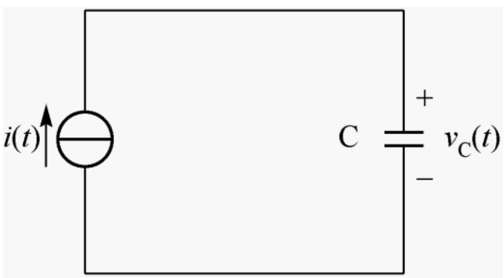
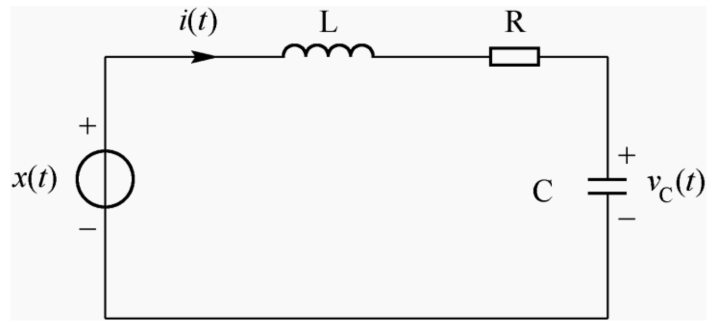
第2章 连续时间系统的时域分析

2.1 系统数学模型及其分类

1、系统的数学模型

数学模型------是系统基本特性的数学抽象，它是以数学表达式来表征系统的特性的。





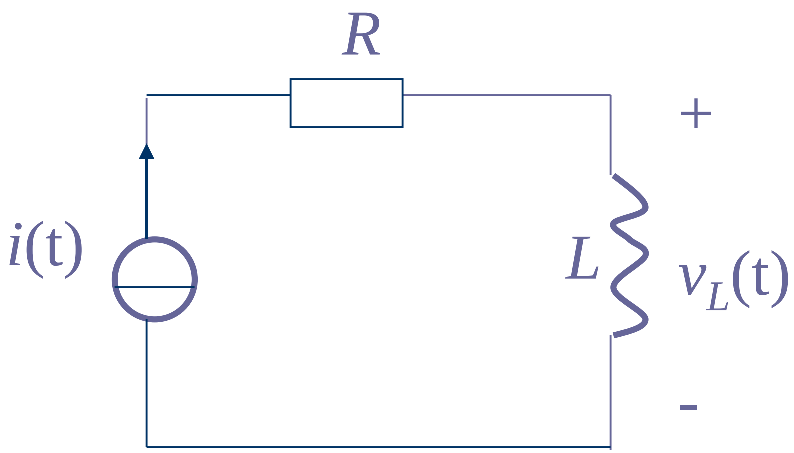
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

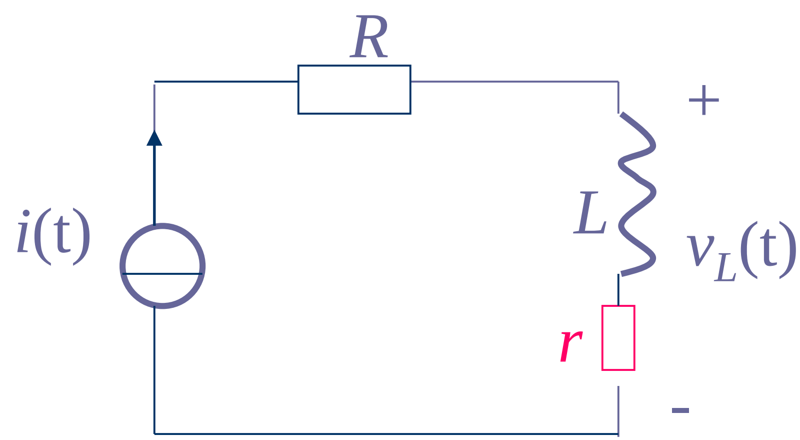
一阶微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}}(t) = x(t)$$

二阶微分方程

2.1 系统数学模型及其分类



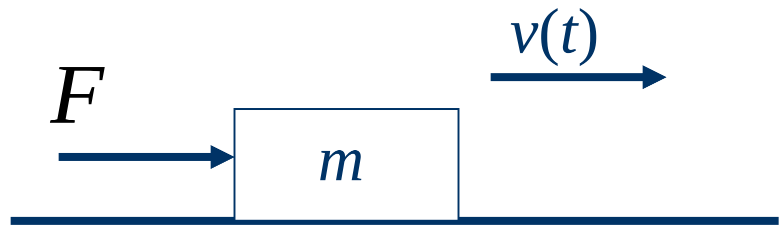


$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} + ri(t)$$

对于同一物理系统，在不同条件之下，可以得到不同形式的数学模型。

3.1 系统模型及其分类

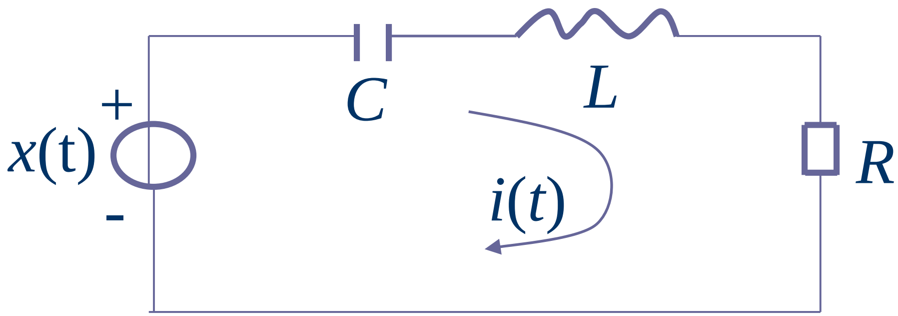


$$F = ma = m\frac{dv(t)}{dt} \Longleftrightarrow v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$m \Longleftrightarrow L \qquad F \Longleftrightarrow v_L(t) \qquad v(t) \Longleftrightarrow i(t)$$

对于不同的物理系统，可能有相同形式的数学模型。

2.1 系统数学模型及其分类



该系统可建立如下两种数学模型：

（1）
$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2}+RC\frac{di(t)}{dt}+i(t)=C\frac{dx(t)}{dt}$$

-----------输入输出方程（一个二阶微分方程）

（2）
$$\begin{cases} C\dfrac{dv_c(t)}{dt}=i(t) \\ L\dfrac{di(t)}{dt}=x(t)-v_c(t)-i(t)R \end{cases}$$

-----------状态方程（两个一阶微分方程组）

对于同一物理系统，而且在相同的工作条件之下，数学模型也不唯一。

2.1 系统数学模型及其分类

2. 系统的分类

1）线性系统 ----------- 线性微分方程

非线性系统-----------非线性微分方程

2）时变系统 ------------ 变系数微分方程

时不变系统-----------常系数微分方程

3）集总参数系统-----------常微分方程

分布参数系统-----------偏微分方程

4）连续时间系统-----------微分方程

离散时间系统-----------差分方程

2.1 系统数学模型及其分类

本课程 研究的是：

线性、时不变、集总参数的连续时间系统

-----------常系数线性微分方程

线性、时不变、集总参数的离散时间系统

-----------常系数线性差分方程

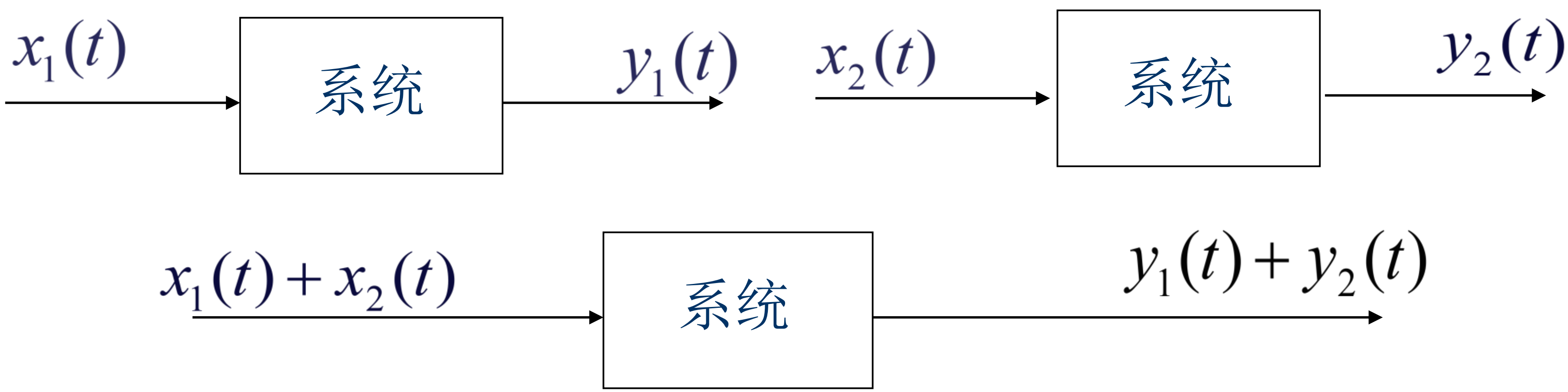
2.2　系统的性质

1. 线性特性

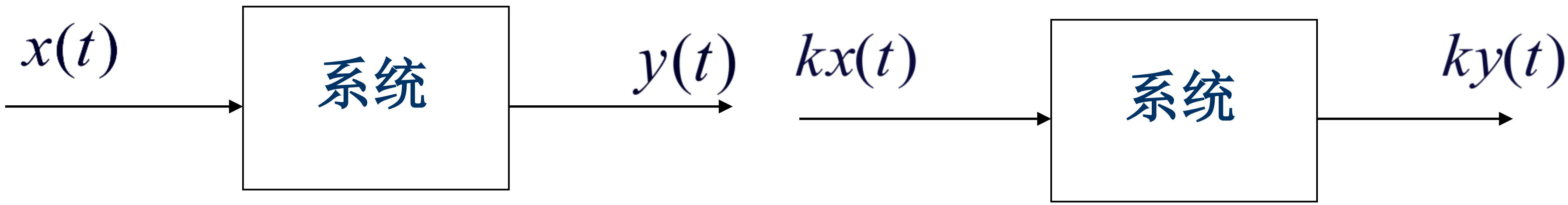
叠加性（superposition property）与均匀性（homogeneity）

(1) 叠加性　若： $x_1(t) \to y_1(t),\ x_2(t) \to y_2(t)$

则： $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$



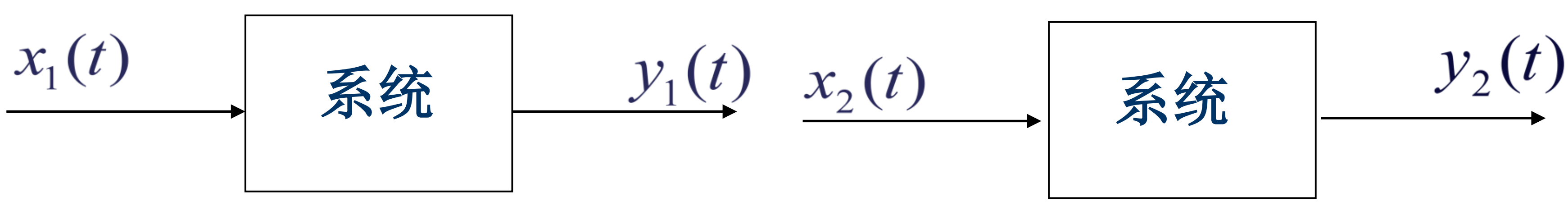
(2) 均匀性(齐次性)　若：$x(t) \rightarrow y(t)$　则：$kx(t) \rightarrow ky(t)$

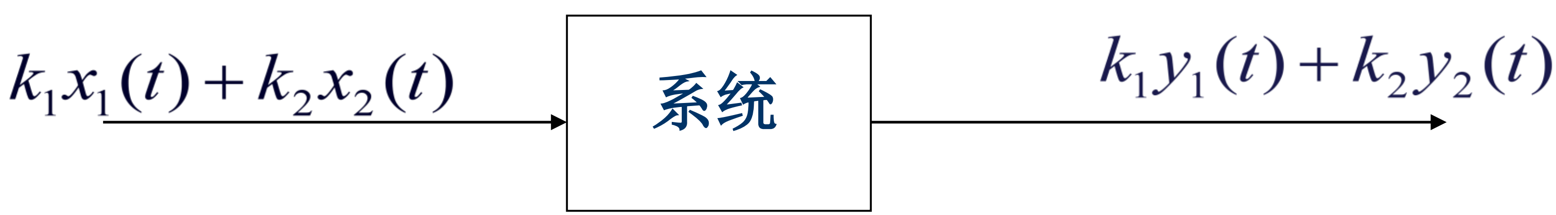


将叠加性与均匀性结合起来，有

若：$x_1(t) \rightarrow y_1(t),\quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

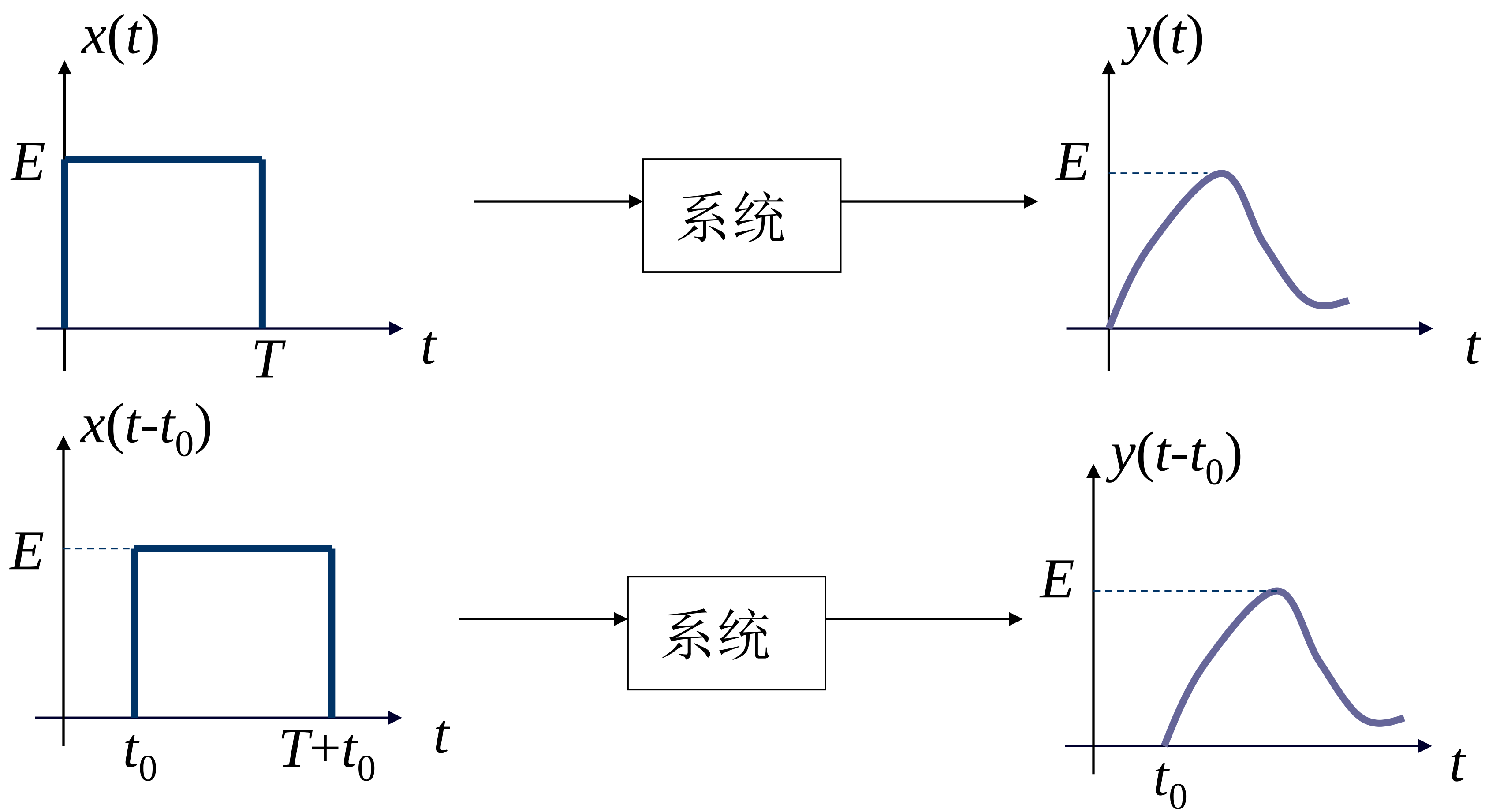
则：$k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \rightarrow k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$





2.2 系统的性质

2. 时不变特性　　若：$x(t) \to y(t)$　　则：$x(t-t_0) \to y(t-t_0)$



2.2 系统的性质

例2.2-1 判断下列系统是线性的还是非线性的，是时不变的还是时变的。

$$(1)\ \ y(t)=[x(t)]^2 \qquad\qquad (2)\ \ y(t)=x(-t)$$

解: (1)设两输入信号分别为 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ ，输出信号分别为

$$y_1(t)=\mathrm{T}[x_1(t)]=[x_1(t)]^2 \qquad y_2(t)=\mathrm{T}[x_2(t)]=[x_2(t)]^2$$

$$\mathrm{T}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]^2=a_1^2x_1^2(t)+a_2^2x_2^2(t)+2a_1a_2x_1(t)x_2(t)$$

$$a_1\mathrm{T}[x_1(t)]+a_2\mathrm{T}[x_2(t)]=a_1x_1^2(t)+a_2x_2^2(t)$$

故 $$\mathrm{T}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]\neq a_1\mathrm{T}[x_1(t)]+a_2\mathrm{T}[x_2(t)]$$

所以系统是非线性系统。

又因为 $$y(t)=[x(t)]^2$$

而 $$y(t-t_0)=[x(t-t_0)]^2$$

$$\mathrm{T}[x(t-t_0)]=[x(t-t_0)]^2=y(t-t_0)$$

所以该系统是时不变系统。

因此，综合上述两点，该系统为非线性时不变系统。

（2）按题意有

$$y_1(t)=\mathrm{T}[x_1(t)]=x_1(-t),\qquad y_2(t)=\mathrm{T}[x_2(t)]=x_2(-t)$$

$$\mathrm{T}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1x_1(-t)+a_2x_2(-t)$$

而 $a_1\mathrm{T}[x_1(t)]+a_2\mathrm{T}[x_2(t)]=a_1x_1(-t)+a_2x_2(-t)$

即满足 $\mathrm{T}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1\mathrm{T}[x_1(t)]+a_2\mathrm{T}[x_2(t)]$

所以系统是非线性系统。

又因为 $y(t)=x(-t)$ $\qquad y(t-t_0)=x\left[-(t-t_0)\right]$

而 $\mathrm{T}[x(t-t_0)]=x(-t-t_0)\neq y(t-t_0)$

所以该系统是时不变系统。

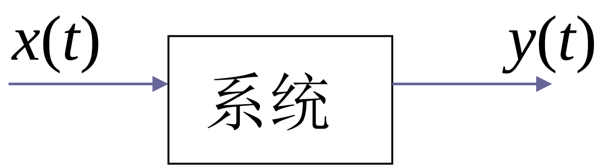
综合上述两点，该系统为线性时不变系统。

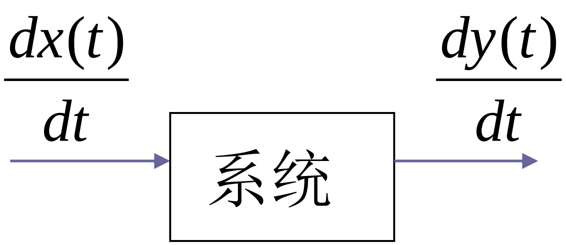
2.2 系统的性质

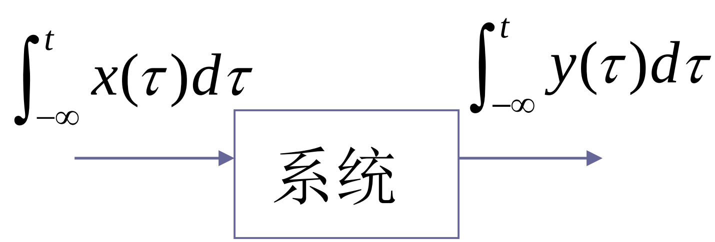
3. 微分与积分特性 设系统的起始状态为零，若：$x(t) \to y(t)$

由于 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$

则：$\dfrac{dx(t)}{dt} \to \dfrac{dy(t)}{dt}$， $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$







2.2 系统的性质

4.因果性

如果 $t < t_0$ 时系统的激励信号等于零，系统的响应信号在 $t < t_0$ 也等于零，这样的系统称为因果系统。

因果信号： 将 $t \geq 0$ 时接入系统的信号（即在 $t < 0$ 为零的信号）称为因果信号。

5.稳定性

一个系统，如果输入是有界的，其系统的输出也是有界的，则该系统称为稳定系统。这一稳定性准则又称为BIBO（Bounder input bounder output）准则。

例2.2-2 判断下列系统是否为因果系统，是否为稳定系统？

(1) $y(t)=x(t+2)$　　(2) $y(t)=t\cdot x(t-2)$

解：(1) 设 $t=t_0$ 时输出 $y(t_0)$ 取决于 t_0+2 时输入信号 $x(t_0+2)$，响应超前于激励，因此该系统为非因果系统。

若激励有界，即 $|x(t)|\leqslant M_x$，系统的响应是激励的简单时移，所以 $|y(t)|\leqslant M_x$，为稳定系统。

(2) 设 $t=t_0$ 时输出 $y(t_0)$ 取决于 t_0-2 时输入 $x(t_0-2)$ 与 t_0 之积，即激励在前，响应在后，该系统为因果系统。

若激励有界，即 $|x(t)|\leqslant M_x$，但当 $t\to\infty$ 时，系统的响应 $|y(t)|\to\infty$，因此该系统为不稳定系统。

2.3 线性时不变系统的微分方程表示及其经典求解

2.3.1 线性时不变系统分析方法概述

从系统的数学描述方法来分：

- 输入、输出分析法：一个n阶微（差）分方程，适合于单输入、单输出系统
- 状态变量分析法：n个一阶微（差）分方程组，适合于多输入、多输出系统

从系统数学模型求解方法来分：

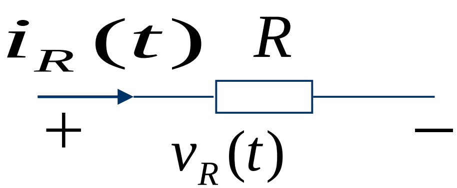
- 时域分析法：不经过任何变换，在时域中直接求解响应
- 变换域分析法：将信号和系统模型的时间函数变换成相应某变换域的函数，如傅里叶变换、拉普拉斯变换、z变换等

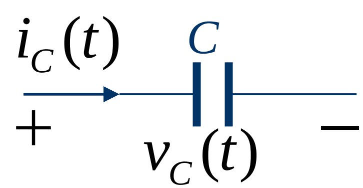
2.3 线性时不变系统的微分方程表示及其经典求解

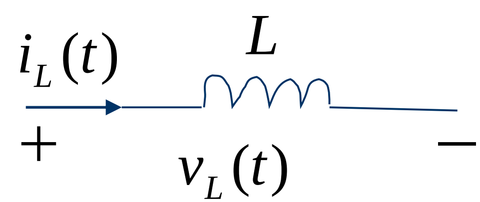
2.3.2 线性时不变系统数学模型的建立

对于较复杂的连续时间系统，只要依据电网络的以下两个约束特性，就可列出微分方程。

（1）元件特性约束：即表征元件特性的关系式，如电容、电感、电阻各自电压与电流的关系等；





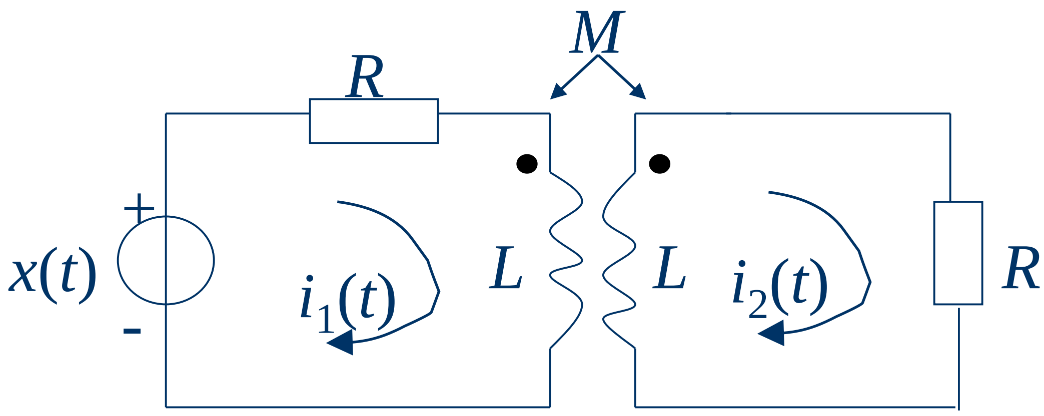


$$v_R(t) = Ri_R(t) \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \qquad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

（2）网络拓扑约束：由网络结构决定的电压、电流约束关系，如基尔霍夫电压定律（**KVL**）和基尔霍夫电流定律（**KCL**）等。

2.3.2 线性时不变系统数学模型的建立

例2.3-2： 如下图所示互感耦合电路，$x(t)$为电压源激励信号，试列写求电流$i_2(t)$的微分方程式。



解： 对于初、次级回路分别应用KVL，可以得到一对微分方程式

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt}+Ri_1(t)-M\dfrac{di_2(t)}{dt}=x(t) \\ L\dfrac{di_2(t)}{dt}+Ri_2(t)-M\dfrac{di_1(t)}{dt}=0 \end{cases}$$

2.3.2 线性时不变系统数学模型的建立

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1(t)}{dt}+Ri_1(t)-M\dfrac{di_2(t)}{dt}=x(t) & (1) \\ L\dfrac{di_2(t)}{dt}+Ri_2(t)-M\dfrac{di_1(t)}{dt}=0 & (2) \end{cases}$$

对式（1）两边求导得: $L\dfrac{d^2i_1(t)}{dt^2}+R\dfrac{di_1(t)}{dt}-M\dfrac{d^2i_2(t)}{dt^2}=\dfrac{dx(t)}{dt}$ (3)

由式（2）得: $\dfrac{di_1(t)}{dt}=\dfrac{L}{M}\dfrac{di_2(t)}{dt}+\dfrac{R}{M}i_2(t)$ (4)

对式（4）两边求导得: $\dfrac{d^2i_1(t)}{dt^2}=\dfrac{L}{M}\dfrac{d^2i_2(t)}{dt^2}+\dfrac{R}{M}\dfrac{di_2(t)}{dt}$ (5)

将式（4）、（5）代入式（3）并整理得:

$$(L^2-M^2)\frac{d^2i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2i_2(t)=M\frac{dx(t)}{dt}$$

2.3.2 线性时不变系统数学模型的建立

将其推广到一般情况，对于一个线性时不变连续时间系统，其激励信号 $x(t)$ 与响应信号 $y(t)$ 之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 x(t)$$

式中，系数 a_i, b_j 均为常数。

式(2.3-1)为一个常系数n阶线性常微分方程。

2.3.3 微分方程的经典求解

根据常系数线性微分方程的求解方法可知，式(2.3-1)的微分方程的解由齐次解（**hom-ogeneous solution**）$y_{\mathrm{h}}(t)$ 和特解**(particular solution)** $y_{\mathrm{p}}(t)$ 两部分组成。即

$$y(t)=y_{\mathrm{h}}(t)+y_{\mathrm{p}}(t) \qquad \textbf{(2.3-2)}$$

齐次解应满足

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=0$$

特征方程为

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0=0$$

2.3.3 微分方程的经典求解

（1）特征根为单根，微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

这里 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是由初始条件决定的系数。

（2）特征根为共轭复数 $\alpha \pm \mathrm{j}\beta$ 时，则所对应的齐次解为

$A_1 \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t} + A_2 \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}$，且可以化解为 $\mathrm{e}^{\alpha t}[A\cos\beta t + B\sin\beta t]$

（3）特征根有重根，假设 α_1 是特征方程的***k***重根，那么，在齐次解中，相应于 α_1 的部分将有***K***项

$$(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + \ldots + A_{k-1} t + A_k) e^{\alpha_1 t}$$

2.3.3 微分方程的经典求解

例2.3-4： 求下列微分方程的齐次解。

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+7\frac{d^2y(t)}{dt^2}+16\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=x(t)$$

解： 特征方程为

$$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0$$

$$(\alpha+2)^2(\alpha+3)=0$$

特征根

$$\alpha_1=\alpha_2=-2 \text{（重根）} \qquad \alpha_3=-3$$

齐次解

$$y_h(t)=A_1te^{-2t}+A_2e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

2.3.3 微分方程的经典求解

由此可见，齐次解的形式仅取决于特征方程根的性质，而与激励信号无关，所以齐次解有时称为固有解（**natural solution**）（或称自由解）。当然齐次解的系数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与激励信号有关。

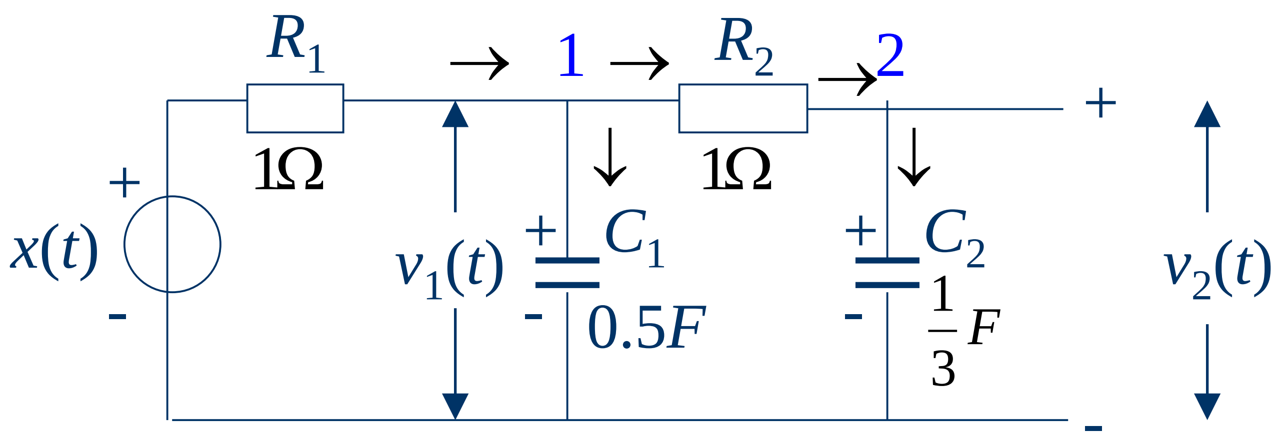
微分方程的特解是由输入信号产生的，所以也叫做强迫解（**forced solution**）。特解的形式与激励信号的形式有关。将激励信号代入微分方程式的右端，代入后右端的函数式称为自由项。通常，由观察自由项试选特解函数式，代入原方程后求得特解函数式中的待定系数，即可求出特解。

2.3.3 微分方程的经典求解

几种典型激励信号对应的特解函数形式

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$
$\left\{ \begin{array}{l} \cos \Omega_0 t \\ \sin \Omega_0 t \end{array} \right.$	$B_1 \cos \Omega_0 t + B_2 \sin \Omega_0 t$

例2.3-6： 如下图所示电路，已知激励信号$x(t)=\cos 2t u(t)$，两个电容上的初始电压均为零，求输出信号$v_2(t)$的表达式。



解: （1）列写微分方程式为

$$
\begin{cases}
\text{节点1:} & \dfrac{x(t)-v_1(t)}{R_1} = C_1\dfrac{dv_1(t)}{dt} + \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} \\
\text{节点2:} & \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} = C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt}
\end{cases}
$$

2.3.3 微分方程的经典求解

$$\frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + 7\frac{dv_2(t)}{dt} + 6v_2(t) = 6\cos 2t\, u(t)$$

（2）为求齐次解，写出特征方程 $\alpha^2 + 7\alpha + 6 = 0$

特征根 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -6$

齐次解 $A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$

（3）查表，得特解为

$$B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t$$

代入原方程得

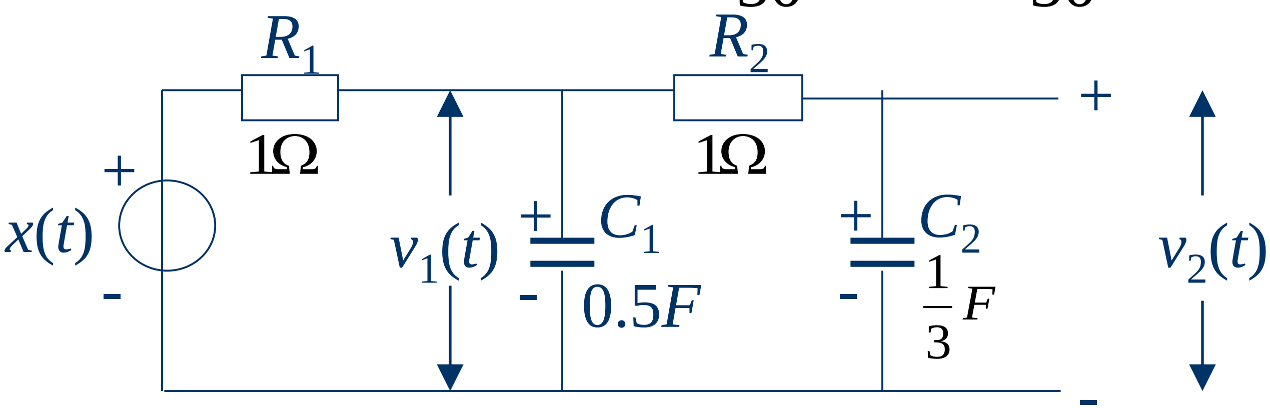
$$(2B_1 - 14B_2)\sin 2t + (14B_1 + 2B_2)\cos 2t = 6\cos 2t$$

比较上述方程两边系数，并求解得 $B_1 = \frac{21}{50}, B_2 = \frac{3}{50}$

2.3.3 微分方程的经典求解

（4）完全解为

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad （1）$$



由于已知电容C_2上的初始电压为零，因而有$v_2(0)=0$,又因为电容C_1上的初始电压也为零，于是流过R_2,C_2中的初始电流也为零，即 $v_2'(0)=0$ 。

$$A_1=-6/25, A_2=9/50$$

$$v_2(t)=-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad (t\geq 0)$$

2.3.4 初始条件的确定

为求系数A，我们利用了n个条件。实际上，由于$t = 0$时刻加入了激励，由于激励的作用，及各阶导数在$t = 0$时刻可能发生跳变而出现不连续。

1. 起始状态与初始状态

起始状态：在激励接入之前的瞬时系统的状态 $y^{(k)}(0^-)$

初始状态：在激励接入之后的瞬时系统的状态 $y^{(k)}(0^+)$

由于用经典法求解微分方程时，是考虑了激励作用以后的解，时间范围是 $0^+ \le t < \infty$ ，所以要利用 $y^{(k)}(0^+)$ 来确定系数A，$y^{(k)}(0^-)$ 不能利用。

2. 初始条件的确定

可以利用系统内部储能的连续性，这时有

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) \qquad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

首先判断$v_C(0^-)$和$i_L(0^-)$值，然后由储能的连续性写出$v_C(0^+)$和$i_L(0^+)$，再根据元件约束特性与网络拓扑约束即可求得0^+时刻其他电压、电流值。对于稍复杂的情况，跳变值往往不易直接求得，这时，可借助微分方程式两端各奇异函数系数平衡的方法作出判断。**(奇异函数平衡法)**

2.3.4 初始条件的确立

例2.3-8 已知微分方程为 $\frac{dy^2(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}$

$x(t)=u(t),\ y(0^-)=2,\ y'(0^-)=3$ 求 $y(0^+),\ \ y'(0^+)$。

解： 将 **x(t) = u(t)**代入微分方程右端得

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\delta'(t)+4\delta(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}\xrightarrow{\text{包含}}\delta'(t)+\delta(t)-5u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}\xrightarrow{\text{包含}}\delta(t)+u(t)-5tu(t)$$

$$y(t)\xrightarrow{\text{包含}}u(t)+tu(t)$$

2.3.4 初始条件的确立

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \xrightarrow{\text{包含}} \delta'(t) + \delta(t) - 5u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{\text{包含}} \delta(t) + u(t)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{包含}} u(t)$$

所以

$$\begin{cases} y'(0^+) - y'(0^-) = 1 \\ y(0^+) - y(0^-) = 1 \end{cases}$$

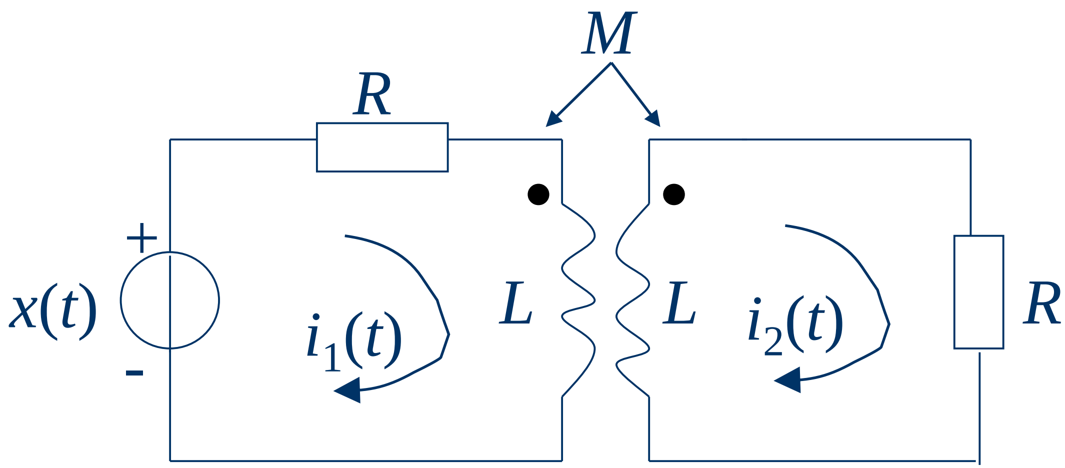
即

$$y'(0^+) = y'(0^-) + 1 = 4$$

$$y(0^+) = y(0^-) + 1 = 3$$

2.3.4 初始条件的确立

例2.3-7：如图的电路中，若激励为单位阶跃信号，$x(t)=u(t)$，系统起始无储能，试求$i_2(t)$。



（1）由例2.3-1的微分方程式，将$x(t)=u(t)$代入，得

$$(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2 i_2(t)=M\frac{du(t)}{dt}=M\delta(t)$$

（2）求初始条件　　由题意知 $i_2(0^-)=0,\quad i_2'(0^-)=0$

2.3.4 初始条件的确立

$$(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2 i_2(t)=M\frac{du(t)}{dt}=M\delta(t)$$

$$(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}\xrightarrow{\text{包含}}M\delta(t)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt}\xrightarrow{\text{包含}}\frac{M}{L^2-M^2}u(t)$$

$$i_2(t)\xrightarrow{\text{包含}}\frac{M}{L^2-M^2}tu(t)$$

$$\begin{cases} i_2(0^+)-i_2(0^-)=0 \\ i_2'(0^+)-i_2'(0^-)=\dfrac{M}{L^2-M^2} \end{cases}$$

$$i_2(0^+)=0$$

$$i_2'(0^+)=\frac{M}{L^2-M^2}$$

2.3.4 初始条件的确立

（3）求齐次解，写出特征方程

$$(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2 i_2(t)=M\frac{du(t)}{dt}=M\delta(t)$$

$$(L^2-M^2)\alpha^2+2RL\alpha+R^2=0$$

求得两特征根为： $\alpha_1=-\dfrac{R}{L+M}$， $\alpha_2=-\dfrac{R}{L-M}$

$$i_{2h}(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$$

（4）求特解$y_p(t)$

由于在 $t>0$以后，微分方程右端为零，显然，其特解就是零。

（5）求全响应$i_2(t)$ $i_2(t)=i_{2h}(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$

2.3.4 初始条件的确立

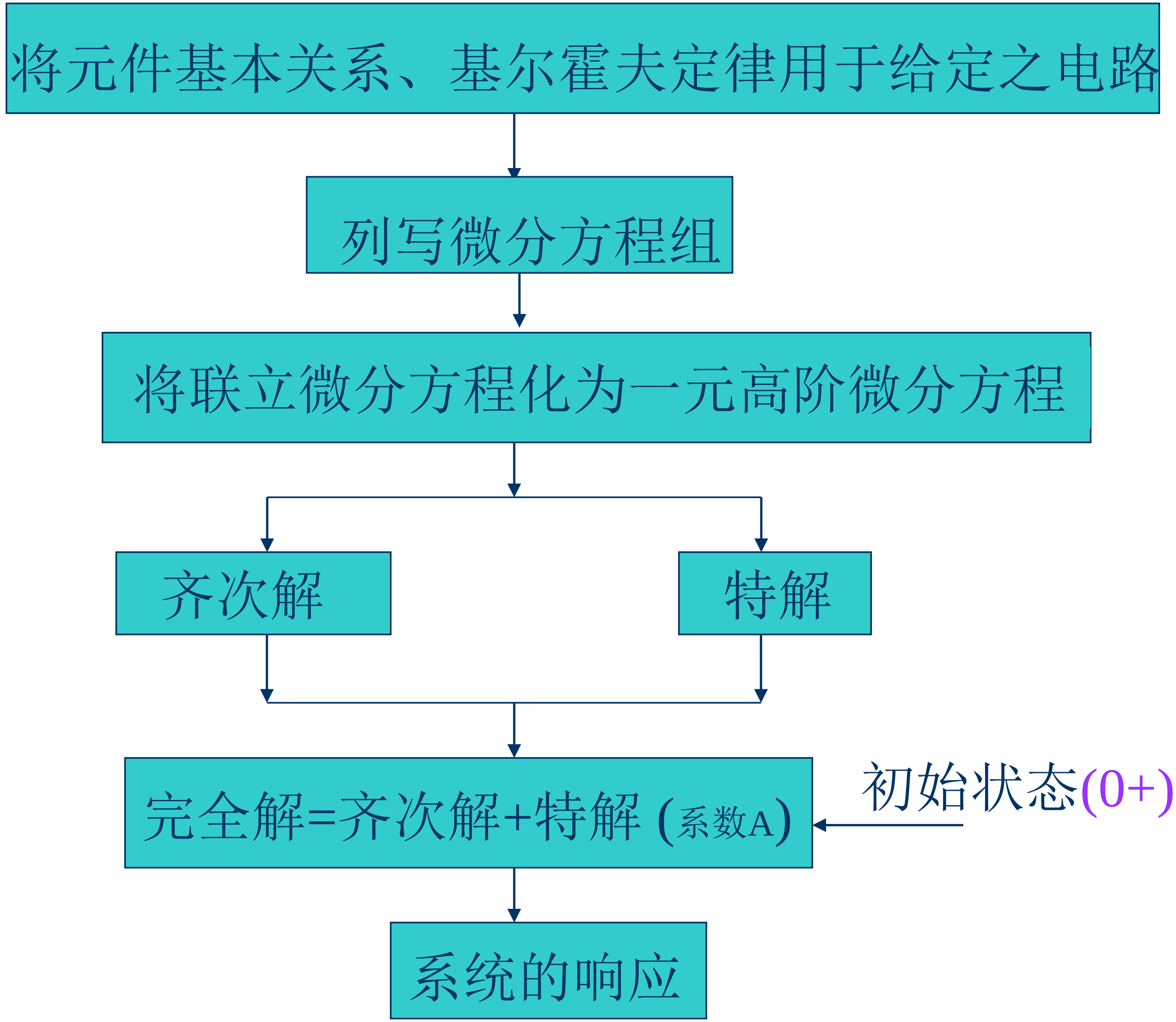
利用初始条件 $i_2(0^+)=0,\quad i_2'(0^+)=\dfrac{M}{L^2-M^2}$ 求系数**A_1、A_2**

$$i_2(t)=i_{2h}(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$$

$$\begin{cases} 0=A_1+A_2 \\ \dfrac{M}{L^2-M^2}=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2 \end{cases}$$

解之得： $A_1=\dfrac{1}{2R},\quad A_2=-\dfrac{1}{2R}$

所以 $\quad i_2(t)=\dfrac{1}{2R}(e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t})u(t)$



求解线性、常系数微分方程的流程图

2.4 零输入响应与零状态响应

1、零输入响应与零状态响应

经典法求解系统的完全响应可分为：

完全响应=自由响应+强迫响应

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

系统的完全响应也可分为：

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

2.4 零输入响应与零状态响应

零输入响应 $y_{zi}(t)$：当激励信号 $\boldsymbol{x(t) = 0}$时，由起始状态$y^{(k)}(0^-)$ 所产生的响应。

由于激励信号$\boldsymbol{x(t) = 0}$，所以系统的起始时刻不会产生跳变。所以 $y^{(k)}(0^+) = y^{(k)}(0^-)$

零输入响应为自由响应的形式，即 $y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{zik} e^{\alpha_k t}$

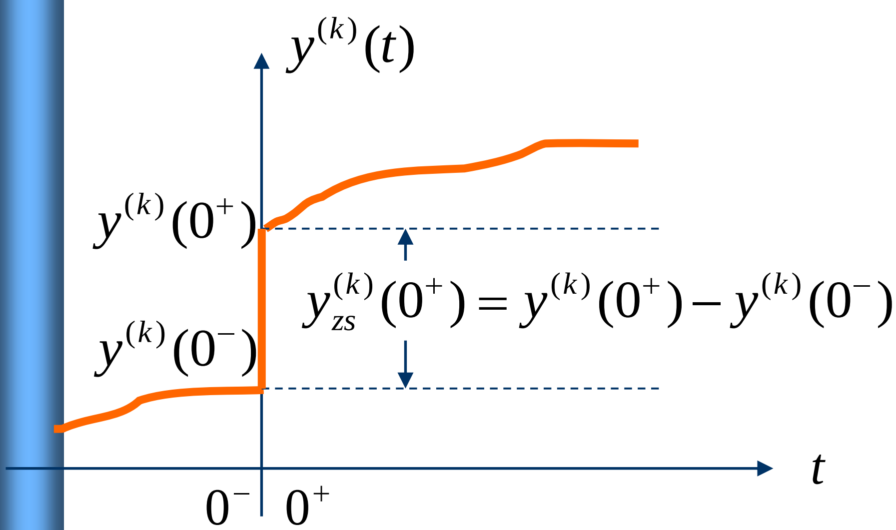
其中系数$\boldsymbol{A_{zik}}$由起始条件$y^{(k)}(0^-)$ 来确定。

2.4 零输入响应与零状态响应

零状态响应 $y_{zs}(t)$：当起始状态 $y^{(k)}(0^-)=0$ 时，由激励信号**x(t)** 所产生的响应。

其中系数A_{zsk}由跳变量$y_{zs}^{(k)}(0^+)=y^{(k)}(0^+)-y^{(k)}(0^-)$ 来确定。

零状态响应的形式为：$y_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+y_p(t)$



$y^{(k)}(0^+)$ ：确定全响应的系数

$y^{(k)}(0^-)$ ：确定零输入响应的系数

$y_{zs}^{(k)}(0^+)$ ：确定零状态响应的系数

2.4 零输入响应与零状态响应

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+y_p(t)}_{\text{零状态响应}} \qquad (2.4-3)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(A_{zik}+A_{zsk})e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}} \qquad (2.4-4)$$

例2.4-1 已知系统的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=3u(t)$$

且 $y(0^-)=\frac{3}{2}$，求自由响应、强迫响应、零输入响应、零状态响应和全响应。

2.4 零输入响应与零状态响应

解： $y(0^-)$：起始条件，确定零输入响应的系数，$y(0^-)=\dfrac{3}{2}$

$y(0^+)$：初始条件，确定全响应的系数，$y(0^+)=y(0^-)=\dfrac{3}{2}$

$y_{zs}(0^+)$：跳变量，确定零状态响应的系数，$y_{zs}(0^+)=0$

1）求全响应$y(t)$

特征根为 $\alpha=-3$，所以，$y_h(t)=Ae^{-3t}$ 而 $y_p(t)=1$

这样，全响应为 $y(t)=Ae^{-3t}+1$

由初始条件 $y(0^+)=3/2$ 可求出系数 $A=1/2$，所以

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+1 \quad (t\geq 0)$$

$$y_h(t)=\frac{1}{2}e^{-3t},\ y_p(t)=1 \ (t\geq 0)$$

2）求零输入响应$y_{zi}(t)$

$$y_{zi}(t)=A_{zi}e^{-3t}$$

由起始条件 $y(0^-)=\dfrac{3}{2}$ 可求出系数$A_{zi}=\dfrac{3}{2}$，所以

$$y_{zi}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}\quad(t\geq 0)$$

3）求零状态响应$y_{zs}(t)$

$$y_{zs}(t)=y(t)-y_{zi}(t)=\frac{1}{2}e^{-3t}+1-\frac{3}{2}e^{-3t}=-e^{-3t}+1\quad(t\geq 0)$$

或： $y_{zs}(t)=A_{zs}e^{-3t}+1$

$$y_{zs}(t) = A_{zs}e^{-3t} + 1$$

由跳变量 $y_{zs}(0^+) = 0$ 可求出系数A_{zs}=－1，所以

$$y_{zs}(t) = -e^{-3t} + 1 \qquad (t \geq 0)$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t}}_{\text{零输入响应}} \underbrace{-e^{-3t} + 1}_{\text{零状态响应}}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t} - e^{-3t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{1}_{\text{强迫响应}} \qquad (t \geq 0)$$

2.4 零输入响应与零状态响应

2、零输入线性与零状态线性

线性时不变系统一定满足均匀性与叠加性及微积分特性。但这种线性时不变特性是在—定条件下满足的。

若系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=x(t)$

当起始状态 $y(0^{-})=2$时，则系统对激励 $x_1(t)=\mathrm{e}^{-t}$的全响应为

$$y_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}$$

若把激励信号为 $x_2(t)=5\mathrm{e}^{-t}$ 时，则可以求得全响应为

$$y_2(t)=-3\mathrm{e}^{-2t}+5\mathrm{e}^{-t}$$

$y_2(t)\neq 5y_1(t)$ ⟶ 因为系统的起始储能未变

2.4 零输入响应与零状态响应

$$y_1(t)=\underbrace{2\mathrm{e}^{-2t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{(-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

$$y_2(t)=\underbrace{2\mathrm{e}^{-2t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{5(-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

比较可见，零状态响应满足线性系统的特性。

若把 $y(0^-)$ 也按照同样的比例放大，得 $y(0^-)=10$ ，则在激励 $x_2(t)=5\mathrm{e}^{-t}$ 作用下，全响应为：

$$y_3(t)=\underbrace{10\mathrm{e}^{-2t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{5(-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

这时 $y_3(t)$ 与 $y_1(t)$ 满足线性系统的均匀性

2.4 零输入响应与零状态响应

常系数线性微分方程描述的系统在下面几点上是线性的

（1）**响应的可分解性：**系统响应可分解为零输入响应和零状态响应。

（2）**零状态响应线性：**系统的零状态响应与各激励信号成线性关系，且系统为时不变系统，所以零状态响应满足微积分特性。

（3）**零输入响应线性：**系统的零输入响应与各起始状态成线性关系。

2.5　冲激响应与阶跃响应

1. 定义

以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励，系统产生的零状态响应称为“单位冲激响应”，以 $h(t)$ 表示。

以单位阶跃信号 $u(t)$ 作为激励，系统产生的零状态响应称为“单位阶跃响应”，以 $g(t)$ 表示。

2. 冲激响应 $h(t)$ 的求解

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$

$$=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

将 $x(t)=\delta(t)$ 及 $y(t)=h(t)$ 代入上式，得

2.5　冲激响应与阶跃响应

$$a_n\frac{d^n h(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dh(t)}{dt}+a_0h(t)$$
$$=b_m\frac{d^m\delta(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}\delta(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{d\delta(t)}{dt}+b_0\delta(t)$$

（1）如果 **n>m**，冲激响应**h(t)**应与齐次解的形式相同，如果特征根包括**n**个非重根，则

$$h(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}\right)u(t)\qquad(2.5-1)$$

（2）如果 **n=m**，冲激响应**h(t)**将包含一个 $\delta(t)$ 项，即

$$h(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}\right)u(t)+A_{n+1}\delta(t)$$

2.5 冲激响应与阶跃响应

(3) 如果**n<m**，冲激响应$h(t)$中将包含 $\delta(t)$、$\delta'(t)$、$\delta''(t)$ ⋯

$$h(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}\right)u(t)+A_{n+1}\delta(t)+A_{n+2}\delta'(t)+A_{n+3}\delta''(t)+\ldots$$

系数 $A_k\ (k=1,2,\ldots n)$ 由初始条件 $h(0^+),h'(0^+),\cdots h^{(n-1)}(0^+)$ 确定

系数 $A_k\ (k=n+1,n+2,\ldots)$ 由方程两端奇异函数匹配直接计算

例2.5-1： 已知微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

求冲激响应$h(t)$。

解：

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+3\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta'(t)+\delta(t)$$

2.5 冲激响应与阶跃响应

$$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t})u(t)$$

$$h^{'}(t)=(-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t})u(t)+(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t})\delta(t)$$

$$=(-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t})u(t)+(A_1+A_2)\delta(t)$$

$$h^{''}(t)=(A_1+A_2)\delta^{'}(t)+(-A_1-2A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+4A_2e^{-2t})u(t)$$

将 $h(t)$、$h^{'}(t)$、$h^{''}(t)$ 代入微分方程，比较方程两边系数可求出：

$$A_1=-1,\ A_2=3$$

所以 $$h(t)=(3e^{-3t}-e^{-t})u(t)$$

该方法避免了求 $h(0^+),h^{'}(0^+),\cdots h^{(n-1)}(0^+)$

3. 阶跃响应g(t)的求法

当 $n \geq m$，阶跃响应$g(t)$不包含冲激信号，如果特征根包括n个非重根，则

$$g(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}+B\right)u(t) \qquad (2.5-2)$$

其中B为常数，可用待定系数法求特解的方法确定。

由于 $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

根据线性系统的微分与积分特性可知，阶跃响应$g(t)$为

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt} \qquad (2.5-3)$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \qquad (2.5-4)$$

2.6 系统的卷积积分分析

1. 卷积积分的物理含义

线性时不变系统的激励为**x(t)**，冲激响应为***h*(*t*)**

$$x(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$ ---- 分解为冲激信号的线性组合

$$\delta(t)\to h(t)$$ ------------------- 冲激信号的零状态响应

$$\delta(t-k\Delta t)\to h(t-k\Delta t)$$ ---------------- 时不变性

$$x(k\Delta t)\Delta t\,\delta(t-k\Delta t)\to x(k\Delta t)\Delta t\; h(t-k\Delta t)$$ ---- 均匀性

$$x(t)\to\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\Delta t$$ ---------- 叠加性

即 $$y_{zs}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\Delta t$$

2.6 系统的卷积积分分析

$$y_{zs}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\Delta t$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta t\to d\tau,\quad k\Delta t\to \tau,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\to\int_{-\infty}^{\infty}$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)\qquad(2.6-1)$$

系统的全响应，表达式如下

$$y(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{零状态响应}}$$

2.6 系统的卷积积分分析

2. 卷积积分在线性时不变系统中的应用

在1.4节中介绍了卷积积分的代数性质，利用这些代数性质可以应用到线性时不变系统的分析中。

（1）交换律

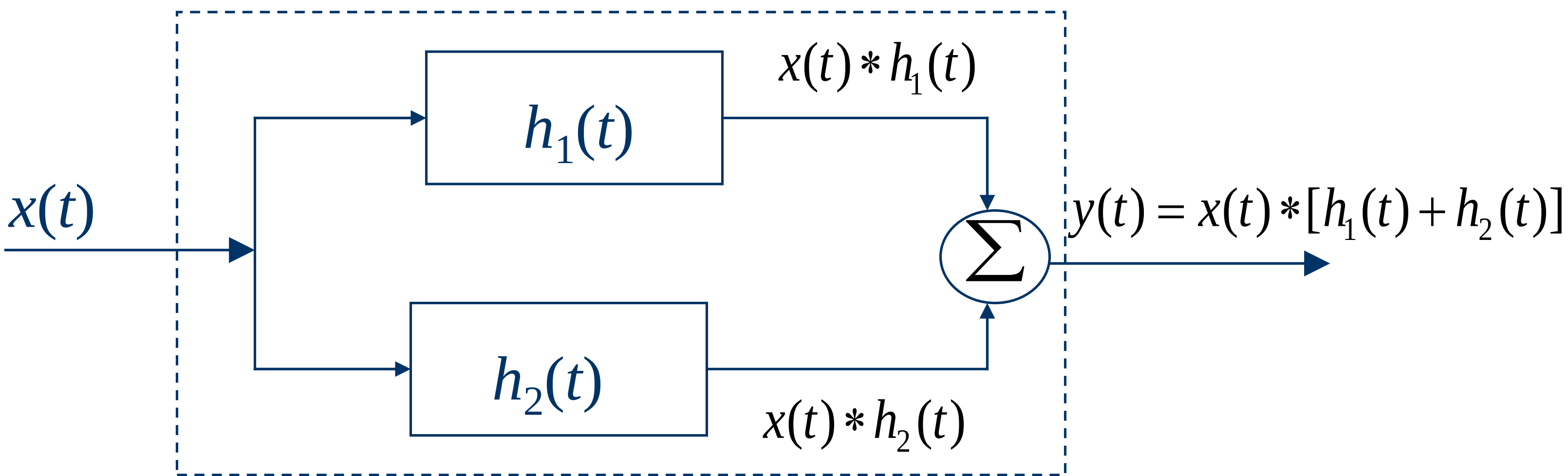
$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

物理意义：激励信号与冲激响应之间有互易性，即把激励信号$x(t)$作为冲激响应$h(t)$，而将$h(t)$ 当作系统的激励$x(t)$，所得响应不变。

2.6 系统的卷积积分分析

（2）分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

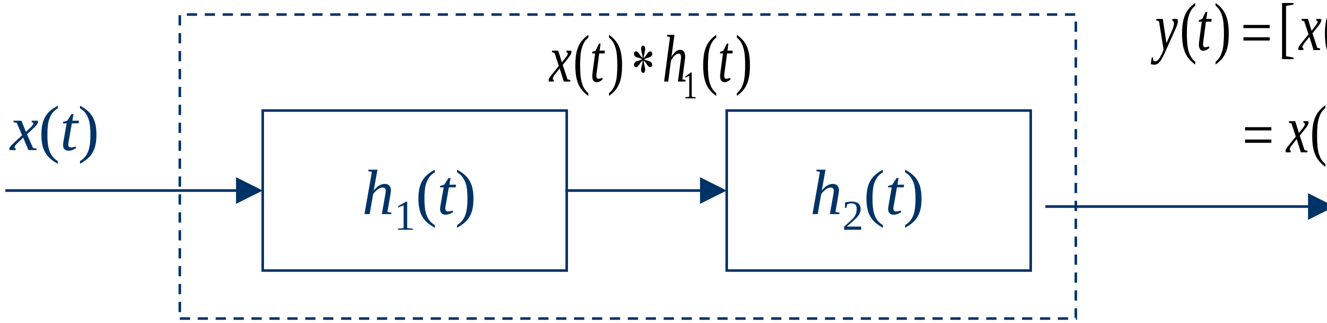
分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和。



2.6 系统的卷积积分分析

（3）结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积。



$$y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$
$$=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 x(t)$$

方程右边多项式系数构成行向量 $\boldsymbol{b} = [b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0]$

方程左边多项式系数构成行向量 $\boldsymbol{a} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0]$

通过调用MATLAB函数 ***tf(b,a)*** 得到系统函数。如果已知系统的系统函数，就可以用函数 **lsim** 来分析系统的时域响应。

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析

例2.7-1 已知某连续系统的微分方程为

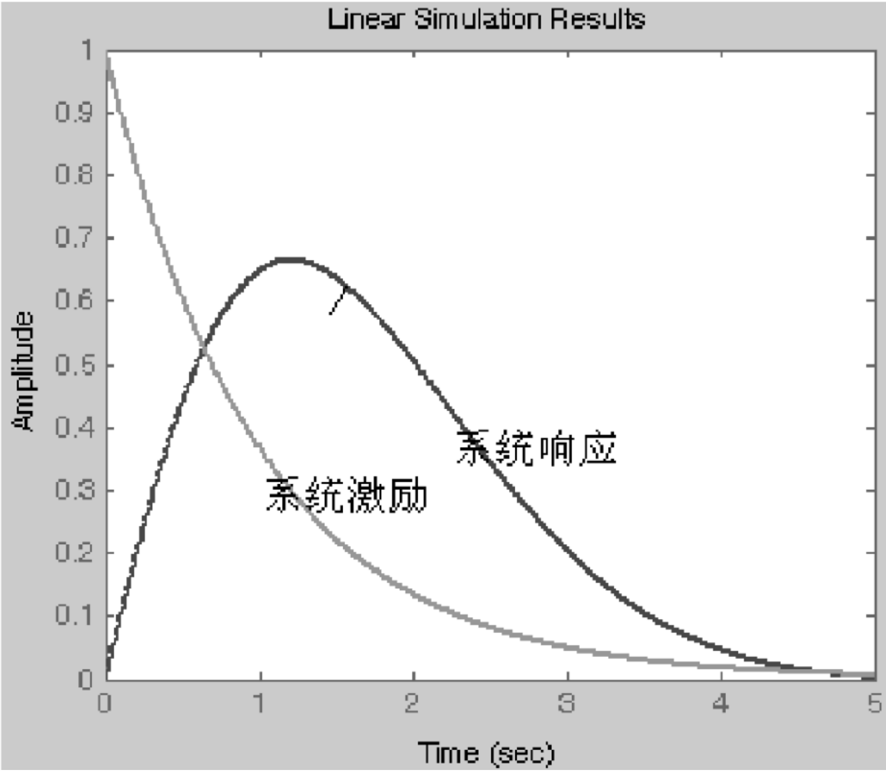
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

当系统的输入信号为 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时，绘制系统的响应和输入信号的波形。

解： 其程序清单如下。

```
a=[1 2 2];b=[1 3];
sys=tf(b,a);                                  %定义系统的系统函数
t=0:0.01:6;                                   %定义采样间隔和时间范围
f=exp(-t);lsim(sys,f,t);                      %对系统输出进行仿真
gtext('系统激励');gtext('系统响应');          %用鼠标添加文本注释
```

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析




```
a=[1 2 2];b=[1 3];
sys=tf(b,a);                              %定义系统的系统函数
t=0:0.01:6;                               %定义采样间隔和时间范围
f=exp(-t);lsim(sys,f,t);                  %对系统输出进行仿真
gtext('系统激励');gtext('系统响应');      %用鼠标添加文本注释
```

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析

例2.7-3 已知信号 $f_1(t)=u(t-1)-u(t-4)$**和** $f_2(t)=0.5t[u(t)-u(t-2)]$**，用MATLAB计算卷积积分** $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$**，并绘制** $f_1(t), f_2(t)$ **和** $s(t)$ **的时域波形。**

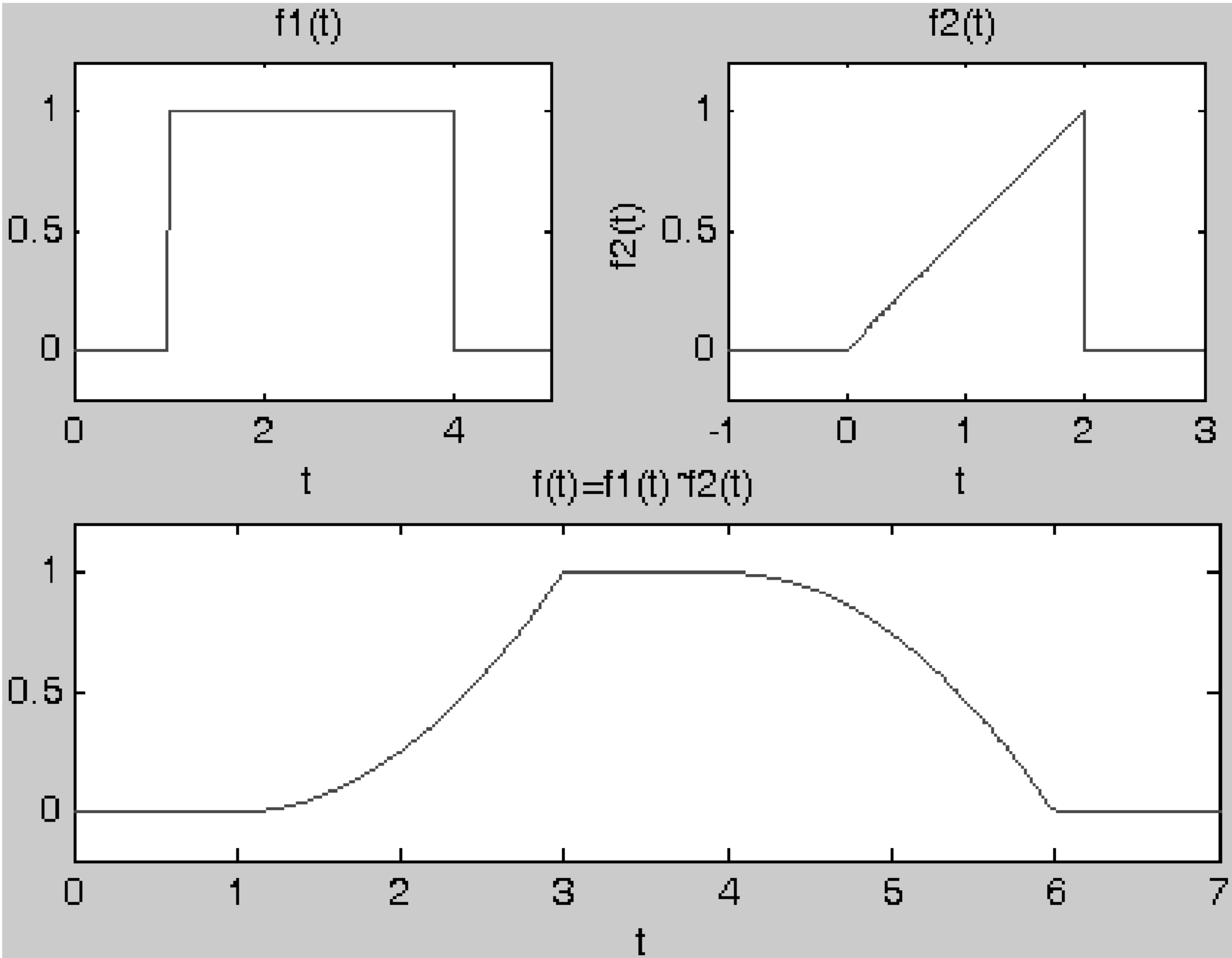
解： MATLAB中没有直接计算连续信号卷积的函数。我们将连续信号以等间隔采样后得到的离散序列的卷积和（有关离散序列及卷积和将在第3章讲解），再利用专用函数conv来实现连续信号卷积的计算。

有关程序清单如下

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析

```
k1=0:0.01:5;k2=-1:0.01:3;p=0.01;                %采样时间间隔p=0.01
f1=Heaviside(k1-1) -Heaviside(k1-4);            %定义f1(t)信号
f2=0.5*k2.*[Heaviside(k2) -Heaviside(k2-2)];%定义f2(t)信号
f=conv(f1,f2); f=f*p;                           %计算序列1与序列2的卷积和
k0=k1(1)+k2(1);                                 %计算序列f非零样值的起点位置
k3=length(f1)+length(f2) -2;                   %计算卷积和f的非零样值宽度
k=k0:p:k0+k3*p; subplot(2,2,1);                %确定卷积和f的非零样值时间向量
plot(k1,f1);axis([0,5, -0.2,1.2]);             %在子图1绘制f1(t)时域波形图
title('f1(t)');
subplot(2,2,2);plot(k2,f2);                    %在子图2绘制f2(t)时域波形图
title('f2(t)');axis([-1,3, -0.2,1.2]);
subplot(2,2,3);plot(k,f);                      %画卷积f(t)的时域波形
h=get(gca,'position');h(3)=2.4*h(3);
set(gca,'position',h);                  %第三子图的横坐标范围扩为原来的2.4倍
title('f(t)=f1(t)*f2(t)');axis([0,7, -0.2,1.2]);
```

2.7 用MATLAB对连续时间系统的时域分析



本章小结

1. 线性时不变系统的性质及确定
2. 线性时不变系统的数学模型—线性常系数差分方程
3. 线性时不变系统的自由响应与强迫响应

   零输入响应与零状态响应

   冲激响应与阶跃响应
4. 卷积积分的物理意义、求解及性质