第4章 连续时间信号的频域表示与分析

第4章 连续时间信号的频域表示与分析

信号的特征之一具有变化和不变化两部分，其中不变部分在时间域中表现为不随时间变化的常数，也称直流信号或直流分量；而变化部分表现为随时间呈现各种变化，这些变化中一般蕴含着事物发展变化的规律。

18世纪末19世纪初法国的数学家和物理学家 Fourier，在对热的传导问题进行研究时，提出并采用了Fourier级数理论，开创了信号表示历史的新纪元。

从本章起，我们对信号的分析由时域分析进入频域分析，即**傅里叶变换（频域）分析**。在**频域分析**中。

5.1　周期信号的频谱分析——傅里叶级数

任何周期函数在满足狄里赫利的条件下，可以展开成正交函数线性组合的无穷级数。

如果正交函数集是三角函数集或复指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。前者称为三角形式的傅里叶级数，后者称为指数形式的傅里叶级数，它们是傅里叶级数两种不同的表示形式。

4.1 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

任何周期函数在满足狄里赫利的条件下，可以展开成正交函数线性组合的无穷级数。

如果正交函数集是三角函数集或复指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。前者称为三角形式的傅里叶级数，后者称为指数形式的傅里叶级数，它们是傅里叶级数两种不同的表示形式。

正交函数：设两个函数$x(t)$和$y(t)$，其定义域都为(t_1, t_2)，且满足

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)\mathrm{d}t = 0$$

但 $\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\mathrm{d}t \neq 0$ 且 $\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\mathrm{d}t \neq 0$

则称函数$x(t)$和$y(t)$为正交函数。

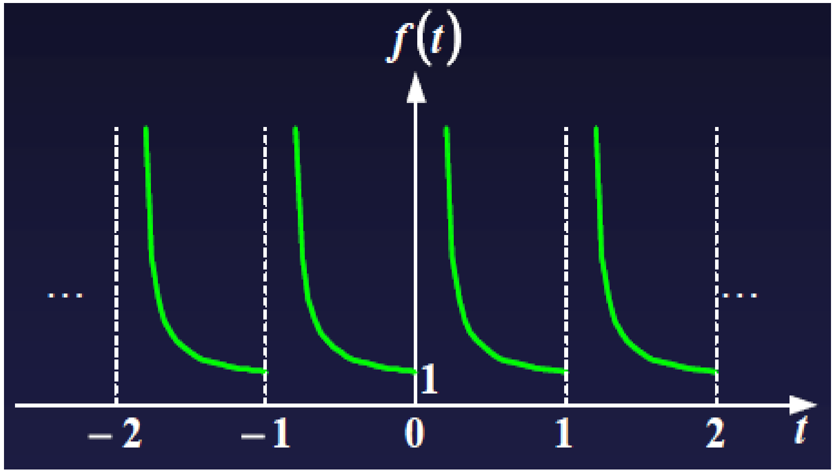
4.1 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

狄利赫利（Dirichlet）条件

1.在一周期内，信号绝对可积;

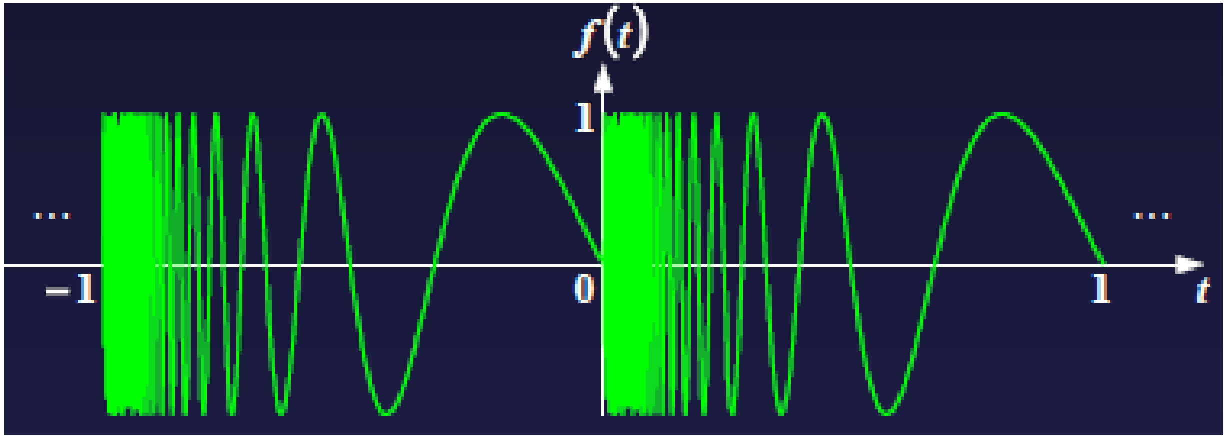
$$f(t)=\frac{1}{t},(0<t<1),\text{周期为}1.$$

不满足此条件。



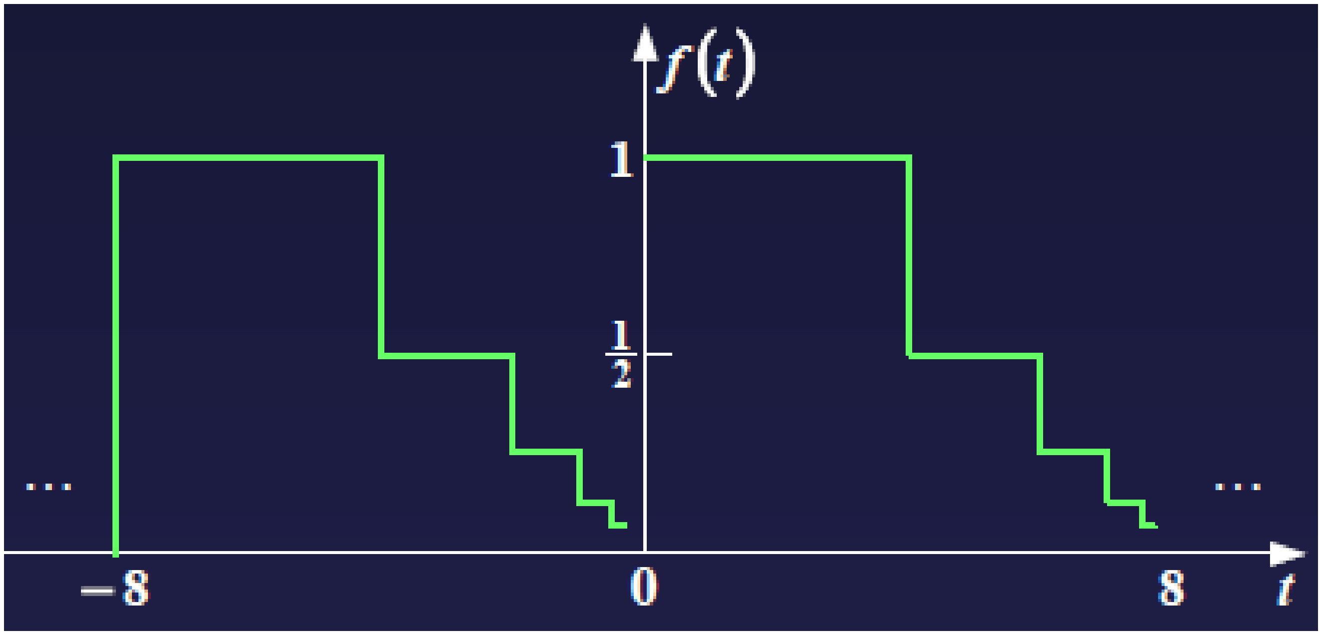
2.在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个

$$f(t)=\sin(\frac{2\pi}{t}),(0<t<1),\text{周期为}1.$$



满足条件1，而不满足条件2

3.在一周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个。



不满足条件3，这个信号的周期为8，它的后一个阶梯的高度和宽度是前一个阶梯的一半。可见在一个周期内它的面积不会超过8，但不连续点的数目是无穷多个。

4.1.1 三角形式的傅里叶级数

设周期信号为$\tilde{f}(t)$，其重复周期是T_1，角频率 $\Omega_1 = 2\pi f_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t) \qquad (4.1-1)$$

直流分量： $$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t)dt$$

余弦分量的幅度： $$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 t dt$$

正弦分量的幅度： $$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 t dt$$

以上各式中的积分限一般取： $0 \sim T_1$ 或 $-\dfrac{T_1}{2} \sim \dfrac{T_1}{2}$

4.1.1 三角形式的傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数也可表示成：

$$\tilde{f}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_1 t + \varphi_n) \qquad (4.1-3)$$

其中

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \qquad \varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n}) \qquad c_0 = a_0$$

根据欧拉公式：

$$\tilde{f}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} \left\{ e^{j(n\Omega_1 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega_1 t + \varphi_n)} \right\}$$

$$= c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n e^{j\varphi_n} e^{jn\Omega_1 t} + c_n e^{-j\varphi_n} e^{-jn\Omega_1 t)} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

其中

$$F_0 = c_0 \qquad F_{\pm n} = \frac{c_n}{2} e^{\pm j\varphi_n}, n = 1, 2, \ldots,$$

4.1.2 指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega_1 t} \qquad (4.1-5)$$

其中 $$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}\tilde{f}(t)e^{-jn\Omega_1 t}dt$$ ------ 复振幅

$$F_0=a_0=c_0$$

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$|F_n|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{2}|c_n| \qquad \varphi_n=\arctan(-\frac{b_n}{a_n})$$

$|F_n|$ 为 $n\Omega_1$ 的偶函数，φ_n 为 $n\Omega_1$ 的奇函数

4.1.3 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_1 t+b_n\sin n\Omega_1 t) \qquad (4.1-1)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega_1 t+\varphi_n) \qquad (4.1-3)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega_1 t} \qquad (4.1-5)$$

为了能既方便又明确地表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可以画出频谱图来直观地表示。

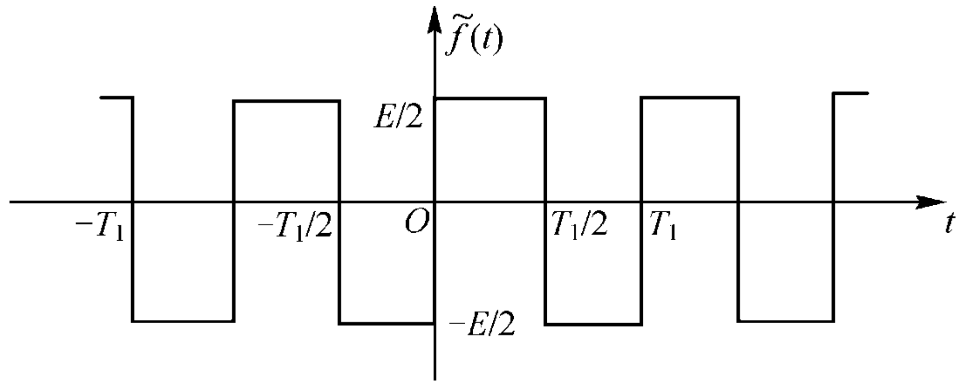
如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，绘出 c_n 及 φ_n 等的变化关系，便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

4.1.3 周期信号的频谱及其特点

例4.1-1 求题图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。

解： 一个周期内 $\tilde{f}(t)$的表达式为：

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & 0<t<\dfrac{T_1}{2}\\[2ex] -\dfrac{E}{2} & \dfrac{T_1}{2}<t<T_1\end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}\tilde{f}(t)dt=0 \qquad a_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}\tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 tdt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}\tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 tdt=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\[2ex] 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

4.1.3 周期信号的频谱及其特点

$$c_n = b_n = \begin{cases} \dfrac{2E}{n\pi} & n = 1,3,5\cdots \\ 0 & n = 2,4,6\cdots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n}) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,3,5\cdots)$$

因此 $$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\Omega_1 t$$

$$= \frac{2E}{\pi}(\sin \Omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\Omega_1 + \cdots)$$

或 $$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\Omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

4.1.3 周期信号的频谱及其特点

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\dfrac{jE}{n\pi} & n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots \\ 0 & n = \pm2, \pm4, \pm6\cdots \end{cases}$$

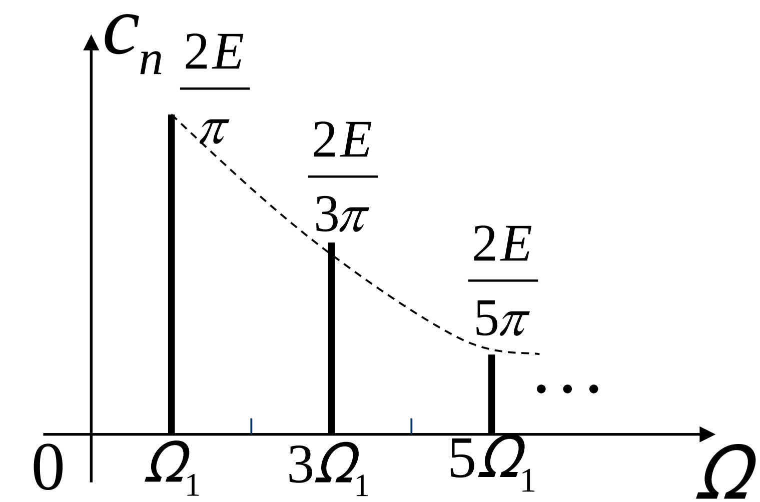
$$\tilde{f}(t) = -\frac{jE}{\pi}e^{j\Omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi}e^{j3\Omega_1 t} - \cdots + \frac{jE}{\pi}e^{-j\Omega_1 t} + \frac{jE}{3\pi}e^{-j3\Omega_1 t} + \cdots$$

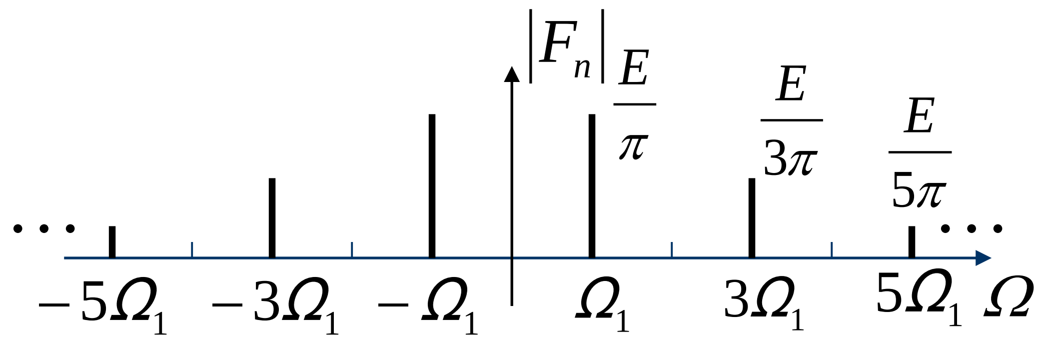
$$|F_n| = \left|\frac{E}{n\pi}\right| \quad (n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots)$$

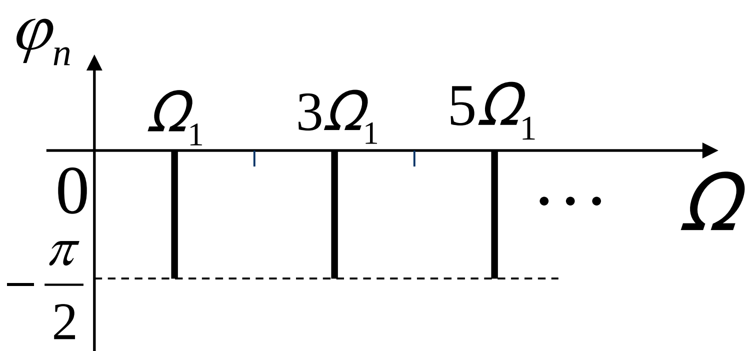
$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5\cdots) \end{cases}$$

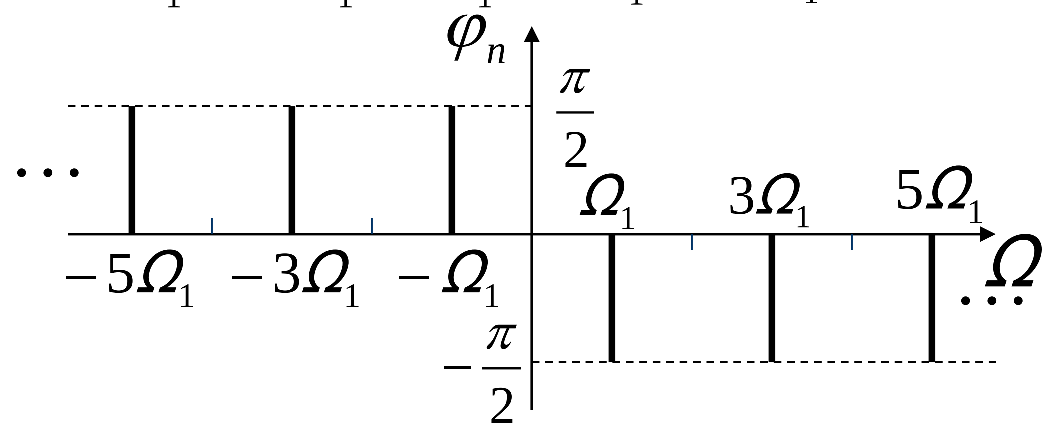
$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2E}{n\pi} & n = 1,3,5\cdots \\ 0 & n = 2,4,6\cdots \end{cases} \qquad |F_n| = \left|\dfrac{E}{n\pi}\right| \quad (n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots)$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,3,5\cdots) \qquad \varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1,3,5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1,-3,-5\cdots) \end{cases}$$









2. 周期信号频谱的特点

一个周期信号是由直流分量、不同幅度和相位的基波分量和各次谐波的交流分量叠加而成的，这些直流和交流分量构成了周期信号的频谱，它们具有下述特点：

（1）离散性 -------- 频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

（2）谐波性 -------- 谱线出现在基波频率 Ω_1 的整数倍上。

（3）收敛性 -------- 幅度谱的谱线幅度随着 $n \to \infty$ 而逐渐衰减到零。

4.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

已知信号$\tilde{f}(t)$展为傅里叶级数的时候，如果$\tilde{f}(t)$是实函数而且它的波形满足某种对称性，则在傅里叶级数中有些项将不出现，留下的各项系数的表示式也将变得比较简单。波形的对称性有两类，一类是对整周期对称；另一类是对半周期对称。

（1）偶函数 $\tilde{f}(t)=\tilde{f}(-t)$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 t\,dt=0$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt=\frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\Omega_1 t\,dt=\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\Omega_1 t\,dt$$

所以，在偶函数的傅里叶级数中只含有（直流）和余弦分量。

4.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

（2）奇函数 $\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 tdt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 tdt = \frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 tdt$$

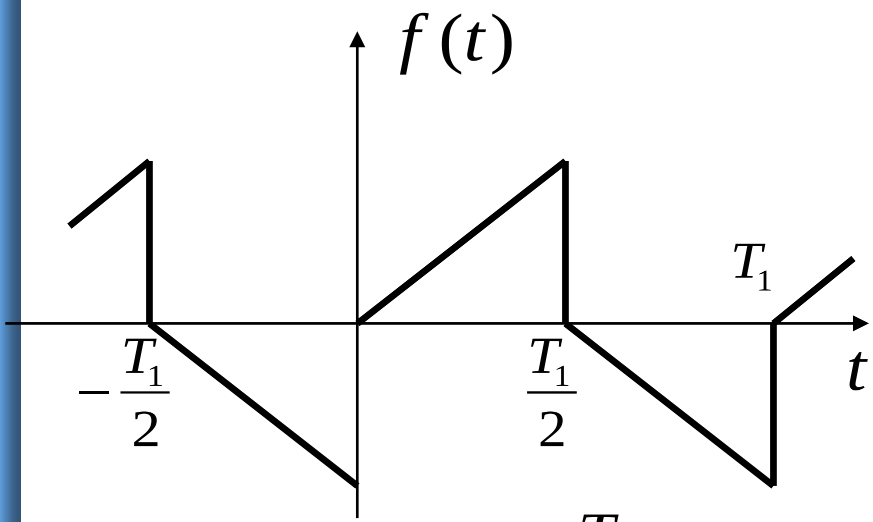
所以，在奇函数的傅里叶级数中只包含正弦分量。

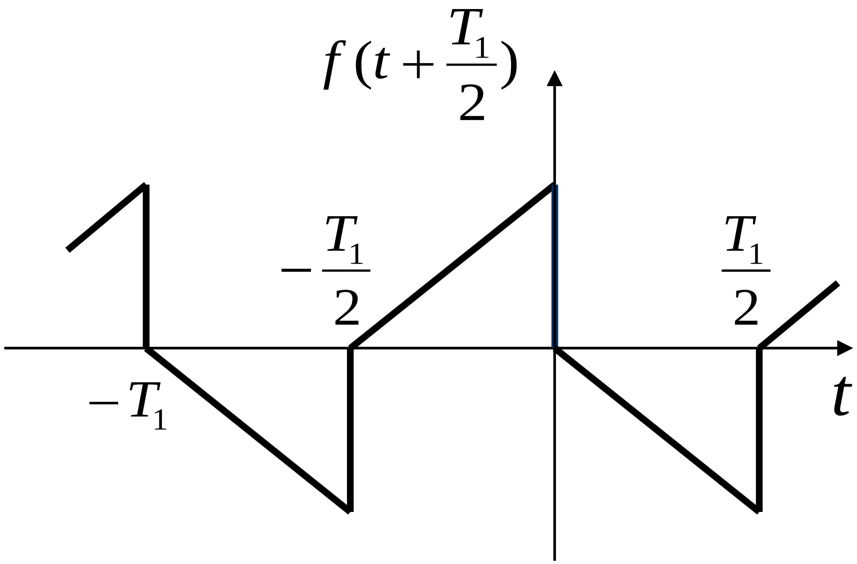
4.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

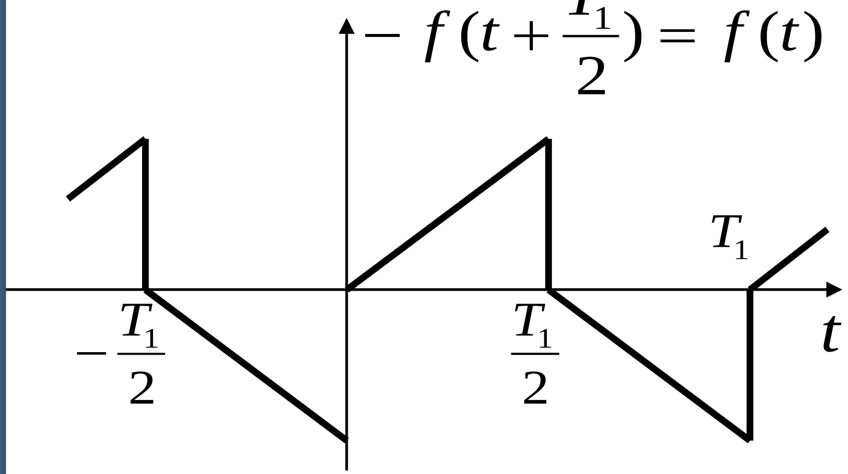
（3）奇谐函数

$$-\tilde{f}(t \pm \frac{T_1}{2}) = \tilde{f}(t)$$

例如







4.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

$$a_0 = 0$$

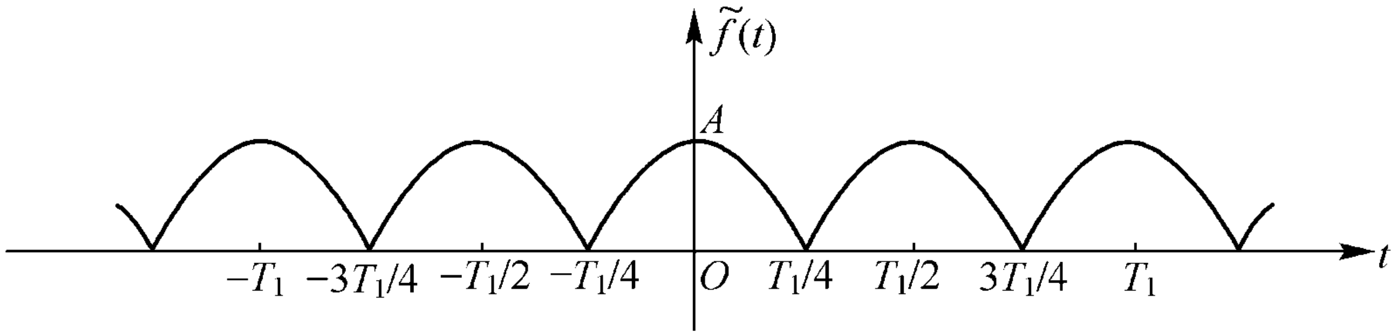
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2,4,6\cdots) \\ \dfrac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 t dt & (n = 1,3,5\cdots) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 2,4,6\cdots) \\ \dfrac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 t dt & (n = 1,3,5\cdots) \end{cases}$$

可见，在奇谐函数的傅里叶级数中，只会含有**奇次谐波分量**。

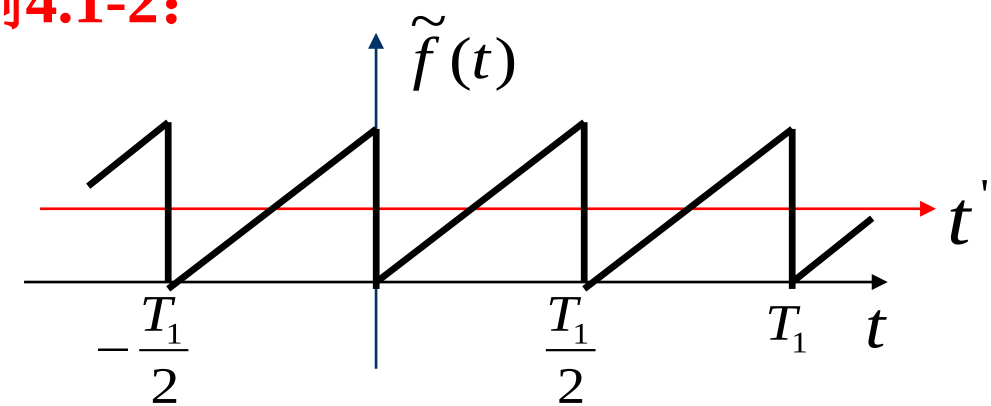
4.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

（4）偶谐函数 $\tilde{f}(t \pm \frac{T_1}{2}) = \tilde{f}(t)$



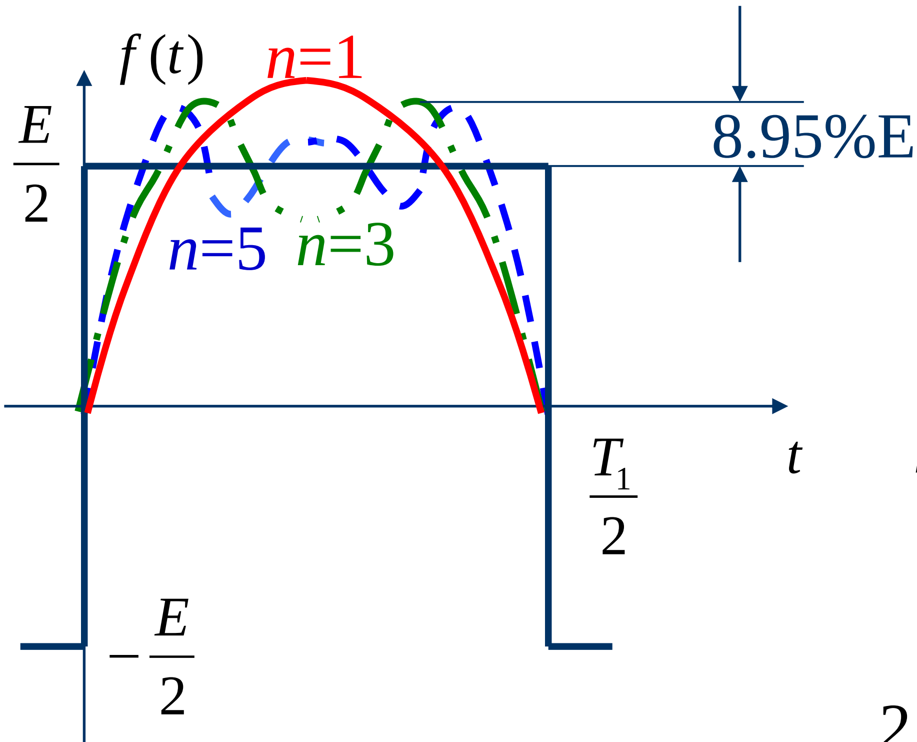
在偶谐函数的傅里叶级数中，只会含有**（直流）**与**偶次谐波分量**。

例4.1-2：



$\tilde{f}(t)$为偶谐函数，且去掉直流分量1/2后为奇函数，所以 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶级数中包含直流分量和偶次谐波的正弦分量。

4.1.5 吉伯斯（Gibbs）现象



$n=1$:
$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}\sin\Omega_1 t$$

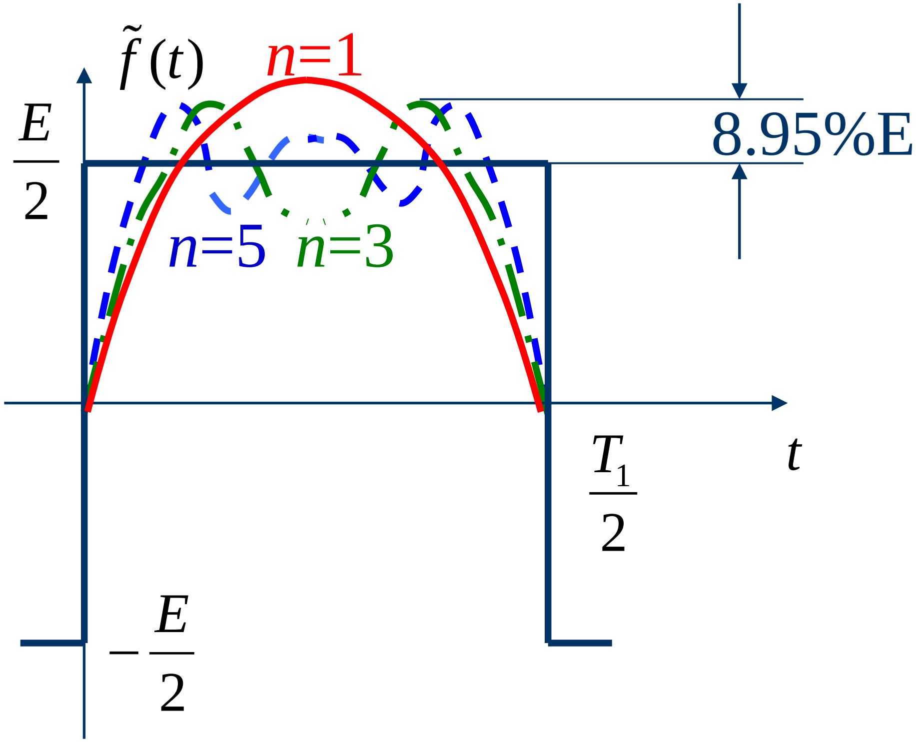
$n=3$:
$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}(\sin\Omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t)$$

$n=5$:
$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}(\sin\Omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\Omega_1)$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi}(\sin\Omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\Omega_1 + \cdots)$$

Show

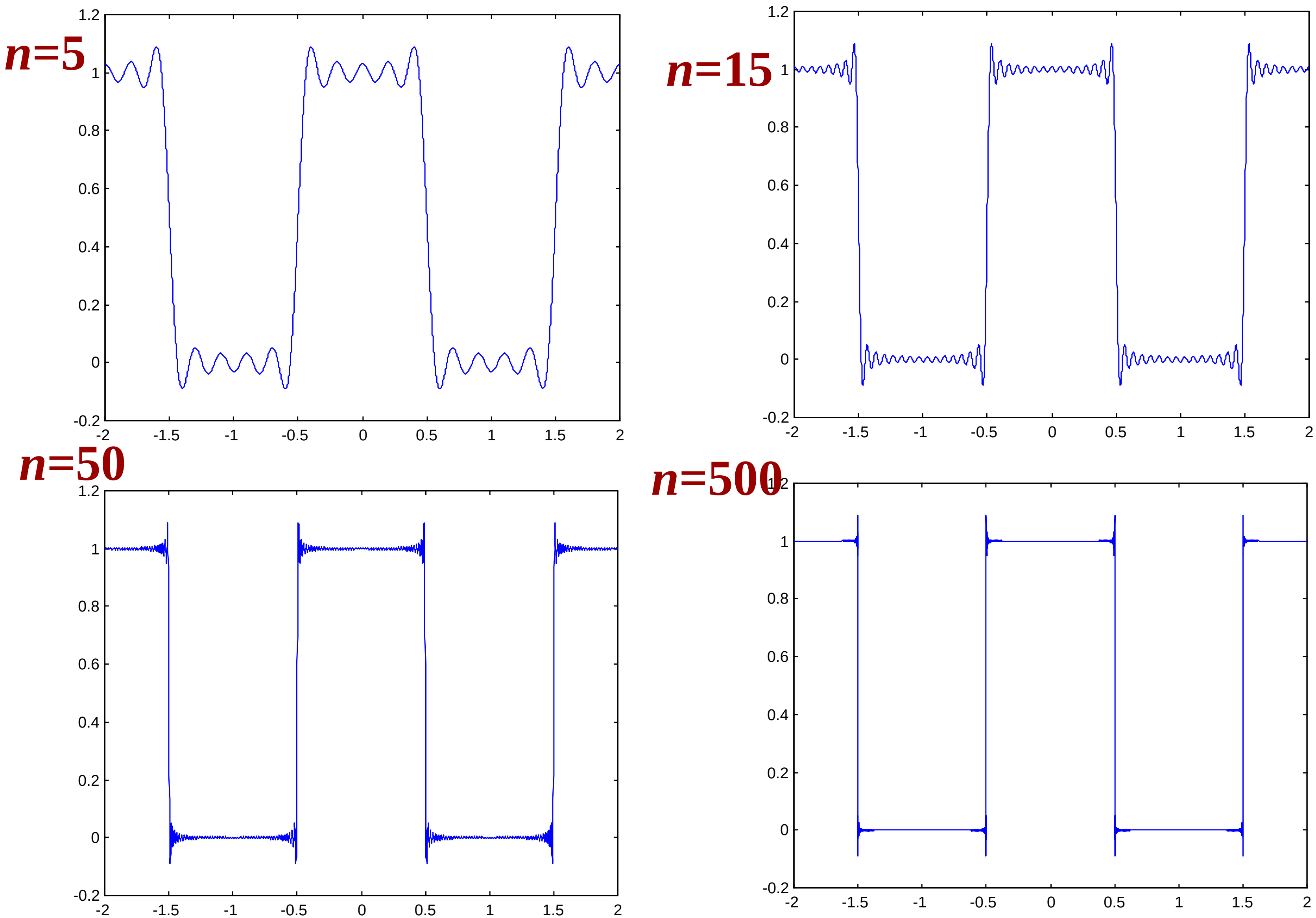
4.1.5 吉伯斯（Gibbs）现象



从左图可以看出：①傅里叶级数所取项数越多，相加后的波形越逼近原信号。②当信号是脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，而低频分量主要影响脉冲的幅度。

从上图还可以看出如下现象：选取傅里叶有限级数的项数越多，在所合成的波形中出现的峰值越靠近 $\tilde{f}(t)$ 的不连续点。但无论n取的多大（只要不是无限大），该峰值均趋于一个常数，它大约等于跳变值的 8.95%，并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。这种现象称为**吉伯斯现象**。

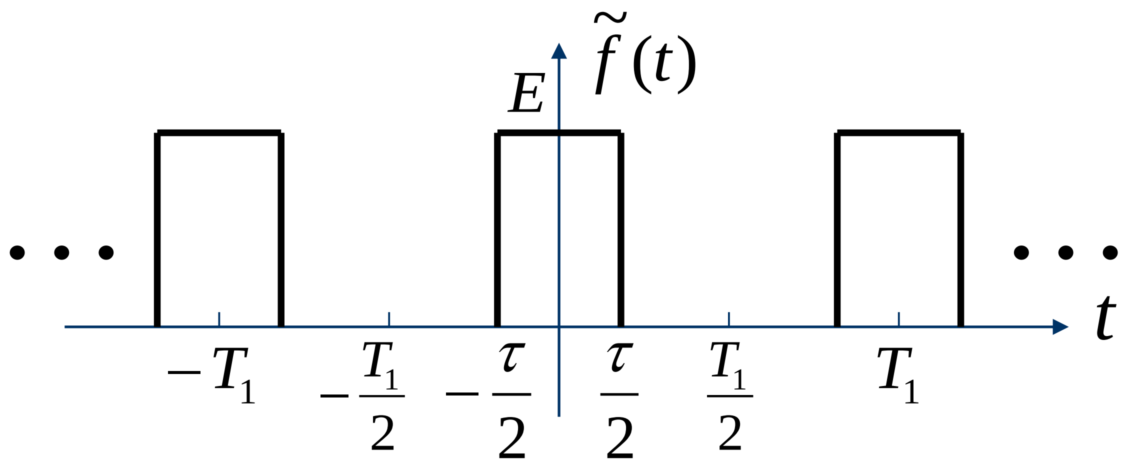
4.1.5 吉伯斯（Gibbs）现象



4.2 常用周期信号的频谱

4.2.1 周期矩形脉冲信号

(1) 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)dt = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} Edt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 tdt = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\Omega_1 tdt = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) = c_n$$

4.2.1 周期矩形脉冲信号

所以，三角形式傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)\cos n\Omega_1 t \qquad (4.2-4)$$

因为 $$F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$$

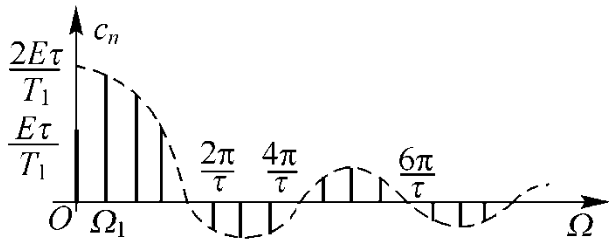
所以，指数形式的傅里叶级数为

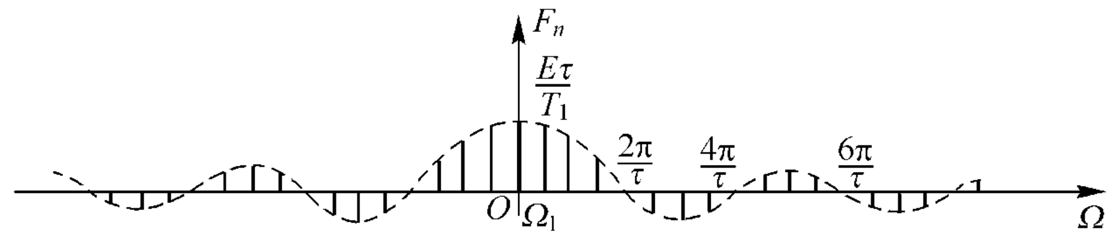
$$\tilde{f}(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\Omega_1 t} \qquad (4.2-6)$$

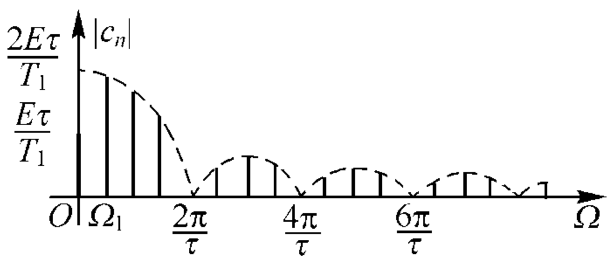
4.2.1 周期矩形脉冲信号

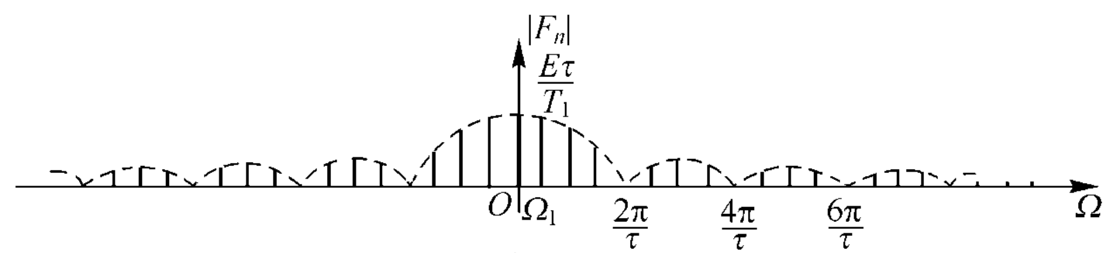
（2）频谱图

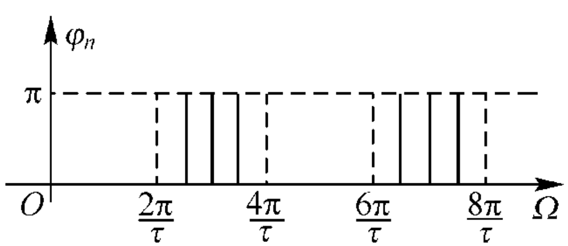
$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \qquad F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$$

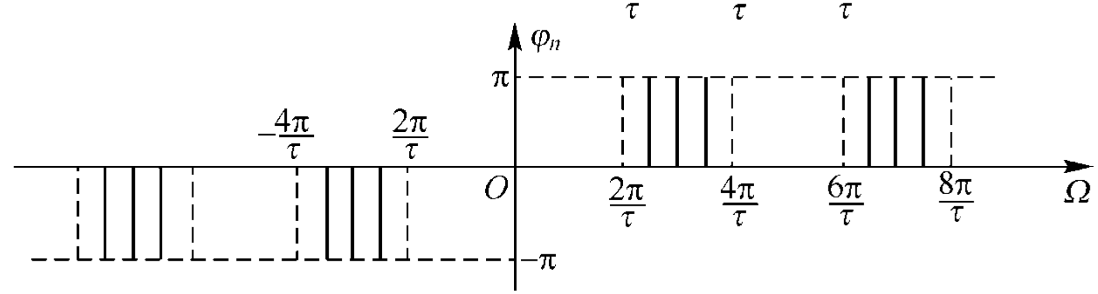




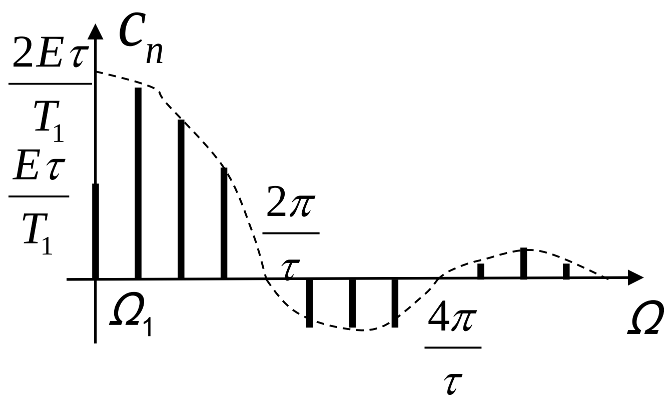








4.2.1 周期矩形脉冲信号



若 $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4}$

则 $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{4\tau} = \frac{1}{4}(\frac{2\pi}{\tau})$

因此，第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有**3**根谱线。

一般情况： 若 $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{n}$ 则

第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有***n*–1**根谱线。

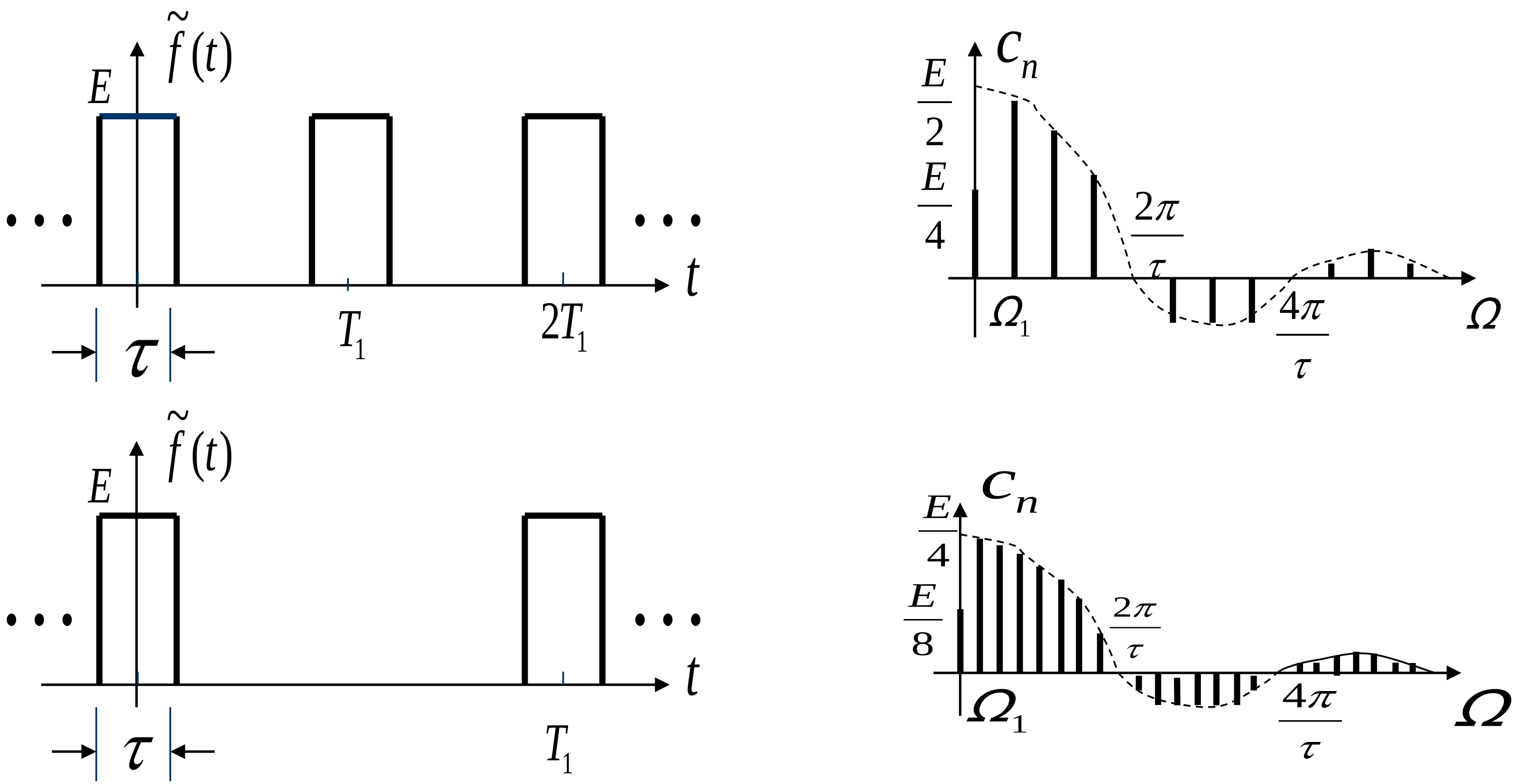
频带宽度： $B_\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f = \frac{1}{\tau}$

结论：矩形脉冲的频带宽度与脉冲宽度成反比。

4.2.1 周期矩形脉冲信号

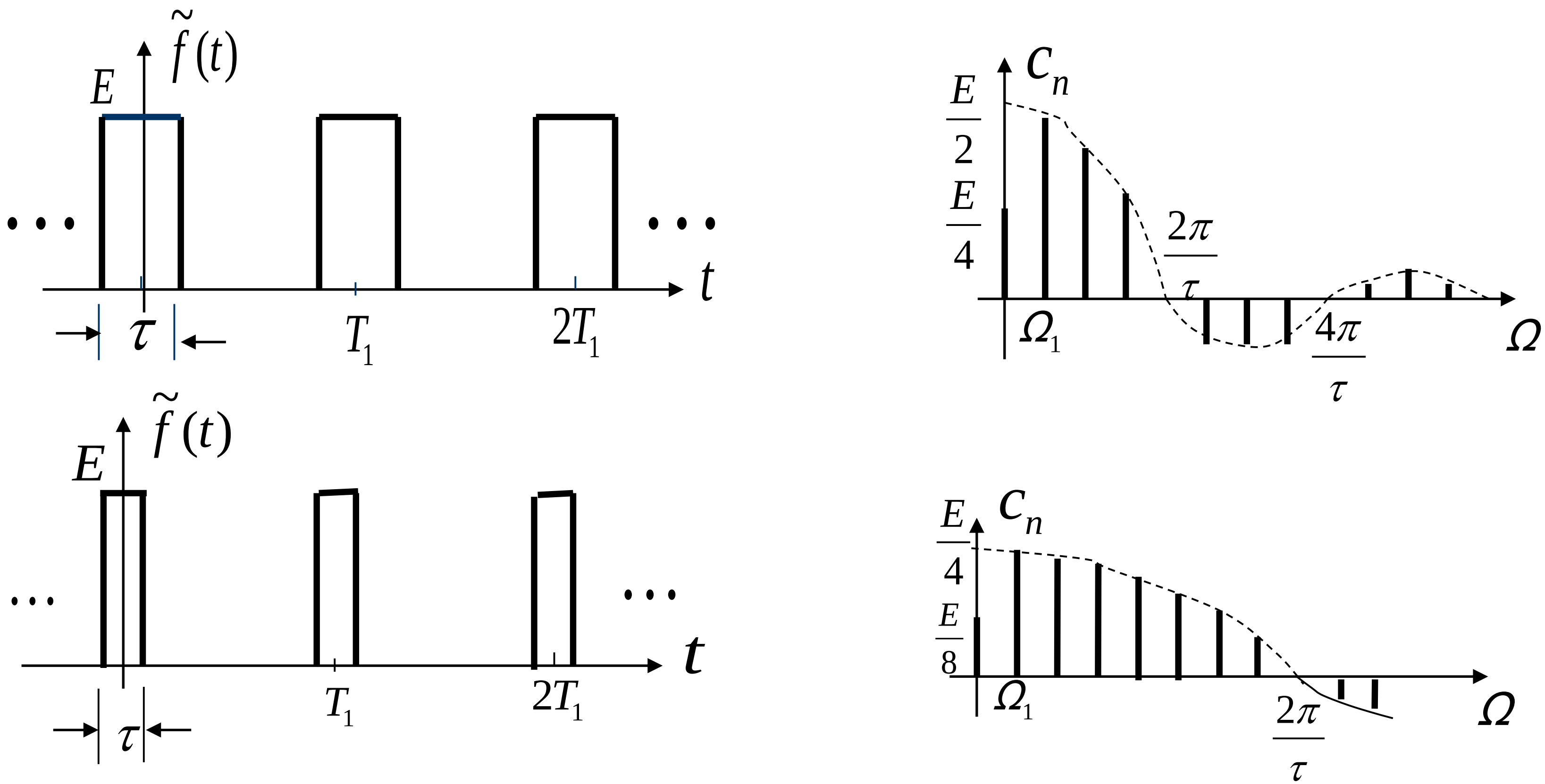
(3) 频谱结构与波形参数之间的关系

1. 若 τ 不变，T_1 扩大一倍，即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



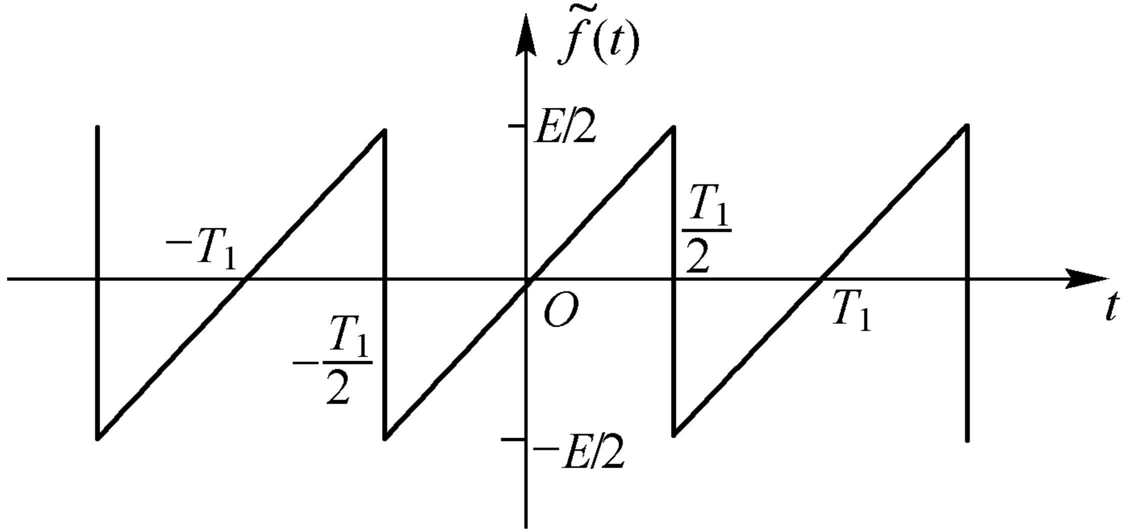
4.2.1 周期矩形脉冲信号

2. 若T_1不变，τ 减小一半，即 $T_1 = 4\tau \to T_1 = 8\tau$



谱线间隔$\Omega_1(=2\pi/T_1)$只与周期T_1有关，且与T_1成反比；零值点频率$2\pi/\tau$只与τ 有关，且与 τ 成反比；而谱线幅度与T_1和 τ 都有关系，且与T_1成反比与 τ 成正比。

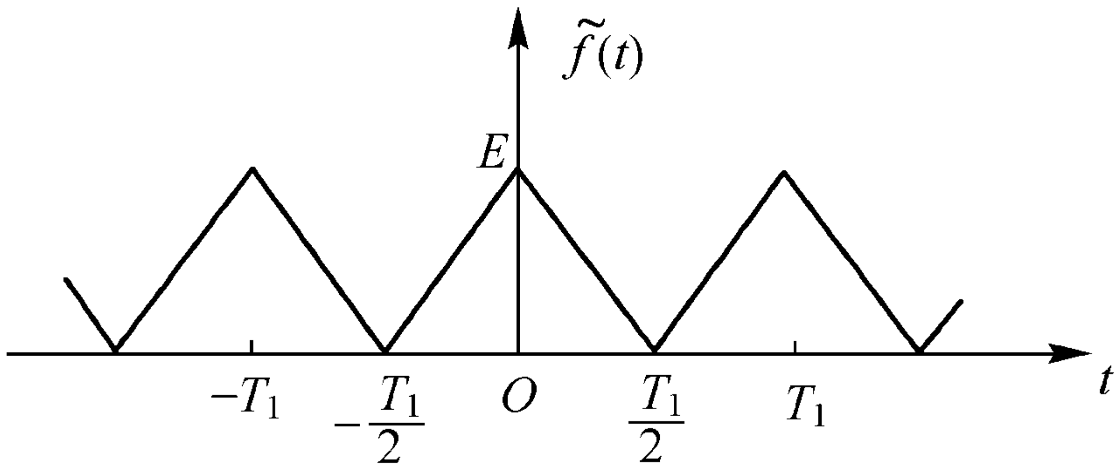
4.2.2 周期锯齿脉冲信号



$$\tilde{f}(t)=\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin n\Omega_1 t$$

周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量，谐波的幅度以$1/n$的规律收敛。

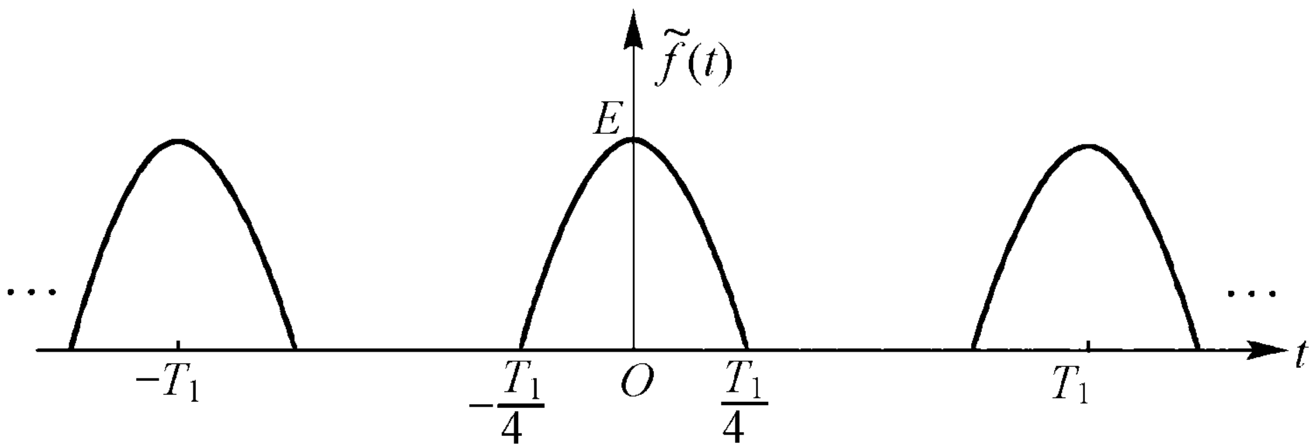
4.2.3 周期三角脉冲信号



$$\tilde{f}(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\cos n\Omega_1 t$$

周期三角脉冲的频谱只包含直流、奇次谐波的余弦分量，谐波的幅度以 $1/n^2$ 的规律收敛。

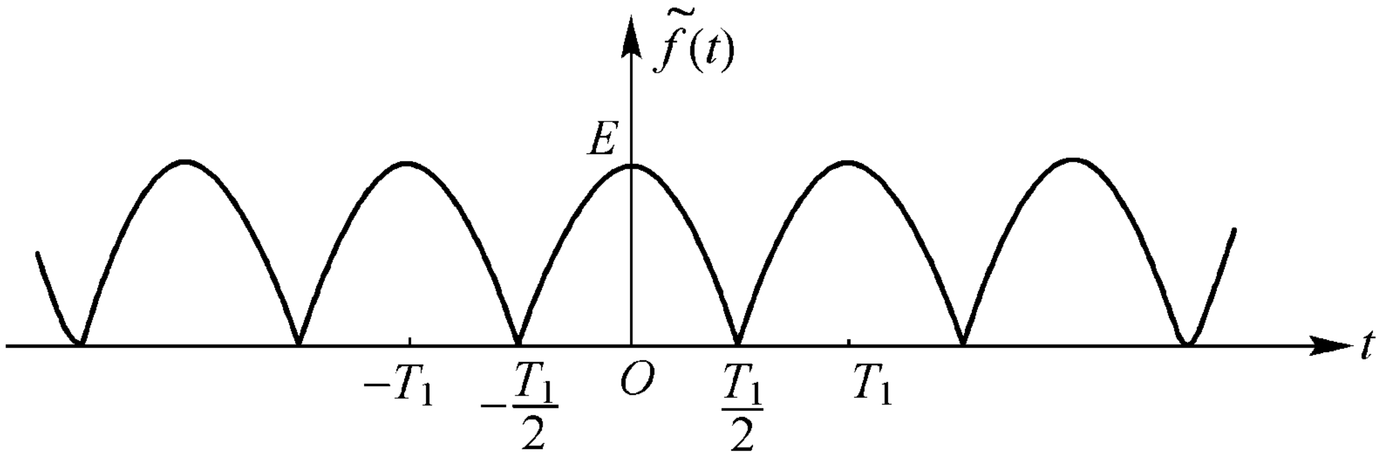
4.2.4 周期半波余弦信号



$$\tilde{f}(t)=\frac{E}{\pi}-\frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\Omega_1 t$$

周期半波余弦信号的频谱只含有直流、基波和偶次谐波的余弦分量。谐波幅度以$1/n^2$的规律收敛。

4.2.1 周期全波余弦信号

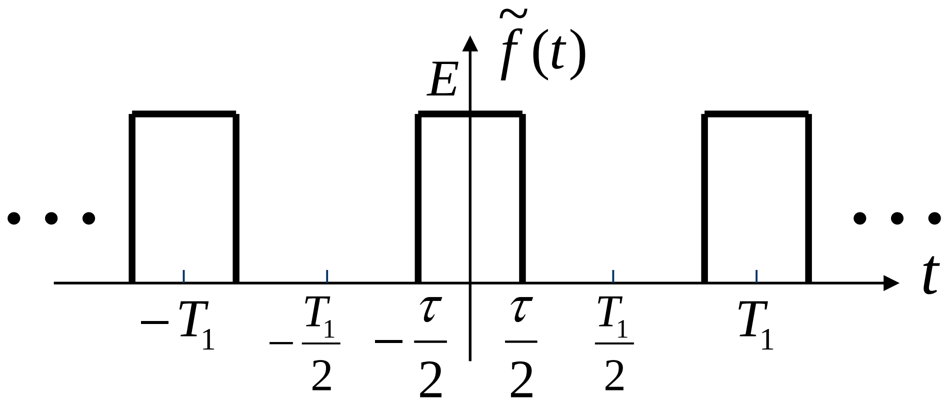


$$\tilde{f}(t)=\frac{2E}{\pi}+\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos\Omega_1 t-\frac{1}{15}\cos 2\Omega_1 t+\frac{1}{35}\cos 3\Omega_1 t-\cdots\right)$$

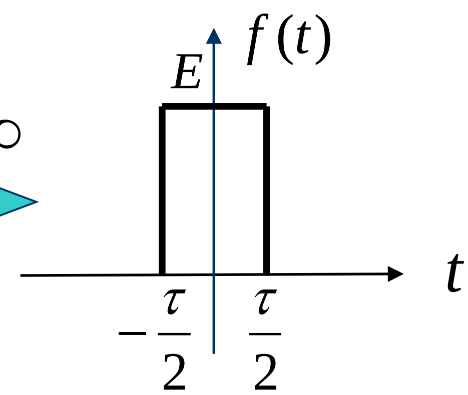
周期全波余弦信号的频谱包含直流分量及Ω_1的各次谐波分量。谐波的幅度以$1/n^2$的规律收敛。

4.3 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换

1. 傅里叶变换及傅里叶逆变换



$T_1 \to \infty$



$$T_1 \uparrow \longrightarrow \Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \longrightarrow \text{谱线间隔} \downarrow$$

$$T_1 \to \infty \longrightarrow \Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0 \longrightarrow \text{谱线间隔} \to 0$$

周期信号的离散谱 ⟶ 非周期信号的连续谱

由于 $T_1 \to \infty$， $F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)e^{-jn\Omega_1 t}dt \to 0$

Show

2. 频谱密度函数

$$\lim_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t)e^{-jn\Omega_1 t}dt$$

当$T_1 \to \infty$时，离散频率$n\Omega_1 \to$连续频率Ω

则 $$\lim_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt$$

记为 $$F(j\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt \quad (4.3-1)$$

---------- 非周期信号*f(t)* 的傅里叶变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \quad (4.3-4)$$

--------- 傅里叶逆变换

4.3 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\lim_{T_1\to\infty}T_1F_n=\lim_{\Omega_1\to 0}\frac{F_n 2\pi}{\Omega_1}=\frac{F_n 2\pi}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{F_n}{\mathrm{d}f}$$

从上式可以看出，具有单位频带复振幅的量纲，因此这个新的量称为原函数的频谱密度函数，简称**频谱函数**。

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\left|F(\mathrm{j}\Omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}$$

$\left|F(\mathrm{j}\Omega)\right|$ ------------ **幅度谱**

$\varphi(\Omega)$ ------------ **相位谱**

4.3 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换

傅里叶逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$

傅里叶变换：$F(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\Omega t}dt$ ------ 连续谱、相对幅度

周期信号：$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega_1 t}$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}\tilde{f}(t)e^{-jn\Omega_1 t}dt$$ ------ 离散谱、实际幅度

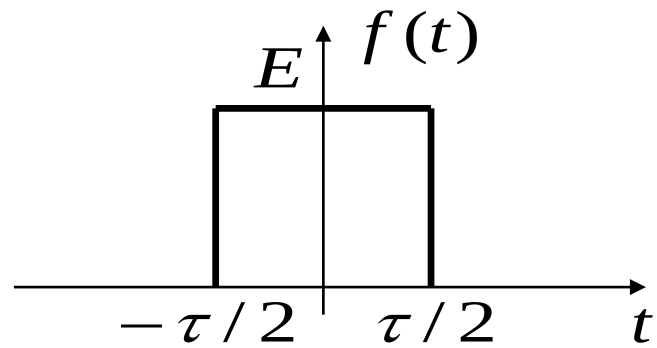
F_n 与 $F(j\Omega)$ 的关系：$\because F(j\Omega)=\lim_{T_1\to\infty}F_nT_1$

$$\therefore F_n=\left.\frac{F(j\Omega)}{T_1}\right|_{\Omega=n\Omega_1}$$

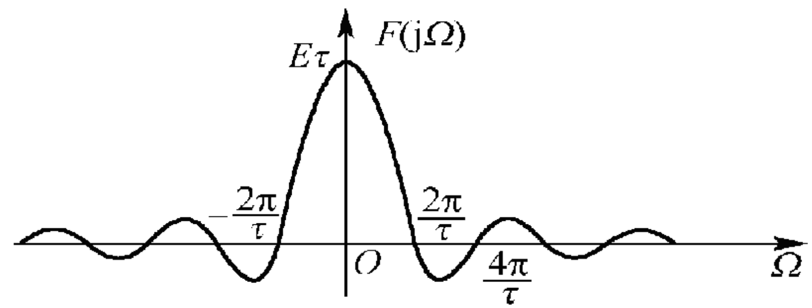
4.4　典型非周期信号的频谱

1. 对称矩形脉冲信号

$$f(t)=\begin{cases} E & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$F(j\Omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\Omega t}dt = E\tau \mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2}) \qquad (4.4-2)$$



周期矩形脉冲信号：

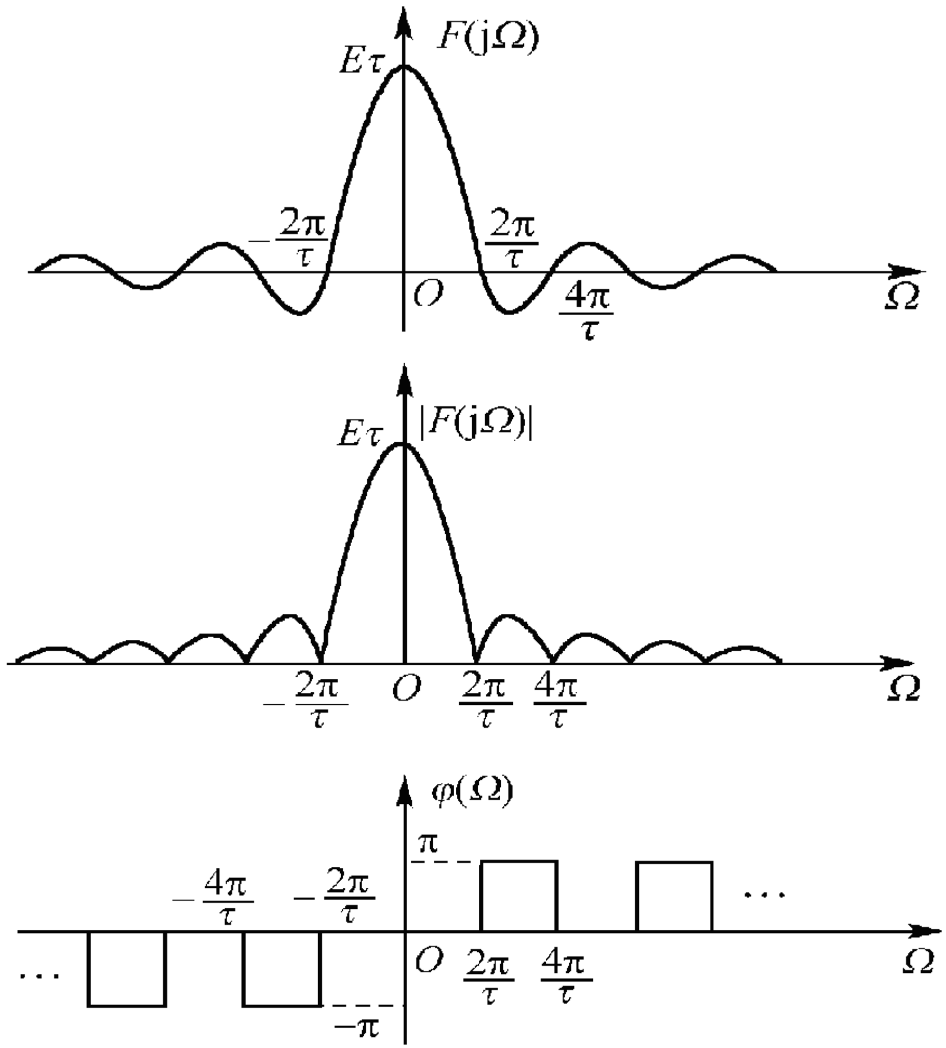
$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega_1\tau}{2})$$

$$B_\Omega=\frac{2\pi}{\tau},\quad B_f=\frac{1}{\tau}$$

$F(j\omega)$与F_n之间满足如下关系：

$$F_n=\frac{F(j\Omega)}{T_1}\bigg|_{\Omega=n\Omega_1}$$

4.4 典型非周期信号的频谱



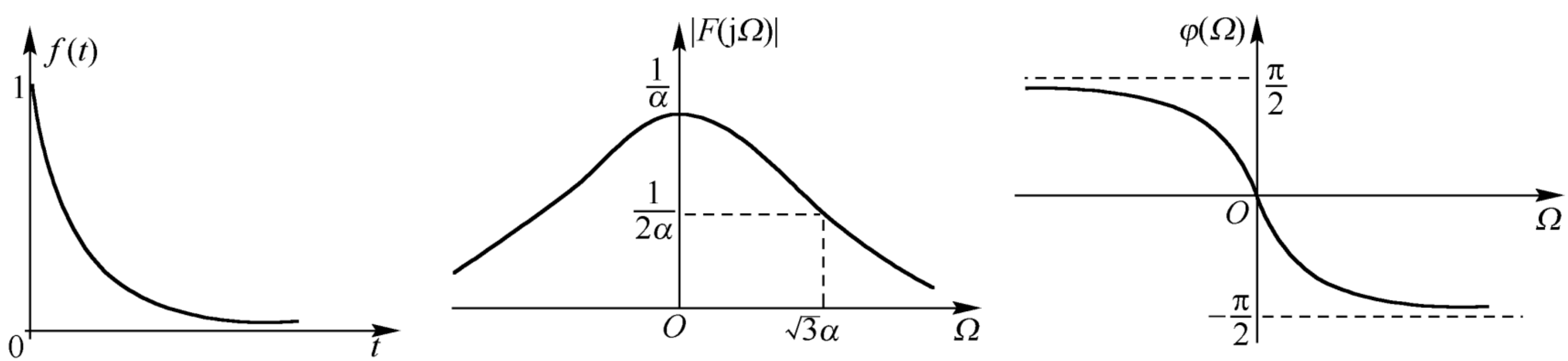
4.4 典型非周期信号的频谱

2. 单边指数信号

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = e^{-\alpha t}u(t)$$

$$F(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\Omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\Omega}$$

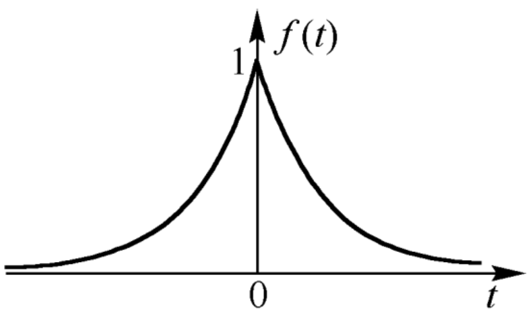
$$\left|F(j\Omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\Omega^2}} \qquad \varphi(\Omega)=-\arctan(\frac{\Omega}{\alpha})$$



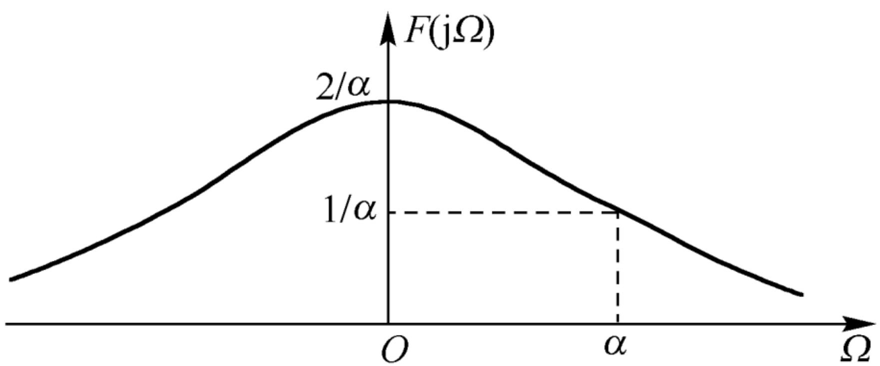
3. 双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

$$F(j\Omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2}$$



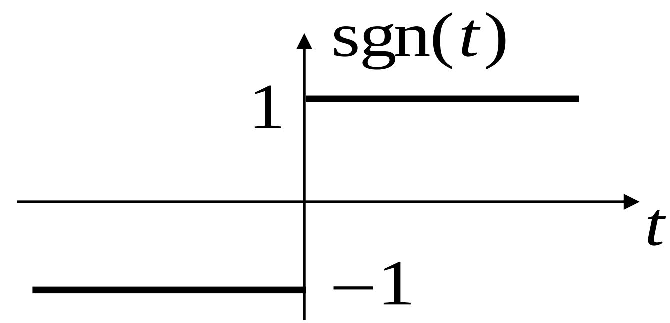
(a)



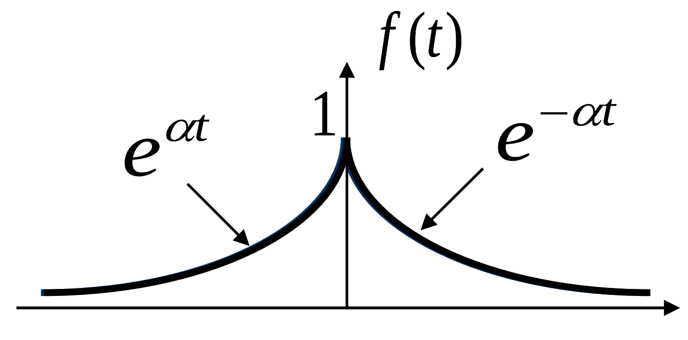
(b)

4. 符号函数

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

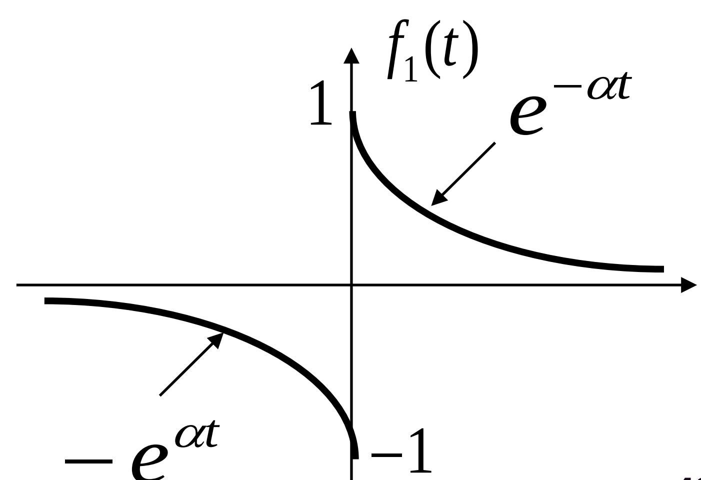


$$f(t)=e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$



$$f_1(t)=f(t)\,\mathrm{sgn}(t)$$
$$=-e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$

$$F_1(j\Omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$$
$$=\int_{-\infty}^{0}(-e^{\alpha t})e^{-j\Omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\Omega t}dt$$
$$=\frac{-2j\Omega}{\alpha^2+\Omega^2}$$



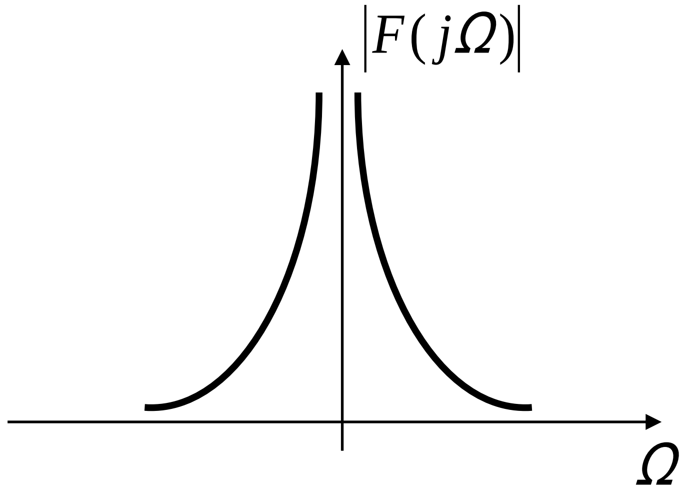
4.4 典型非周期信号的频谱

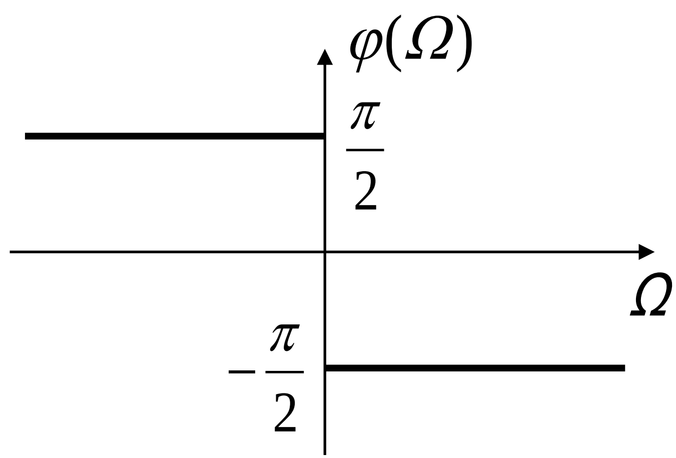
$$F_1(j\Omega)=\frac{-2j\Omega}{\alpha^2+\Omega^2}$$

$$F(j\Omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(j\Omega)=\frac{2}{j\Omega}$$

$$\left|F(j\Omega)\right|=\frac{2}{\left|\Omega\right|}$$

$$\varphi(\Omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & \Omega>0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \Omega<0\end{cases}$$



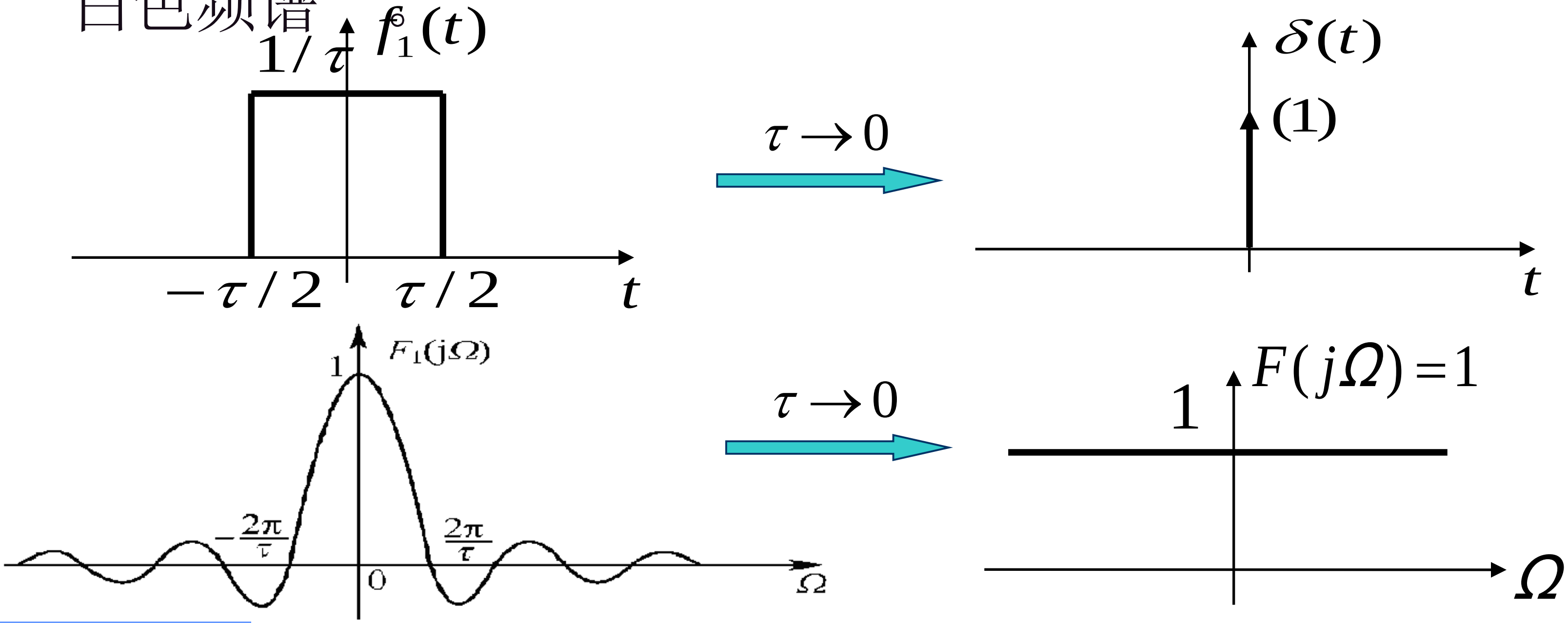


5. 冲激函数和冲激偶函数

(1) 冲激函数的傅里叶变换

$$F(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\Omega t}dt=1$$

单位冲激函数的频谱等于常数，也就是说，在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”



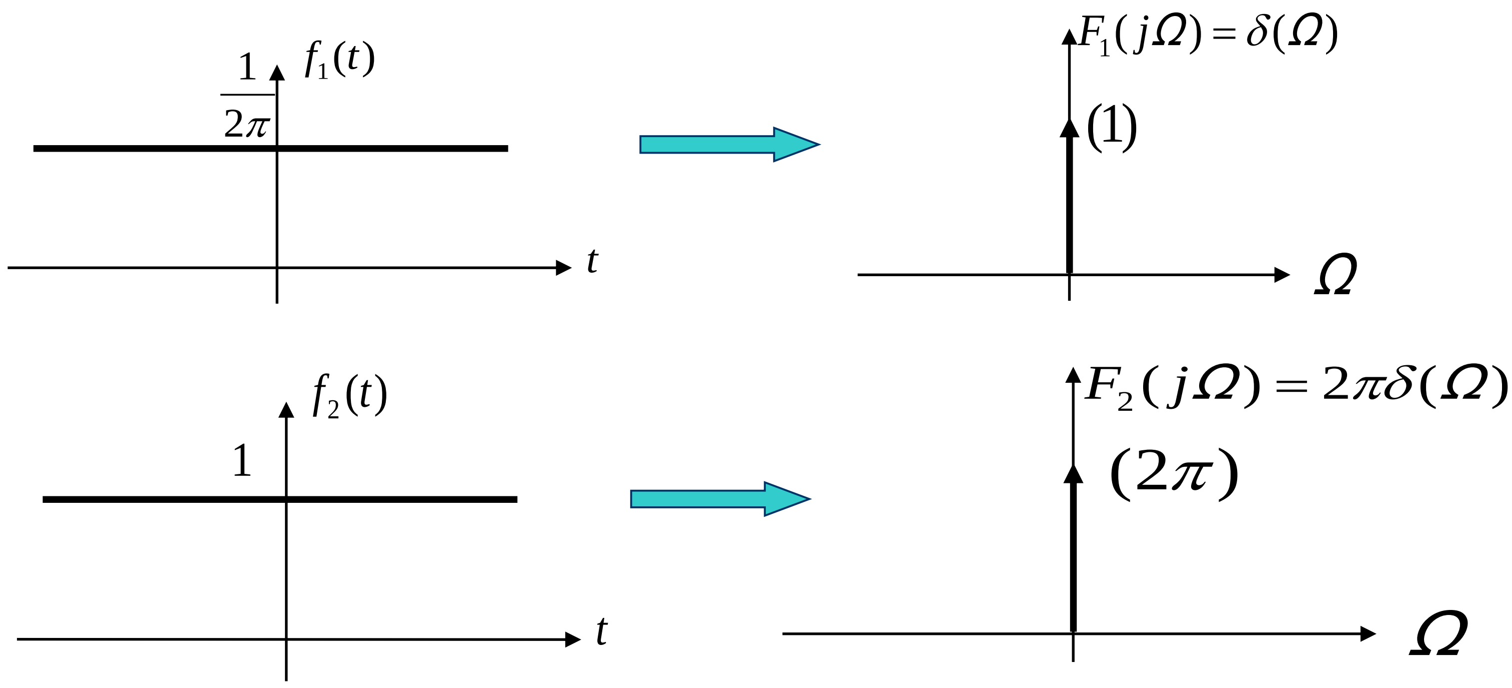
Show

4.4 典型非周期信号的频谱

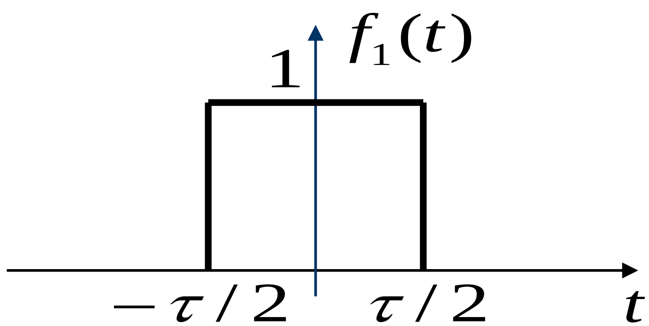
(2) 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[\delta(\Omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{2\pi}$$

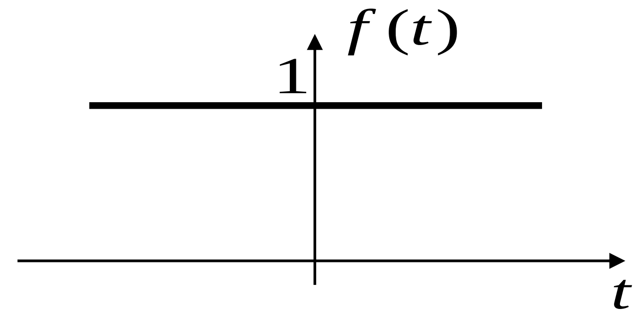
或 $\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}]=\delta(\Omega)$, $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\Omega)$

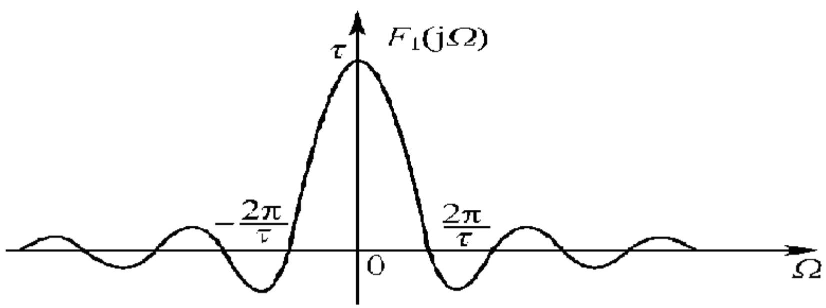


4.4 典型非周期信号的频谱

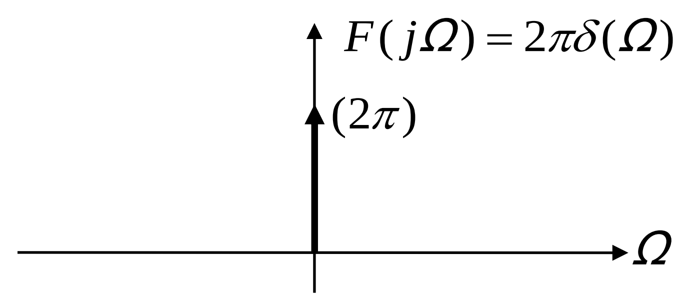


$\tau \to \infty$





$\tau \to \infty$



$$\because \lim_{\tau\to\infty}[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})] = 1$$

$$\therefore \mathcal{F}[1] = \lim_{\tau\to\infty} \tau \mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2}) = \underbrace{\lim_{\tau\to\infty} \frac{\tau}{2\pi} \mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2})}_{\delta(\Omega)} \cdot 2\pi \quad = 2\pi\delta(\Omega)$$

或：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau \mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2}) d\Omega = 2\pi$$

Show

(3) 冲激偶的傅里叶变换

$$\because \mathcal{F}[\delta(t)]=1, \qquad \text{即：} \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} d\Omega$$

上式两边对t求导得：

$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\therefore \mathcal{F}[\delta'(t)]=j\Omega \qquad (4.4-23)$$

同理：

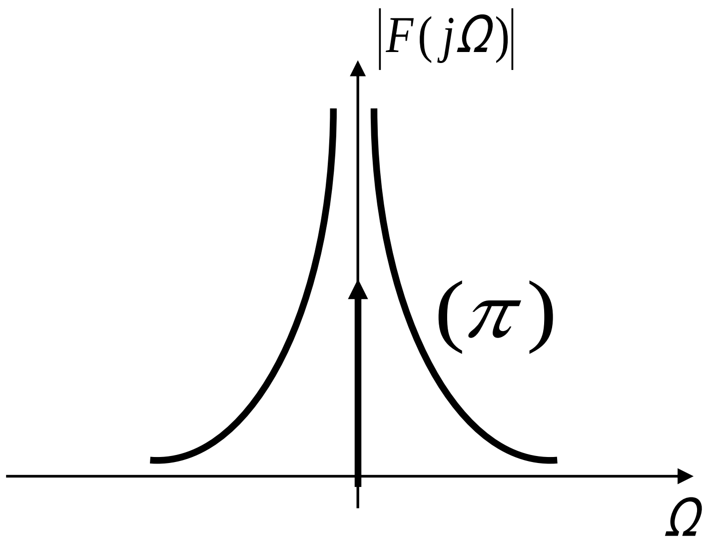
$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)]=(j\Omega)^n \qquad (4.4-24)$$

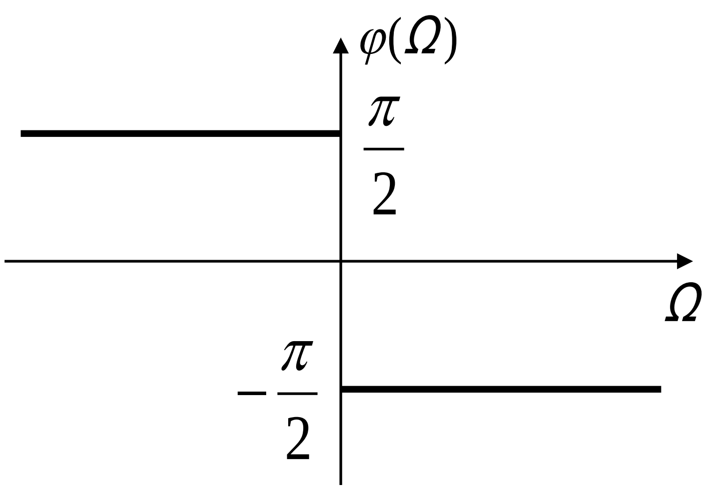
6. 阶跃信号

$$\because u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\therefore F(j\Omega)=\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}]+\mathcal{F}[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$$





4.5 傅里叶变换的基本性质

1. 线性

若 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(j\Omega),\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(j\Omega),$

则 $\mathcal{F}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(j\Omega)+a_2F_2(j\Omega)$

2. 对称性

设 $F(j\Omega)=|F(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}=R(\Omega)+jX(\Omega)$

其中 $|F(j\Omega)|=\sqrt{R^2(\Omega)+X^2(\Omega)},\ \varphi(\Omega)=\arctan\dfrac{X(\Omega)}{R(\Omega)}$

若 $\mathcal{F}[f(t)]=F(j\Omega)$

则 $\mathcal{F}[f(-t)]=F(-j\Omega) \qquad (4.5-6)$

$\mathcal{F}[f^*(t)]=F^*(-j\Omega) \qquad (4.5-7)$

$\mathcal{F}[f^*(-t)]=F^*(j\Omega) \qquad (4.5-8)$

如：

$$\because \mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] = \frac{1}{\alpha + j\Omega}$$

$$\therefore \mathcal{F}[e^{\alpha t}u(-t)] = \frac{1}{\alpha - j\Omega}$$

又如：$\because \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\Omega) + \dfrac{1}{j\Omega}$

$$\therefore \mathcal{F}[u(-t)] = \pi\delta(-\Omega) - \frac{1}{j\Omega} = \pi\delta(\Omega) - \frac{1}{j\Omega}$$

4.5 傅里叶变换的基本性质

两种特定关系：

1. 若$f(t)$是实函数，或虚函数 [$f(t)=j\,g(t)$]，则$|F(j\Omega)|$是偶函数，

$\varphi(\Omega)$ 是奇函数。

2. 若$f(t)$是 t 的 实偶函数，则 $F(j\Omega)$ 必为Ω的实偶函数,即

$$F(j\Omega)=R(\Omega)$$

若$f(t)$是 t 的实奇函数，则 $F(j\Omega)$ 必为 Ω的虚奇函数， 即

$$F(j\Omega)=jX(\Omega)$$

例如： $f(t)=e^{-\alpha|t|}$ （实偶） $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$ （实奇）

$F(j\Omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\Omega^2}$ （实偶） $F(j\Omega)=\dfrac{-2j\Omega}{\alpha^2+\Omega^2}$ （虚奇）

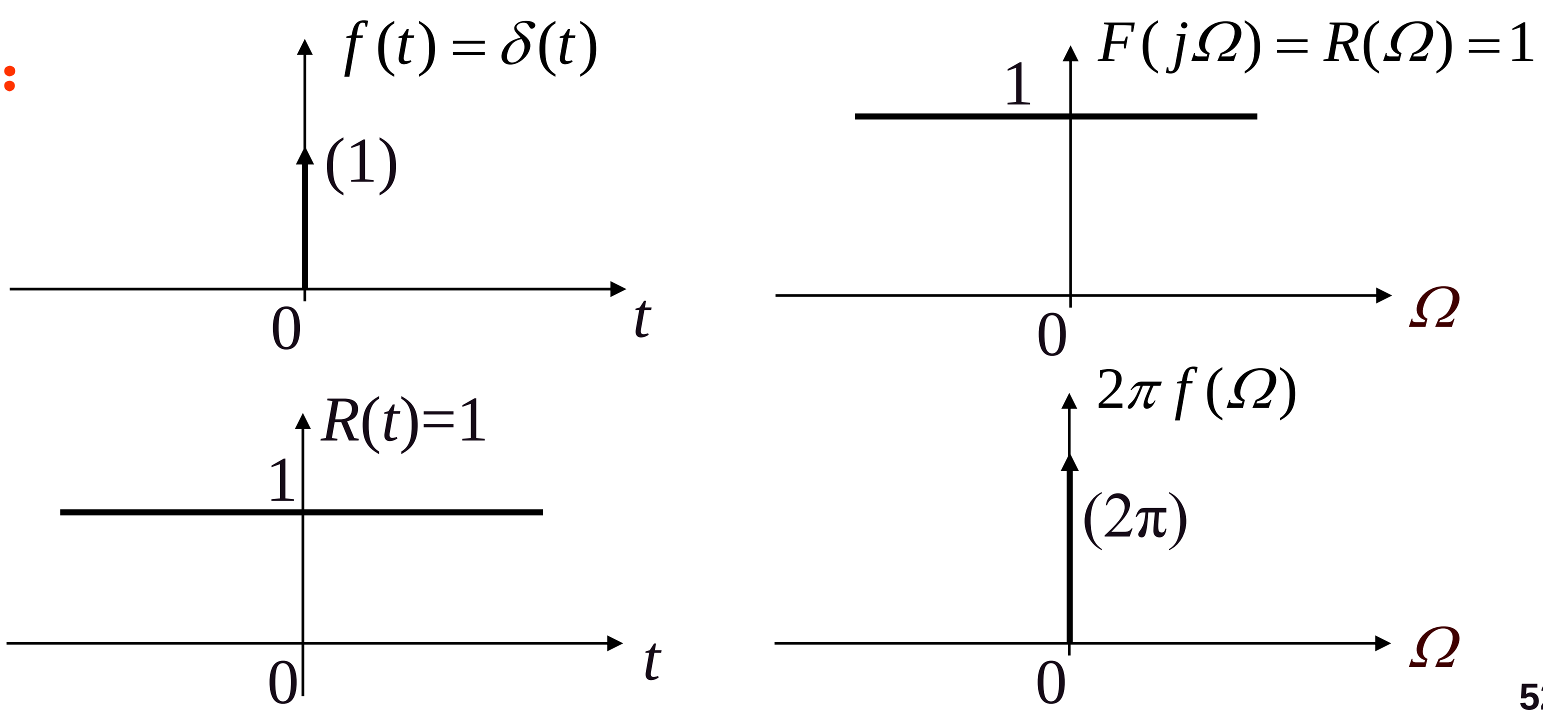
3. 对偶性

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(j\Omega)$，　则 $\mathscr{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\Omega)$

若$f(t)$为实偶函数，则 $F(j\Omega) = R(\Omega) = R(-\Omega)$

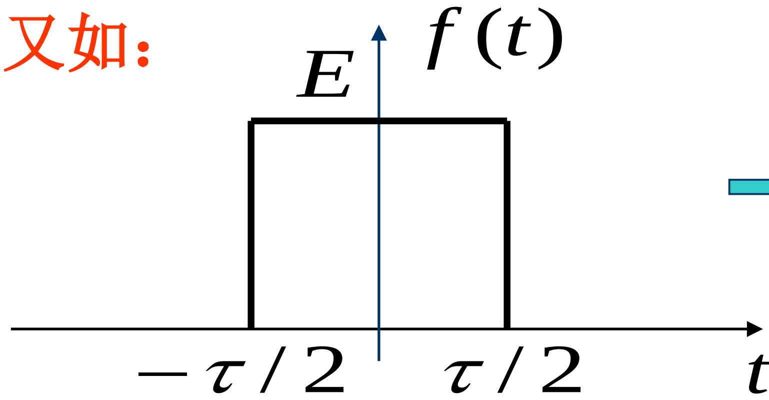
对偶性为：　$\mathscr{F}[R(t)] = 2\pi f(\Omega)$

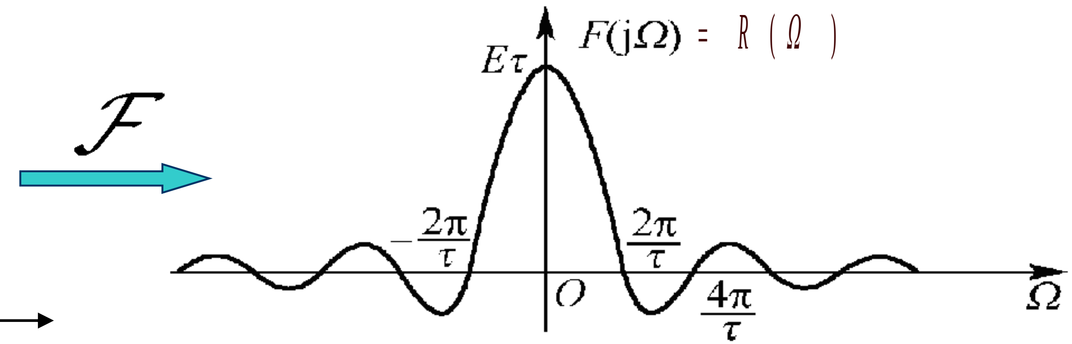
例如：

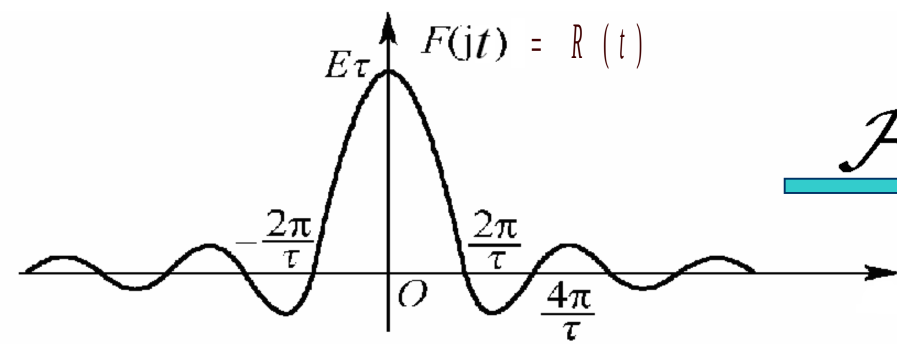


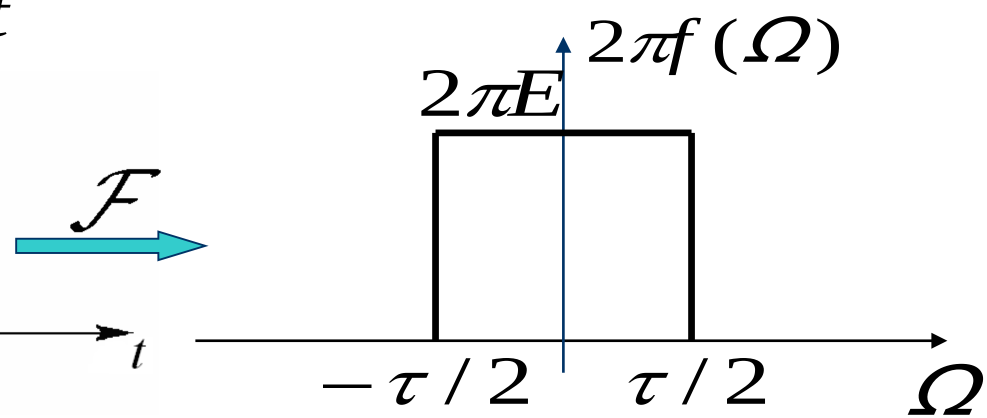
4.5 傅里叶变换的基本性质

又如：









$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]\rightarrow R(\Omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2})$$

$$R(t)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2})\rightarrow\mathscr{F}[R(t)]=2\pi E[u(\Omega+\frac{\tau}{2})-u(\Omega-\frac{\tau}{2})]$$

例4.5-2： 求$\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{t}\right]$。

解： 因为$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\dfrac{2}{j\Omega}$,

所以 $\mathcal{F}\left[\dfrac{2}{jt}\right]=2\pi\,\mathrm{sgn}(-\Omega)=-2\pi\,\mathrm{sgn}(\Omega)$

这样 $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{t}\right]=-j\pi\,\mathrm{sgn}(\Omega)$

4.5 傅里叶变换的基本性质

利用傅里叶变换的对偶性，可以将求傅里叶逆变换的问题转化为求傅里叶变换来进行。

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$

则 $\mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\Omega)$

即 $$f(-\Omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(jt)]$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(jt)]\Big|_{\Omega=-t}$$

例4.5-4： 求 $\mathcal{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\Omega)]$

解： $\because F(jt) = j\pi\,\mathrm{sgn}(t)$

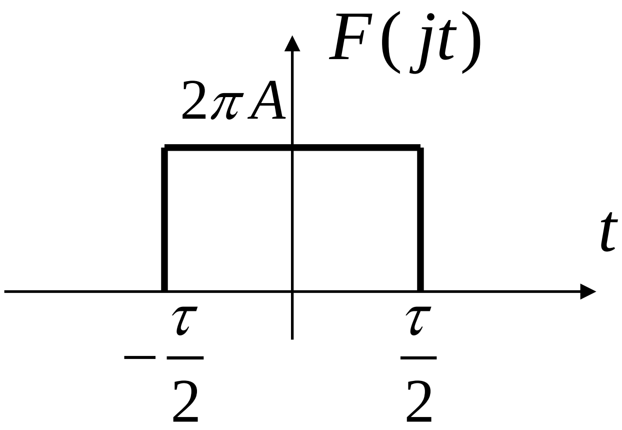
$$\mathcal{F}[F(jt)] = j\pi\frac{2}{j\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\therefore\ \mathcal{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(jt)]\Big|_{\Omega=-t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{\Omega}\right]\Bigg|_{\Omega=-t} = -\frac{1}{t}$$

例 已知信号的傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases}2\pi A & |\Omega|<\tau/2\\ 0 & |\Omega|>\tau/2\end{cases}$$

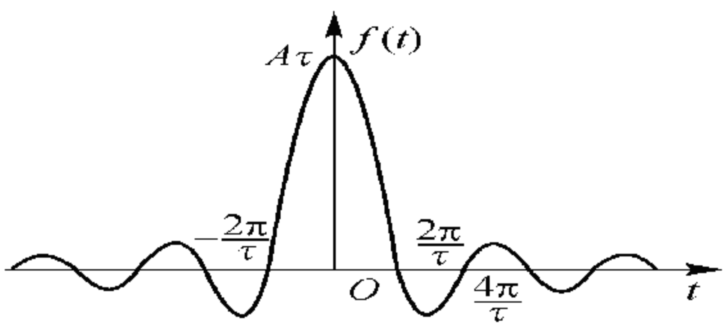


试求其逆变换 $f(t)$。

解：

$$F(\mathrm{j}t)=\begin{cases}2\pi A, & |t|<\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

$$\mathscr{F}\left[F(\mathrm{j}t)\right]=2\pi A\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$



$$\therefore\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[F(\mathrm{j}t)\right]\Big|_{\Omega=-t}=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi A\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right]\Bigg|_{\Omega=-t}=A\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)$$

4.5 傅里叶变换的基本性质

4. 位移性 （包括时移性和频移性）

（1）时移特性

若$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$，则

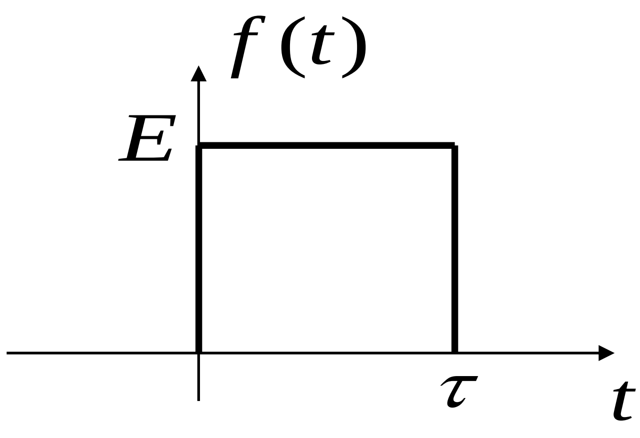
$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t_0}$$

同理 $$\mathcal{F}\left[f(t+t_0)\right] = F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t_0}$$

例4.5-5 求题图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。

解： 因为对称矩形脉冲信号 $G(t)$ 的傅里叶变换为

$$G(j\Omega) = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

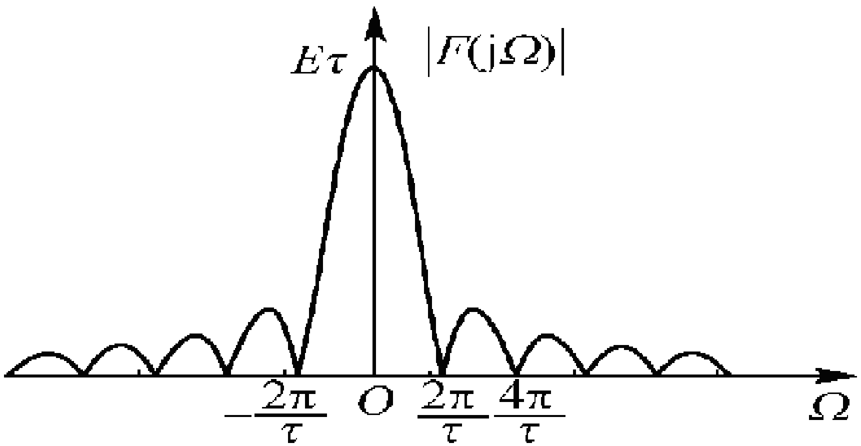


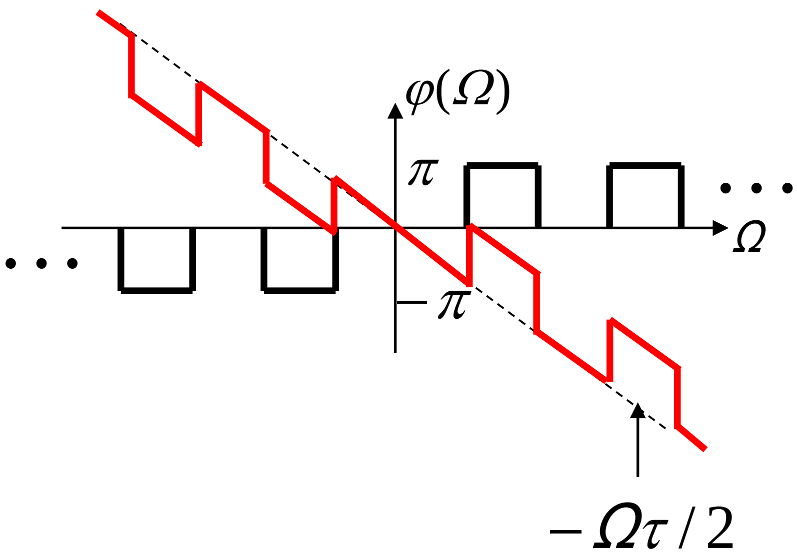
4.5 傅里叶变换的基本性质

$$G(j\Omega) = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$F(\mathrm{j}\Omega) = E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{\tau}{2}}$$

幅度谱保持不变，相位谱产生附加相移 $-\Omega\tau/2$





4.5 傅里叶变换的基本性质

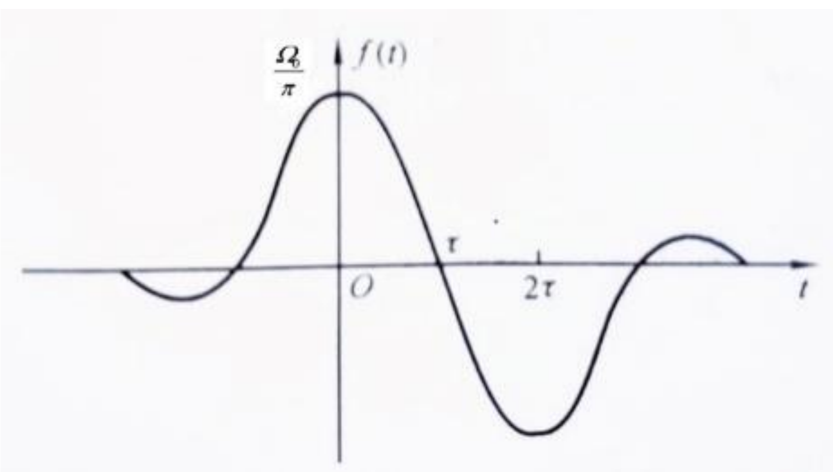
例4.5-6 试求双抽样信号 $f(t)=\dfrac{\Omega_0}{\pi}[\mathrm{Sa}\Omega_0 t-\mathrm{Sa}\Omega_0(t-2\tau)]$ 的频谱。

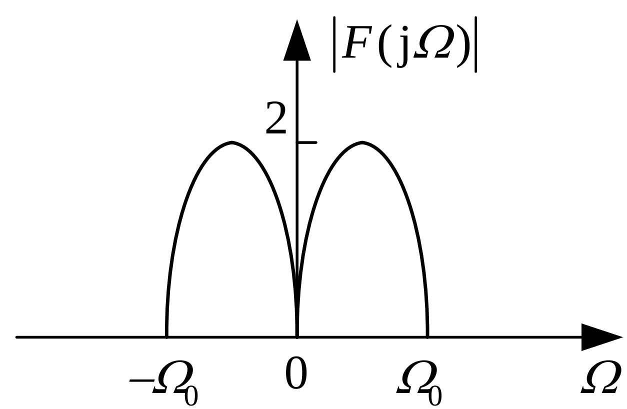
解： 令 $f_0(t)=\dfrac{\Omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}\Omega_0 t$　　则 $F_0(\mathrm{j}\Omega)=u(\Omega+\Omega_0)-u(\Omega-\Omega_0)$

又 $\dfrac{\Omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}\Omega_0(t-2\tau)=f_0(t-2\tau)$

由时移特性可得其频谱为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega\tau}F_0(\mathrm{j}\Omega)$，因此

$$F(\mathrm{j}\Omega)=(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega\tau})[u(\Omega+\Omega_0)-u(\Omega-\Omega_0)]=\begin{cases}2j\sin\tau\Omega, & |\Omega|<\Omega_0\\ 0, & |\Omega|>\Omega_0\end{cases}$$





（2）频移特性（调制定理)

若 $\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\mathrm{j}\Omega)$，则

$$\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\right]=F\left[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)\right] \qquad (4.5-17)$$

同理 $\mathcal{F}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t}\right]=F\left[\mathrm{j}(\Omega+\Omega_0)\right] \qquad (4.5-18)$

因为 $\cos\Omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t})$，$\sin\Omega_0 t=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 t})$

所以 $\mathcal{F}\left[f(t)\cos\Omega_0 t\right]=\dfrac{1}{2}\left\{F\left[\mathrm{j}(\Omega+\Omega_0)\right]+F\left[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)\right]\right\}$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\sin\Omega_0 t\right]=\frac{\mathrm{j}}{2}\left\{F\left[\mathrm{j}(\Omega+\Omega_0)\right]-F\left[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)\right]\right\}$$

例4.5-7 求 $e^{j\Omega_0 t}$，$\cos\Omega_0 t$ 及 $\sin\Omega_0 t$ 的频谱。

解： 因为$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\Omega)$，再根据频移性可得

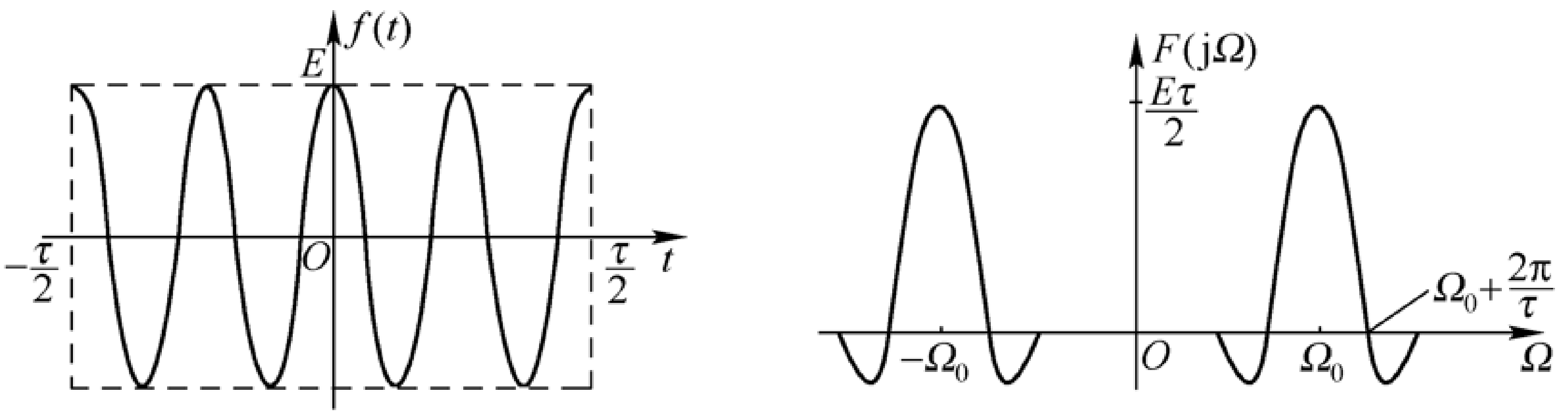
$$\mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}]=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0) \qquad (4.5-21)$$

$$\mathcal{F}\left[\cos\Omega_0 t\right]=\pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0)+\delta(\Omega-\Omega_0)\right] \qquad (4.5-22)$$

$$\mathcal{F}\left[\sin\Omega_0 t\right]=j\pi\left[\delta(\Omega+\Omega_0)-\delta(\Omega-\Omega_0)\right] \qquad (4.5-23)$$

4.5 傅里叶变换的基本性质

例4.5-8 求矩形脉冲调幅信号的频谱，已知 $f(t)=G(t)\cos\Omega_0 t$，其中$G(t)$为矩形脉冲，脉幅为E, 脉宽为τ。



(a) 波形　　(b) 频谱

$$\because \quad G(\mathrm{j}\Omega)=E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore \quad F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{2}\left\{G\left[\mathrm{j}(\Omega+\Omega_0)\right]+G\left[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)\right]\right\}$$

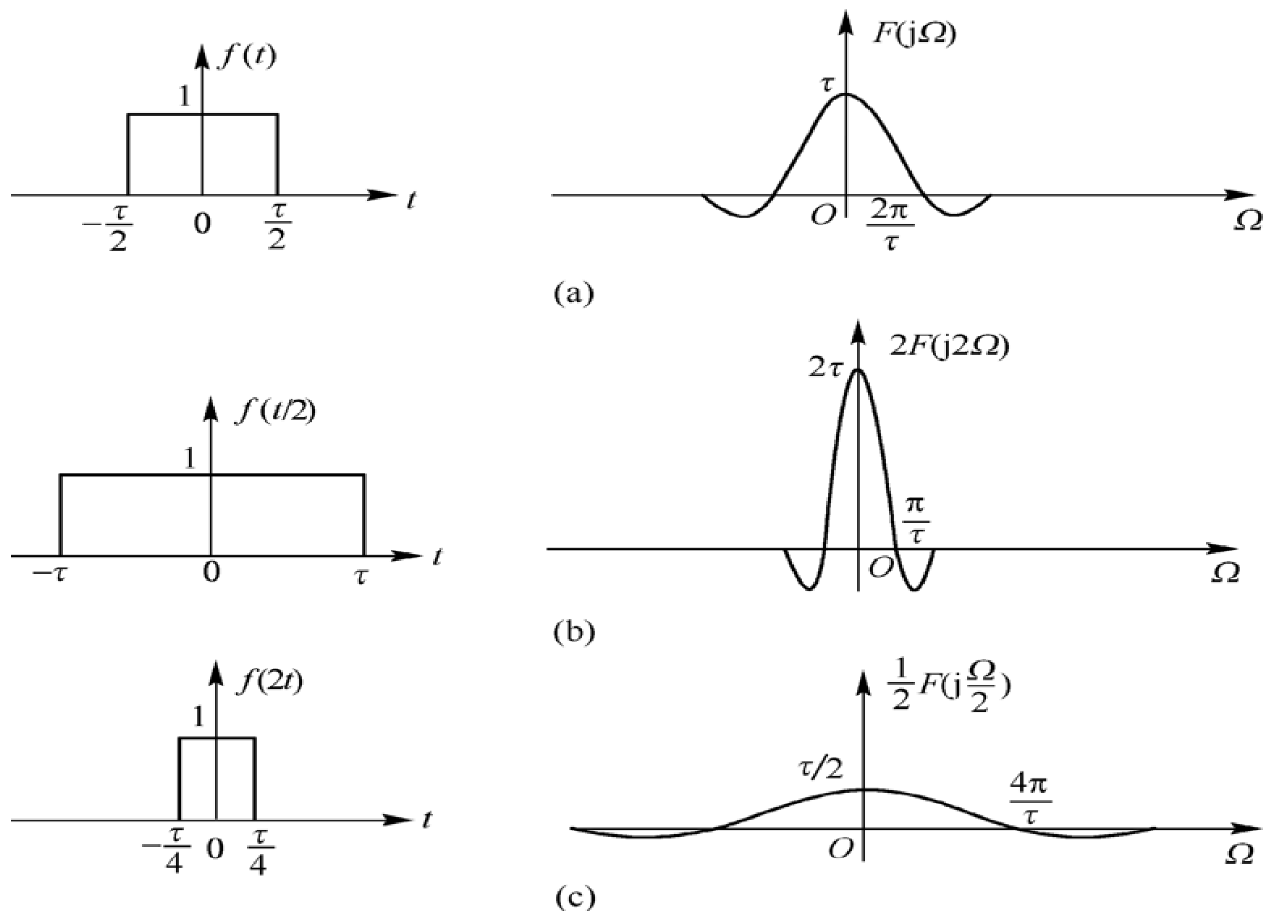
$$=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[(\Omega+\Omega_0)\frac{\tau}{2}\right]+\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[(\Omega-\Omega_0)\frac{\tau}{2}\right]$$

4.5 傅里叶变换的基本性质

5. 尺度变换

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\mathrm{j}\Omega)$ ，则 $\mathscr{F}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\dfrac{\Omega}{a}\right)$ (4.5 – 24)

信号在时域中压缩等效在频域中扩展；反之，信号在时域中扩展等效在频域中压缩。



4.5 傅里叶变换的基本性质

特例：$\mathscr{F}\left[f(-t)\right]=F(-\mathrm{j}\Omega)$ (4.5－25)

综合时移特性与尺度变换特性，还可以证明以下两式

$$\mathscr{F}\left[f(at-t_0)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\frac{\Omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Omega t_0}{a}} \qquad (4.5-26)$$

$$\mathscr{F}\left[f(t_0-at)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(-\mathrm{j}\frac{\Omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Omega t_0}{a}} \qquad (4.5-27)$$

6. 卷积定理

卷积定理包括时域卷积定理和频域卷积定理。

（1）时域卷积定理

若 $\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]=F_1(\mathrm{j}\Omega)$, $\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]=F_2(\mathrm{j}\Omega)$，则

$$\mathscr{F}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=F_1(\mathrm{j}\Omega)F_2(\mathrm{j}\Omega) \qquad (4.5-28)$$

（2）频域卷积定理

若 $\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]=F_1(\mathrm{j}\Omega)$, $\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]=F_2(\mathrm{j}\Omega)$，则

$$\mathscr{F}\left[f_1(t)f_2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\Omega)*F_2(\mathrm{j}\Omega) \qquad (4.5-29)$$

其中 $$F_1(\mathrm{j}\Omega)*F_2(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\mathrm{j}\mu)F_2\left[\mathrm{j}(\Omega-\mu)\right]\mathrm{d}\mu$$

例4.5-9 已知两矩形脉冲信号分别为

$$f_1(t)=2[u(t+1)-u(t-1)],\ \ f_2(t)=u(t+2)-u(t-2)$$

求 $f_1(t)*f_2(t)$的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\Omega)=\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]$

解：

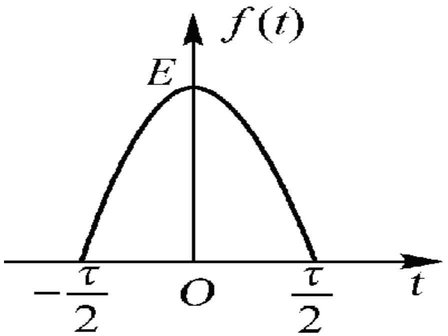
$$F_1(\mathrm{j}\Omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=4\mathrm{Sa}(\Omega)$$

$$F_2(\mathrm{j}\Omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=4\mathrm{Sa}(2\Omega)$$

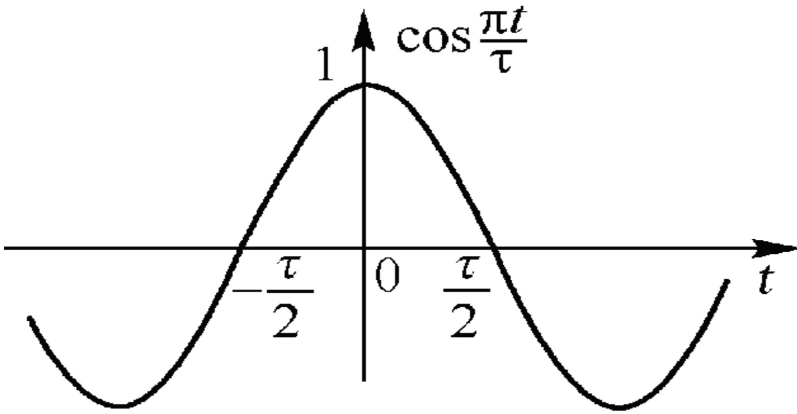
根据时域卷积定理，可求出

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\Omega)&=\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\mathrm{j}\Omega)F_2(\mathrm{j}\Omega)\\&=16\mathrm{Sa}(\Omega)\mathrm{Sa}(2\Omega)\end{aligned}$$

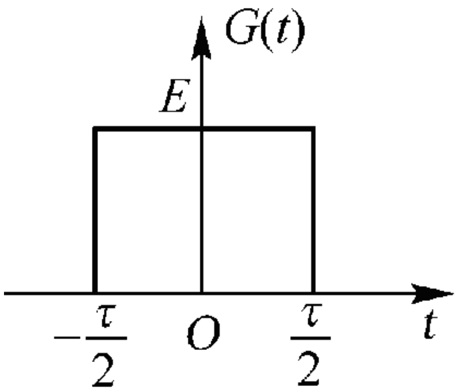
例4.5-10 利用频域卷积定理求余弦脉冲信号$f(t)$的频谱函数。



$$f(t)=\begin{cases} E\cos\dfrac{\pi}{\tau}t & |t|\le \tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2 \end{cases}$$



解： 把$f(t)$看作是矩形脉冲$G(t)$与无穷长余弦函数的乘积。



$$G(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}[G(t)]=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[\cos\frac{\pi}{\tau}t\right]=\pi\left[\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$$

根据频域卷积定理，可以得到$f(t)$的频谱函数为

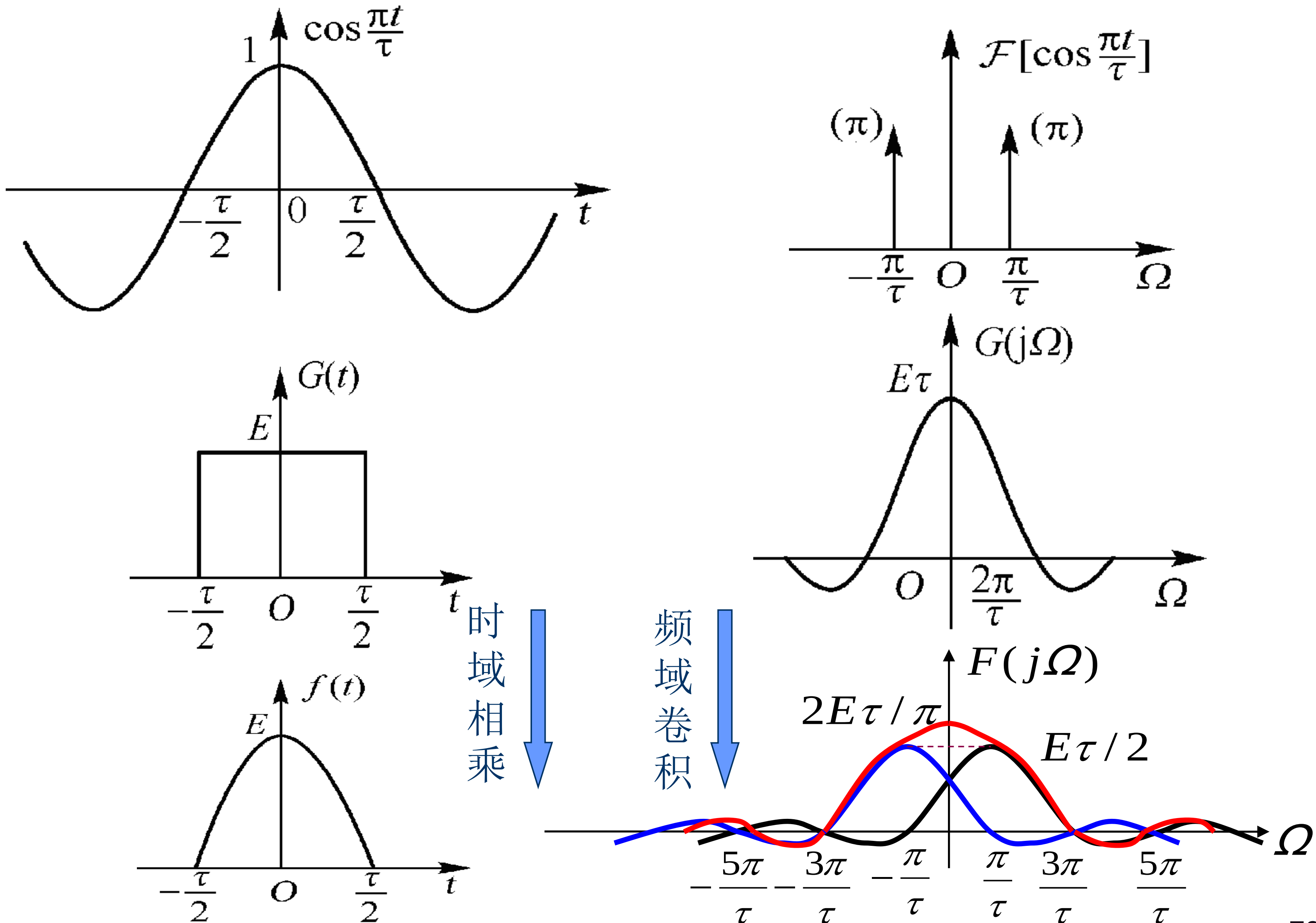
$$F(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}\left[G(t)\cos\frac{\pi}{\tau}t\right]=\frac{1}{2\pi}G(\mathrm{j}\Omega)*\mathcal{F}\left[\cos\frac{\pi}{\tau}t\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)*\pi\left[\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$$

$$=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\Omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]+\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\Omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]$$

$$=\frac{2E\tau}{\pi}\frac{\cos(\frac{\Omega\tau}{2})}{\left[1-\left(\frac{\Omega\tau}{\pi}\right)^{2}\right]}$$

4.5　傅里叶变换的基本性质



4.5 傅里叶变换的基本性质

7. 微分与积分

微分与积分特性包括时域微分与积分特性和频域微分与积分特性。

（1）时域微分

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\mathrm{j}\Omega)$，则 $\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{j}\Omega F(\mathrm{j}\Omega)$ (4.5 – 31)

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (\mathrm{j}\Omega)^n F(\mathrm{j}\Omega) \qquad (4.5-32)$$

例如：由于 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$，所以

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = \mathrm{j}\Omega, \qquad \mathcal{F}\left[\delta^{(n)}(t)\right] = (\mathrm{j}\Omega)^n$$

（2）时域积分

若 $\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\mathrm{j}\Omega)$，则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{j}\Omega}+\pi F(0)\delta(\Omega) \qquad (4.5-35)$$

式中， $F(0)=F(\mathrm{j}\Omega)\big|_{\Omega=0}$

如果 $F(0)=0$，则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{j}\Omega} \qquad (4.5-36)$$

4.5 傅里叶变换的基本性质

当 $f(t)$ 的导数 $\varphi(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$ 的频谱比较容易求出时，可以利用积分特性来求原函数的频谱，但需要对式（1）进行修正。

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{\Phi(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{j}\Omega}+\left[f(-\infty)+f(\infty)\right]\pi\delta(\Omega) \qquad (4.5-37)$$

式中，$\Phi(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=\mathcal{F}[\varphi(t)]$ ，

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t), \qquad f(-\infty)=\lim_{t\to-\infty}f(t)$$

1. 当 $f(-\infty)=0,\quad f(\infty)\neq 0$ 时，有

$$F(j\Omega)=\frac{\Phi(j\Omega)}{j\Omega}+\pi\Phi(0)\delta(\Omega)$$

2. 当 $f(-\infty)=0,\quad f(\infty)=0$ 时，有 $F(j\Omega)=\dfrac{\Phi(j\Omega)}{j\Omega}$

例： 利用积分特性分别求 $f_1(t)=u(t)$ 及 $f_2(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$ 的傅里叶变换。

解： 由于 $\varphi_1(t)=\dfrac{du(t)}{dt}=\delta(t),\ \varphi_2(t)=\dfrac{d}{dt}[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)]=\delta(t)$

即 $\Phi_1(j\Omega)=\Phi_2(j\Omega)=1$

又因为 $f_1(-\infty)=0,\ f_1(\infty)=1,\ f_2(-\infty)=-\dfrac{1}{2},\ f_2(\infty)=\dfrac{1}{2}$

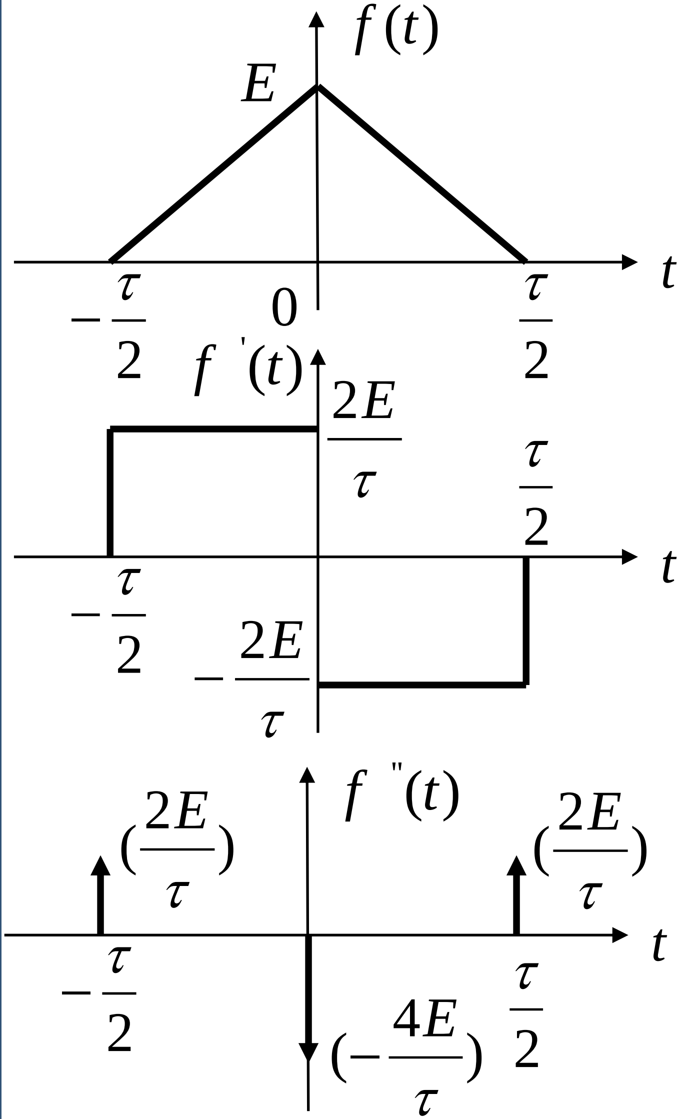
所以，

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{\Phi_1(j\Omega)}{j\Omega}+[f_1(\infty)+f_1(-\infty)]\pi\delta(\Omega)=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$$

$$\mathcal{F}[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)]=\frac{\Phi_2(j\Omega)}{j\Omega}+[f_2(\infty)+f_2(-\infty)]\pi\delta(\Omega)=\frac{1}{j\Omega}$$

即 $$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\frac{2}{j\Omega}$$

例4.5-11 求下图所示的三角脉冲信号的傅里叶变换。



解： 首先求出$f(t)$的一阶导数和二阶导数

$$f''(t)=\frac{2E}{\tau}\left[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)\right]$$

对上式两边取傅里叶变换：

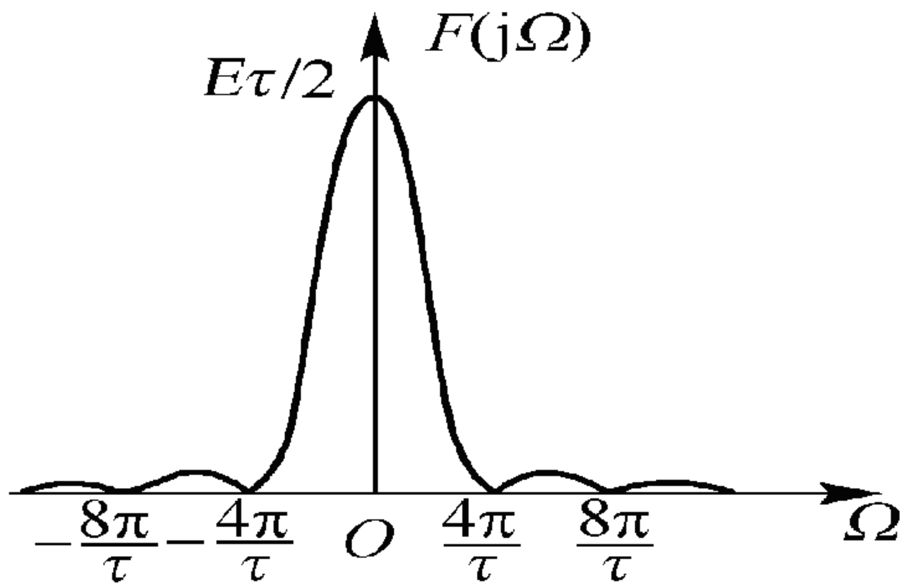
$$(\mathrm{j}\Omega)^2F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2E}{\tau}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\frac{\tau}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{\tau}{2}}-2\right]$$

$$=-\frac{\Omega^2E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

$$(\mathrm{j}\Omega)^2 F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2E}{\tau}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\frac{\tau}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{\tau}{2}}-2\right]=-\frac{\Omega^2 E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

由于 $f(-\infty)=f(\infty)=0$，所以可以利用的二阶导数的频谱来求其原函数的频谱。于是

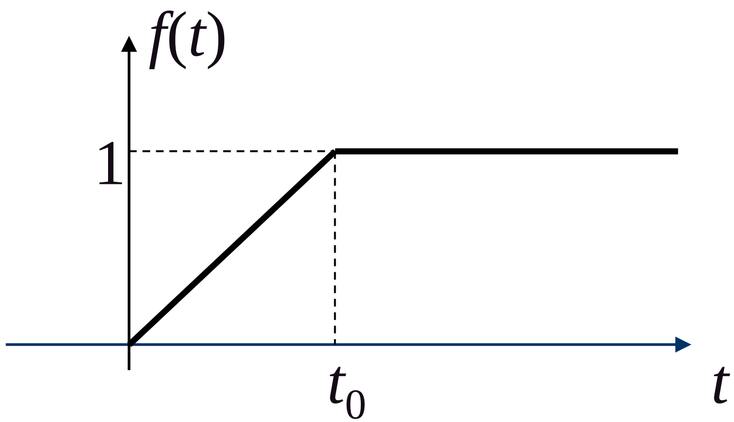
$$F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$



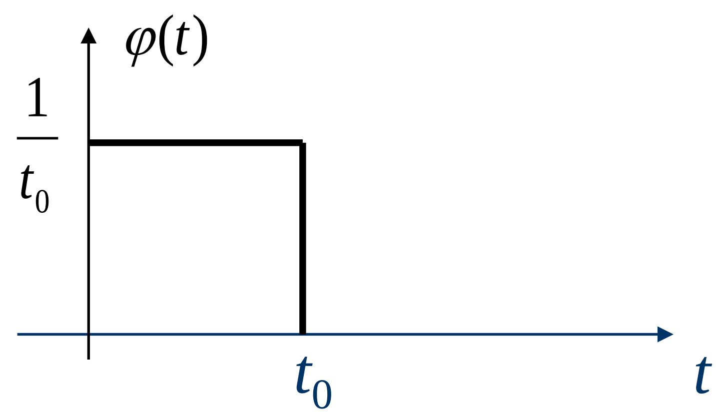
例4.5-12 求下图所示信号$f(t)$的傅里叶变换。

解：

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{t_0}, & 0\le t\le t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$



$$\varphi(t)=\frac{d\,f(t)}{d\,t}=\begin{cases}\dfrac{1}{t_0} & 0\le t\le t_0\\ 0 & t<0,\,t>t_0\end{cases}$$



$$\Phi(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t_0}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{t_0}{2}}$$

$$\Phi(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t_0}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{t_0}{2}}$$

$$\because \quad f(\infty)=1, \quad f(-\infty)=0$$

$$\therefore \quad F(\mathrm{j}\Omega)=\frac{\Phi(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{j}\Omega}+[f(\infty)+f(-\infty)]\pi\delta(\Omega)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\Omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega t_0}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\frac{t_0}{2}}+\pi\delta(\Omega)$$

（3）频域微分

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\mathrm{j}\Omega)$ ，则

$$\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)f(t)] = \frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \qquad (4.5-39)$$

$$\mathscr{F}\left[(-\mathrm{j}t)^n f(t)\right] = \frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^n} \qquad (4.5-40)$$

例：$\because\ \mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega)$

$$\therefore\ \mathscr{F}[t] = 2\pi\mathrm{j}\delta'(\Omega)$$

$$\mathscr{F}\left[t^n\right] = 2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\Omega)$$

（4）频域积分

若 $\mathscr{F}\left[f(t)\right]=F(\mathrm{j}\Omega)$，则

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega}F\left(\mathrm{j}\mu\right)\mathrm{d}\mu\right]=\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}+\pi f\left(0\right)\delta(t) \qquad (4.5-44)$$

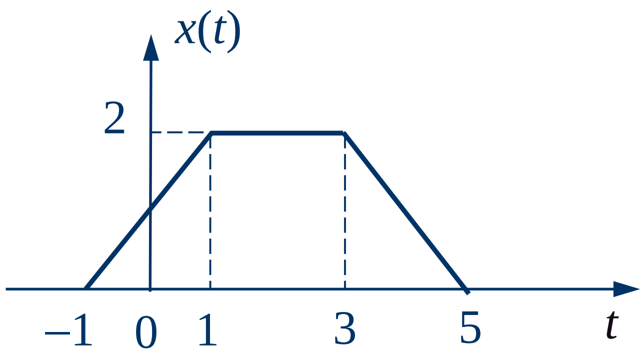
若 $f(0)=0$，则

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega}F\left(\mathrm{j}\mu\right)\mathrm{d}\mu\right]=\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$$

8. 帕斯瓦尔定理（又称能量守恒定理）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathrm{j}\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega \qquad (4.5-46)$$

例： 信号 $x(t)$ 如图所示，其傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\Omega)$ ，求



(1) $X(0)$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega$ (4) $\varphi(\Omega)$

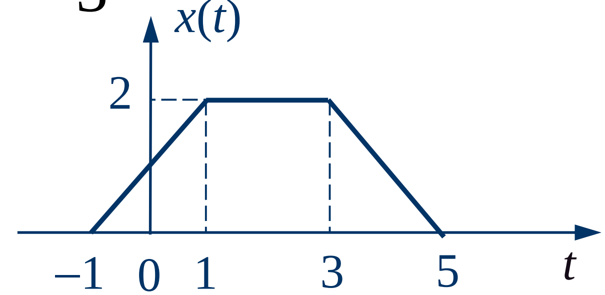
解： (1) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t\,|_{\Omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = 8$

(2) $\because \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega = 2\pi x(t)$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega = 2\pi x(t)\,|_{t=0} = 2\pi$

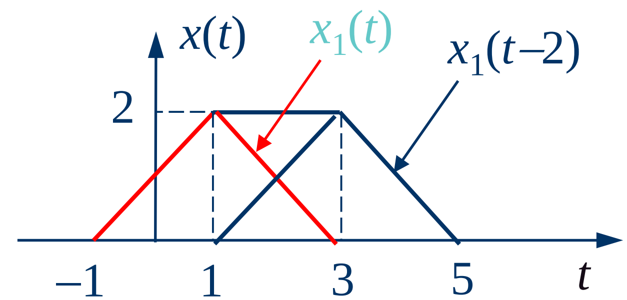
4.5　傅里叶变换的基本性质

(3)　$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\Omega)|^2\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi[\,2\int_0^2 t^2\mathrm{d}t + 2^2\cdot 2] = \dfrac{80\pi}{3}$



（4）　$\varphi(\Omega) = -2\Omega$

记信号 $x_1(t)$ 如图所示，则



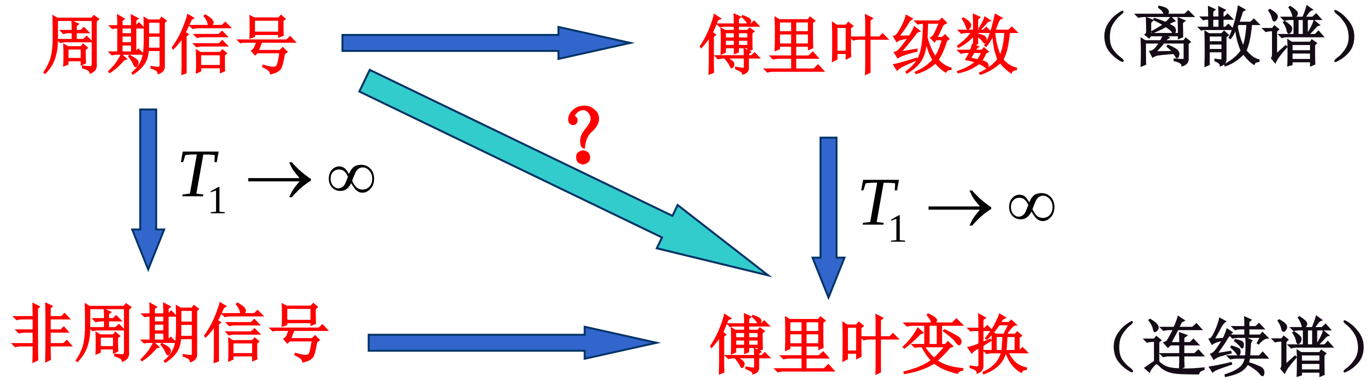
$x(t) = x_1(t) + x_1(t-2)$　　（查表4-2）

$$X_1(\mathrm{j}\Omega) = \frac{2\times 4}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\Omega\times 4}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega} = 4\mathrm{Sa}^2(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$$

$$X(\mathrm{j}\Omega) = X_1(\mathrm{j}\Omega) + X_1(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega} = 4\mathrm{Sa}^2(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega})$$

$$= 4\mathrm{Sa}^2(\Omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}) = 8\mathrm{Sa}^2(\Omega)\cos\Omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega}$$

4.6 周期信号的傅里叶变换



1. 正弦、余弦信号的傅里叶变换

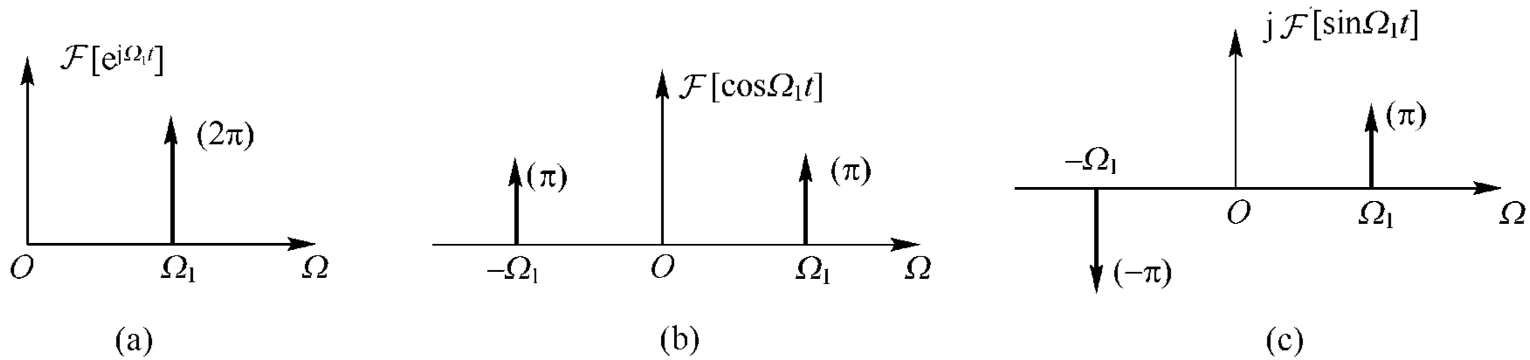
在例4.5-7中，已经求出了指数信号、正弦和余弦信号的傅里叶变换。即

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$\mathcal{F}\left[\cos\Omega_0 t\right] = \pi\left[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\sin\Omega_0 t\right] = \mathrm{j}\pi\left[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)\right]$$

以上三种信号的频谱图如下所示



2. 一般周期信号的傅里叶变换

设周期信号的周期为$\tilde{f}(t)$，则角频率$\Omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T_1$，可以将$\tilde{f}(t)$展开成指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

其中 $F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt$ 或 $F_n = \frac{1}{T_1} F_0(j\Omega)\Big|_{\Omega = n\Omega_1}$

4.6 周期信号的傅里叶变换

$$\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}$$

将上式两边取傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left[\tilde{f}(t)\right]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}\right]$$

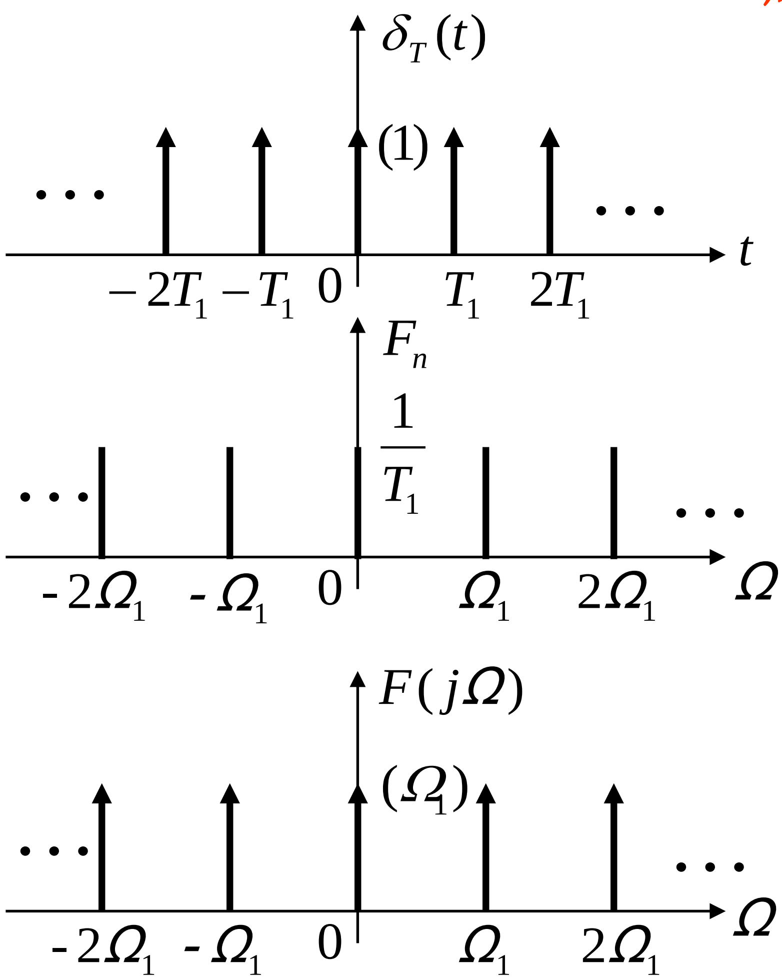
$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\Omega-n\Omega_1)$$

即：$F(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}\left[\tilde{f}(t)\right]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\Omega-n\Omega_1)\qquad(4.6-5)$

周期信号$\tilde{f}(t)$的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频$(0,\pm\Omega_1,\pm 2\Omega_1,\cdots)$处，每个冲激的强度等于$\tilde{f}(t)$的傅里叶级数相应系数$F_n$的$2\pi$倍。

4.6 周期信号的傅里叶变换

例4.6-1 求周期单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数与傅里叶变换。



解：

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}$$

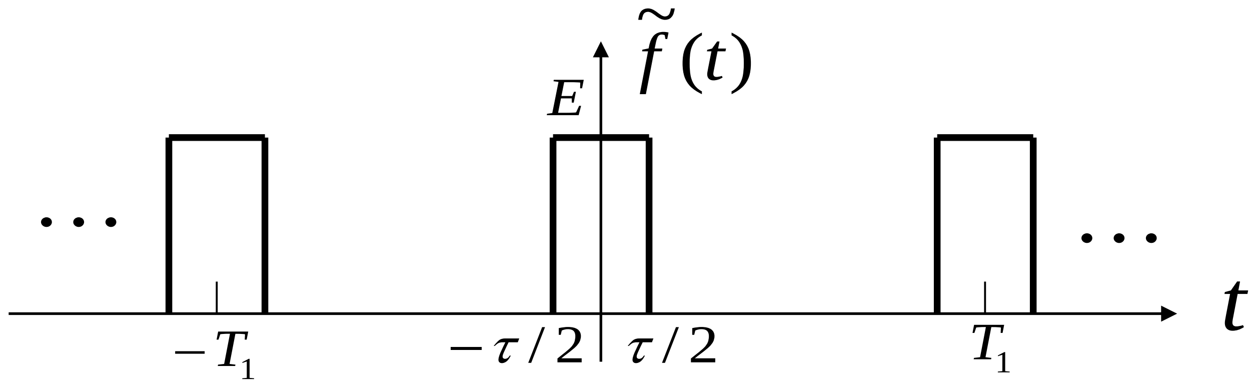
$$\delta_T(t)=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}$$

$$F(j\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\Omega-n\Omega_1)$$

$$=\Omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\Omega_1)$$

4.6 周期信号的傅里叶变换

例4.6-2 求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数和傅里叶变换。已知$\tilde{f}(t)$的幅度为E，脉宽为τ，周期为T_1，角频率为$\Omega_1=2\pi/T_1$。



解： 已知矩形脉冲$f_0(t)$的傅里叶变换为$F_0(j\Omega)$

$$F_0(\mathrm{j}\Omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\Omega\tau}{2})$$

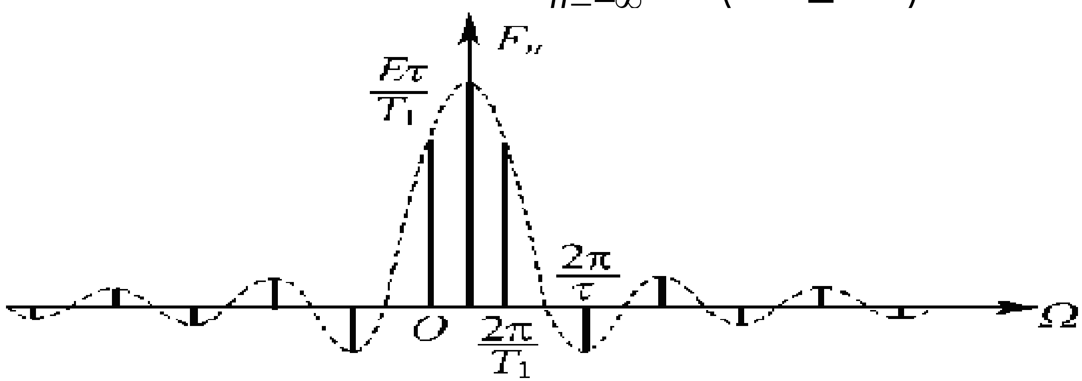
因为 $$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(j\Omega)\Big|_{\Omega=n\Omega_1}=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega_1\tau}{2})$$

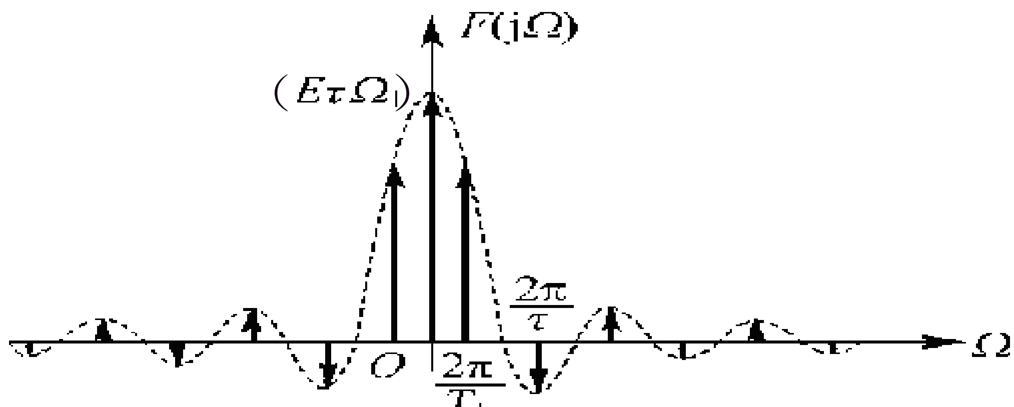
4.6 周期信号的傅里叶变换

所以 $\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}=\dfrac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{n\Omega_1\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega_1 t}$

$$F(\mathrm{j}\Omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\Omega-n\Omega_1)=E\tau\Omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)\delta(\Omega-n\Omega_1)$$

设：$\dfrac{\tau}{T_1}=\dfrac{1}{2}$





4.7 连续信号的频域与复频域的MATLAB分析

连续信号的频域和复频域表达式可以通过符号运算获得。其频谱的可视化可以用幅度谱和相位谱绘制。周期信号可以通过计算其傅里叶级数，画出它的幅度谱和相位谱；非周期性信号可以通过计算其傅里叶变换，画出它的幅度谱和相位谱。信号的复频域分析一般缺少可视化的直观表示，但可以用信号的拉普拉斯变换，绘制它的三维幅度曲面图和相位曲面图，来观察其复频域特征。

Stem ()

Plot()

Ezplot()

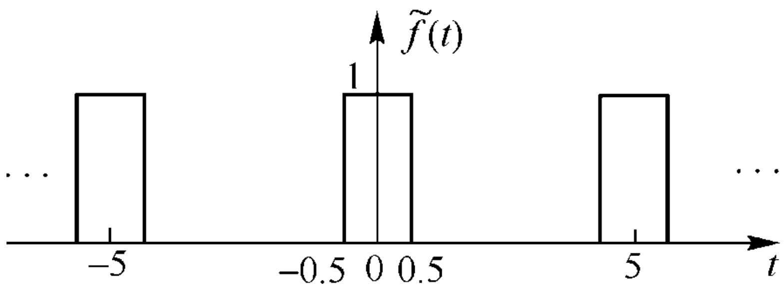
laplace()

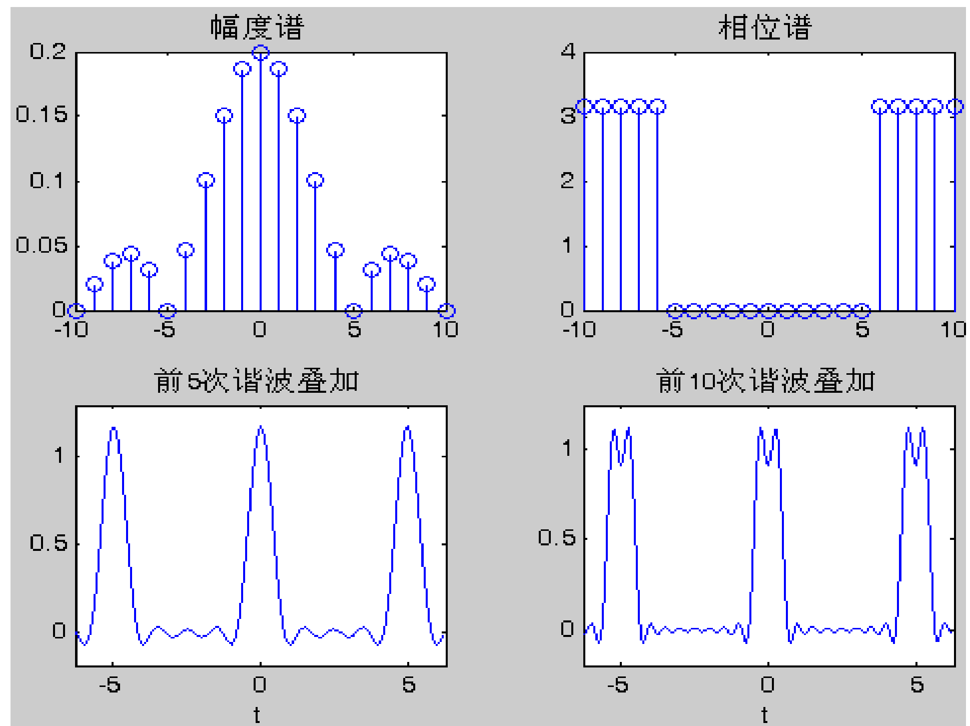
Ilaplace()

4.7 连续信号的频域与复频域的MATLAB分析

例4.7-1

周期性矩形脉冲信号如题图所示，画出它的幅度谱和相位谱，以及前5次谐波叠加波形和前10次谐波叠加波形。





4.7 连续信号的频域与复频域的MATLAB分析

解：

```
n=-10:10; w1=0.4*pi;                          %显示的谐波次数
n1=-10: -1;ft1=sin(0.2*pi*n1)./(pi*n1);       %计算负半轴的傅里叶级数
n2=1:10;ft2=sin(0.2*pi*n2)./(pi*n2);          %计算正半轴的傅里叶级数
ft=[ft1,0.2,ft2];                             %组合负半轴、零点和正半轴
                                                 的级数
fn = abs(ft);phase = angle(ft);               %计算幅度谱和相位谱
subplot(2,2,1);stem(n,fn);title('幅度谱');       %stem函数绘制离散
序列
subplot(2,2,2);stem(n,phase);title('相位谱');
syms t;s1=0.2;s2=0.2;                            %直流分量
for k1=1:5
s1=s1+2*sin(k1*pi/5)*cos(w1*t*k1)/pi./k1;
end
for k2=1:10
s2=s2+2*sin(k2*pi/5)*cos(w1*t*k2)/pi./k2;
end
subplot(2,2,3);ezplot(s1);title('前5次谐波叠加');
subplot(2,2,4);ezplot(s2);title('前10次谐波叠加');
```

4.7 连续信号的频域与复频域的MATLAB分析

例4.7-2 用MATLAB分别绘制抽样信号 $f_1(t)=\mathrm{Sa}(t)$

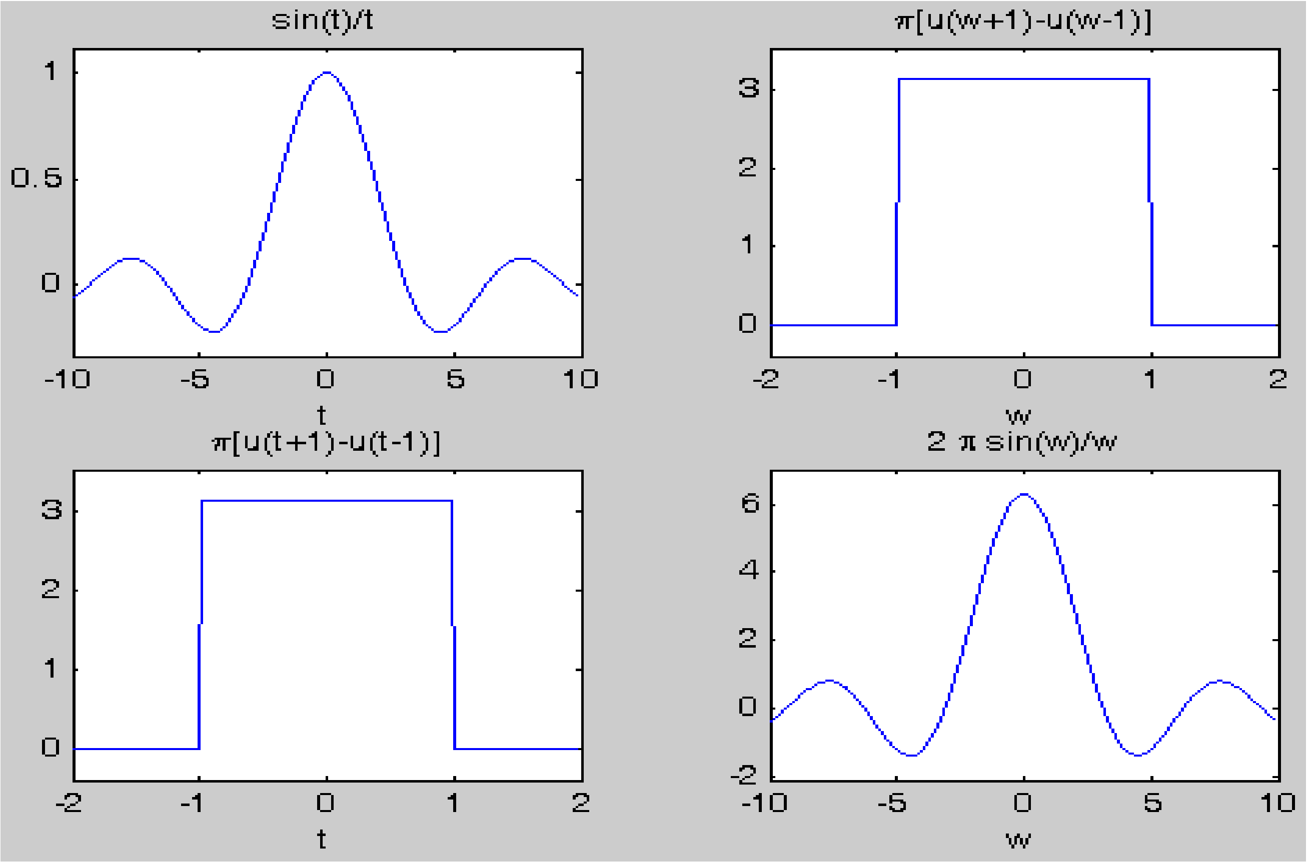
和矩形脉冲信号 $f_2(t)=\pi[u(t+1)-u(t-1)]$

的时域波形和频谱，并验证傅里叶变换的对偶性。

解：

```
syms t;f1 = sin(t)/t;                              %抽样函数f1(t)=Sa(t)
f2 = pi*sym('(Heaviside(t+1) -Heaviside(t-1))'); %计算门函数f2(t)= p G(t)
F1=simple(fourier(f1));F2=simple(fourier(f2));
subplot(221);ezplot(f1,[ -10 10]);
subplot(222);ezplot(F1,[ -2 2]);title('π[u(w+1) -u(w-1)]');
subplot(223);ezplot(f2,[ -2 2]);title('π[u(t+1) -u(t-1)]');
subplot(224);ezplot(F2,[ -10 10]);
```

4.7 连续信号的频域与复频域的MATLAB分析



本章小结

连续时间信号的频谱分析

- 周期信号：傅里叶级数与傅里叶变换
- 典型周期信号的傅里叶级数
- 非周期信号：傅里叶变换
- 常用非周期信号的频谱
- 傅里叶变换的相关性质