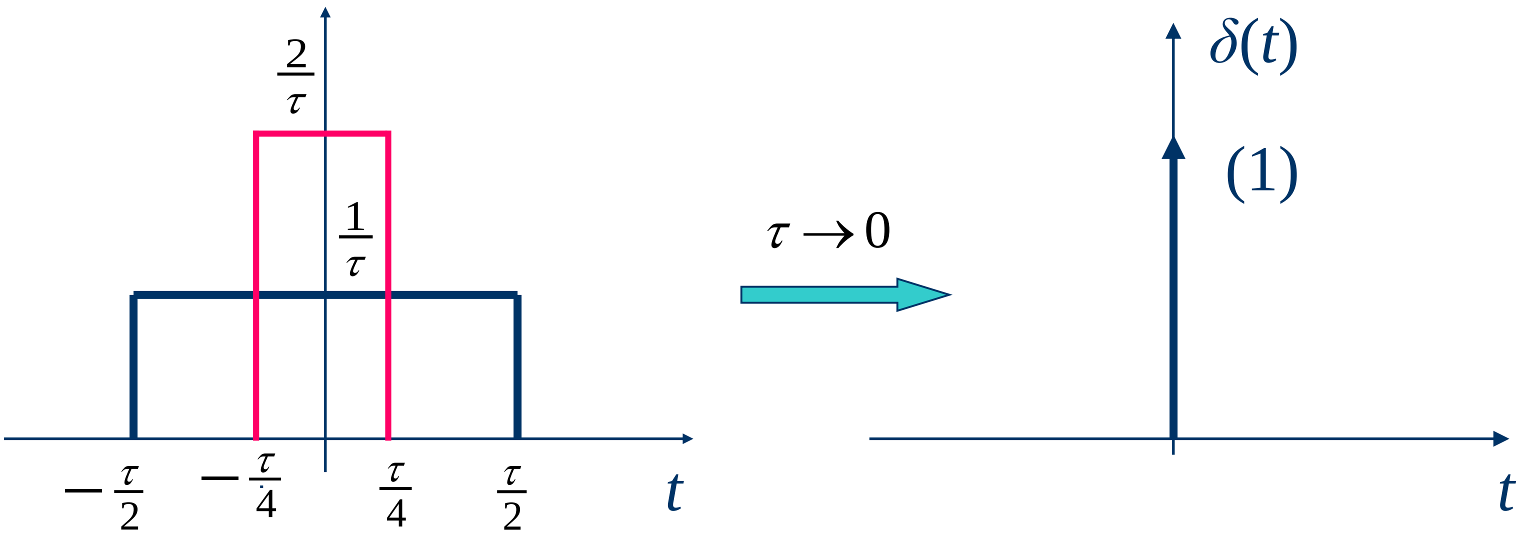
$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t\neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \end{cases} \qquad (1.3-12)$$



(2) 用极限定义

我们可以用各种规则函数系列求极限的方法来定义$\delta(t)$。

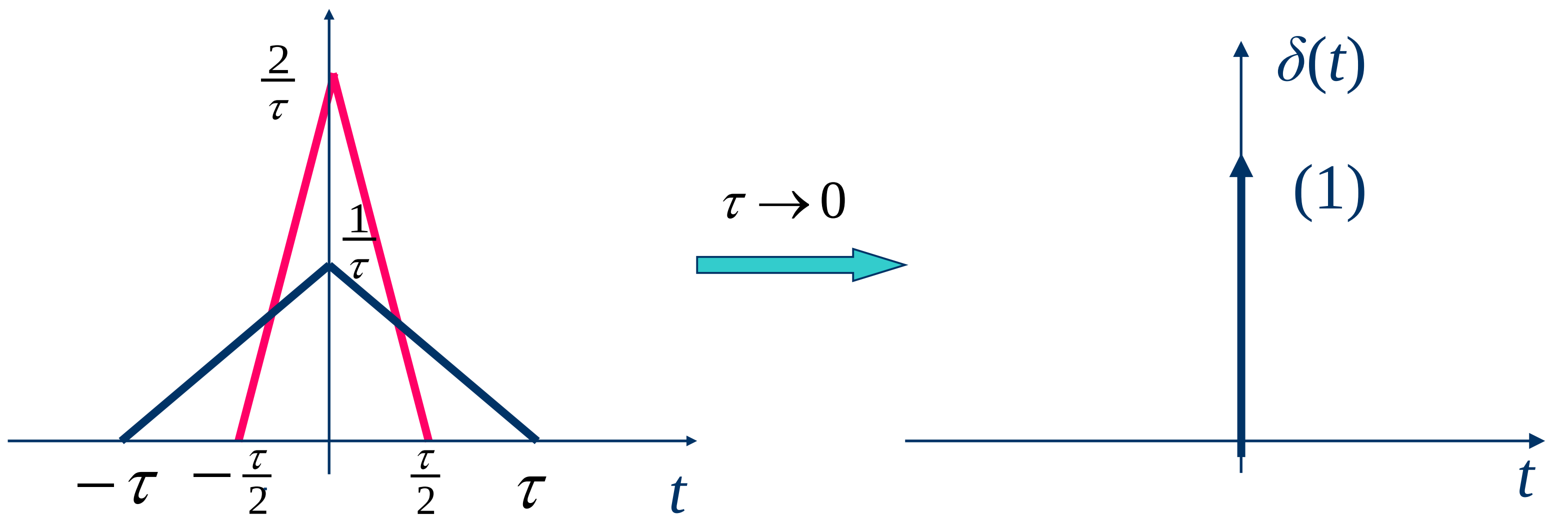
例如:（a）用矩形脉冲取极限定义



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})] \qquad (1.3-14)$$

Show

（b）用三角脉冲取极限定义

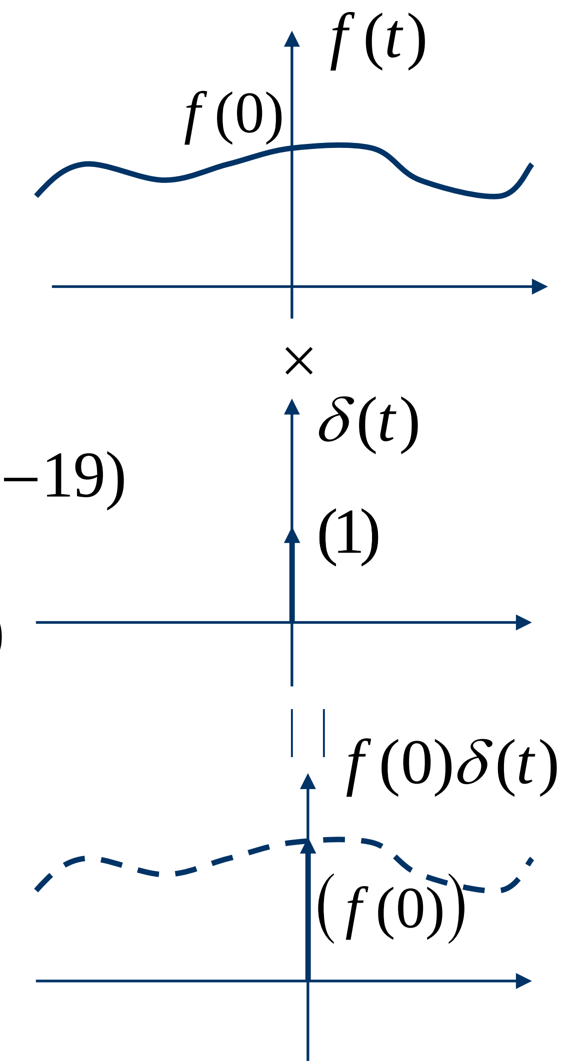


$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{1}{\tau}(1 - \frac{|t|}{\tau})[u(t+\tau) - u(t-\tau)] \right\} \qquad (1.3-15)$$

Show

2. 冲激函数的性质

（1）取样特性



$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \qquad (1.3-18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = f(0) \qquad (1.3-19)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \qquad (1.3-20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) \mathrm{d}t = f(t_0) \qquad (1.3-21)$$

综合式（1.3-19）和式（1.3-21），可得出如下结论：

冲激函数可以把冲激所在位置处的函数值抽取（筛选）出来。

1.3 奇异信号

例： $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-2t_0)\mathrm{d}t = u(t-2t_0)\Big|_{t=t_0} = u(-t_0) = \begin{cases} 0 & t_0>0 \\ 1 & t_0<0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]\mathrm{d}t = e^{j\Omega t}\Big|_{t=0} - e^{j\Omega t}\Big|_{t=t_0} = 1-e^{j\Omega t_0}$$

（2） $\delta(t)$ 是偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$　　(1.3−22)

（3） $$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} = u(t) \qquad (1.3-23)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau = u(t-t_0)$$

1.3 奇异信号

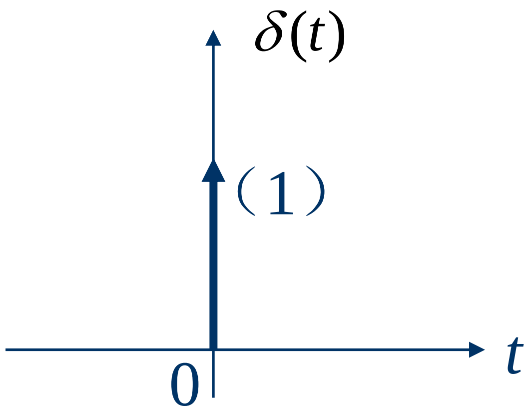
$u(t)$与$\delta(t)$的关系：

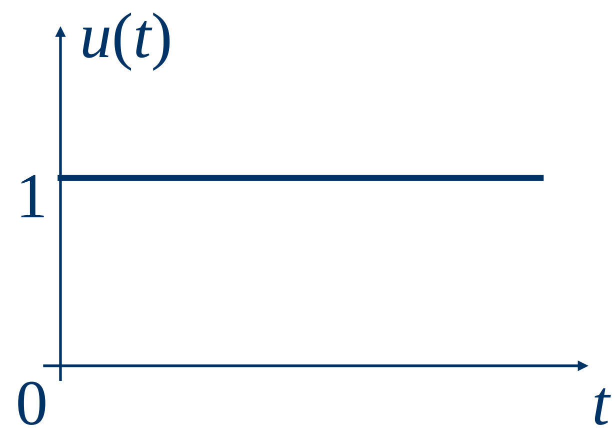
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau - t_0)\mathrm{d}\tau = u(t - t_0)$$

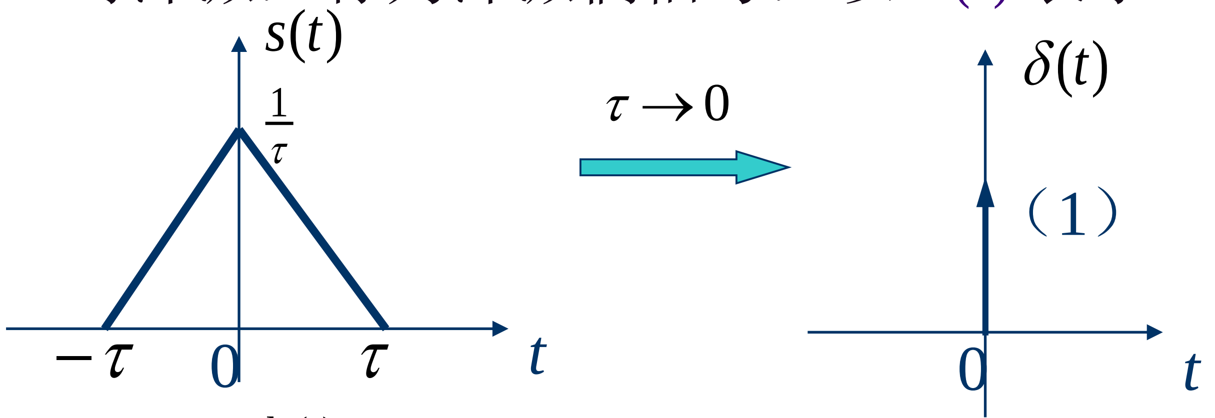
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

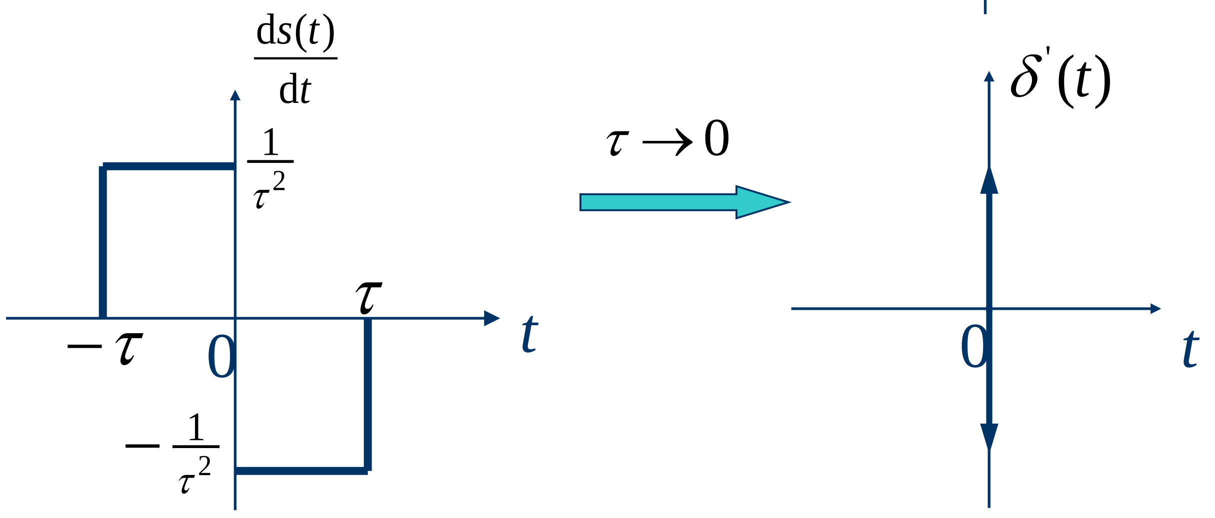




1.3.4 冲激偶信号

冲激信号的微分（阶跃函数的二阶导数）将呈现 正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号，以$\delta'(t)$表示。





冲激偶的性质

(1) 冲激偶是奇函数，即

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

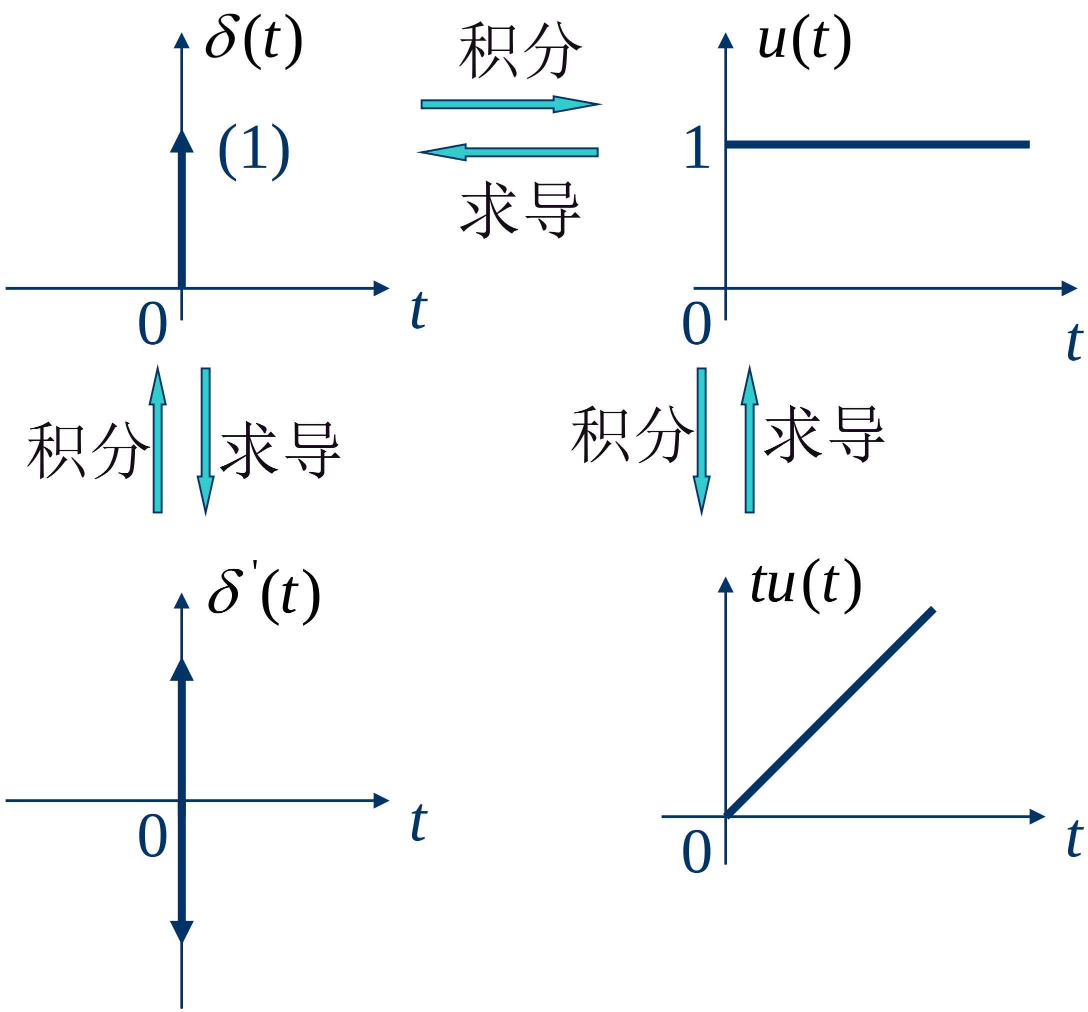
(2) $$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t)\mathrm{d}t = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0) f(t)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

1.3 奇异信号



1.4 信号的运算

1.4.1 信号的基本运算

1. 信号的加减

两个信号的和（或差）仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之和（或差），即

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t) \quad \text{或} \quad f(t)=f_1(t)-f_2(t)$$

2. 信号的乘法和数乘

两个信号的积仍然是一个信号，它在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之积，即

$$f(t)=f_1(t)f_2(t)$$

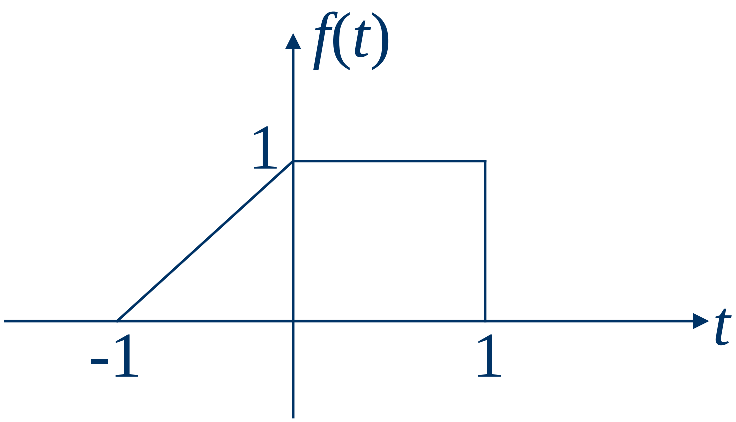
信号的数乘运算是指某信号乘以一实常数K，它是将原信号每一时刻的值都乘以K，即

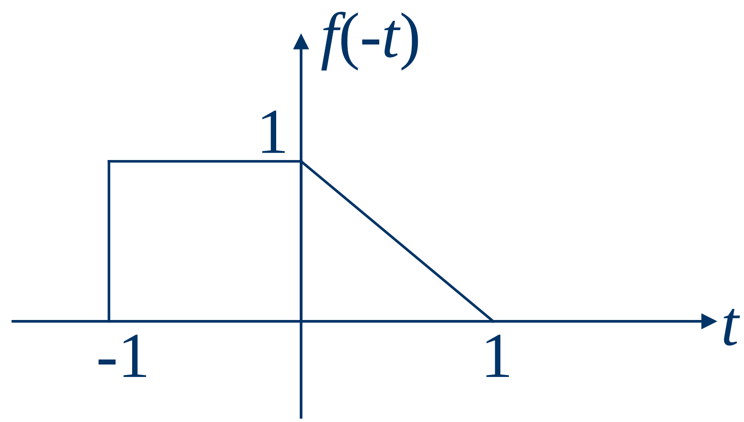
$$f(t)=Kf_1(t)$$

3. 信号的反褶、时移、尺度变换

（1）反褶运算

$f(t) \rightarrow f(-t)$ 以 $t = 0$为轴反褶





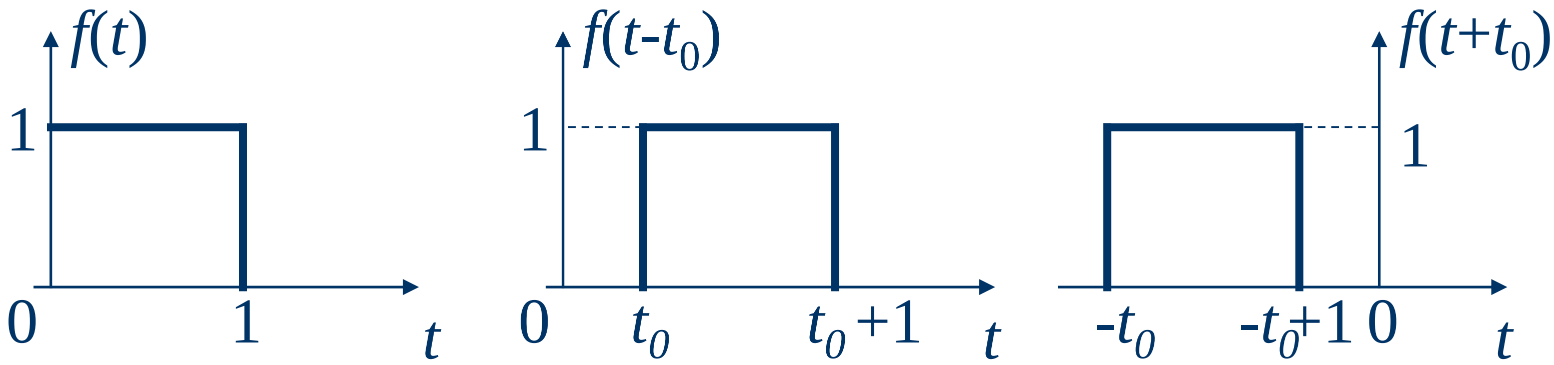
（2）时移运算

$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$

$t_0>0$时，$f(t)$在 t 轴上整体右移

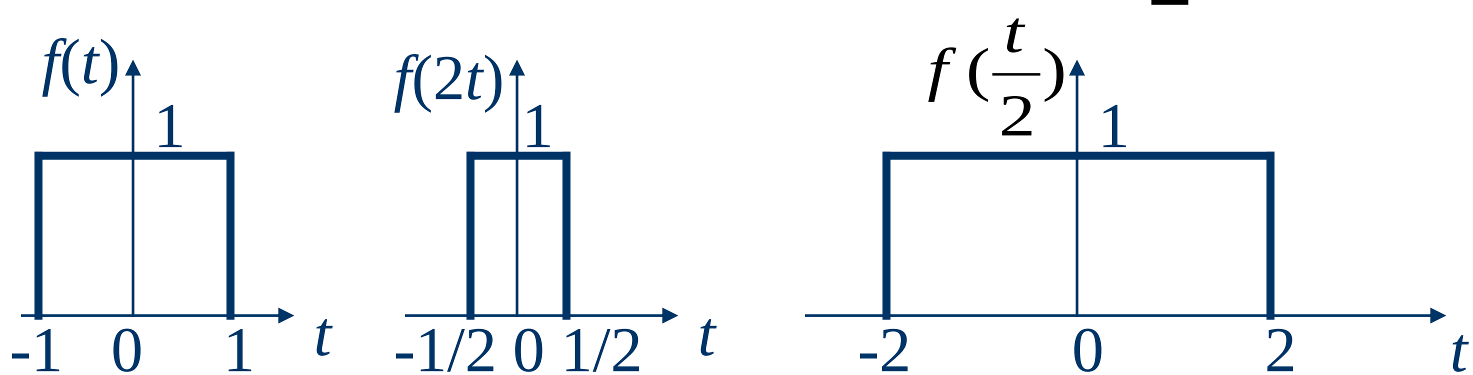
$t_0<0$时，$f(t)$在 t 轴上整体左移

1.4 信号的运算

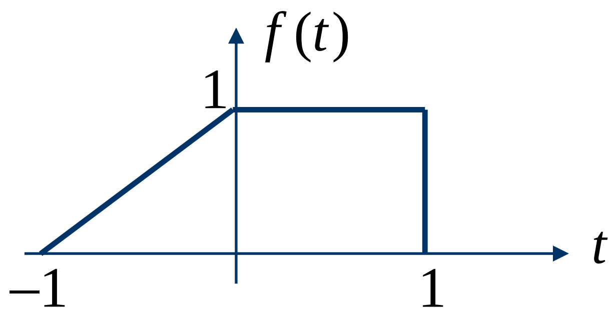


（3）尺度变换运算

$f(t) \rightarrow f(2t)$ 压缩　　　$f(t) \rightarrow f(\frac{t}{2})$ 扩展



例1.4-1： 信号如下图所示，求$f(-2t+3)$，并画出波形。



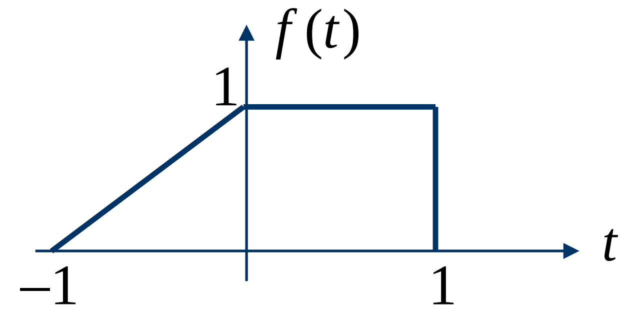
解法一：先求表达式再画波形。

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & -1\le t\le 0 \\ 1 & 0<t<1 \\ 0 & t<-1 及 t>1 \end{cases}$$

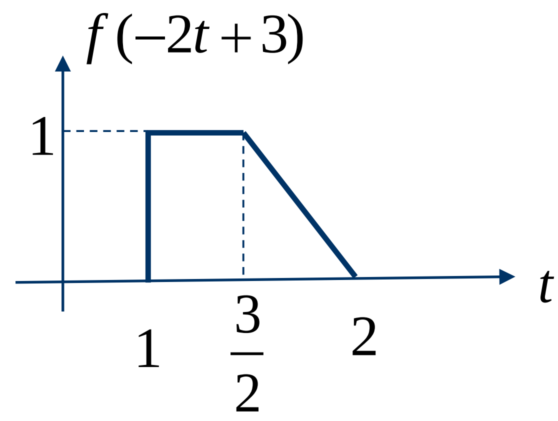
$$f(-2t+3)=\begin{cases} -2t+4 & -1\le -2t+3\le 0 \\ 1 & 0<-2t+3<1 \\ 0 & -2t+3<-1 及 -2t+3>1 \end{cases}$$

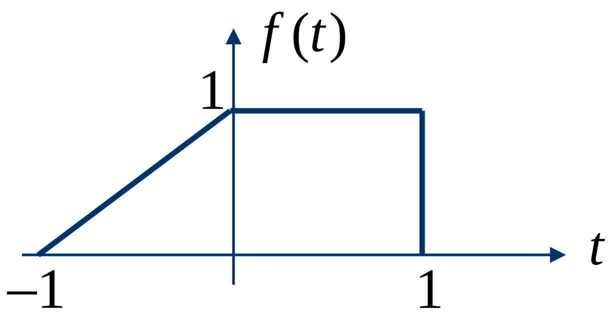
1.4 信号的运算

$$f(-2t+3)=\begin{cases}-2t+4 & -1\le -2t+3\le 0\\ 1 & 0<-2t+3<1\\ 0 & -2t+3<-1\text{及}-2t+3>1\end{cases}$$



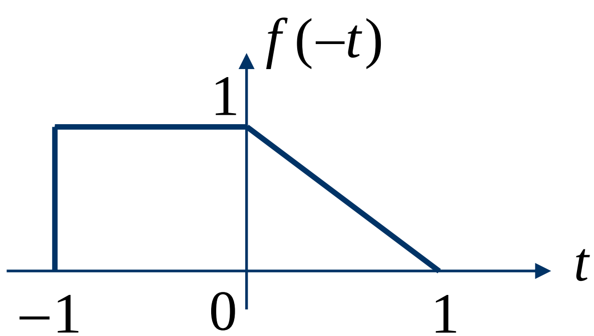
$$=\begin{cases}-2t+4 & \frac{3}{2}\le t\le 2\\ 1 & 1<t<\frac{3}{2}\\ 0 & t<1\text{及}t>2\end{cases}$$

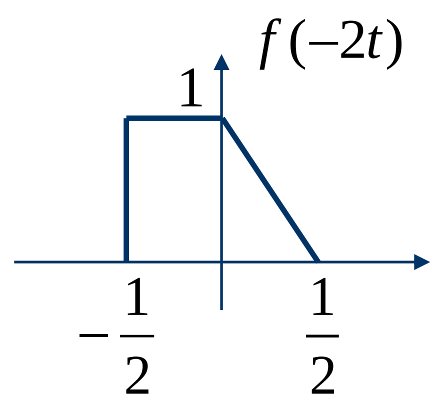


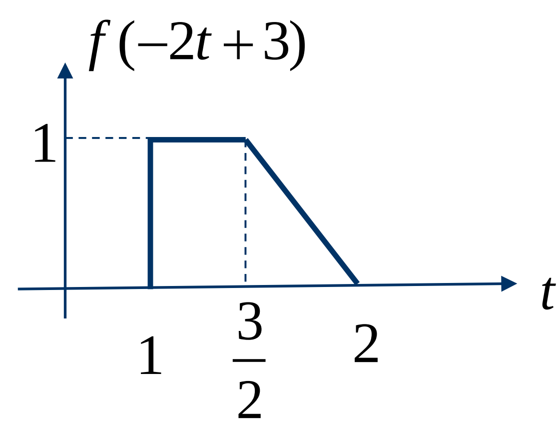


解法二：先画波形再写表达式。

$$f(t)\xrightarrow{\text{反褶}} f(-t)\xrightarrow{\text{尺度}} f(-2t)\xrightarrow{\text{时移}} f(-2t+3)=f[-2(t-\frac{3}{2})]$$





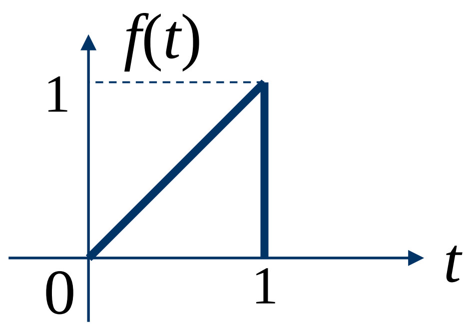


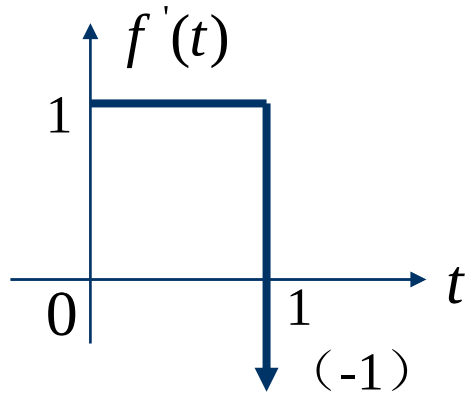
4. 信号的微分与积分运算

（1）微分运算

信号的微分 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$（也可写为 $f'(t)$）表示信号随时间变化的变化率。

例1.4-2 求下图所示信号$f(t)$的微分$f'(t)$，并画出$f'(t)$的波形。





解：$f(t) = t\,[u(t) - u(t-1)]$

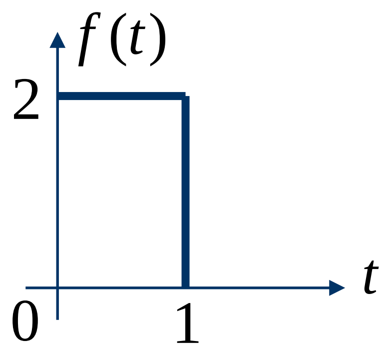
$$f'(t) = [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)]$$

$$= [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1)$$

(2) 积分运算

信号 $f(t)$ 的积分 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$（也可写作 $f^{(-1)}(t)$）在任意时刻的值等于从 $-\infty$ 到 t 区间内 $f(t)$ 与时间轴所包围的面积。

例1.4-3 求下图所示信号 $f(t)$ 的积分 $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$，并画出其波形。



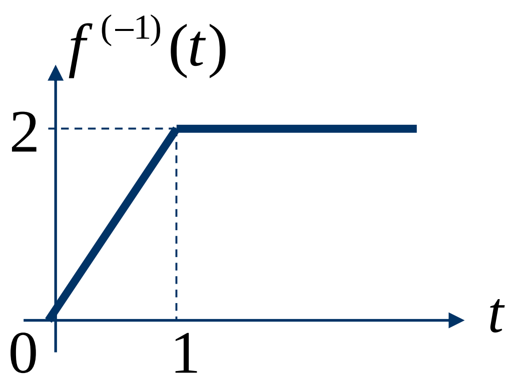
解： 1）当 $t<0$ 时，$f^{(-1)}(t)=0$

2）当 $0\le t\le 1$ 时，$f^{(-1)}(t)=\int_{0}^{t} 2\mathrm{d}\tau=2t$

3）当 $t>1$ 时，$f^{-1}(t)=\int_{0}^{1} 2\mathrm{d}\tau=2$

所以

$$f^{(-1)}(t)=2t[u(t)-u(t-1)]+2u(t-1)$$
$$=2tu(t)-2(t-1)u(t-1)$$



1.4.2 信号的卷积运算

卷积积分定义为 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (1.4-4)$

(1) 卷积积分的图解法

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将 $f_1(t)$和$f_2(t)$的自变量 t 改成 τ ，即： $f_1(t)\to f_1(\tau),\quad f_2(t)\to f_2(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的四步曲）：

反褶、时移、相乘、积分。

反褶： $f_2(\tau)\to f_2(-\tau)$

时移： $f_2(-\tau)\to f_2(t-\tau)=f_2[-(\tau-t)]\begin{cases} t<0, & \text{左移 } |t| \\ t>0, & \text{右移 } t \end{cases}$

相乘： $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$

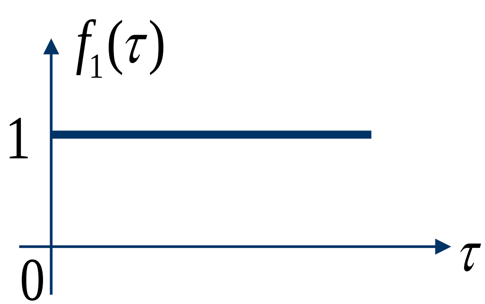
1.4 信号的运算

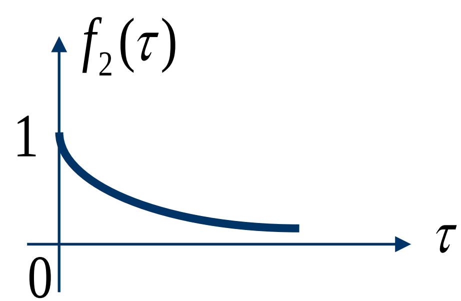
积分： $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

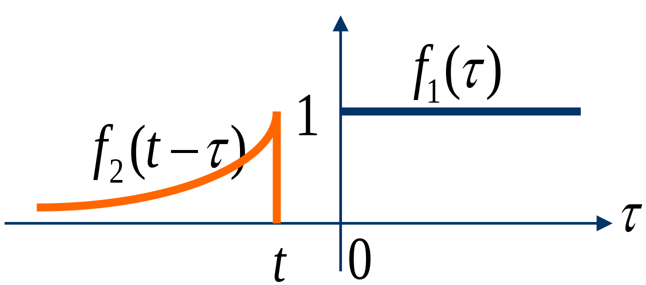
计算卷积积分的关键是定积分限。

例1.4-4：已知 $f_1(t)=u(t),\ f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$

解： $s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

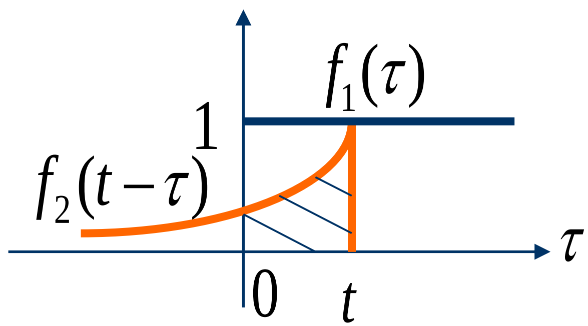






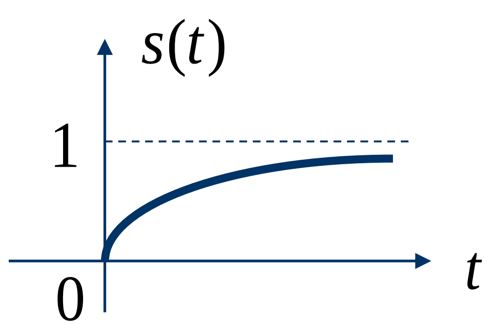
1）当 $t<0$ 时， $s(t)=0$

2）当 $t>0$ 时，



$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$=(1-e^{-t})$$



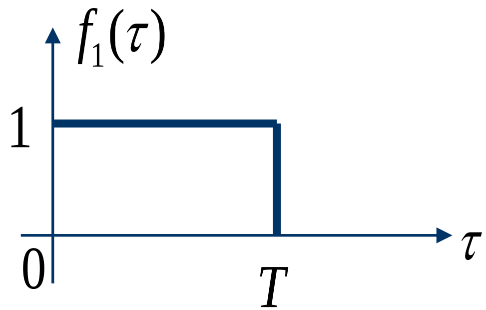
$$s(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

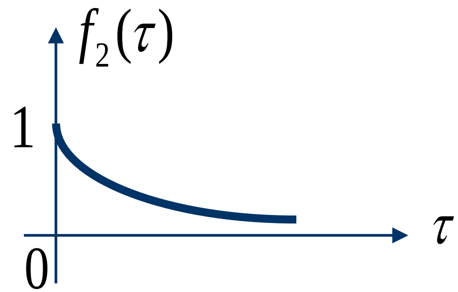
Show

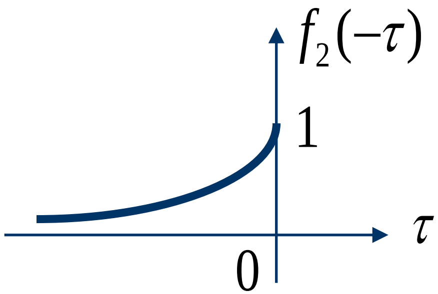
例1.4-5： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求

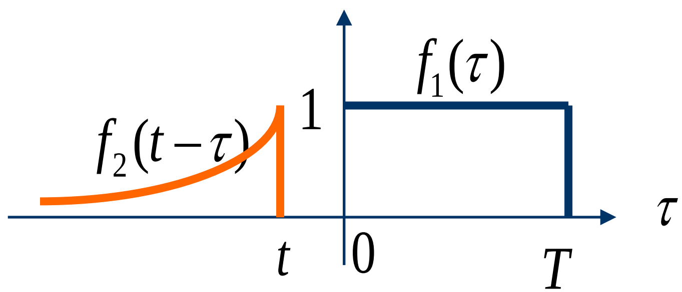
$$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

解：

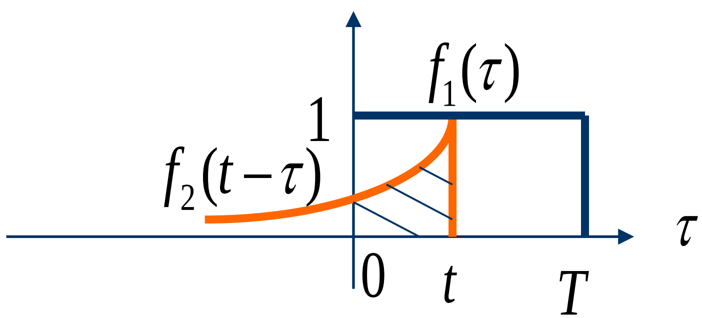






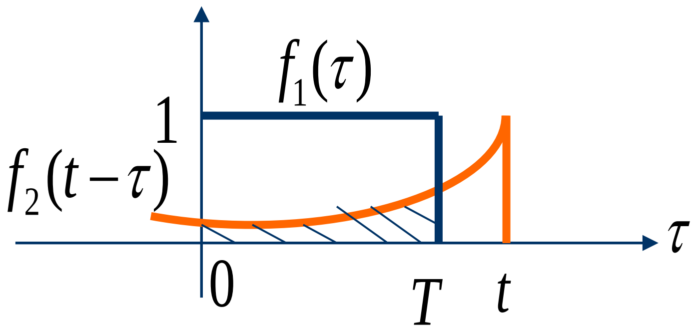


1）当 $t<0$ 时，$s(t)=0$



2）当 $0<t<T$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=\left(1-e^{-t}\right)$$

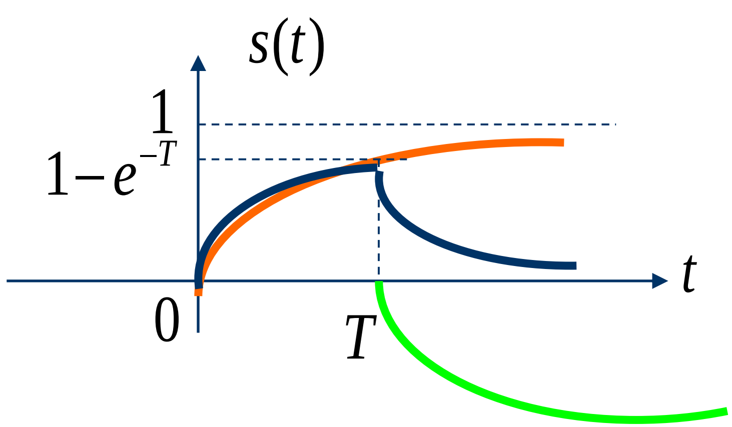


3）当 $t \geq T$ 时，

$$s(t)=\int_0^T 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-(t-T)}-e^{-t}$$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

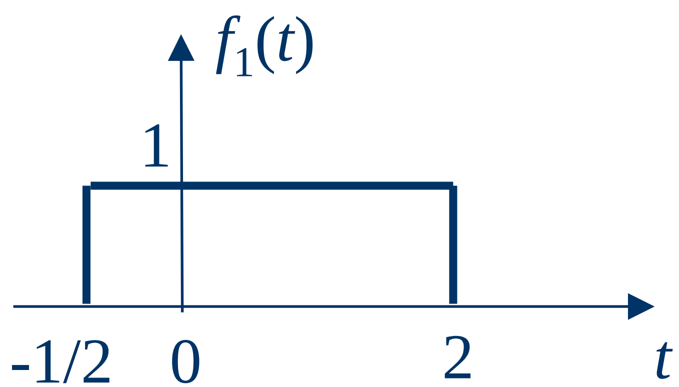


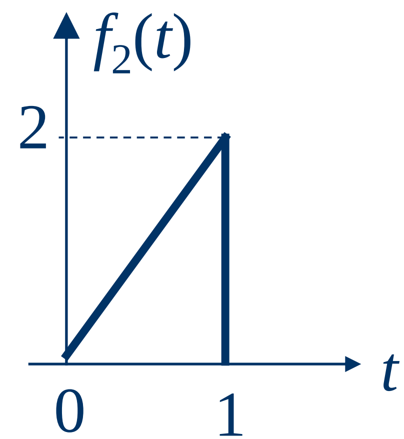
Show

例1.4-6 已知 $f_1(t)=u(t+\frac{1}{2})-u(t-2)$和 $f_2(t)=2t[u(t)-u(t-1)]$

求： $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$

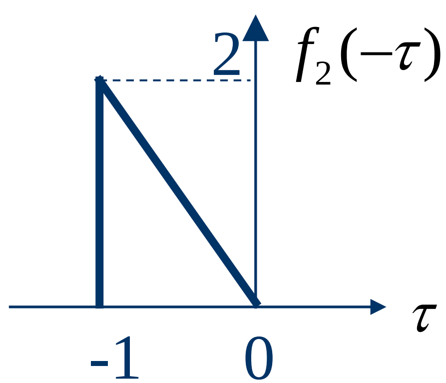
解：



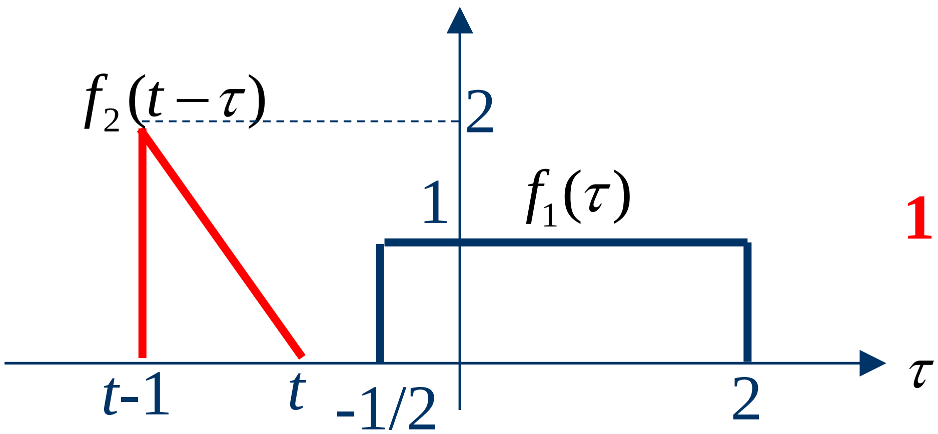


$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

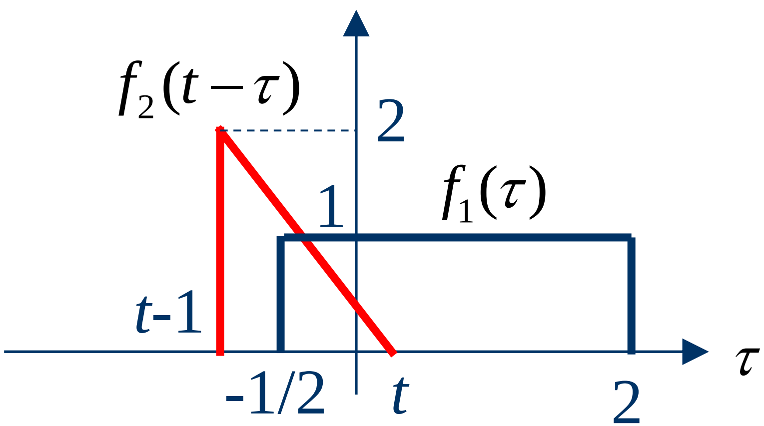
$$f_2(t-\tau)=2(t-\tau)[u(t-\tau)-u(t-\tau-1)]$$



1.4 信号的运算



1）当 $t \le -\frac{1}{2}$ 时，$y(t)=0$

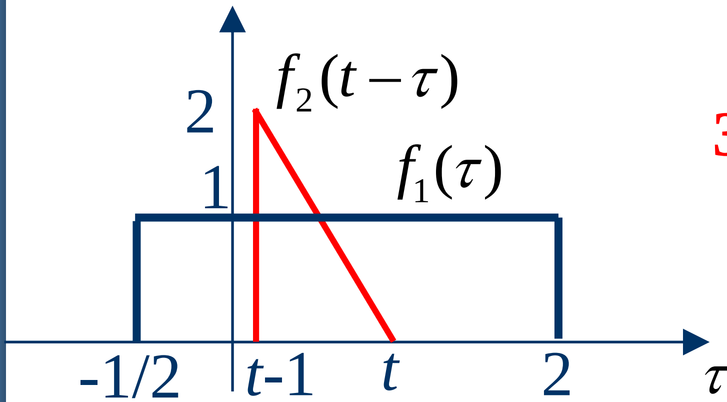


2）当 $t \ge -\frac{1}{2}$ 和 $t-1 \le -\frac{1}{2}$，

即 $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ 时，

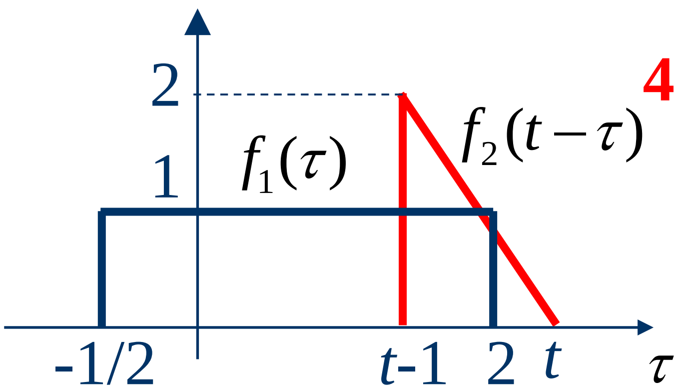
$$y(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{t} 2(t-\tau)d\tau$$

$$=t^2+t+\frac{1}{4}$$



3）当$t \le 2, t-1 \ge -\dfrac{1}{2}$，即当 $\dfrac{1}{2} \le t \le 2$时

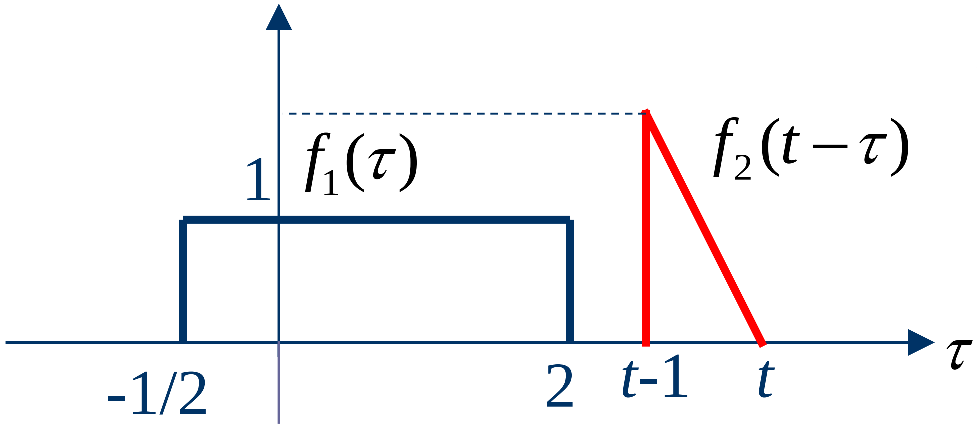
$$y(t)=\int_{t-1}^{t} 2(t-\tau)d\tau \;=1$$

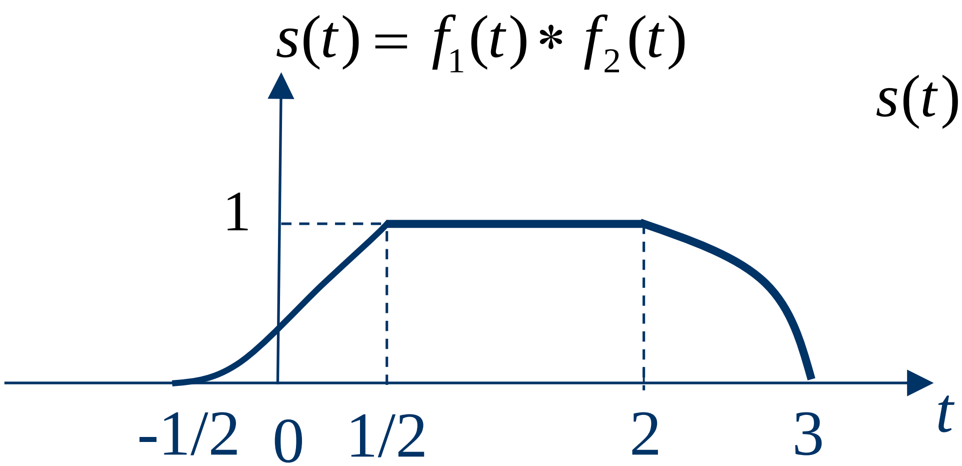


4）当 $t \ge 2, t-1 \le 2$，即当 $2 \le t \le 3$时，

$$y(t)=\int_{t-1}^{2} 2(t-\tau)d\tau \;=-t^2+4t-3$$

1.4 信号的运算





5）当 $t-1\geq 2$，即 $t\geq 3$ 时，

$$s(t)=0$$

$$s(t)=\begin{cases} 0 & t\leq -\frac{1}{2} \\ t^2+t+\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\leq t\leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}\leq t\leq 2 \\ -t^2+4t-3 & 2\leq t\leq 3 \\ 0 & t\geq 3 \end{cases}$$

Show

(2)卷积积分的性质

① 代数性质

交换律 $$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \qquad (1.4-5)$$

分配律 $$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t) \qquad (1.4-6)$$

结合律 $$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)] \qquad (1.4-7)$$

② 微分与积分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)] = f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t) \qquad (1.4-8)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda = f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda * f_2(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda \qquad (1.4-11)$$

简记为 $f_1(t)*f_2(t) = f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)$

③ 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \qquad (1.4-12)$$

推广：

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0) \qquad (1.4-13)$$

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda \qquad (1.4-14)$$

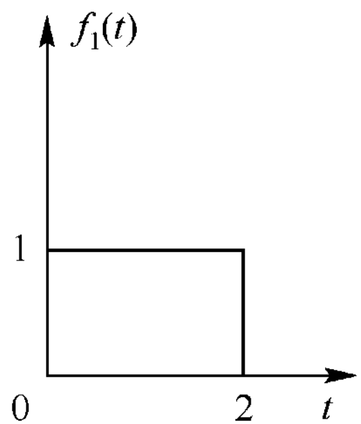
$$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t) \qquad (1.4-15)$$

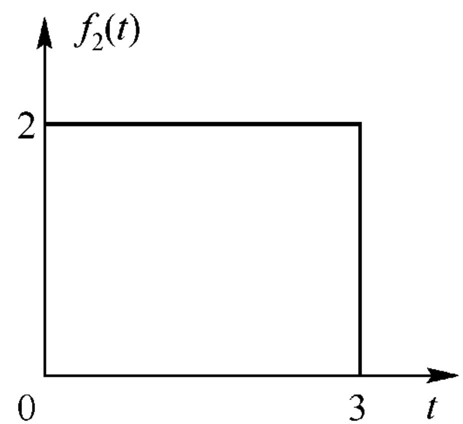
④ 时移特性

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$, 则

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)$$

例1.4-8： 用卷积积分的微分与积分特性求下列图中两信号$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积积分$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$, 并画出$s(t)$的波形。

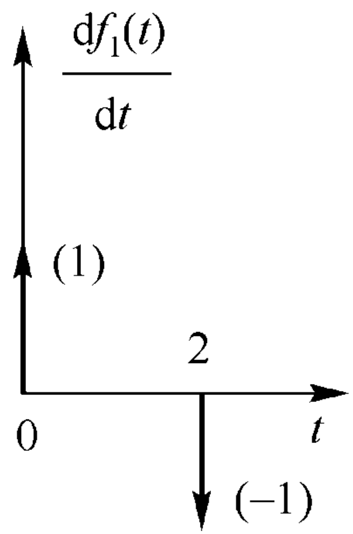


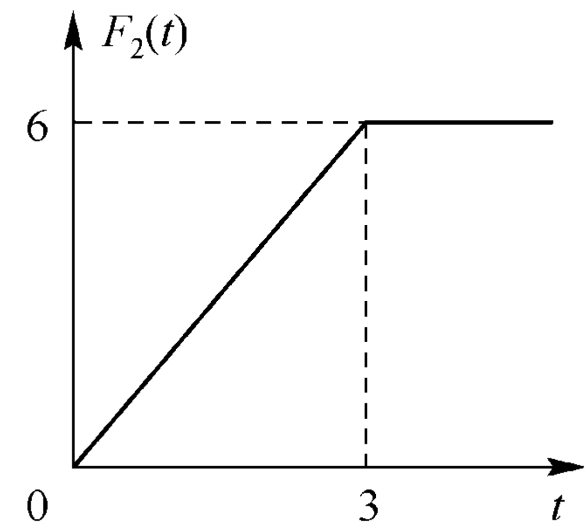


1.4 信号的运算

解： $F_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = 2t[u(t)-u(t-3)]+6u(t-3)$

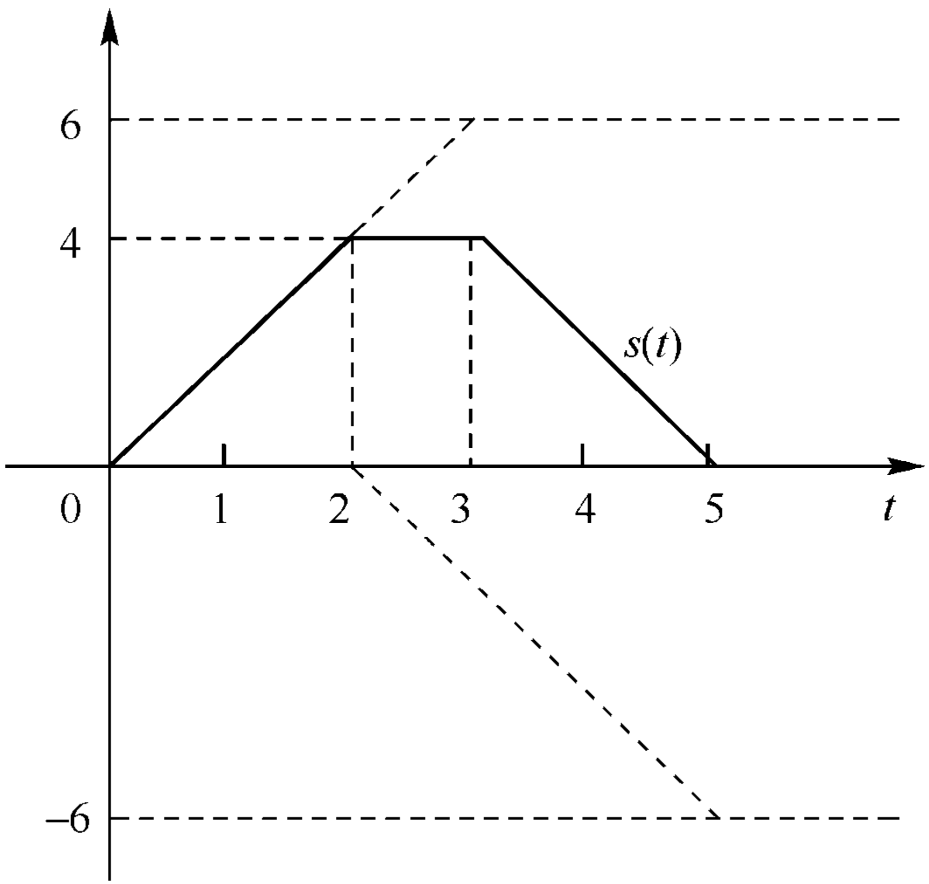
$$\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)-\delta(t-2)$$





$$s(t)=f_1(t)*f_2(t)=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}*\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=[\delta(t)-\delta(t-2)]*F_2(t)=\ F_2(t)-F_2(t-2)$$



波形的合成

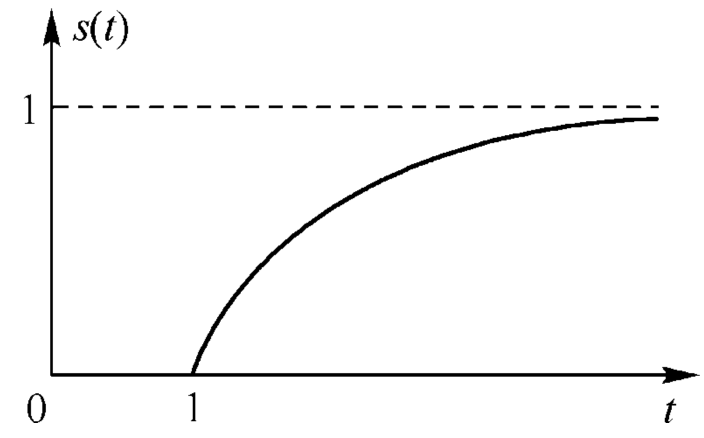
注意：

只有当需要求导数的函数经求导，再经积分后，能够得到原函数的情况下，才能使用式(1.4-11)来求两函数的卷积，否则就不能直接使用该式。

例1.4-9： 已知 $f_1(t) = u(t)$，$f_2(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)$，求 $s(t)= f_1(t)*f_2(t)$。

解： 该例与例1. 4–4做比较可知，本例中的$f_1(t)$与例1. 4–4中的$f_1(t)$相同，而本例中的$f_2(t)$是将例1. 4–4中的$f_2(t)$右移1得到的，所以根据卷积的时移特性及例1. 4–4的结果，可以直接写出$s(t)$的表达式

$$s(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1)$$



Show

1.5 信号的分解

1. 偶分量与奇分量

偶分量定义为 $f_e(t) = f_e(-t)$ (1.5−1)

奇分量定义为 $f_o(t) = -f_o(-t)$ (1.5−2)

任意信号可分解为偶分量与奇分量之和，即

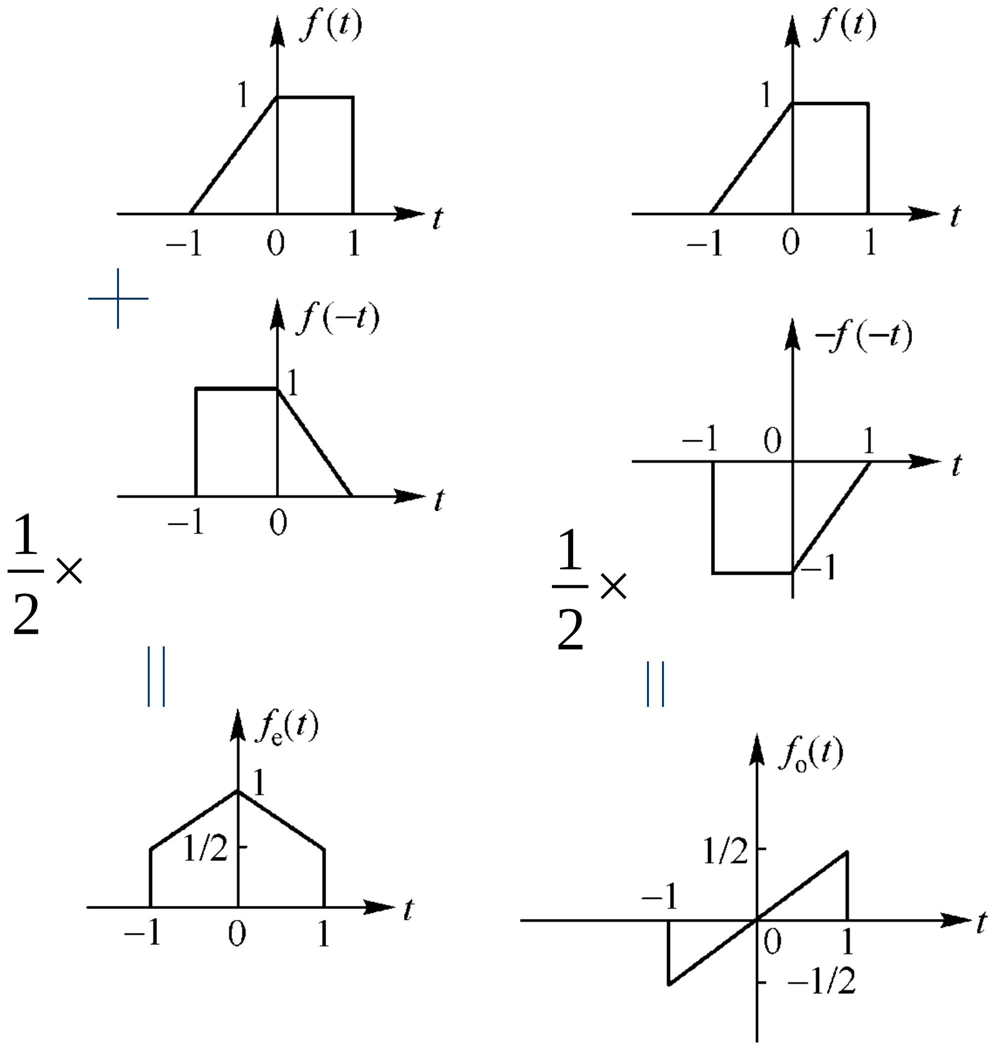
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \qquad (1)$$

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t) \qquad (2)$$

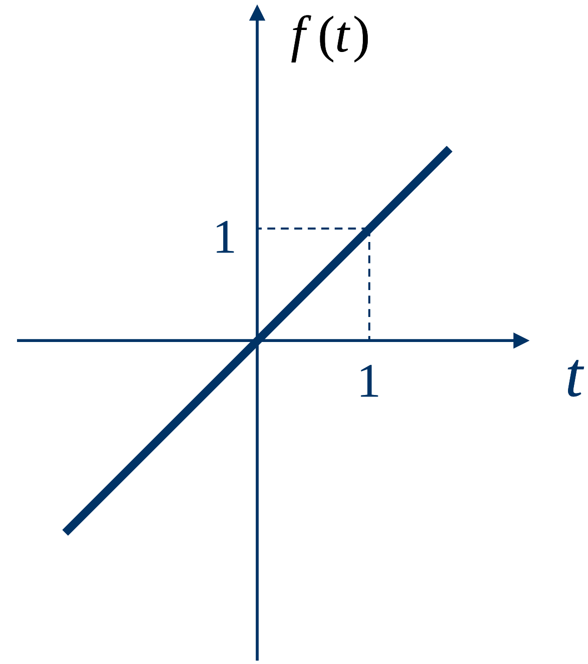
$$(1)+(2): \quad f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \qquad (1.5-5)$$

$$(1)-(2): \quad f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \qquad (1.5-6)$$

例1:



例2:

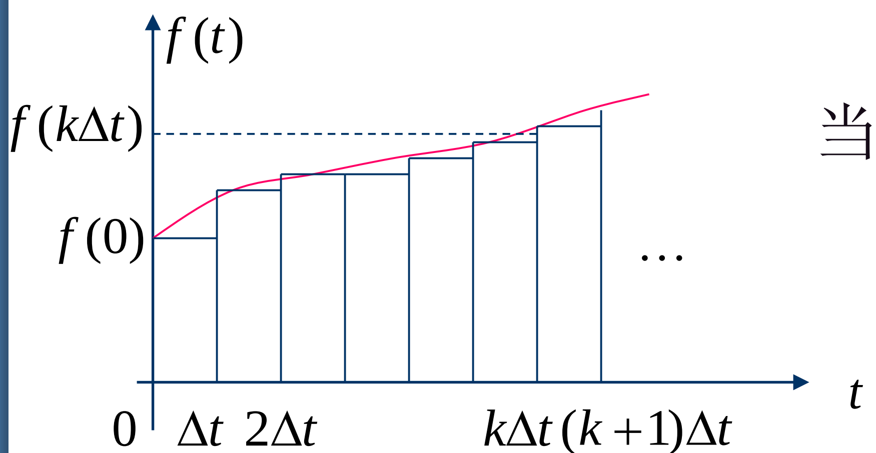


$$f_o(t) = f(t)$$

$$f_e(t) = 0$$

2. 脉冲分量

任意信号*f*(*t*)可以用一系列矩形脉冲相叠加的阶梯信号来近似表示。这种分割方法称为纵向分割。

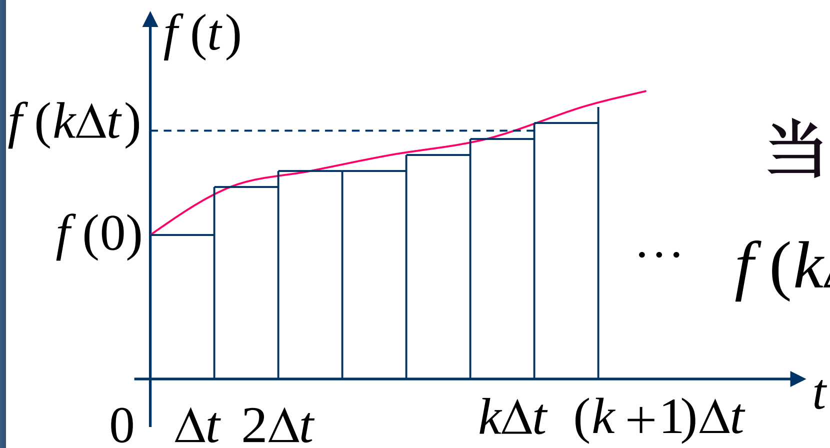


当 $t=0$ 时，对应的矩形脉冲为

$$f(0)[u(t)-u(t-\Delta t)]$$

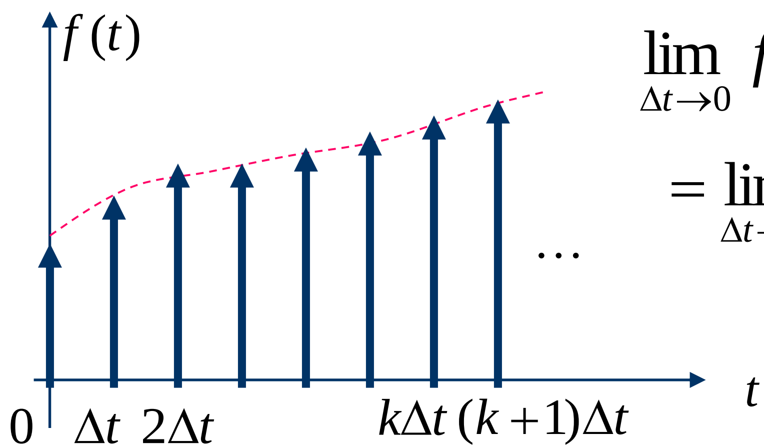
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(0)[u(t)-u(t-\Delta t)]}{\Delta t}\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0}f(0)\delta(t)\Delta t$$

1.5 信号的分解



当 $t = k\Delta t$时，对应的矩形脉冲为

$$f(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$



$$\lim_{\Delta t\to 0} f(k\Delta t)\frac{\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}}{\Delta t}\Delta t$$

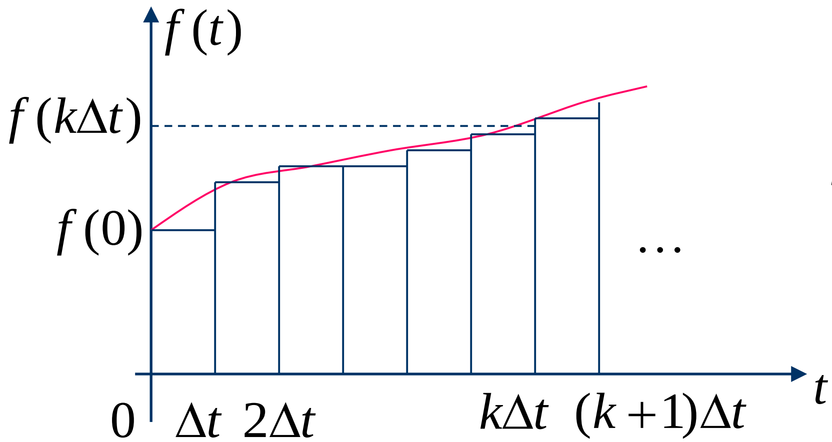
$$=\lim_{\Delta t\to 0} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$

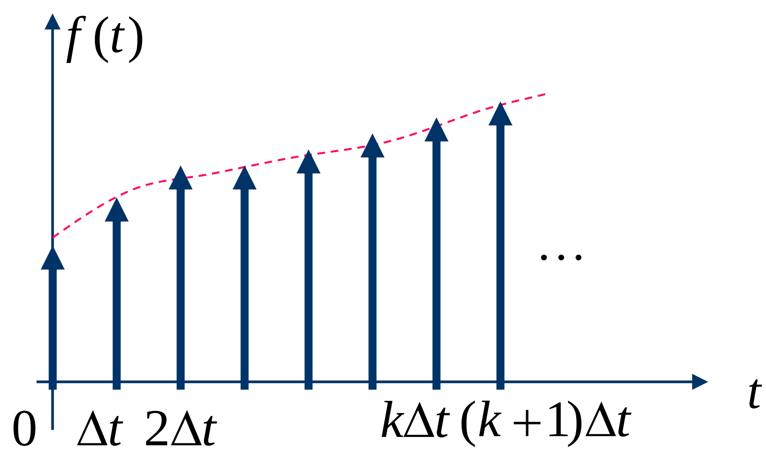
将上述无穷多个矩形脉冲迭加，就得到***f(t)***的表达式，即

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t \qquad (1.5-8)$$

Show

1.5 信号的分解





$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，

$$\Delta t \to \mathrm{d}\tau, k\Delta t \to \tau, \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

所以

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

3. 正交函数分量

如果用正交函数集表示一个信号，那么，组成信号的各分量就是相互正交的。

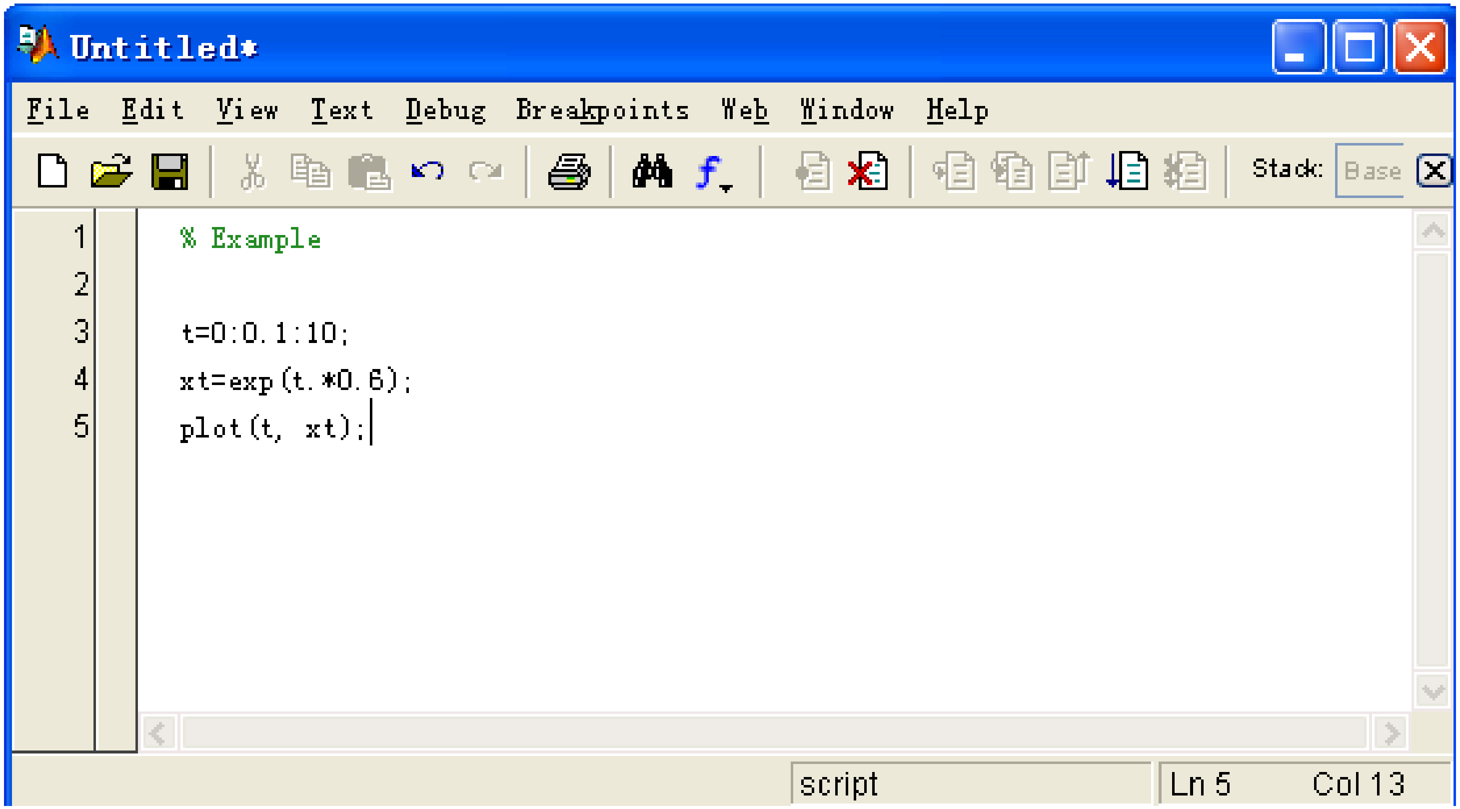
例如，各次谐波的正弦与余弦信号构成的三角函数集就是正交函数集。任何周期信号$f(t)$只要满足狄里赫利条件，就可以由这些三角函数的线性组合来表示，称为$f(t)$的三角形式的傅里叶级数。同理，$f(t)$还可以展开成指数形式的傅里叶级数。

1.6 MATLAB的操作界面及连续信号的表示

1. MATLAB的操作界面

1.6 MATLAB的操作界面及连续信号的表示

2. MATLAB的编辑界面



文件名：file1.m

文件名：不能出现汉字，‘-’连字符，否则解释系统不认可，就是说文件不能运行。

本章小结

1. 常用的连续时间信号
2. 奇异函数

   阶跃信号和冲激信号的定义、关系、性质及应用
3. 信号运算

   基本运算、信号的变换运算（反褶、时移、尺度变换）

   卷积积分（四步曲）
4. 信号的奇偶分解与矩形脉冲分解