第6章　连续时间系统的复频域分析

6.1 拉普拉斯变换

6.2 拉普拉斯变换的基本性质

6.3 拉普拉斯逆变换

6.4 系统响应的拉氏变换求解

6.5 系统函数与冲激响应

6.6 零、极点分布与时域响应特性

6.7 系统函数零、极点分布确定频率响应

6.8 全通系统和最小相位系统

6.9 系统模拟及信号流图

6.10 系统的稳定性

6.11 MATLAB在连续系统变换域分析中的应用

6.1 拉普拉斯变换

拉氏变换的优点：

1）求解简化；

2）把微分、积分方程转化为代数方程；

3）将复杂函数转化为简单的初等函数；

4）将卷积转化为乘法运算。

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

引入衰减因子$\mathrm{e}^{-\sigma t}$，则 $\mathrm{e}^{-\sigma t}f(t)$的傅氏变换为

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\sigma t}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\Omega)t}\mathrm{d}t$$

令$s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$，则

$$F_{\mathrm{B}}(s)=\mathcal{L}_B[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$ ------ ***f*(*t*)的双边拉氏变换**

$$f(t)=\mathcal{L}_B^{-1}[F(\mathrm{j}\Omega)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$ ------ 双边拉氏逆变换

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

在信号与系统分析中，一般所遇到的总是因果信号，则

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (6.1-5)$$

------ $f(t)$的单边拉氏变换

$$f(t)=\mathcal{L}_B^{-1}[F(\mathrm{j}\Omega)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F_{\mathrm{B}}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \qquad t\geq 0$$

------ 单边拉氏逆变换

简记为

$$f(t)\xleftrightarrow{\text{L.T.}}F(s)$$

6.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

拉普拉斯变换与傅里叶变换的区别：

FT: 时域函数$f(t)$ $\longrightarrow$ 频域函数$F(j\Omega)$

变量 t $\longrightarrow$ 变量 Ω

（变量 t、Ω 都是实数）

LT: 时域函数$f(t)$ $\longrightarrow$ 复频域函数$F(s)$

变量 t $\longrightarrow$ 变量s (复频率）

t（实数） $s=\sigma+j\Omega$ (复数）

即： 傅里叶变换建立了时域与频域之间的联系；

拉普拉斯变换建立了时域与复频域之间的联系。

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

$$F_{\mathrm{B}}(s)=\mathcal{L}_{B}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (1)$$

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (2)$$

在以 σ 为实轴，jΩ 为虚轴的复平面中，凡能使式(1)或式(2)积分收敛，即满足下列绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty$$

的 σ 的取值范围称为拉氏变换的收敛域，以ROC表示。

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

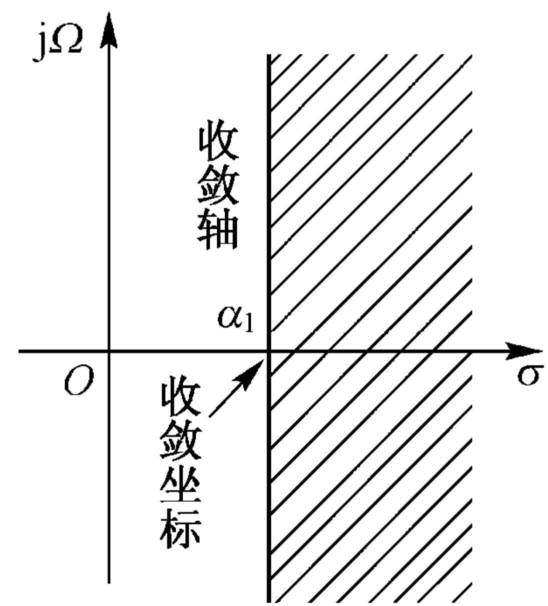
例6.1-1 求因果信号$f_1(t)=\mathrm{e}^{\alpha_1 t}u(t)$（$\alpha_1$为实数）的双边拉氏变换及收敛域。

解： $$F_{\mathrm{B1}}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s-\alpha_1)t}\mathrm{d}t$$

当$\sigma=\mathrm{Re}[s]>\alpha_1$时，有

$$F_{\mathrm{B1}}(s)=-\frac{1}{s-\alpha_1}\mathrm{e}^{-(s-\alpha_1)t}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha_1}$$

若$\alpha_1<0$，收敛轴将移到$\mathrm{j}\Omega$轴的左侧。



6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

例6.1-2 求左边信号$f_2(t)=-\mathrm{e}^{\alpha_2 t}u(-t)$（$\alpha_2$为实数）的双边拉氏变换及收敛域。

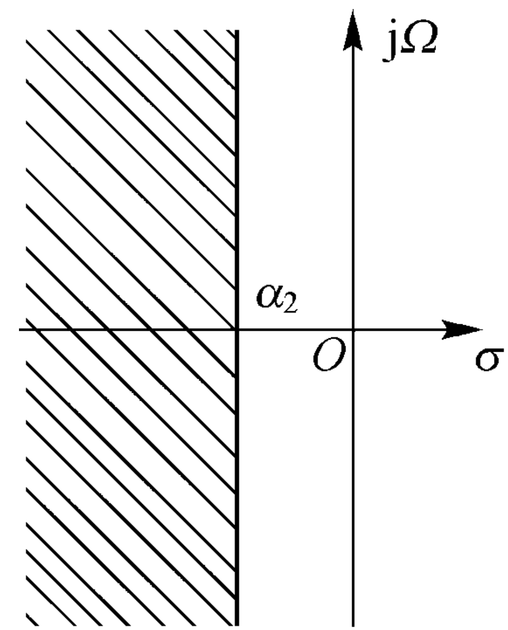
解：

$$F_{B2}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(s-\alpha_2)t}\mathrm{d}t$$

当$\sigma=\mathrm{Re}[s]<\alpha_2$时，有

$$F_{B2}(s)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(s-\alpha_2)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s-\alpha_2}\mathrm{e}^{-(s-\alpha_2)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s-\alpha_2}$$



若$\alpha_2>0$，收敛轴将移到jΩ 轴的右侧。

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

例6.1-3 求双边信号 $f(t)=\begin{cases} e^{\alpha_2 t} & t<0 \\ e^{\alpha_1 t} & t>0 \end{cases}$ 的双边拉氏变换及收敛域。

解：

$$F_B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha_2 t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty} e^{\alpha_1 t}e^{-st}dt$$

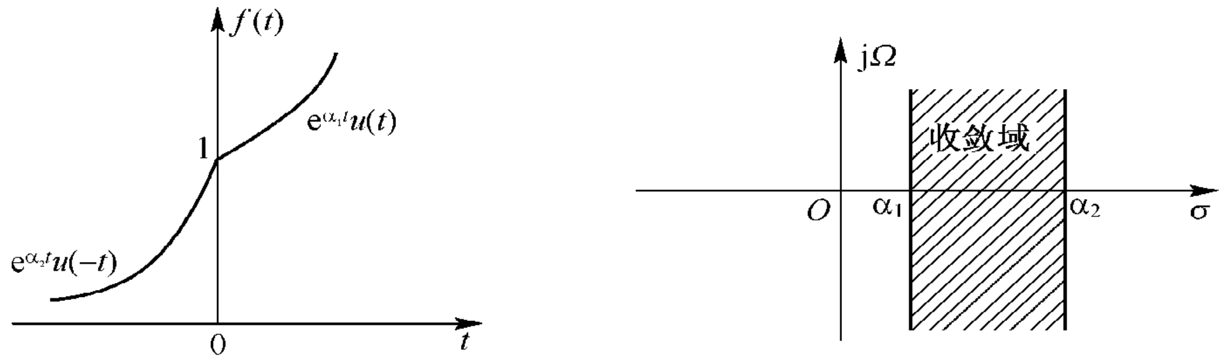
$$=\frac{e^{-(s-\alpha_2)t}}{-(s-\alpha_2)}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(s-\alpha_1)t}}{-(s-\alpha_1)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

当$\sigma=\mathrm{Re}[s]<\alpha_2$，上式第一项存在；当$\sigma=\mathrm{Re}[s]>\alpha_1$，上式第二项存在，这时

$$F_B(s)=\frac{1}{-(s-\alpha_2)}+\frac{1}{s-\alpha_1}=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)} \qquad \alpha_1<\sigma<\alpha_2$$

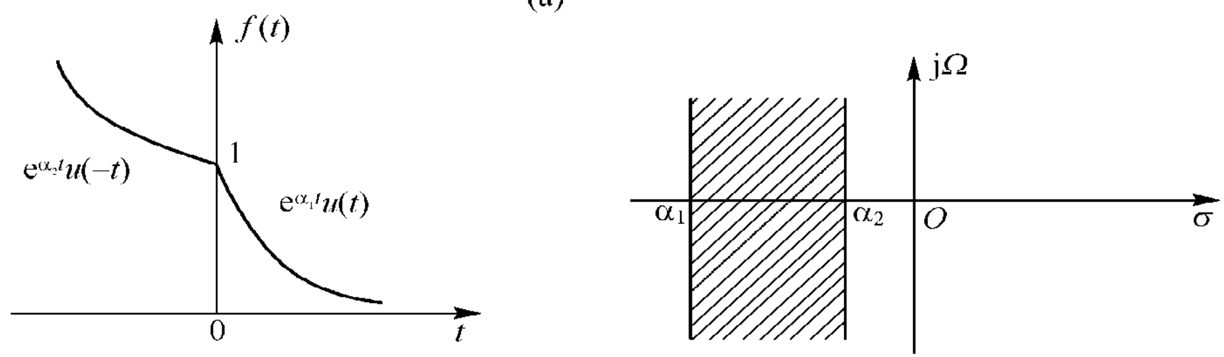
6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

$\alpha_2 > \alpha_1 > 0$



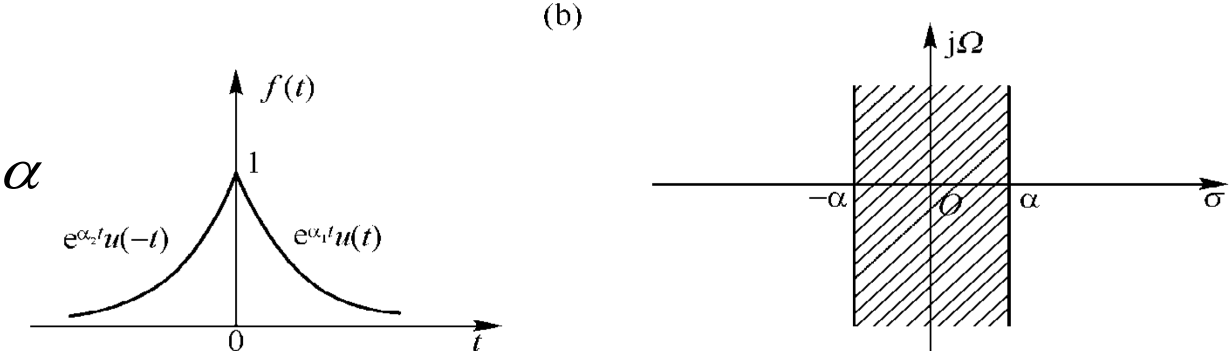
(a)

$\alpha_1 < \alpha_2 < 0$



(b)

$\alpha_1 = -\alpha,\ \alpha_2 = \alpha$



(c)

6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

单边拉氏变换的ROC为平行于 jΩ 轴的一条收敛轴的右边区域，可表示为

$$\sigma = \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

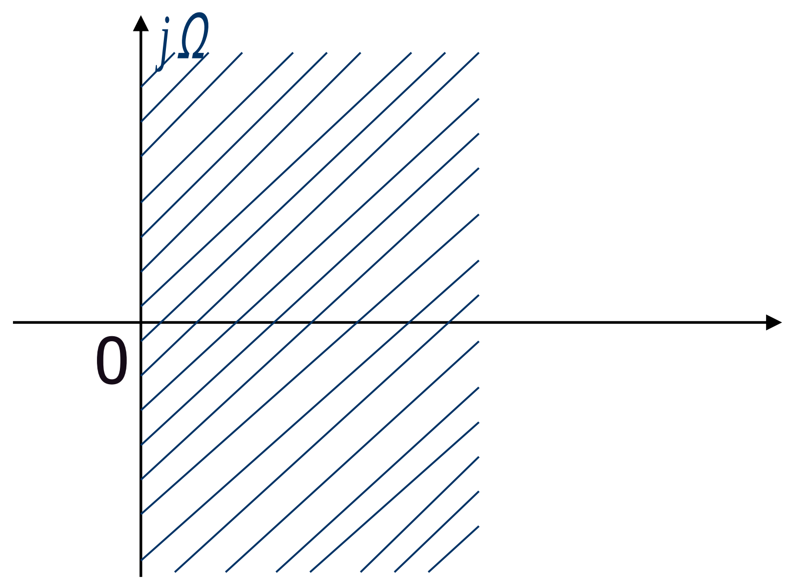
若 $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0, \ (\sigma > \sigma_0)$，则$f(t)$存在拉氏变换，收敛域为：$\sigma > \sigma_0$

例1 $f_1(t) = t$

$$\lim_{t\to\infty} te^{-\sigma t} = 0, \ (\sigma > 0)$$

例2 $f_2(t) = t^n$

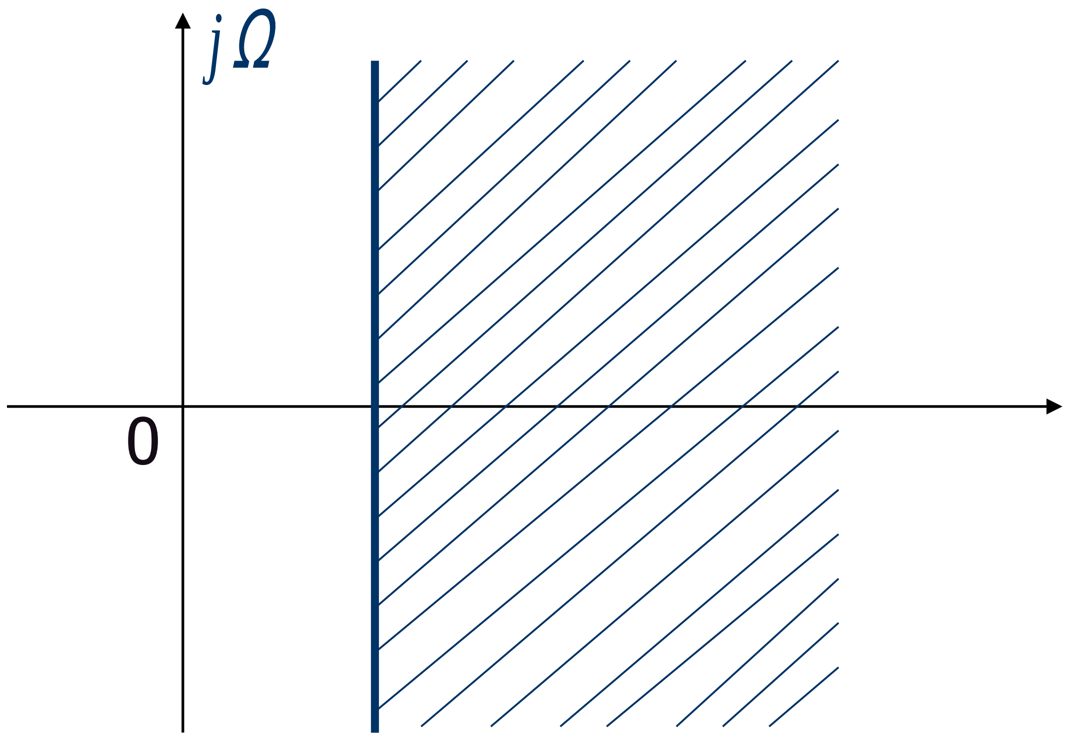
$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\sigma t} = 0, \ (\sigma > 0)$$



6.1.2 拉普拉斯变换的收敛域

例3 $f_3(t) = e^{\alpha t} \quad (\alpha > 0)$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = 0, \quad (\sigma > \alpha)$$



6.1.3 典型信号的拉普拉斯变换

1．指数信号 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s+\alpha}\qquad(\sigma>-\alpha)$$

2．单位阶跃信号 $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s}\qquad(\sigma>0)$$

3．单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\left.\mathrm{e}^{-st}\right|_{t=0}=1\qquad(\sigma>-\infty)$$

同理 $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)]=\int_{0^-}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st_0}\qquad(\sigma>-\infty)$

4. t的正幂信号 $t^n u(t)$（n是正整数）

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{t^n}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

所以 $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \dfrac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)]$

当$n=1$时 $\mathcal{L}[t u(t)] = \dfrac{1}{s^2}$ $(\sigma>0)$

当$n=2$时 $\mathcal{L}[t^2 u(t)] = \dfrac{2}{s^3}$ $(\sigma>0)$

以此类推，得 $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(\sigma>0)$

6.2 拉普拉斯变换的基本性质

1. 线性特性

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$， 则

$$\mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$$

例6.2-1 求 $f(t) = \sin\Omega_0 t \cdot u(t)$ 的拉氏变换。

解： 由于 $\sin\Omega_0 t = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t})$， 所以

$$\mathcal{L}[\sin\Omega_0 t \cdot u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t})u(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{1}{s - \mathrm{j}\Omega_0} - \frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{1}{s + \mathrm{j}\Omega_0} = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2} \qquad (\sigma > 0)$$

同理 $$\mathcal{L}[\cos\Omega_0 t \cdot u(t)] = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2} \qquad (\sigma > 0)$$

2、时域微分和积分

（1）时域微分

若$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}]=sF(s)-f(0^-)$ (6.2−5)

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-1)}(0^-)$$

$$=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0^-)$$

2、时域微分和积分

例6.2-2 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，求 $f'(t)$的像函数。

解： 已知 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s+\alpha}$

所以 $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0^-)=\dfrac{s}{s+\alpha}-0=\dfrac{s}{s+\alpha}$

（2）时域积分

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} \qquad (6.2-7)$$

式中： $f^{(-1)}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

2、时域微分和积分

例6.2-3 试通过阶跃信号$u(t)$的积分求$tu(t)$和$t^n u(t)$的拉氏变换。

解： 因为 $$F(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$

而 $$tu(t)=\int_{0^-}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

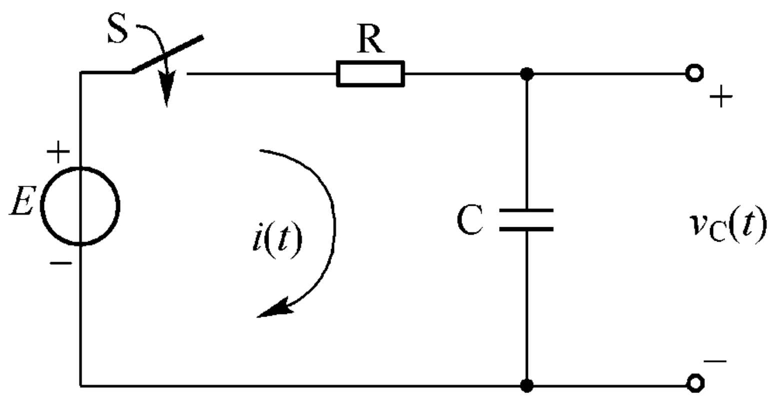
所以 $$\mathcal{L}[tu(t)]=\frac{1}{s^2}$$

重复应用这个性质，可得

$$\mathcal{L}[t^n u(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

2、时域微分和积分

例6.2-4 图示电路，在$t=0$时开关S闭合，求输出信号$v_C(t)$。



解： 1）列写微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=Eu(t)$$

$$v_C(0^-)=0$$

2）将微分方程两边取拉氏变换，得

$$RC\left[sV_C(s)-v_C(0^-)\right]+V_C(s)=E/s$$

解此代数方程，求得 $V_C(s)=\dfrac{E}{s(1+RCs)}=\dfrac{E}{RCs\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}$

2、时域微分和积分

3）求 $V_C(s)$ 的拉氏逆变换

$$V_C(s)=\frac{E}{RCs\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=E\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$\therefore\quad v_C(t)=\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})\qquad t\geq 0$$

3、位移性

（1）时域位移（延时）

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ ，则

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-st_0}F(s) \quad (6.2-8)$$ 式中，$t_0>0$ 。

在应用延时特性时，特别要注意它只适用于 $t_0>0$ 的情况。因为当 $t_0<0$ 时，信号左移至原点以左部分，不能包含在从 0^- 到 ∞ 的积分中去。

例6.2-5 已知 $f(t)=\sin\Omega_0 t$ 的拉氏变换为 $F(s)=\dfrac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$ ，求下列信号的拉氏变换（式中 $t_0>0$ ）。

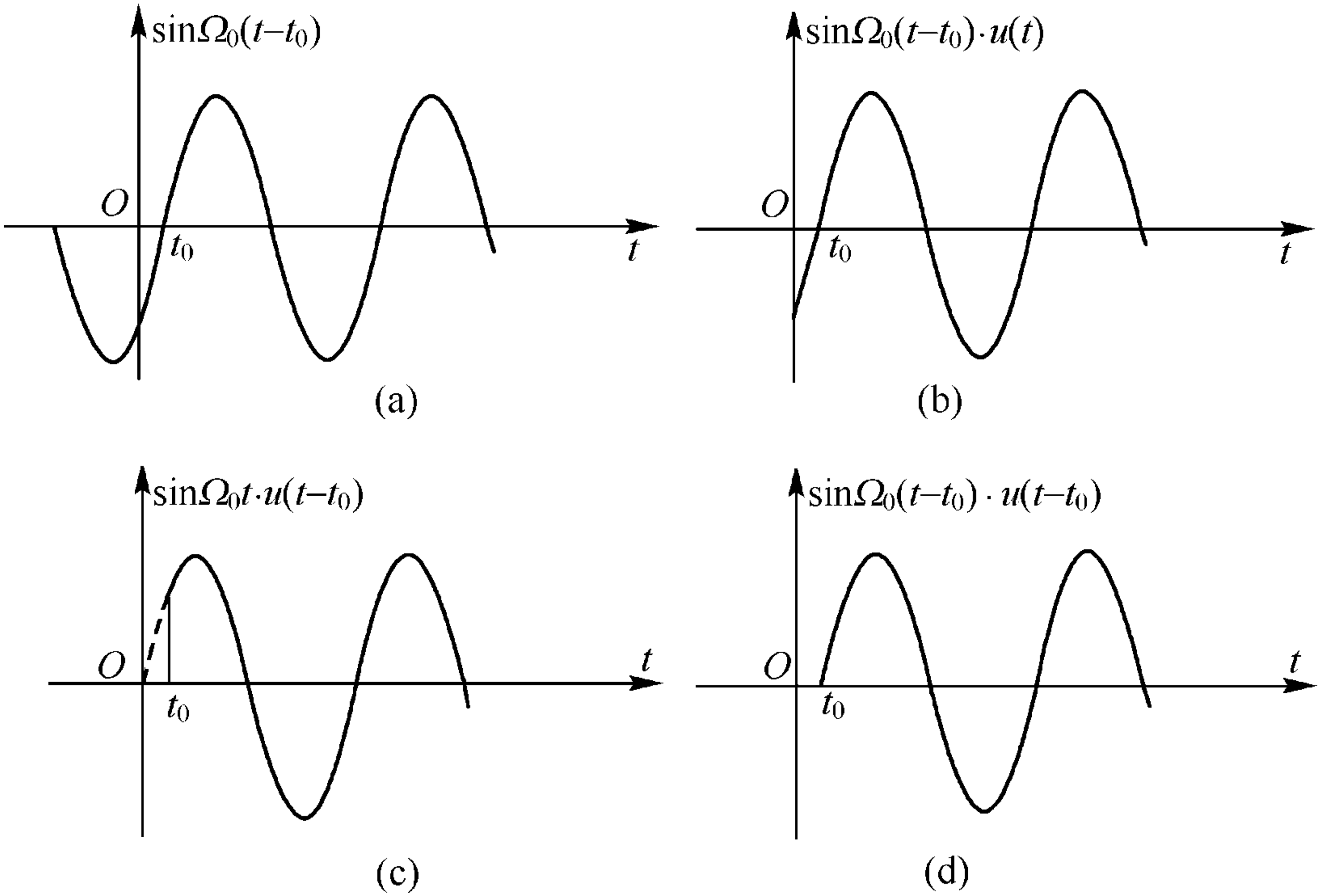
（1）$f(t-t_0)=\sin\Omega_0(t-t_0)$ ； （2）$f(t-t_0)u(t)=\sin\Omega_0(t-t_0)\cdot u(t)$ ；

（3）$f(t)u(t-t_0)=\sin\Omega_0 t\cdot u(t-t_0)$ ；

（4）$f(t-t_0)u(t-t_0)=\sin\Omega_0(t-t_0)\cdot u(t-t_0)$ 。

3、位移性

四种信号如下图所示。



3、位移性

对于（1）和（2）两种信号在$t \geq 0$时的波形相同，所以

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\right]=\mathcal{L}\left[f(t-t_0)u(t)\right]=\mathcal{L}[\sin\Omega_0(t-t_0)]$$

$$=\mathcal{L}[\sin\Omega_0 t\cos\Omega_0 t_0-\cos\Omega_0 t\sin\Omega_0 t_0]=\frac{\Omega_0\cos\Omega_0 t_0-s\sin\Omega_0 t_0}{s^2+\Omega_0^2}$$

对于信号（3）：

$$\mathcal{L}[\sin\Omega_0 t\cdot u(t-t_0)]=\int_{t_0}^{\infty}\sin\Omega_0 t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{t_0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\Omega_0)t}-\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\Omega_0)t}]\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-st_0}\left[\frac{\Omega_0\cos\Omega_0 t_0+s\sin\Omega_0 t_0}{s^2+\Omega_0^2}\right]$$

3、位移性

对于信号（4）：

$$\mathcal{L}[\sin \Omega_0 (t-t_0)\cdot u(t-t_0)] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{t_0}^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0(t-t_0)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0(t-t_0)}]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t_0}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\Omega_0)t_0}}{s-\mathrm{j}\Omega_0} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t_0}\mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\Omega_0)t_0}}{s+\mathrm{j}\Omega_0}\right] = \mathrm{e}^{-st_0}\left[\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}\right]$$

可见，在以上四种信号中，只有信号（4），即

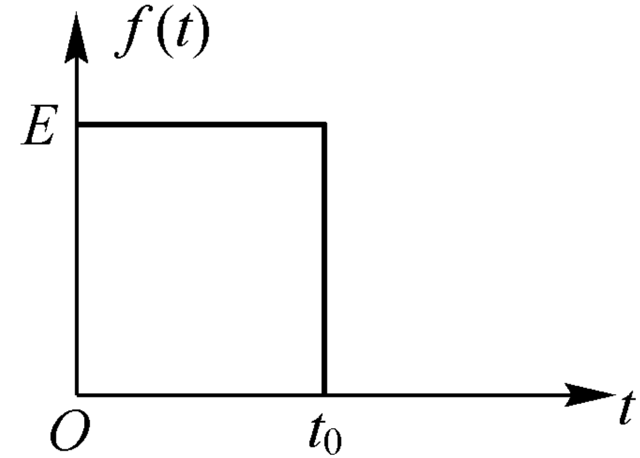
$f(t-t_0)u(t-t_0) = \sin \Omega_0 (t-t_0)\cdot u(t-t_0)$ 是信号

$f(t)u(t) = \sin \Omega_0 t\cdot u(t)$ 右移了t_0 的结果，才能应用

时移性，即 $\mathcal{L}[\sin \Omega_0 (t-t_0)\cdot u(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-st_0}\mathcal{L}[\sin \Omega_0 t] = \mathrm{e}^{-st_0}\dfrac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$

3、位移性

例6.2-6 求图示矩形脉冲信号的拉氏变换。



解： 因为 $f(t)=Eu(t)-Eu(t-t_0)$

$$\mathcal{L}[Eu(t)]=\frac{E}{s}$$

由延时特性 可求得

$$\mathcal{L}[Eu(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-st_0}\frac{E}{s}$$

所以

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[Eu(t)-Eu(t-t_0)]=\frac{E}{s}(1-\mathrm{e}^{-st_0})$$

3、位移性

（2）s 域位移

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathcal{L}[f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}]=F(s+\alpha)$ $\qquad(6.2-9)$

例6.2-7 求 $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\Omega t$ 和 $\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\Omega t$ 的拉氏变换。

解： 已知 $\mathcal{L}[\sin\Omega t]=\dfrac{\Omega}{s^2+\Omega^2}$

由s域位移定理，得

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\Omega t]=\frac{\Omega}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}$$

同理，因为$\mathcal{L}[\cos\Omega t]=\dfrac{s}{s^2+\Omega^2}$

故有 $$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\Omega t]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}$$

4、尺度变换

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则$\mathcal{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad (a>0) \quad (6.2-10)$

例6.2-8 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ ，求 $\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)]$

解法一： 先延时： $\mathcal{L}[f(t-3)u(t-3)]=F(s)\mathrm{e}^{-3s}$

再尺度： $\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)]=\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{s}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}s}$

解法二： 先尺度： $\mathcal{L}[f(2t)u(2t)]=\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{s}{2}\right)$

再延时：

$$\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)]=\mathcal{L}\left\{f\left[2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]u\left[2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}s}$$

5、s域微分与积分

（1）s域微分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则

$$\mathcal{L}[(-t)f(t)] = \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \qquad (6.2-11)$$

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

（2）s域积分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，则

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{\infty} F(\eta)\mathrm{d}\eta \qquad (6.2-12)$$

6、初值与终值定理

（1）初值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$， 且 $f(t)$ 连续可导，则

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (6.2-13)$$

证明：由时域微分特性可知

$$sF(s) - f(0^-) = \mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0^-}^{0^+} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

所以 $$sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

6、初值定理与终值定理

当 $s\to\infty$ 时，上式右端第二项的极限为

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\int_{0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right\}=\int_{0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}[\lim_{s\to\infty}\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t=0$$

从而 $$\lim_{s\to\infty}sF(s)=f(0^+)$$

应用条件

如果 $F(s)$ 是有理代数式，则 $F(s)$ 必须是真分式；如果 $F(s)$ 不是有理代数式，则应利用长除法，使 $F(s)$ 中出现真分式项 $F_0(s)$，而初值 $f(0^+)$ 等于真分式 $F_0(s)$ 之逆变换式 $f_0(t)$ 的初值 $f_0(0^+)$，即

$$f(0^+)=f_0(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF_0(s)$$

6、初值定理与终值定理

（2）终值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$， 且 $f(t)$ 连续可导，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (5.8-16)$$

证明：
$$sF(s)=f(0^+)+\int_{0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(0^+)+\lim_{s\to 0}\int_{0^+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=f(0^+)+\lim_{t\to\infty}f(t)-f(0^+)$$

所以
$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

应用条件

仅当 $F(s)$ 在右半s平面及其s平面的虚轴上为解析时（原点除外），终值定理才可应用。

6、初值定理与终值定理

例6.2-9 求下列函数逆变换的初值与终值。

(1) $F(s)=\dfrac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1}$ (2) $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+4)}$

解: （1）$F(s)$ 不是真分式，利用长除法求得

$$F(s)=s-1+\frac{3s+2}{s^2+2s+1}$$

于是初值

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\frac{3s+2}{s^2+2s+1}=3$$

6、初值定理与终值定理

如果不用长除法，而直接用 $f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$，则将得到 $f(0^+)=\infty$ 的错误结论。

终值 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=0$

（2）初值为 $f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} s\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+4)}=1$

由于 $F(s)$ 在 $\mathrm{j}\Omega$ 轴上有一对共轭极点 $s=\pm\mathrm{j}2$，因此 $f(t)$ 不存在终值。若不注意终值定理的条件，而直接用 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$，则将得到 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$ 的错误结论。

7、卷积定理

（1）时域卷积

若 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ ，则

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \qquad (6.2-18)$$

（2）s域卷积

若 $\mathscr{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathscr{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ ，则

$$\mathscr{L}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma - \mathrm{j}\infty}^{\sigma + \mathrm{j}\infty} F_1(z) F_2(s - z) \mathrm{d}z \qquad (6.2-19)$$

7、卷积定理

例6.2-10 已知 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t),\ f_2(t)=u(t)$ ，求 $f_1(t)*f_2(t)$

解： 利用时域卷积定理可以间接地求出两函数的卷积

因为 $$F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]=\frac{1}{s+\alpha}$$

$$F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]=\frac{1}{s}$$

而 $$F_1(s)F_2(s)=\frac{1}{s+\alpha}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

则 $$f_1(t)*f_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=\frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})u(t)$$

在课本225页的表6.2中给出了拉氏变换的主要性质。

6.3 拉普拉斯逆变换

用拉普拉斯变换方法分析电路问题，一般来讲，包括三个步骤：

（1）对微分方程进行拉氏变换成为代数方程，

（2）解此代数方程得到所求未知函数的变换式$F(s)$，

（3）求$F(s)$的逆变换。

如果$F(s)$是一个比较简单的函数，就可利用常用函数的拉氏变换表（见表5-4），查出对应的原函数。然而，在电路分析中经常遇到的$F(s)$并非那样简单，不能直接从表中找到。因此，必须研究求逆变换的一般方法。

6.3 拉普拉斯逆变换

求复杂拉普拉斯变换式的逆变换通常有两种方法：

（1）部分分式展开法

（2）留数法

方法一是将复杂变换式分解为许多简单变换式之和，然后分别查表求取原时间信号；

方法二则是直接进行拉氏逆变换积分。

方法一适用于$F(s)$为有理函数的情况；

方法二适用范围较广。

6.3.1 部分分式展开法

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s + b_0}$$

式中，系数 a_i 和 b_i 都为实数，m和n是正整数。

用部分分式展开法求逆变换时，要求$F(s)$为有理真分式，即$m<n$。当$F(s)$不是真分式时，可以用长除法把$F(s)$分解为有理多项式与真分式之和, 如

$$F(s)=\frac{3s^3-2s^2-7s+1}{s^2+s-1}=\underbrace{3s}_{3\delta'(t)}\underbrace{-5}_{-5\delta(t)}+\underbrace{\frac{s-4}{s^2+s-1}}_{\text{真分式}}$$

6.3.1 部分分式展开法

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

为方便，记

$$B(s)=b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$$

$$A(s)=a_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)$$

从而，当 $s=p_1,p_2,\ldots p_n$ 时，$B(s)=0$ ，$F(s)=\infty$

所以，$s=p_1,p_2,\ldots p_n$ 称为 $F(s)$ 的“极点”。

而当 $s=z_1,z_2,\ldots z_m$ 时，$A(s)=0$ $F(s)=0$

所以，$s=z_1,z_2,\ldots z_m$ 称为 $F(s)$ 的“零点”。

1、极点为实数，无重根

假定 $F(s)$ 的极点 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 均为实数，且无重根，则 $F(s)$ 可展开为如下的部分分式

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_i}{s-p_i}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

其中 $K_i=(s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$

从而 $f(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t}u(t)$

1、极点为实数，无重根

例6.3-1 求 $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$ 的拉氏逆变换。

解： 将$F(s)$展开成部分分式形式

$$F(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}$$

其中

$$K_1=sF(s)\big|_{s=0}=\frac{10\times2\times5}{1\times3}=\frac{100}{3}$$

$$K_2=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\frac{10\times(-1+2)\times(-1+5)}{(-1)\times(-1+3)}=-20$$

$$K_3=(s+3)F(s)\big|_{s=-3}=\frac{10\times(-3+2)\times(-3+5)}{(-3)\times(-3+1)}=-\frac{10}{3}$$

$$F(s)=\frac{100}{3s}-\frac{20}{s+1}-\frac{10}{3(s+3)}\rightarrow \quad f(t)=\frac{100}{3}-20e^{-t}-\frac{10}{3}e^{-3t}\qquad t\geq0$$

2.包含共轭复数极点

若 $B(s)=B_1(s)(s^2+bs+c)$

其中 $B_1(s)=b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-2})$

$p_1,p_2,\ldots,p_{n-2}$ 是$B(s)$的不相等的实根。

$b^2-4c<0$ 则$F(s)$可写为

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{As+B}{s^2+bs+c}+\frac{A_1(s)}{B_1(s)}=\frac{As+B}{s^2+bs+c}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{A_i}{s-p_i}$$

而 $\dfrac{As+B}{s^2+bs+c}$ 的逆变换则可用配方法来求。

2.包含共轭复数极点

例6.3-2 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)}$ 的拉氏逆变换。

解： $$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+4}$$

其中 $$A=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\left.\frac{s+3}{s^2+2s+4}\right|_{s=-1}=\frac{2}{3}$$

于是 $$F(s)=\frac{2/3}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+4}=\frac{\frac{2}{3}(s^2+2s+4)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+4)}$$

从而 $$\frac{2}{3}(s^2+2s+4)+(Bs+C)(s+1)=s+3$$

由方程两端分子的对应项相等，求得

2.包含共轭复数极点

$$B=-2/3 \qquad C=1/3$$

$$F(s)=\frac{\frac{2}{3}}{s+1}+\frac{-\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}}{s^2+2s+4}$$

因为 $$\frac{-\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}}{s^2+2s+4}=-\frac{2}{3}\times\frac{s-1/2}{(s+1)^2+3}$$

所以 $$X(s)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{s+1}-\frac{\frac{2}{3}(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

因此 $$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t, \qquad t\geq 0$$

3.包含多重极点

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s-p_1)^k D(s)}$$ 其中，$F(s)$在p_1处有k阶极点，

则$F(s)$写成展开式

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{K_{1k}}{(s-p_1)}+\frac{E(s)}{D(s)}$$

$E(s)/D(s)$ 表示展开式中与极点p_1无关的其余部分。

为了方便求出各待定系数，设

$$F_1(s)=(s-p_1)^k F(s)$$

则 $$K_{11}=F_1(s)\big|_{s=p_1}$$

3.包含多重极点

$$K_{12} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}} F_1(s)\Big|_{s=p_1} \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

而

$$\frac{A}{(s-p_1)^k} \leftrightarrow A \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_1 t} u(t)$$

3.包含多重极点

例6.3-3 求 $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$ 的拉氏逆变换。

解： $F(s)$展开式为 $F(s)=\dfrac{K_{11}}{(s+1)^3}+\dfrac{K_{12}}{(s+1)^2}+\dfrac{K_{13}}{(s+1)}+\dfrac{K_2}{s}$

$$K_2=sF(s)\Big|_{s=0}=-2$$

令 $F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\dfrac{s-2}{s}$

$$K_{11}=F_1(s)\big|_{s=-1}=3$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_1(s)\Big|_{s=-1}=2$$

$$K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_1(s)\Big|_{s=-1}=2$$

于是有

$$F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)}-\frac{2}{s}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}-2,\qquad t\geq 0}$$

6.3.2 留数法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds \qquad t\geq 0$$

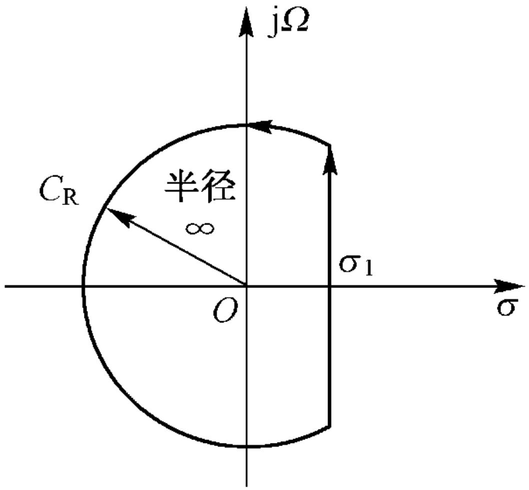
这是复变函数积分问题.

我们可以从$\sigma-j\infty$到 $\sigma+j\infty$

补足一条积分路径，构成一闭合围线积分，

补足的这条路径C_R是半径为∞的圆弧，

沿该圆弧的积分应为零。由留数定理：



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{\text{极点}}[F(s)e^{st}\text{的留数}]$$

6.3.2 留数法

例6.3-4 求 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+3)(s^2+2s+1)}$ 的拉氏逆变换。

解: $F(s)$不是真分式，首先将其分解为有理多项式与真分式之和。

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+8s+5}{(s+3)(s^2+2s+1)}=1+\frac{s+2}{(s+3)(s+1)^2}$$

记 $$F_0(s)=\frac{s+2}{(s+3)(s+1)^2}$$

$F_0(s)$有一个单值极点 $p_1=-3$，和一个二阶极点， $p_2=-1$

它们的留数分别为

6.3.2 留数法

$$\mathrm{Res}[F_0(s)\mathrm{e}^{st}]\Big|_{s=p_1}=[(s-p_1)F_0(s)\mathrm{e}^{st}]\Big|_{s=p_1}=\frac{(s+2)}{(s+1)^2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-3}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}$$

$$\mathrm{Res}[F_0(s)\mathrm{e}^{st}]\Big|_{s=p_2}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_2)^2F_0(s)\mathrm{e}^{st}]\Big|_{s=p_2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s+2}{s+3}\mathrm{e}^{st}\right)\Big|_{s=-1}$$

$$=\frac{s+2}{s+3}t\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{(s+3)-(s+2)}{(s+3)^2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$$

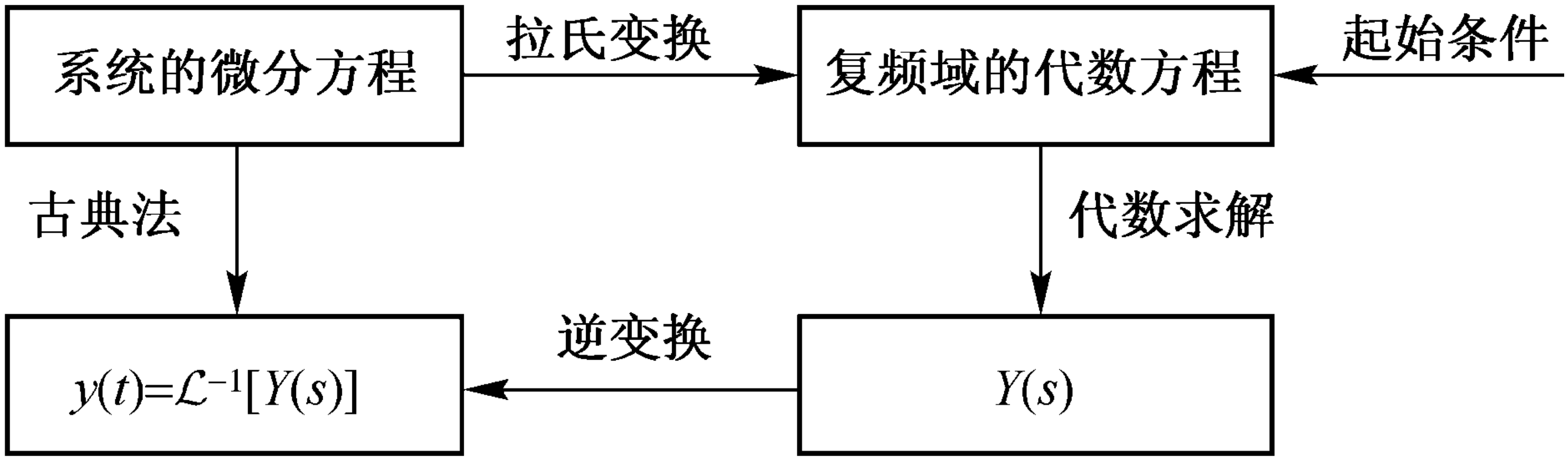
而 $\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t)$

所以, $F(s)$的拉氏逆变换为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\delta(t)+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t},\quad t\geq 0$$

6.4 系统响应的拉氏变换求解

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解



利用拉氏变换求系统响应，需首先将描述系统输入-输出关系的微分方程进行拉氏变换，得到一个代数方程，求出其解（复频域解）后，经拉氏逆变换即可得到时域解。在求解过程中自动包含了系统起始状态的作用。

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

例6.4-1 已知系统的微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}$$

$x(t)=(1+e^{-t})u(t)$，起始条件为：$y(0^-)=1,\ y'(0^-)=2,$

求 $y(t),y_{zi}(t),\ \ y_{zs}(t)$。

解： 对微分方程两边取拉氏变换：

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+5[sY(s)-y(0^-)]+6Y(s)=(s^2+4s)X(s)$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{s^2+4s}{s^2+5s+6}X(s)}_{Y_{zs}(s)}+\underbrace{\frac{(s+5)y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)}$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

$$Y(s)=\frac{s^2+4s}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{(s+5)y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{s^2+4s}{s^2+5s+6}X(s)=\frac{s^2+4s}{s^2+5s+6}\cdot\frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$=\frac{(s+4)(2s+1)}{(s+1)(s+2)(s+4)}=-\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{6}{s+2}-\frac{5}{2}\frac{1}{s+3}$$

$$y_{zs}(t)=(-\frac{3}{2}e^{-t}+6e^{-2t}-\frac{5}{2}e^{-3t})u(t)$$

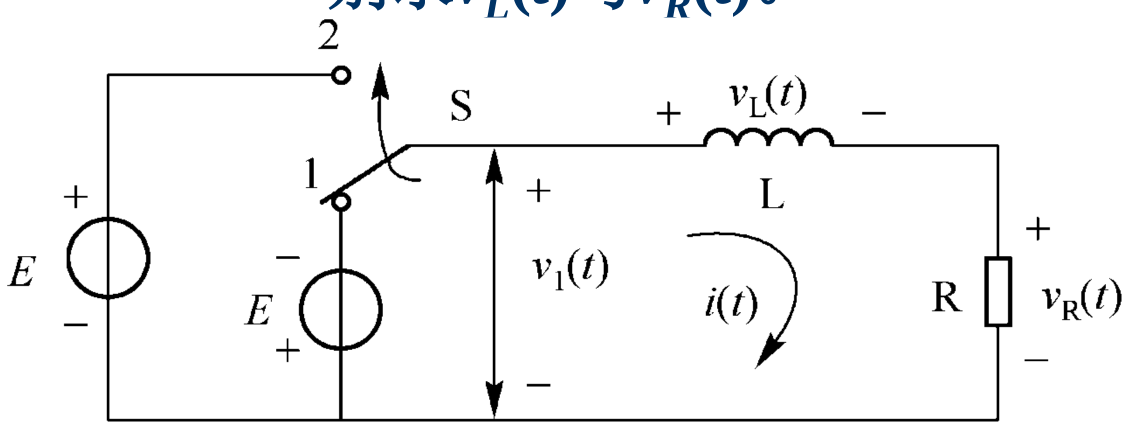
$$Y_{zi}(s)=\frac{(s+5)y(0^-)+y'(0^-)}{s^2+5s+6}=\frac{s+7}{s^2+5s+6}=\frac{5}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

$$Y_{zi}(s) = \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3} \qquad y_{zi}(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t} \quad (t > 0)$$

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{-t} + 11e^{-2t} - \frac{13}{2}e^{-3t}\right) \quad (t > 0)$$

例6.4-2：下图所示电路，当$t<0$时，开关S位于“1”端，电路的状态已稳定，$t = 0$时S从“1”端打到“2”端，分别求$v_L(t)$与$v_R(t)$。



解:

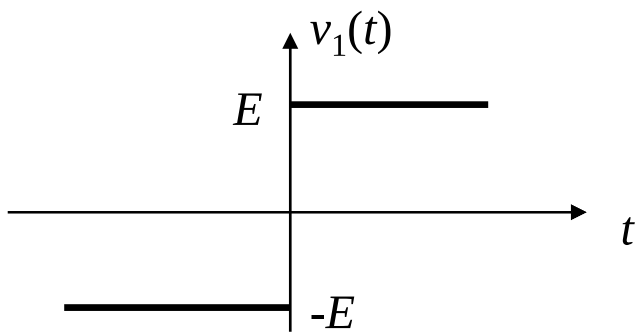
$$v_R(0^-) = v_R(0^+) = -E$$

$$v_L(0^-) = 0$$

$$v_L(0^+) = 2E$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

1　求$v_R(t)$　$v_R(0^-)=v_R(0^+)=-E$



列写微分方程

$$\frac{L}{R}\frac{dv_R(t)}{dt}+v_R(t)=v_1(t)$$

$$v_R(t)=v_h(t)+v_p(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}+E,\quad t>0$$

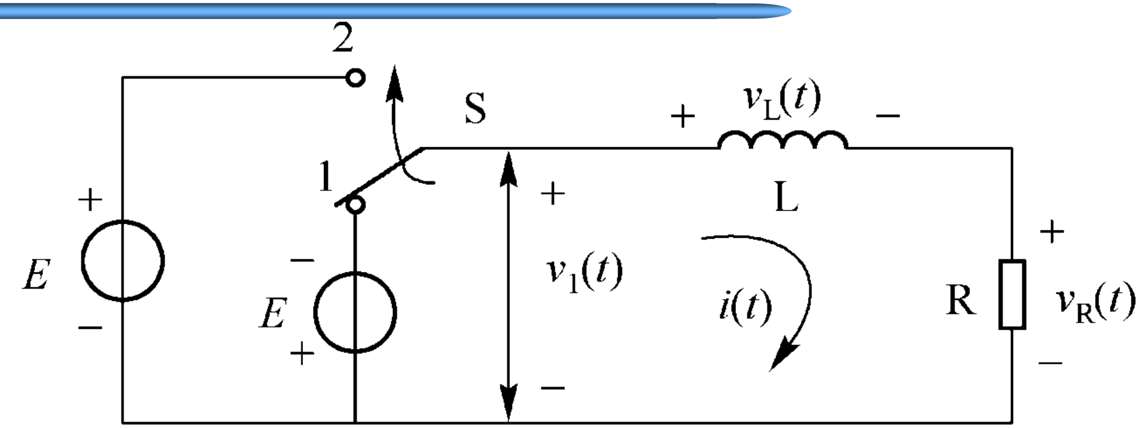
$$v_R(0^+)=-E \qquad v_R(t)=-2Ee^{-\frac{R}{L}t}+E,\quad t>0$$

取拉氏变换　$$\frac{L}{R}[sV_R(s)-v_R(0^-)]+V_R(s)=\frac{E}{s}$$

$$V_R(s)=\frac{\frac{E}{s}+\frac{L}{R}v_R(0^-)}{\frac{L}{R}s+1}=E\frac{\frac{R}{L}-s}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}=E\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+\frac{R}{L}}\right) \qquad v_R(t)=E(1-2e^{-\frac{R}{L}t})u(t)$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

2 求$v_L(t)$

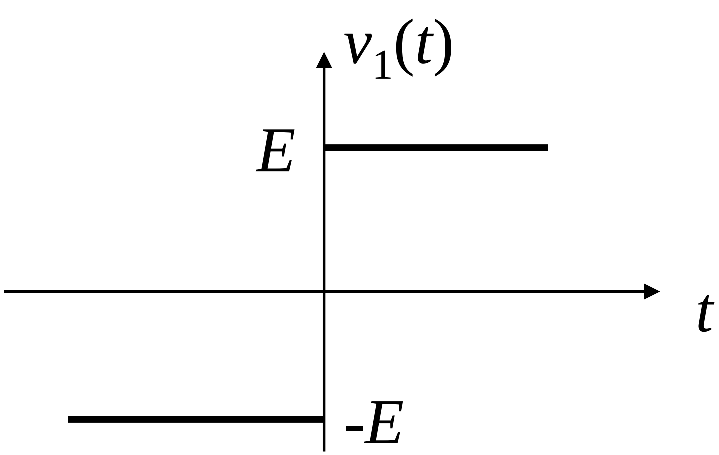


$$v_L(0^-)=0$$

$$v_L(0^+)=2E$$

（1） $\frac{R}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)d\tau + v_L(t) = v_1(t)$

$$\frac{dv_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}v_L(t)=\frac{dv_1(t)}{dt}$$



$$\frac{dv_1(t)}{dt}=\begin{cases}2E\delta(t) & (0^-\text{系统}) \\ 0 & (0^+\text{系统})\end{cases}$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

$$\frac{dv_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}v_L(t)=\frac{dv_1(t)}{dt} \qquad \frac{dv_1(t)}{dt}=\begin{cases}2E\delta(t) & (0^-\text{系统}) \\ 0 & (0^+\text{系统})\end{cases}$$

对于0^-系统： $$\frac{dv_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}v_L(t)=2E\delta(t)$$

（2） $$[sV_L(s)-v_L(0^-)]+\frac{R}{L}V_L(s)=2E$$

其中： $$v_L(0^-)=0 \qquad \therefore V_L(s)=\frac{2E}{s+\frac{R}{L}}$$

（3） $$v_L(t)=2Ee^{-\frac{R}{L}t}\cdot u(t)$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

对于0^+系统： $$\frac{dv_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}v_L(t)=\frac{dv_1(t)}{dt}=0$$

$$[sV_L(s)-v_L(0^+)]+\frac{R}{L}V_L(s)=0$$

其中： $v_L(0^+)=2E$

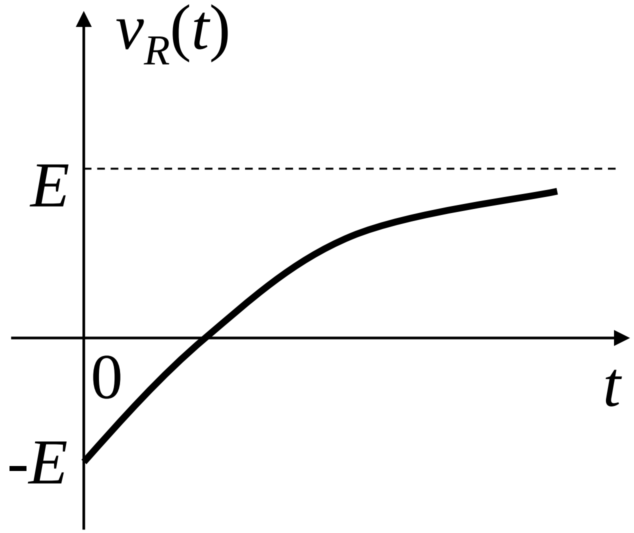
$$\therefore\ V_L(s)=\frac{2E}{s+\frac{R}{L}}$$

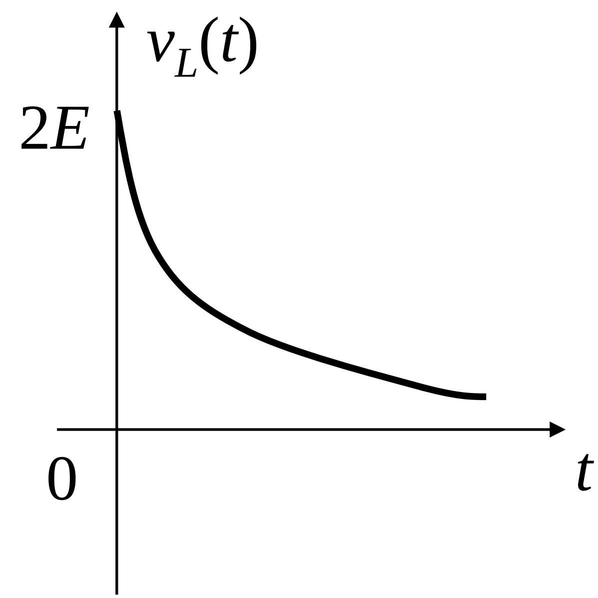
$$v_L(t)=2Ee^{-\frac{R}{L}t}\cdot u(t)$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

最后分别画出$v_R(t)$ 和 $v_L(t)$ 的波形：

$$v_R(t) = E(1-2e^{-\frac{R}{L}t})u(t) \qquad v_L(t) = 2Ee^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t)$$

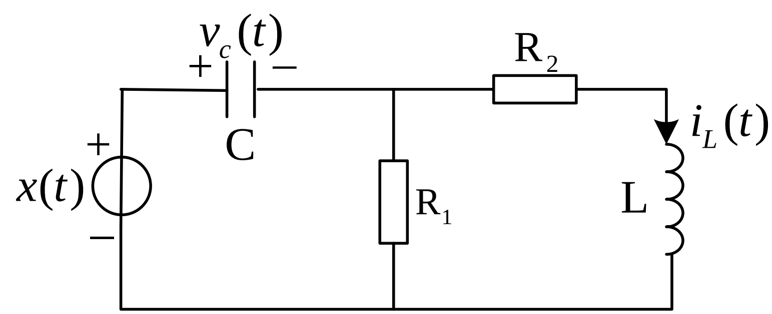




6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

例 6.4-4 已知如图 6.4-5(a)所示电路，已知 $x(t)=10u(t)$，电路参数为，$L=0.5H$，$R_1=0.5\Omega$，$R_2=2.5\Omega$，$C=1F$，起始条件 $v_C(0^-)=5V$，$i_L(0^-)=4A$，求流过电感电流的零输入响应 $i_{ziL}(t)$ 和零状态响应 $i_{zsL}(t)$，并画出全响应的波形。

解：(1)设流过电容C的电流为 $i_C(t)$



$$\begin{cases} L\dfrac{di_L(t)}{dt}+R_2 i_L(t)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau=x(t) \\ R_1[i_C(t)-i_L(t)]=L\dfrac{di_L(t)}{dt}+R_2 i_L(t) \end{cases}$$

（2）对微分方程求拉氏变换

$$\begin{cases} L[sI_L(s)-i_L(0^-)]+R_2 I_L(s)+\dfrac{1}{s}[\dfrac{1}{C}I_C(s)+v_C(0^-)]=X(s) \\ R_1[I_C(s)-I_L(s)]=L[sI_L(s)-i_L(0^-)]+R_2 I_L(s) \end{cases}$$

6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

（3）消去中间变量

$$sLI_L(s)-Li_L(0^-)+R_2I_L(s)+\frac{1}{sC}[I_L(s)+\frac{sL}{R_1}I_L(s)-\frac{L}{R_1}i_L(0^-)+\frac{R_2}{R_1}I_L(s)]+\frac{1}{s}v_C(0^-)=X(s)$$

（4）代入元件参数

$$(0.5s+3.5+\frac{6}{s})I_L(s)=X(s)+0.5i_L(0^-)+\frac{1}{s}i_L(0^-)-\frac{1}{s}v_C(0^-)$$

$$(s^2+7s+12)I_L(s)=2sX(s)+si_L(0^-)+2i_L(0^-)-2v_C(0^-)$$

（5）求系统响应

$$I_{ziL}(s)=\frac{si_L(0^-)+2i_L(0^-)-2v_C(0^-)}{s^2+7s+12}=\frac{4s-2}{(s+3)(s+4)}=\frac{-14}{s+3}+\frac{18}{s+4}$$

$$i_{ziL}(t)=(18e^{-4t}-14e^{-3t})u(t)$$

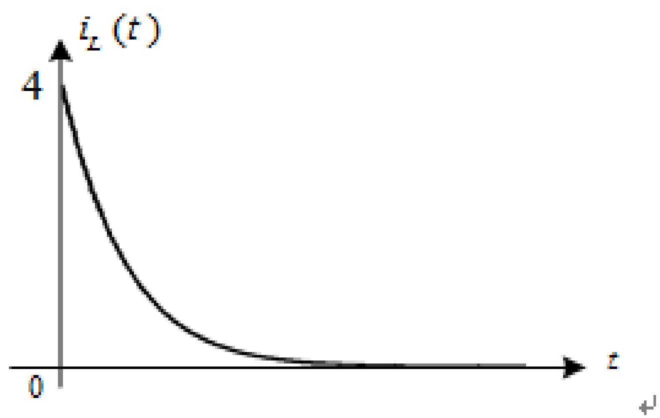
6.4.1 微分方程的拉氏变换求解

$$I_{zsL}(s)=\frac{2sX(s)}{s^2+7s+12}=\frac{20}{(s+3)(s+4)}=\frac{20}{s+3}-\frac{20}{s+4}$$

$$i_{zsL}(t)=20(e^{-3t}-e^{-4t})u(t)$$

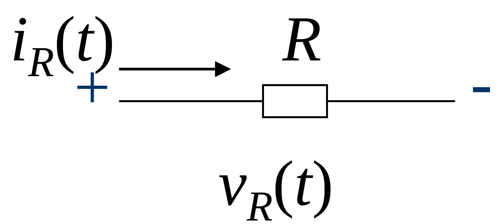
$$i_L(t)=i_{zsL}(t)+i_{zsL}(t)=(6e^{-3t}-2e^{-4t})u(t)$$

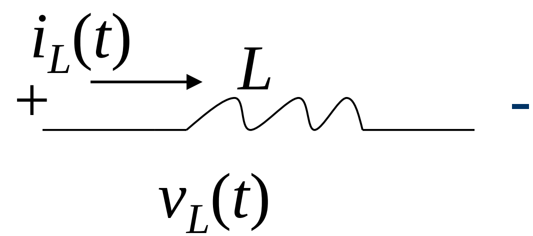
画出 $i_L(t)$ 的波形

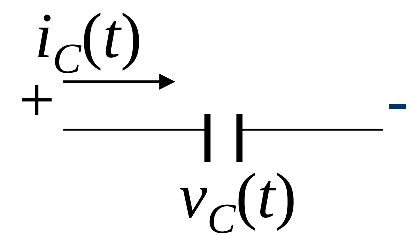


6.4.2 s域的元件模型

列写微分方程取拉氏变换的方法分析电路虽然具有许多优点，但是，对于比较复杂的网络，列写微分方程这一步就显得不必要的繁琐了。要得到网络的模型应先从基本元件的模型入手。

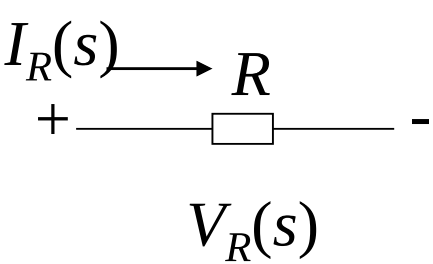


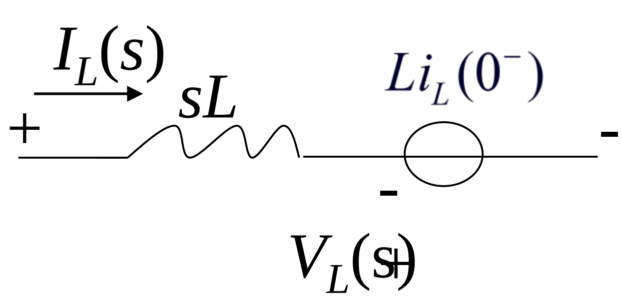


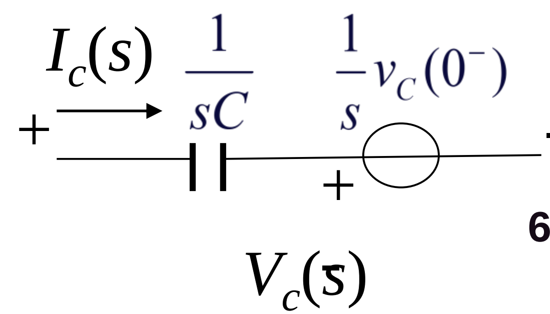


$$v_R(t) = Ri_R(t) \qquad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

$$V_R(s) = RI_R(s) \qquad V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \qquad V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)$$



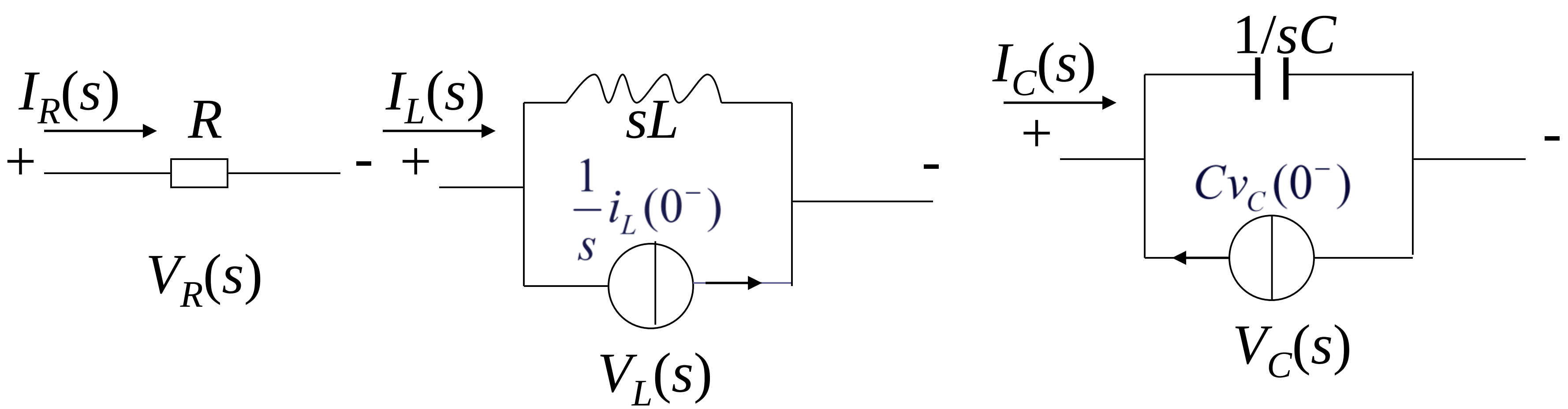




6.4.2 s域的元件模型

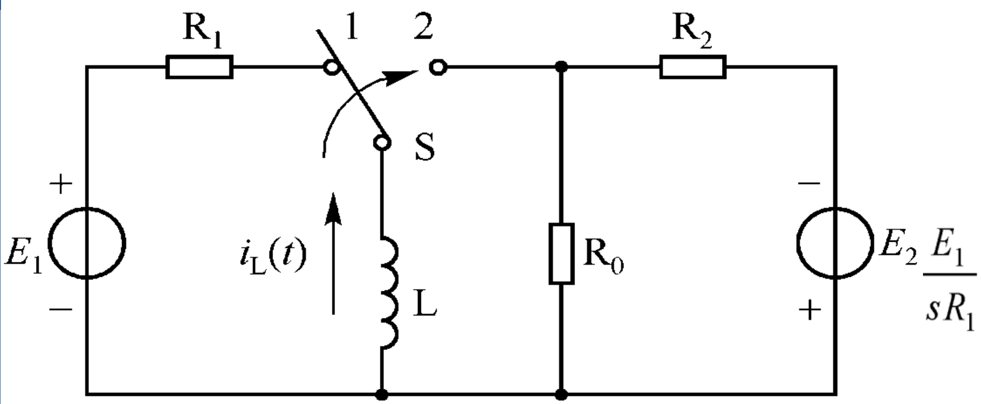
$$V_R(s)=RI_R(s) \qquad V_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0^-) \qquad V_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}v_C(0^-)$$

$$I_R(s)=\frac{1}{R}V_C(s) \qquad I_L(s)=\frac{1}{sL}V_L(s)+\frac{1}{s}i_L(0^-) \qquad I_C(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0^-)$$

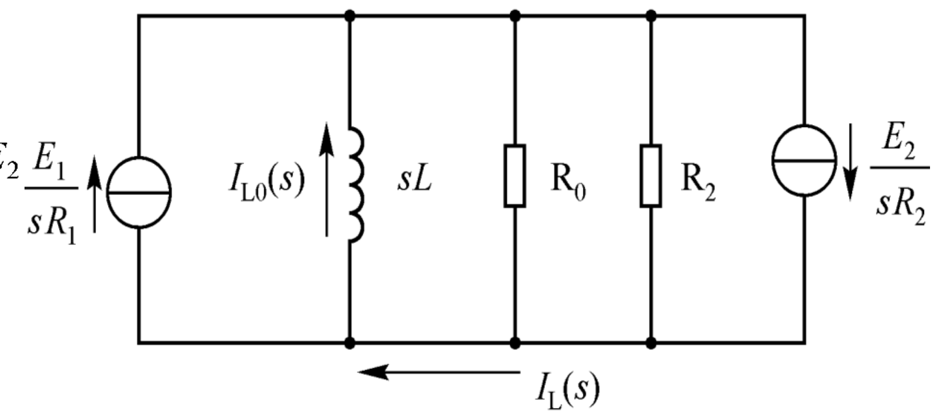


6.4.2 s域的元件模型

例6.4-5 电路中，当 $t<0$ 时，开关S位于“1”端，电路的状态已经稳定。当 $t=0$ 时开关S从“1”端倒向“2”端，求 $i_L(t)$



（1）画出s域模型

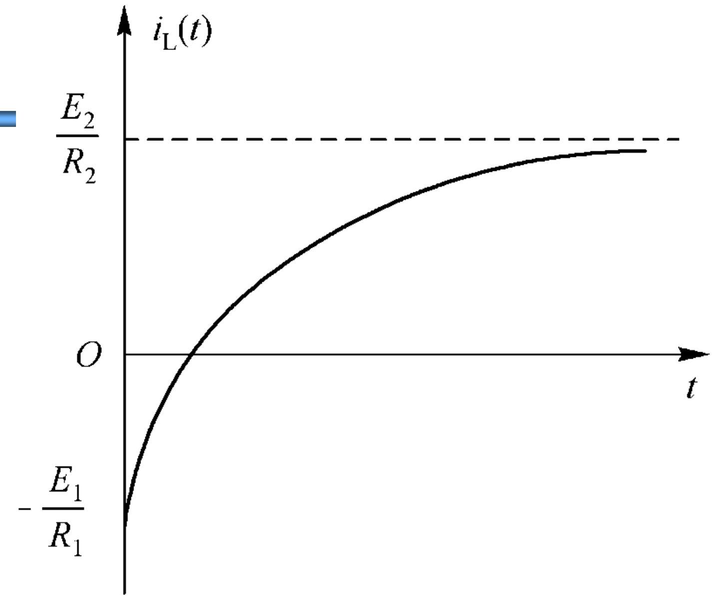


解： $i_L(0^-)=-E_1/R_1$

（2）假定流过sL的电流为 $I_{L0}(s)$

$$I_{L0}(s)=\frac{\dfrac{E_1}{sR_1}+\dfrac{E_2}{sR_2}}{\dfrac{1}{R_0}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{sL}}\times\frac{1}{sL}=\frac{\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}\right)}{\dfrac{sL(R_0+R_2)}{R_0R_2}+1}$$

6.4.2 s域的元件模型



令 $$\tau = \frac{L(R_0 + R_2)}{R_0 R_2}$$

$$I_{L0}(s) = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{s(s\tau + 1)} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right)$$

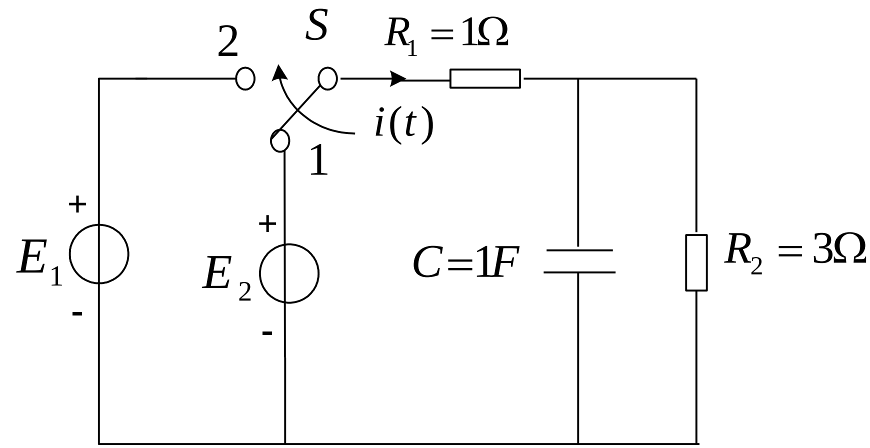
$$I_L(s) = I_{L0}(s) - \frac{E_1}{sR_1} = \frac{E_2}{sR_2} - \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right) \Bigg/ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

（3）逆变换为

$$i_L(t) = \frac{E_2}{R_2} - \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

6.4.2 s域的元件模型

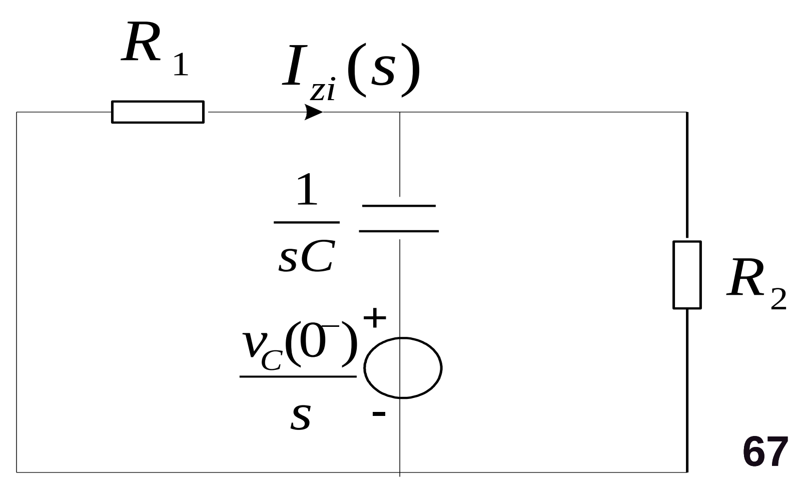
例（补） 如图所示电路，已知：$E_1=2\text{ V}$，$E_2=4\text{ V}$，当$t<0$时,开关S处于1的位置，而且已达到稳定。当 $t=0$ 时，开关S由1转向2。求电流 $i(t)$ 的零输入响应与零状态响应。



解：(1)首先求电流$i(t)$的零输入响应$i_{zi}(t)$

$$v_C(0^-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot E_2=\frac{3}{1+3}\cdot 4=3V$$

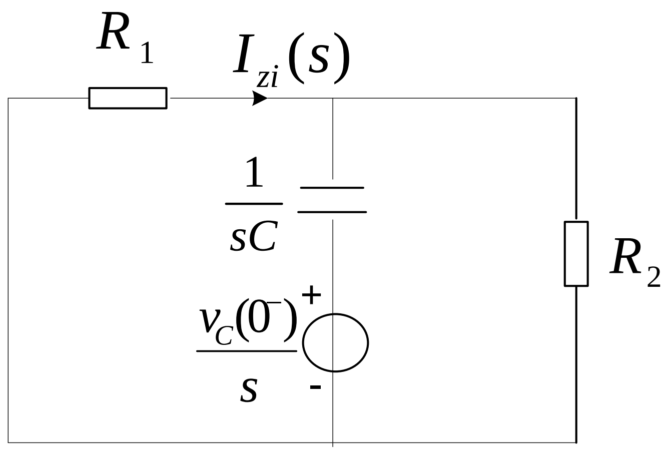
画出电路的零输入响应的s域模型



电阻R_1与R_2的并联电阻R为:

$$R=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=\frac{1\times 3}{1+3}=\frac{3}{4}\Omega$$

6.4.2 s域的元件模型



电阻R与$1/SC$串联，可求出流过电容的电流像函数，再进行分流，即可得

$$I_{zi}(s)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{-\frac{1}{s}v_C(0^-)}{\frac{1}{sC}+R}=\frac{-3\cdot\frac{1}{s}\cdot 3}{(1+3)\cdot(\frac{1}{s}+\frac{3}{4})}=\frac{-9}{3s+4}=\frac{-3}{s+\frac{4}{3}}$$

取拉氏逆变换，得到电流的零输入响应。

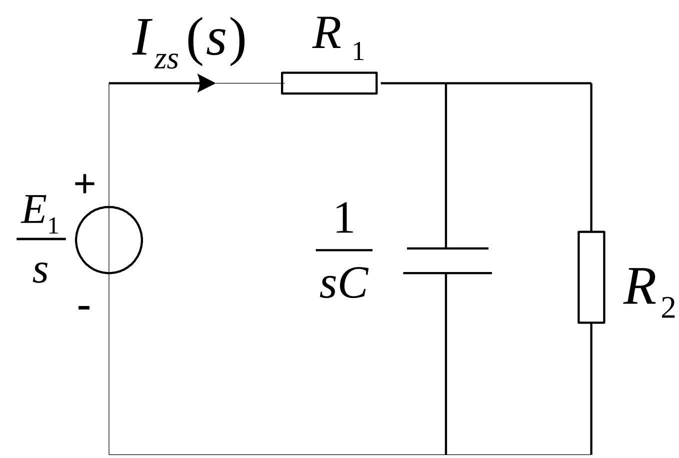
$$i_{zi}(t)=-3\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t}u(t)$$

6.4.2 s域的元件模型

(2)求电流$i(t)$的零状态响应$i_{zs}(t)$,画出零状态响应的s域模型

$$I_{zs}(s)=\frac{\frac{E_1}{s}}{R_1+\frac{R_2\cdot\frac{1}{sC}}{R_2+\frac{1}{sC}}}=\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{3\cdot\frac{1}{s}}{3+\frac{1}{s}}}$$

$$=\frac{2(1+3s)}{s(3s+4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+\frac{4}{3}}$$

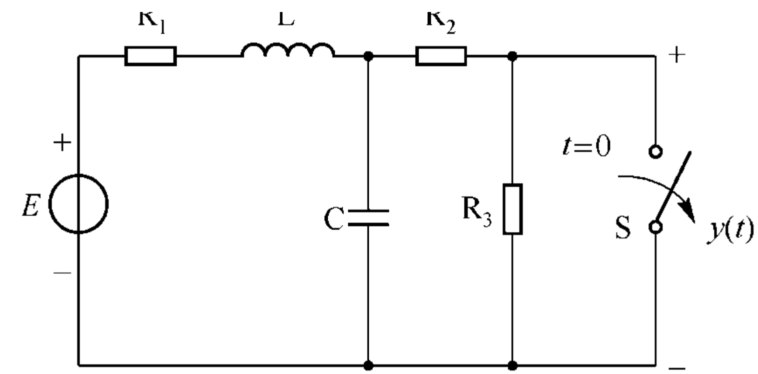


取拉氏逆变换，得到电流的零状态响应。

$$i_{zs}(t)=(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-\frac{4}{3}t})u(t)$$

6.4.2 s域的元件模型

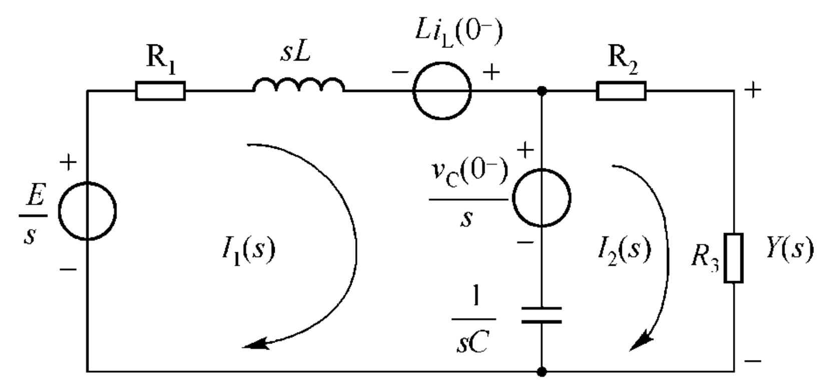
例 6.4-6　图 6.4-11 所示电路中，已知 E = 28V，L = 4H，C = 1/4F，R_1 = 12 Ω，R_2 = R_3 = 2 Ω。当 $t = 0$ 时，将开关 S 断开，设开关断开前电路已稳定，求开关断开后其两端电压 $y(t)$ 的零输入响应和零状态响应。



解（1）求出电容电压和电感电流的起始值

$$v_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 4 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A}$$



（2）画出电路的s域模型

（3）求零状态响应

可以列出回路方程

$$\begin{cases}\left(R_1+sL+\dfrac{1}{sC}\right)I_1(s)-\dfrac{1}{sC}I_2(s)=\dfrac{E}{s}\\ -\dfrac{1}{sC}I_1(s)+\left(R_2+R_3+\dfrac{1}{sC}\right)I_2(s)=0\end{cases}$$

代入参数

$$\begin{cases}\left(12+4s+\dfrac{4}{s}\right)I_1(s)-\dfrac{4}{s}I_2(s)=\dfrac{28}{s}\\ -\dfrac{4}{s}I_1(s)+\left(4+\dfrac{4}{s}\right)I_2(s)=0\end{cases}$$

消去中间变量

$$I_2(s)=\frac{7}{s(s^2+4s+4)}$$

$$Y_{zs}(s)=R_3I_2(s)=\frac{14}{s(s^2+4s+4)}=\frac{7}{2s}-\frac{7}{2(s+2)}-\frac{7}{(s+2)^2}$$

$$y_{zs}(t)=3.5-(3.5+7t)\mathrm{e}^{-2t}\qquad t\geq 0$$

(4)求零输入响应

可以列出回路方程

$$\begin{cases}\left(R_1+sL+\dfrac{1}{sC}\right)I_1(s)-\dfrac{1}{sC}I_2(s)=Li_L(0^-)-\dfrac{v_C(0^-)}{s}\\ -\dfrac{1}{sC}I_1(s)+\left(R_2+R_3+\dfrac{1}{sC}\right)I_2(s)=\dfrac{v_C(0^-)}{s}\end{cases}$$

代入参数

$$Y_{zi}(s)=\frac{2s+10}{(s+2)^2}=\frac{2}{s+2}+\frac{6}{(s+2)^2}$$

$$y_{zi}(t)=(2+6t)e^{-2t} \qquad t\ge 0$$

6.5 系统函数与冲激响应

1. 系统函数的定义

设系统的 **n** 阶微分方程为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \qquad (6.5\text{-}1)$$

若 $y^{(k)}(0^-) = 0, \quad x^{(k)}(0^-) = 0$

对式（**6.5-1**）两边取拉氏变换得：

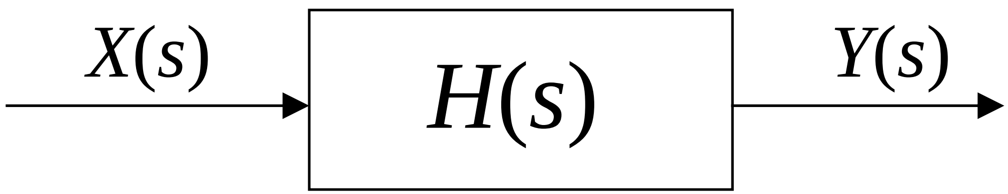
$$Y_{zs}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} X(s)$$

6.5 系统函数与冲激响应

$$H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0} \qquad (6.5-3)$$

----------“系统函数”或“网络函数”

简写为：$H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$　　　或：$Y(s)=H(s)X(s)$

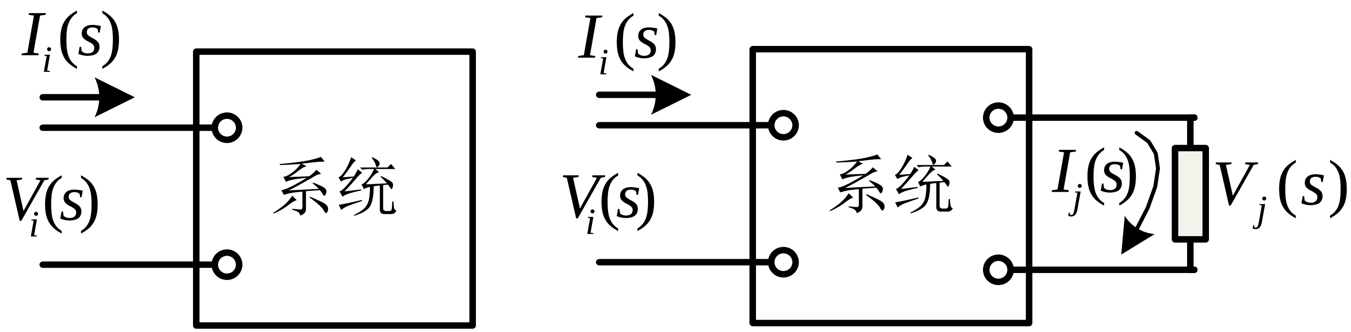


注意：1、*H*(s)独立于输入，仅由系统特性决定；

2、系统函数是在零状态条件下得到的；

3、线性时不变系统的*H*(s)是s的有理函数。

6.5 系统函数与冲激响应

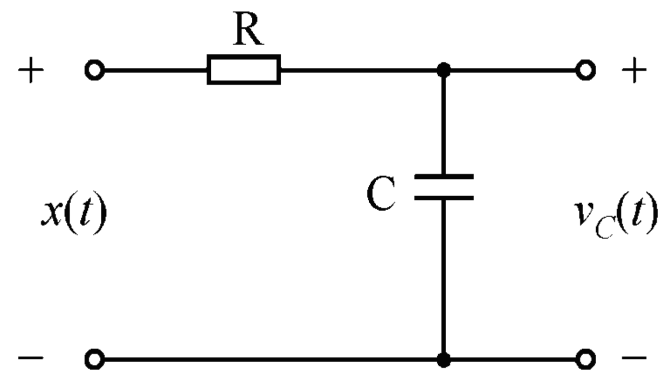


网络函数的名称

激励与响应的位置	激 励	响 应	系统函数名称
在同一端口(策动点函数)	电流	电压	策动点阻抗
	电压	电流	策动点导纳
分别在各自的端口(转移函数)	电流	电压	转移阻抗
	电压	电流	转移导纳
	电压	电压	转移电压比(电压传输函数)
	电流	电流	转移电流比(电流传输函数)

6.5 系统函数与冲激响应

例如右图中的**RC**电路，其系统函数为



$$H(s)=\frac{V_C(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

2. 系统函数H(s)与冲激响应h(t)的关系

$$Y_{zs}(s)=H(s)X(s)$$

当 $x(t)=\delta(t)$ 时， $y_{zs}(t)=h(t)$

而 $X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

$$Y_{zs}(s)=H(s)$$

6.5 系统函数与冲激响应

所以 $$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

或 $$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$$

简记为： $$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$$

$$Y_{zs}(s)=H(s)X(s)$$

$$y_{zs}(t)=h(t)*x(t)$$

$h(t)$和$H(s)$分别从时域和复频域两个方面表征了同一系统的特性。

6.5 系统函数与冲激响应

3. 系统函数$H(s)$的求法

（1）由零状态下系统的微分方程经拉氏变换求得

（2）由冲激响应的拉氏变换求得

（3）用零状态下的s域模型、应用电路分析方法求得

例6.5-1： 已知 $$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+5x(t)$$

求$H(s)$。

解法一： 对微分方程两边取拉氏变换得：

$$(2s^2+5s+2)Y(s)=(s+5)X(s)$$

6.5 系统函数与冲激响应

$$\therefore\ H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+5}{2s^2+5s+2}$$

解法二：先求系统的冲激响应（应用2.5节的方法）

$$h(t)=(1.5e^{-0.5t}-e^{-2t})u(t)$$

则 $$H(s)=\frac{1.5}{s+0.5}-\frac{1}{s+2}=\frac{s+5}{2s^2+5s+2}$$

6.5 系统函数与冲激响应

例6.5-3： 图6.2-2(a)是常用的分压电路,若以电容C_2上的电压为输出，试求其冲激响应。

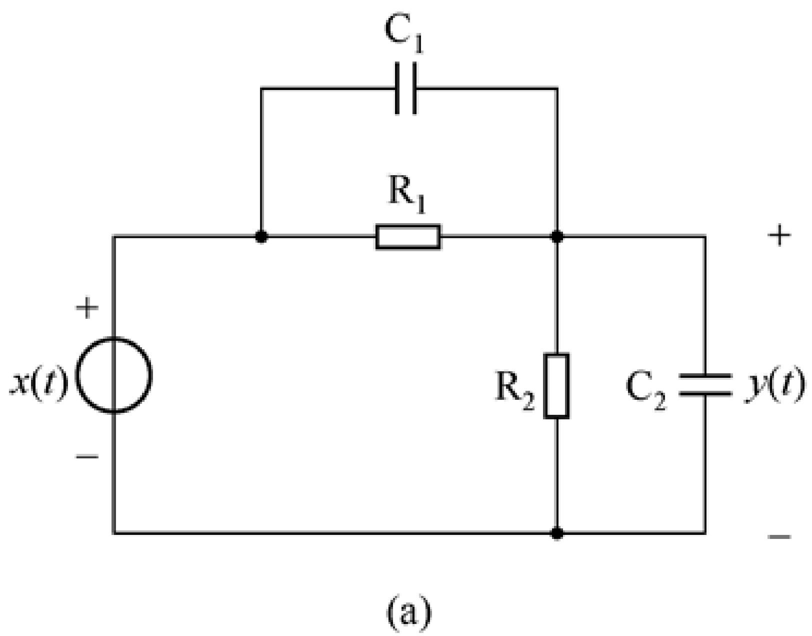
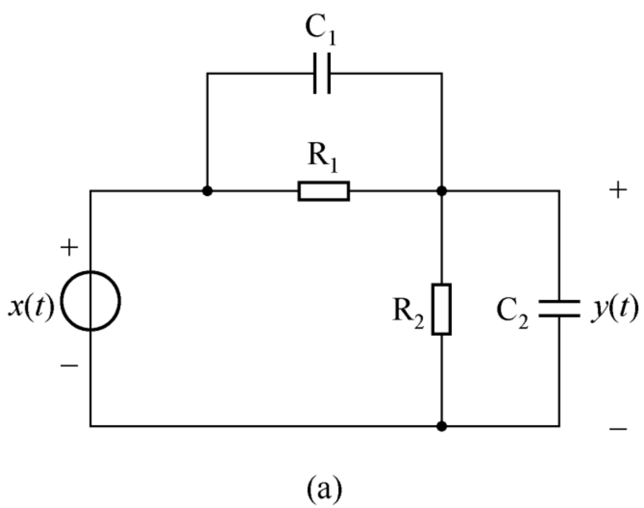
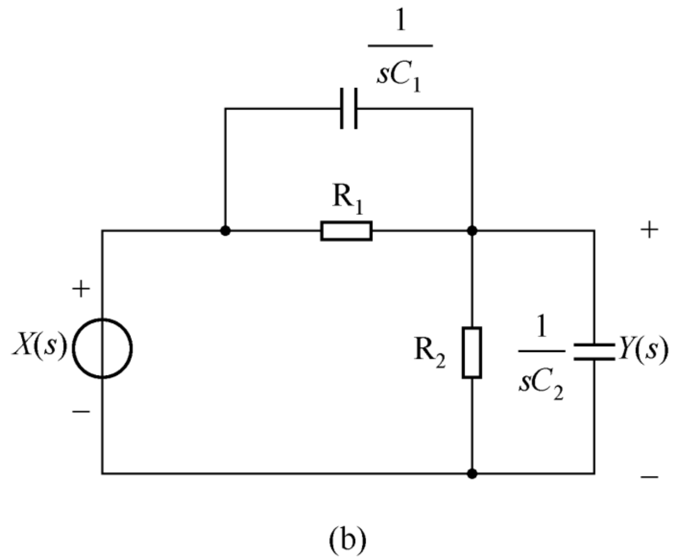


图6.5-2

6.5 系统函数与冲激响应





解： 画出图 (a)的零状态s域模型，如图 (b)所示。

令：

$$Z_1(s)=\frac{R_1\dfrac{1}{sC_1}}{R_1+\dfrac{1}{sC_1}}=\frac{1}{C_1\left(s+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)}\qquad Z_2(s)=\frac{R_2\dfrac{1}{sC_2}}{R_2+\dfrac{1}{sC_2}}=\frac{1}{C_2\left(s+\dfrac{1}{R_2C_2}\right)}$$

6.5 系统函数与冲激响应

其系统函数

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}=\frac{C_1\left(s+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)}{(C_1+C_2)s+\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}=\frac{C_1}{C_1+C_2}+\frac{R_2C_2-R_1C_1}{R_1R_2(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{1}{s+\alpha}$$

式中，$\alpha=\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$，则冲激响应为：

$$h(t)=\frac{C_1}{C_1+C_2}\delta(t)+\frac{R_2C_2-R_1C_1}{R_1R_2(C_1+C_2)^2}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$$

若适当选择元件值，使 $R_1C_1=R_2C_2$，则

$$H(s)=\frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\qquad h(t)=\frac{C_1}{C_1+C_2}\delta(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\delta(t)$$