第8章 离散时间信号与系统的z域分析

8.1 序列的Z变换及其收敛域

▶ 第4章—— 连续时间信号的频域表示与分析

- 任意绝对可积函数 $f(t)$，其傅里叶变换CTFT $F(\mathrm{j}\Omega)$为

$$\text{CTFT:}\quad F(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$\text{ICTFT:}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

▶ 第6章—— 连续时间系统的复频域分析

如果将CTFT $F(\mathrm{j}\Omega)$中的自变量Ω(或 $\mathrm{j}\Omega$)扩展为一般的复数变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$，得到信号$f(t)$的拉氏变换 $F(s)$，即：

拉氏变换： $$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

拉氏逆变换: $$f(t)=\frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

则LTI连续系统：

$$h(t)\xleftrightarrow{\text{拉氏变换}} H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$y(t)=h(t)*x(t)\xleftrightarrow{\text{s域}} Y(s)=H(s)X(s)$$

8.1 序列的z变换及其收敛域

▶ 第7章—— 离散时间傅里叶变换

- 任意绝对可和序列 $x[n]$，其傅里叶变换DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$为

$$\text{DTFT:}\quad X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$\text{IDTFT:}\quad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}\omega$$

如果将DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 中的自变量ω $(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$扩展为一般的复数变量 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，得到序列 $x[n]$的z变换 $X(z)$，即：

$$\text{单边z变换：}\quad X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

$$\boxed{\text{双边z变换:}\quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}}$$

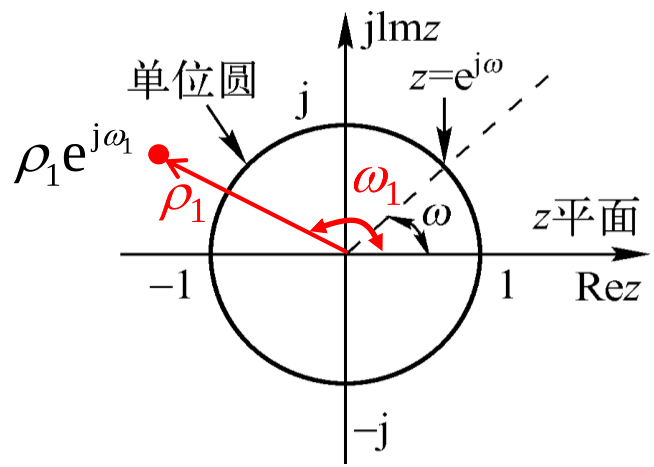
8.1 序列的z变换及其收敛域

8.1.1 z变换的定义

1. 单边z变换：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

其中：z是复变量，定义为 $z=\rho e^{j\omega}$



2. 双边z变换：

双边z变换: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$

z变换: $X(z)=\mathcal{Z}\left[x[n]\right]$

注意：如果没有特殊说明，一般都是指双边z变换。

8.1.1 z变换的定义

例8.1-1 求下面序列的z变换。

$$x_1[n]=a^n u[n]=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$x_2[n]=-a^n u[-n-1]=\begin{cases}0, & n\geqslant 0\\ -a^n, & n<0\end{cases}$$

解： 由式(8.1-2)，$x_1[n]$的z变换为

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

它是几何级数，若 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时，级数收敛，于是

$$X_1(z)=\frac{1}{1-(az^{-1})}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

8.1.1 z变换的定义

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^n)z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(az^{-1})^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(az^{-1})^{-n}$$

同理 $|a^{-1}z|<1$ ，即 $|z|<|a|$ 时，级数收敛，于是

$$X_2(z)=\frac{-(az^{-1})^{-1}}{1-(az^{-1})^{-1}}=\frac{z}{z-a}\qquad |z|<|a|$$

8.1.2 z变换的收敛域

z变换的收敛域：

——对于任意给定的有界序列$x[n]$，使z变换级数收敛的z值集合，称为z变换的收敛域（ROC）。

—— 根据级数理论，双边z变换级数收敛的充分条件是满足绝对可和条件，即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]z^{-n}\right|<\infty$$

——可以采用两种方法—比值判定法和根值判定法

- 比值判定法：令 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
- 根值判定法：令 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}$

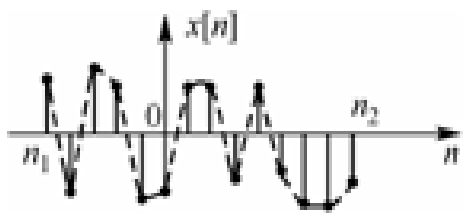
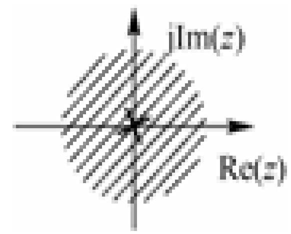
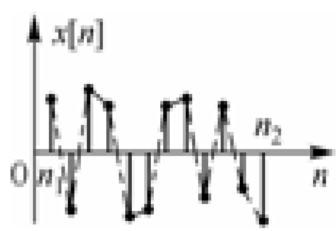
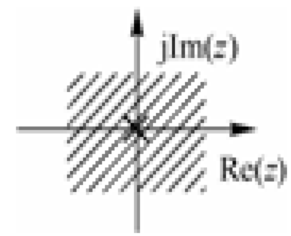
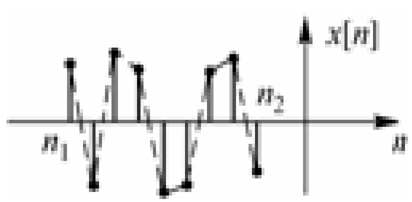
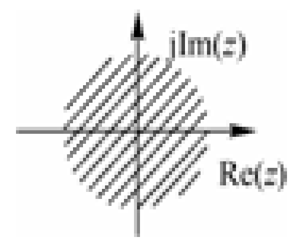
$$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛，}\\ \rho>1\text{时，级数发散，}\\ \rho=1\text{时，不能判定}\end{cases}$$

8.1.2 z变换的收敛域

- 时间范围分布不同的序列z变换收敛域：

1. 有限长序列：

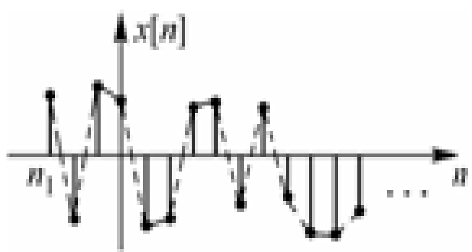
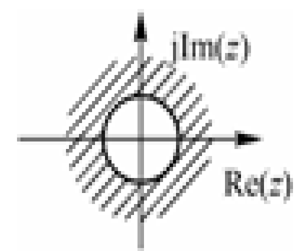
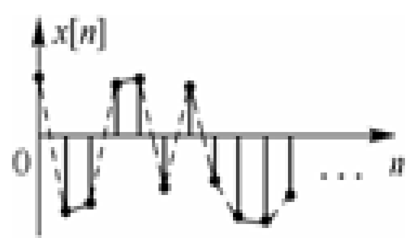
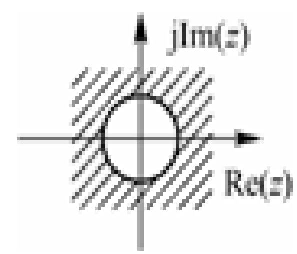
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$$

<table>
<tr><th colspan="2">序列形式</th><th colspan="2">z变换收敛域</th></tr>
<tr><td>有限长序列
① $n_1<0$
$n_2>0$</td><td></td><td></td><td>$0<|z|<\infty$</td></tr>
<tr><td>② $n_1\geq 0$
$n_2>0$</td><td></td><td></td><td>$|z|>0$</td></tr>
<tr><td>③ $n_1<0$
$n_2\leq 0$</td><td></td><td></td><td>$|z|<\infty$</td></tr>
</table>

2．右边序列：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x[n]z^{-n}\right|}<1 \quad\Longrightarrow\quad |z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x[n]\right|}=R_+$$

序列形式		z变换收敛域	
右边序列 ① $n_1<0$ $n_2=\infty$			$R_+<\|z\|<\infty$
② $n_1\geqslant 0$ $n_2=\infty$ （因果序列）			$\|z\|>R_+$

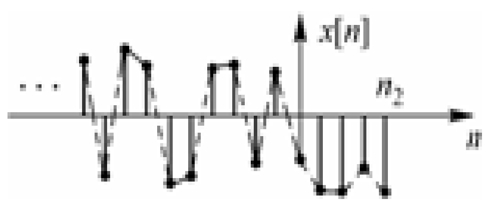
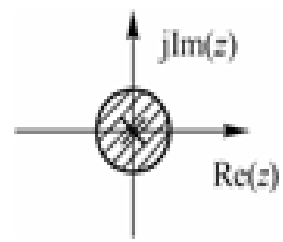
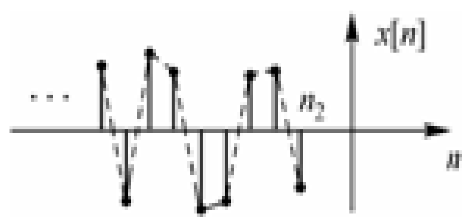
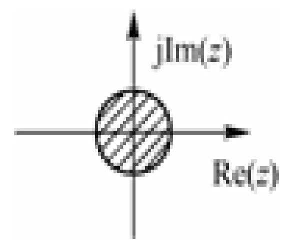
——右边序列的收敛域是z平面上以原点为圆心、**以R_+为半径的圆外部，即$|z|>R_+$**。

8.1.2 z变换的收敛域

3．左边序列：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x[n]z^{-n} \Rightarrow X(z)=\sum_{m=-n_2}^{\infty}x[-m]z^{m}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x[-n]z^{n}\right|}<1 \Rightarrow |z|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|x[-n]\right|}}=R_-$$

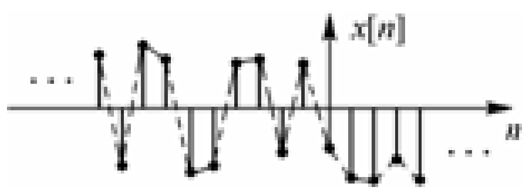
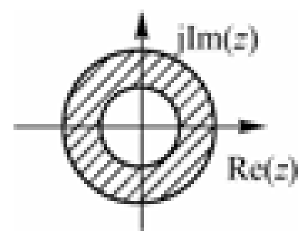
左边序列 ① $n_1=-\infty$ $n_2>0$			$0<\lvert z\rvert<R_-$
② $n_1=-\infty$ $n_2\le 0$			$\lvert z\rvert<R_-$

——左边序列的收敛域是z平面上以原点为圆心、**以R_-为半径的圆内部，即$|z|<R_-$**。

8.1.2 z变换的收敛域

4. 双边序列：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

双边序列 $n_1=-\infty$ $n_2=\infty$			$R_+<\lvert z\rvert<R_-$

——— 双边序列ROC：$R_+<|z|<R_-$ 。

8.1.2 z变换的收敛域

例8.1-2 求双边指数序列 $x[n]=a^n u[n]-b^n u[-n-1]$ 的z变换，并确定它的收敛域（其中：$a>0, b>0, b>a$）。

解： 这是一个双边序列，令

$$x_1[n]=a^n u[n] \qquad x_2[n]=-b^n u[-n-1]$$

则：
$$x[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

由上例结果可以直接得到$x_1[n]$与$x_2[n]$的z变换，即

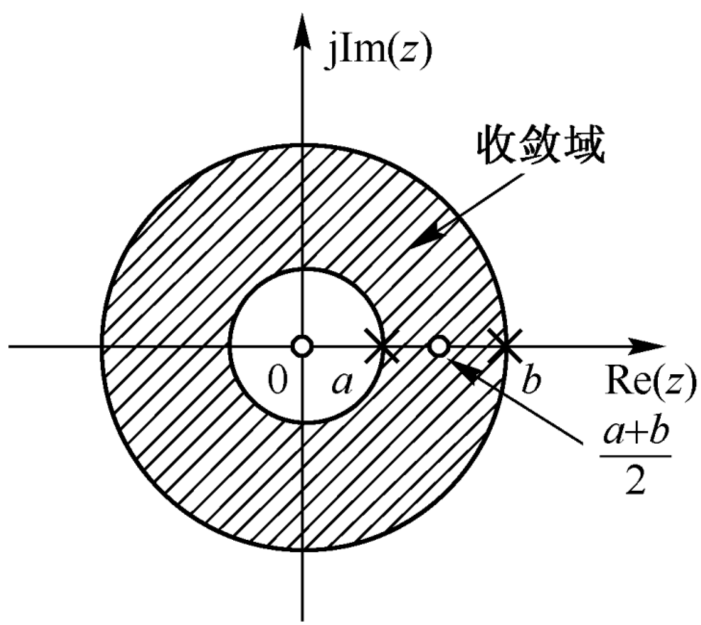
$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

$$X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n}=\frac{z}{z-b} \qquad |z|<b$$

8.1.2 z变换的收敛域

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$$

$$= \frac{2z\left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)}{(z-a)(z-b)} \qquad (a < |z| < b)$$



8.1.3 z平面与s平面的映射

1. 离散序列$x[n]$ 与采样信号$x_s(t)$ （第7章）

离散序列： $x[n]=x_1(t)\big|_{t=nT}=x_1(nT)$

采样信号： $x_s(t)=x_1(t)\cdot\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\delta(t-nT)$

2. 离散序列$x[n]$ 的z变换与采样信号$x_s(t)$ 的拉氏变换

$$x[n]\xleftrightarrow{\text{ZT}}X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$x_s(t)\xleftrightarrow{\text{LT}}X_s(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x_s(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\delta(t-nT)\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-nTs}$$

8.1.3 z平面与s平面的映射

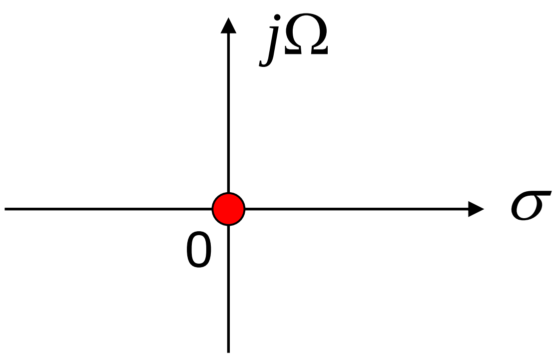
3. z平面与s平面的映射关系： $\boxed{z = \mathrm{e}^{sT}}$

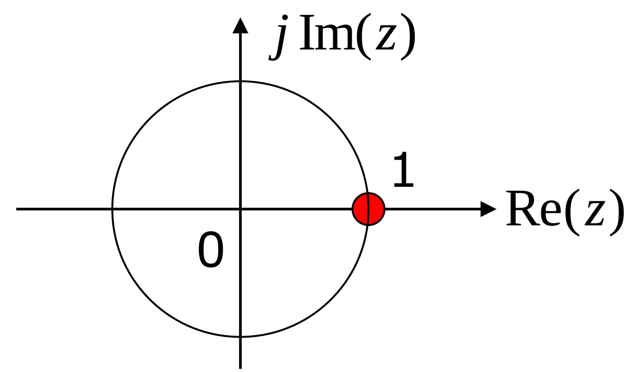
若：记复变量s为 $s = \sigma + \mathrm{j}\Omega$，则而复变量$z$为 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，则

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} = z = \mathrm{e}^{sT} = \mathrm{e}^{(\sigma + \mathrm{j}\Omega)T} = \mathrm{e}^{\sigma T} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}$$

即 $\begin{cases} r = \mathrm{e}^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$

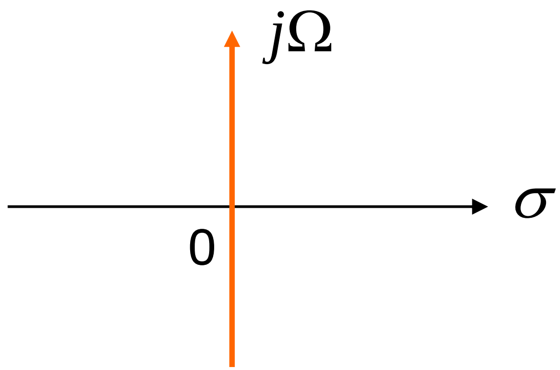
1. s平面原点 $(\sigma = 0, \Omega = 0)$

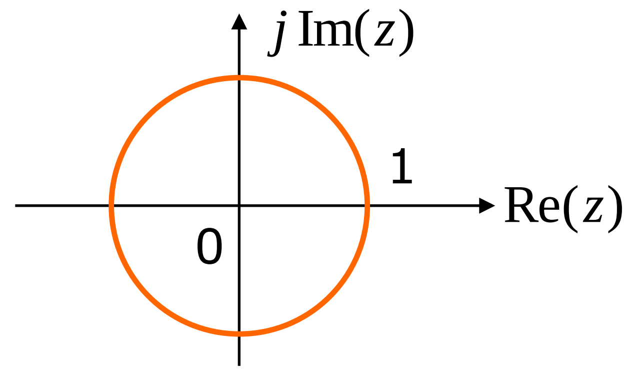




8.1.3 z平面与s平面的映射

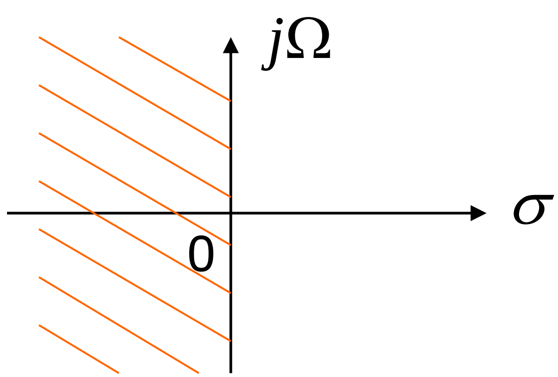
2. s平面虚轴 $(\sigma = 0, \Omega$ 任意）

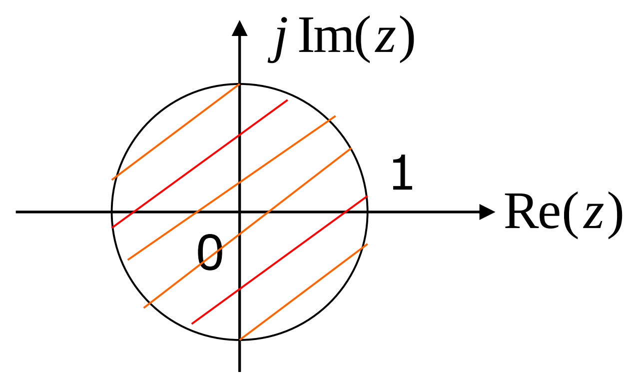




3. 左半s平面 $(\sigma < 0)$

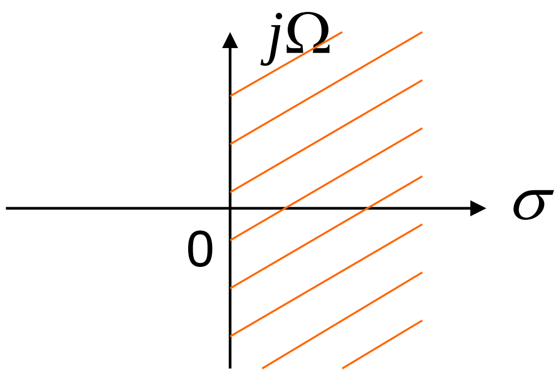
$r = e^{\sigma T} < 1$ （单位圆内）

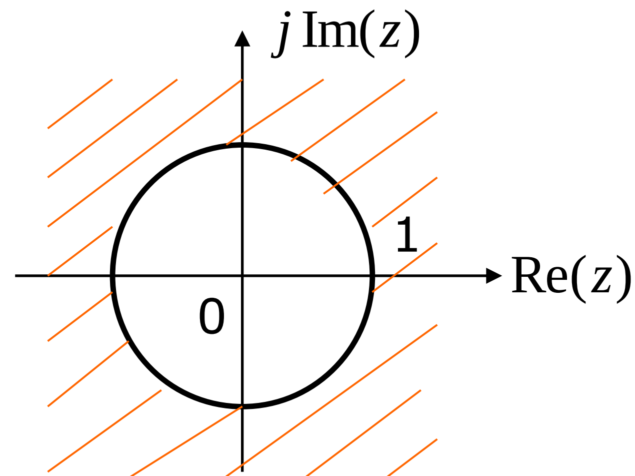




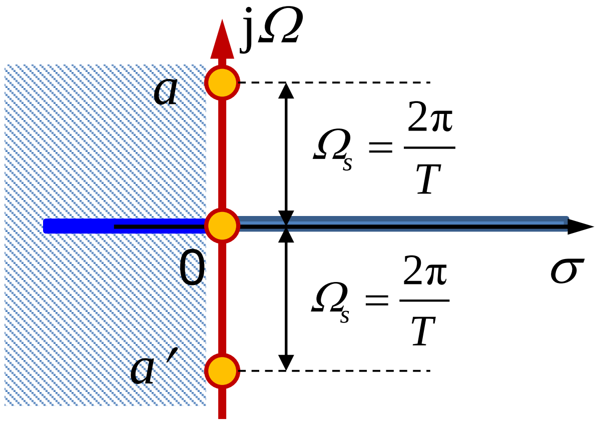
8.1.3 z平面与s平面的映射

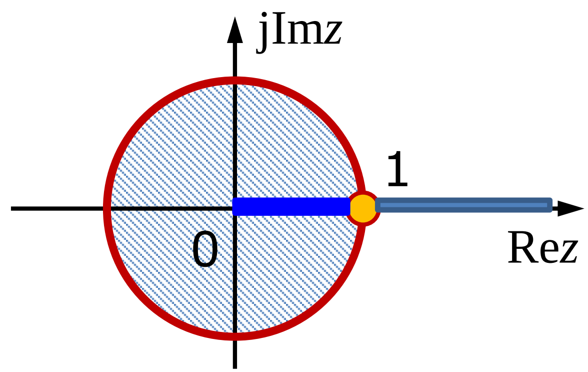
4. 右半s平面 $(\sigma > 0)$　　　　$r = e^{\sigma T} > 1$　（单位圆外）





5　s平面上的点（变量）与 z平面上的点不是一一映射关系;





a:　$\sigma = 0,\ \Omega = \Omega_s$

a':　$\sigma = 0,\ \Omega = -\Omega_s$

a:　$r = 1,\ \omega = \Omega_s T = 2\pi$（0）

a':　$r = 1,\ \omega = -\Omega_s T = -2\pi$（0）

8.1.4 典型序列的z变换

序列	z 变换	收敛域
$\delta[n]$	1	$\lvert z\rvert \geq 0$
$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$nu[n]$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos\omega_0 n u[n]$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\lvert z\rvert > 1$

p.280
表8-2

8.1.4 典型序列的z变换

$$\cos\omega_0 n u[n] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}}\right] = \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, |z|>1$$

$$a^n\cos\omega_0 n u[n] = \frac{1}{2}a^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}z^{-1}}\right] = \frac{z(z-a\cos\omega_0)}{z^2-2za\cos\omega_0+a^2}, |z|>|a|$$

8.2 z逆变换

1. z变换与DTFT的关系：

$$\text{DTFT}:\quad X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\text{ZT}:\quad X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\rho^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{\text{当}\rho = 1,\ \text{即}\ z = e^{j\omega}\text{时，}\ X(z) = X(e^{j\omega})}$$

亦即 X(z) 的ROC包含 z 平面上的点集{z: | z | =1}

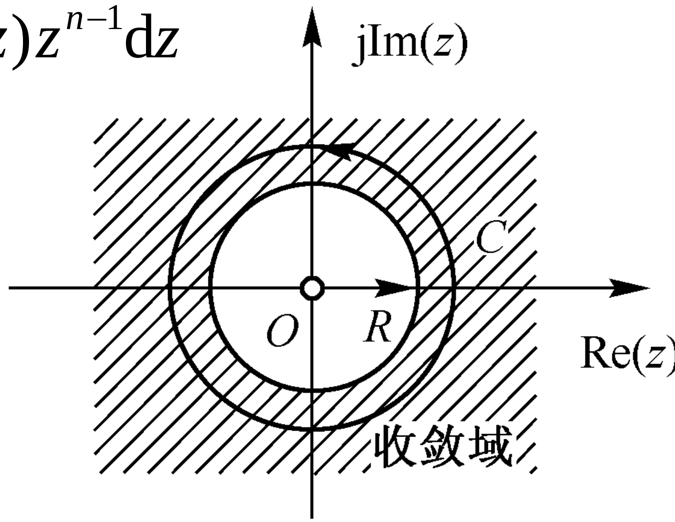
也就是z平面上的单位圆（以原点为中心，半径为1的圆）。

$$\text{IDTFT}:\quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega$$

$$\Rightarrow \text{IZT}:\quad x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

2. z逆变换：

$$\Rightarrow \text{IZT：}\quad x[n]=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$



其中C是包围$X(z)\,z^{n-1}$所有极点的逆时针闭合积分路线，通常选择z平面上收敛域内以原点为中心的圆。

求z逆变换的方法通常有三种：

- 围线积分法（也称留数法）；
- 幂级数展开法（也称长除法）；
- 部分分式展开法（**PFE**）：适用于有理分式表示的 *z* 变换。

3. z逆变换的部分分式展开法

通常序列的z变换是z的有理函数，所以我们将$X(z)$表示成有理分式的形式，

$$X(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

又由于Z变换的基本形式是 1、$\frac{z}{z-a}$ 、 $\frac{z}{(z-a)^2}$ $\cdots$ 我们可以由书上p280表8-2直接得到它们的 z 逆变换。

所以，通常先将$\frac{X(z)}{z}$展开，然后每个分式再乘以z。

展开的各分式系数A_i为： $A_i=(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=p_i};i=1,2,\ldots,n$

8.2 z逆变换

例8.2-1 求z逆变换 $x[n]$， 已知：

$$X(z)=\frac{0.3}{z^2-0.8z+0.15},\quad |z|>0.5$$

解：应用部分分式展开法，将 $X(z)/z$展开：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{0.3}{z(z^2-0.8z+0.15)}=\frac{0.3}{z(z-0.3)(z-0.5)}=\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{z-0.5}+\frac{A_2}{z-0.3}$$

其中： $A_0=X(z)|_{z=0}=2;\quad A_1=(z-0.5)\frac{X(z)}{z}|_{z=0.5}=3;$

$$A_2=(z-0.3)\frac{X(z)}{z}|_{z=0.3}=-5;$$

即 $X(z)=2+\frac{3z}{z-0.5}+\frac{-5z}{z-0.3}$

考虑收敛域为 $|z|>0.5$，$x[n]$为右边序列，

$$x[n]=2\delta[n]+\left[3(0.5)^n-5(0.3)^n\right]u[n]=\left[3(0.5)^n-5(0.3)^n\right]u[n-1]$$

8.2 z逆变换

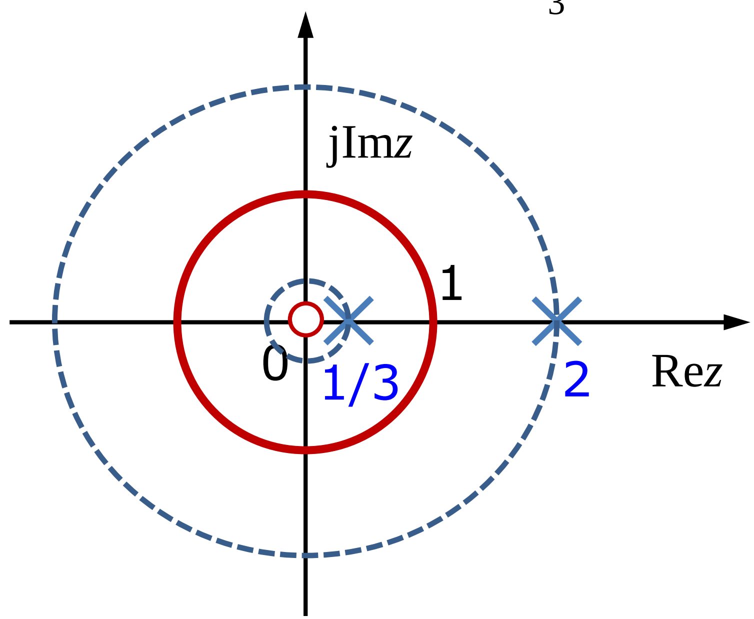
例8.2-5 求z逆变换 $x[n]$， 已知： $X(z)=\dfrac{-15z}{3z^2-7z+2}$

解：应用部分分式展开法，将 $X(z)/z$展开**：**

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{-15z}{3z^2-7z+2}=\frac{-5}{(z-2)(z-\frac{1}{3})}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{3}}$$

其中： $A_1=(z-2)\dfrac{X(z)}{z}\Big|_{z=2}=-3;$ $A_2=(z-\dfrac{1}{3})\dfrac{X(z)}{z}\Big|_{z=\frac{1}{3}}=3;$

即 $X(z)=\dfrac{-3z}{z-2}+\dfrac{3z}{z-\frac{1}{3}}$



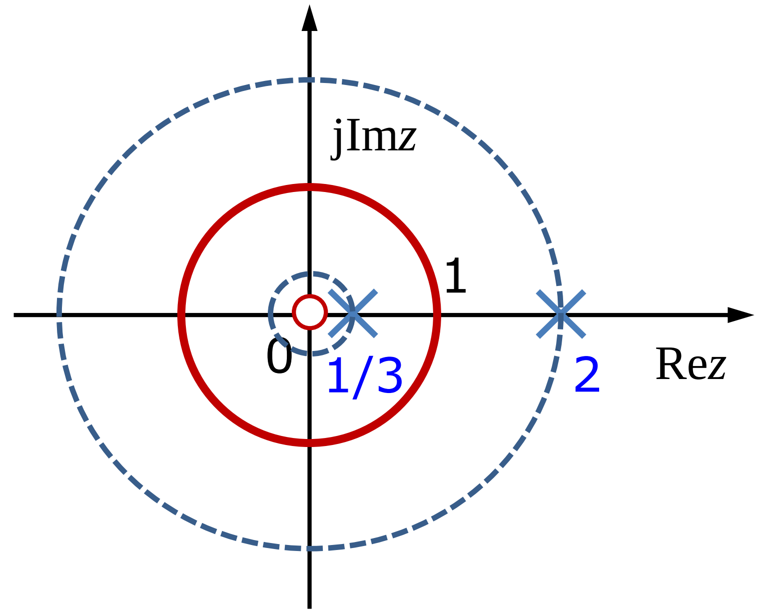
没有指定收敛域，则要考虑所有ROC的情况：

ROC1: $|z|<1/3$ ROC2: $|z|>2$

ROC3: $1/3<|z|<2$

8.2 z逆变换

即 $X(z)=\dfrac{-3z}{z-2}+\dfrac{3z}{z-\frac{1}{3}}$



ROC1: $|z|<1/3$

$$x[n]=3\left[2^n-(1/3)^n\right]u[-n-1]$$

ROC2: $|z|>2$

$$x[n]=3\left[-2^n+(1/3)^n\right]u[n]$$

ROC3: $1/3<|z|<2$

$$x[n]=3\left\{2^n u[-n-1]+(1/3)^n u[n]\right\}$$

8.2 z逆变换

例8.2-2 求z逆变换 $x[n]$，已知：

$$X(z)=\frac{12}{(z+1)(z-2)(z-3)},\ 2<|z|<3$$

解：应用部分分式展开法，将 $X(z)/z$展开**：**

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{12}{z(z+1)(z-2)(z-3)}=\frac{A_0}{z}+\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-2}+\frac{A_3}{z-3}$$

其中： $A_0=X(z)|_{z=0}=2;\quad A_1=(z+1)\frac{X(z)}{z}|_{z=-1}=-1;$

$$A_2=(z-2)\frac{X(z)}{z}|_{z=2}=-2;\quad A_3=(z-3)\frac{X(z)}{z}|_{z=3}=1;$$

即 $X(z)=2+\frac{-z}{z+1}+\frac{-2z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$

$$x[n]=2\delta[n]-\left[(-1)^n-2\times 2^n\right]u[n]-3^n u[-n-1]$$

8.3 z变换的基本性质

假设：$\mathcal{Z}\left[x_1[n]\right]=X_1(z)$，（$R_{1+}<|z|<R_{1-}$）

$\mathcal{Z}\left[x_2[n]\right]=X_2(z)$，（$R_{2+}<|z|<R_{2-}$）

1 线性

$$\mathcal{Z}\left[a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\right]=a_1X_1(z)+a_2X_2(z),\quad (R_+<|z|<R_-)$$

通常：$R_+=\max\{R_{1+},R_{2+}\}$，$R_-=\min\{R_{1-},R_{2-}\}$

例8.3-1：求序列 $a^nu[n]-a^nu[n-1]$ 的z变换。

$$\mathcal{Z}\left(a^nu[n]-a^nu[n-1]\right)=\mathcal{Z}\left(a^nu[n]\right)-\mathcal{Z}\left(a^nu[n-1]\right)$$

$$=\frac{z}{z-a}-\sum_{n=1}^{\infty}a^nz^{-n}\quad (|z|>|a|)$$

$$=\frac{z}{z-a}-\frac{a}{z-a}=1\quad (|z|\geq 0)$$

2. 时移性

(1) 双边z变换　　假设：$\mathcal{Z}[x[n]]=X(z)$，（$R_{+}<|z|<R_{-}$）

则 $\mathcal{Z}[x[n-m]]=z^{-m}X(z)$，（$R_{+1}<|z|<R_{-1}$）

(2) 单边z变换，即：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=\mathcal{Z}[x[n]u[n]],\quad |z|>R_{+}$$

则 $$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}\right],\quad m>0$$

证明： 当$m>0$时， $$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]]=\sum_{n=0}^{\infty}x[n-m]z^{-n}$$

即 $$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]]=\sum_{k=-m}^{\infty}x[k]z^{-(m+k)}=z^{-m}\left\{\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}\right\}$$

2. 时移性

$$\mathcal{Z}\left[x[n-m]u[n]\right]=z^{-m}\left\{\sum_{k=-m}^{-1}x[k]z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}\right\},\quad m>0$$

类似 $$\mathcal{Z}\left[x[n+m]u[n]\right]=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\right],\quad m>0$$

- **若序列 x[n] 是因果序列，即x[n] = x[n] u[n]，且**

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right]=X(z),\quad |z|>R_{+}$$

则 $$\mathcal{Z}\left[x[n-m]u[n-m]\right]=z^{-m}X(z),\quad m>0;\quad |z|>R_{+}$$

则 $$\mathcal{Z}\left[x[n+m]\right]=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\right],\quad m>0;\quad R_{+}<|z|<\infty$$

2. 时移性

例5： 求周期为N的单边周期序列的z变换。

解： 设单边周期序列为$x[n]$，令它的第一个周期内的序列为$x_1[n]$，其z变换为

$$X_1(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]z^{-n}\quad |z|>0$$

$$\because x[n]=x_1[n]+x_1[n-N]+x_1[n-2N]+\cdots$$

由z变换的时移性可得：

$$X(z)=X_1(z)[1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots]=X_1(z)\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}$$

若 $|z^{-N}|<1$（即$|z|>1$），则有

$$X(z)=\frac{z^N}{z^N-1}X_1(z)\quad (|z|>1)$$

3 Z域微分

假设： $\mathcal{Z}[x[n]]=X(z),\quad (R_+<|z|<R_-)$

则 $\mathcal{Z}[n\,x[n]]=-z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z},\quad (R_+<|z|<R_-)$

推广 $\mathcal{Z}\left[n^m x[n]\right]=\left[-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z),\quad (R_+<|z|<R_-)$

例8.3-3 求序列$x[n]=na^nu[n]$的z变换。

解： 根据指数序列 的z变换

$$\mathcal{Z}\left[a^n u[n]\right]=\frac{z}{z-a}=X_1(z),\quad |z|>|a|$$

则 $$X(z)=\mathcal{Z}\left[na^n u[n]\right]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X_1(z)=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{az}{(z-a)^2},\quad |z|>|a|$$

类似 $$\mathcal{Z}[nu[n]]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{\mathcal{Z}[u[n]]\}=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2},\quad |z|>1$$

3 Z域微分

假设： $\mathcal{Z}[x[n]]=X(z)$，（$R_{+}<|z|<R_{-}$）

则 $\mathcal{Z}[n\,x[n]]=-z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$，（$R_{+1}<|z|<R_{-1}$）

例8.3-4 求逆z变换，已知 $X(z)=\log(1+az^{-1})$，$|z|>|a|$

解：z变换不是常见的有理分式，但是

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}=\frac{a}{z+a}=\frac{az}{z+a}\cdot z^{-1}=X_1(z)=\mathcal{Z}[x_1[n]]$$

$$\Leftrightarrow x_1[n]=nx[n]$$

由于ROC：$|z|>|a|$，故$X_1(z)$和$X(z)$都可认为是单边z变换，即$x_1[n]$ 和$x[n]$ 都是因果序列，从而

$$x_1[n]=a\times(-a)^{n-1}u[n-1]=-(-a)^n u[n-1]$$

$$x[n]=\frac{x_1[n]}{n}=-\frac{1}{n}(-a)^n u[n-1]$$

4 序列指数加权

假设： $\mathcal{Z}\left[x[n]\right]=X(z)$，（$R_+<|z|<R_-$）

则 $\mathcal{Z}\left[a^n x[n]\right]=X\left(\frac{z}{a}\right)$，（$R_{+1}<|\frac{z}{a}|<R_{-1}$）

例8.3-5 求序列$x[n] = \beta^n\cos\omega_0 n\, u[n]$的$z$变换。

解：根据余弦序列 的z变换

$$\mathcal{Z}\left[\cos\omega_0 n\, u[n]\right]=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\triangleq X_1(z),\quad |z|>1$$

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right]=\mathcal{Z}\left[\beta^n\cos\omega_0 n\, u[n]\right]=X_1\left(\frac{z}{\beta}\right),\quad \left|\frac{z}{\beta}\right|>1$$

$$\mathcal{Z}\left[\beta^n\cos\omega_0 n\, u[n]\right]=\frac{\frac{z}{\beta}\left(\frac{z}{\beta}-\cos\omega_0\right)}{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-2\frac{z}{\beta}z\cos\omega_0+1}=\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2}\quad |z|>|\beta|$$

4 序列指数加权

同理： $\mathcal{Z}\left[\beta^n \sin\omega_0 n\, u[n]\right] = \dfrac{z\beta\sin\omega_0}{z^2 - 2z\beta\cos\omega_0 + \beta^2} \quad |z|>|\beta|$

假设： $\mathcal{Z}\left[x[n]\right] = X(z)$，（$R_+ < |z| < R_-$）

则 $\mathcal{Z}\left[a^n x[n]\right] = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$，（$R_{+1} < \left|\dfrac{z}{a}\right| < R_{-1}$）

如果 $a=-1$，则 $\mathcal{Z}\left[(-1)^n x[n]\right] = X(-z)$, $R_+ < |z| < R_-$

如果 $a=1/b$，则 $\mathcal{Z}\left[b^{-n} x[n]\right] = X(bz)$, $R_+ < |bz| < R_-$

——序列指数加权，等价于其z变换做尺度变换；

这一性质与DTFT（或拉氏变换）的频域移位性质相当。

8.3 z变换的基本性质

5 序列反褶与共轭

$$\mathcal{Z}\left[x[-n]\right]=X(\frac{1}{z}),\ \ R_{+}<|\frac{1}{z}|<R_{-}$$

$$\mathcal{Z}\left[x^{*}[n]\right]=X^{*}(z^{*}),\ \ R_{+}<|z|<R_{-}$$

6 卷积定理

假设：$\mathcal{Z}\left[x_1[n]\right]=X_1(z),\ \ (R_{1+}<|z|<R_{1-})$

和 $\mathcal{Z}\left[x_2[n]\right]=X_2(z),\ \ (R_{2+}<|z|<R_{2-})$

（1）时域卷积定理

$$\mathcal{Z}\left[x_1[n]*x_2[n]\right]=X_1(z)X_2(z),\ \ (R_{+}<|z|<R_{-})$$

通常：$R_{+}=\max\{R_{1+},R_{2+}\},\ \ R_{-}=\min\{R_{1-},R_{2-}\}$

（2）z域卷积定理

$$\mathcal{Z}\left[x_1[n]\cdot x_2[n]\right]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C1}X_1\left(\frac{z}{v}\right)X_2(v)\frac{dv}{v}$$

6 卷积定理

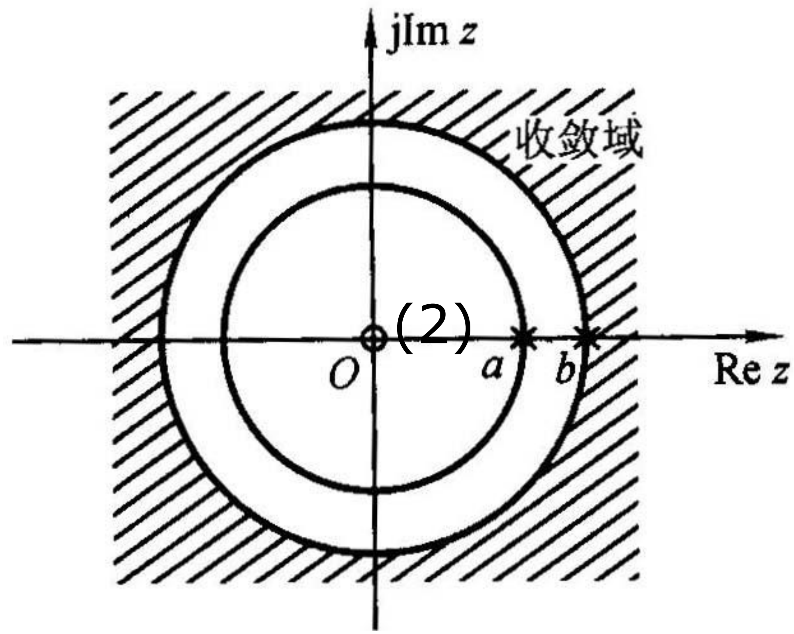
例8.3-6： 求下列两单边指数序列的卷积

$$x[n]=a^n u[n] \qquad h[n]=b^n u[n] \qquad (|a|<|b|)$$

解： $X(z)=\dfrac{z}{z-a} \quad (|z|>|a|)$， $\quad H(z)=\dfrac{z}{z-b} \quad (|z|>|b|)$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \qquad (|z|>|b|)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$



其逆变换为

$$y[n]=x[n]*h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)\ u[n]$$

7 初值和终值定理

若序列x[n] 为因果序列，其z变换为：$\mathcal{Z}\left[x[n]\right]=X(z),\quad (|z|>R_+)$

（1）初值定理 $x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

证明： $X(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$

当 $z\to\infty,\ z^{-i}\to 0$，即 $\lim\limits_{z\to\infty}z^{-i}=0,\quad i=1,2,\ldots.$ $\boxed{\Rightarrow x[0]=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)}$

（2）终值定理 $x[\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}x[n]=\lim\limits_{z\to1}\left[(z-1)X(z)\right]$

证明： 由于 $(z-1)X(z)=z\left\{X(z)-z^{-1}X(z)\right\}=z\left\{\mathcal{Z}\left[x[n]\right]-\mathcal{Z}\left[x[n-1]\right]\right\}$

即 $(z-1)X(z)=z\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x[n-1]z^{-n}\right\}$

$=z\left\{x[0]+\left(x[1]-x[0]\right)z^{-1}+\left(x[2]-x[1]\right)z^{-1}+\ldots\right\}$ $\boxed{\Rightarrow \lim\limits_{z\to1}\left[(z-1)X(z)\right]=x[\infty]}$

应用条件：X(z)的极点必须处于单位圆内，或在z=1处（一阶）。

7 初值和终值定理

例7 求z逆变换$x[n]$ 的初值与终值。

(1) $X_1(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1+2z^{-1})},\quad |z|>2$; (2) $X_2(z)=\dfrac{z^3+2z+5}{z^2(z+0.5)},\quad |z|>0.5$

解：应用初值与终值定理，可以判断，它们都是右边序列

$$(1)\quad X_1(z)=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1+2z^{-1})}=\frac{z^2+z+1}{(z-0.5)(z+2)}$$

$$x_1[0]=\lim_{z\to\infty}\left[X_1(z)\right]=1$$

极点 –2在单位圆外 ⇒不能直接应用终值定理

$x_1[\infty]$,不存在，序列$x[n]$不收敛；

(2) $X_2(z)=\dfrac{z^3+2z+5}{z^2(z+0.5)}$

$$x_2[0]=\lim_{z\to\infty}\left[X_2(z)\right]=1$$

$$x_2[\infty]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)X_2(z)\right]=0$$

8 帕斯瓦尔定理

假设：$\mathcal{Z}\left[x_1[n]\right]=X_1(z)$，（$R_{1+}<|z|<R_{1-}$）

和 $\mathcal{Z}\left[x_2[n]\right]=X_2(z)$，（$R_{2+}<|z|<R_{2-}$）

则 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]x_2^*[n]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X_1(z)X_2^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}\mathrm{d}z$$

8.4 离散时间系统响应的z变换求解

和拉氏变换在连续时间系统分析中的地位和作用相似，z变换也是分析和求解LTI离散时间系统的强有力工具，用z变换可以很方便地求解线性常系数差分方程，特别是零输入响应、零状态响应和单位样值响应。

例8.4-2 求解差分方程：$y[n]-0.5y[n-1]-0.5y[n-2]=x[n]+x[n-1]$

（1）$y[-1]=0$，$y[-1]=0$，$x[n]=u[n]$；
（2）$y[-1]=1$，$y[-1]=2$，$x[n]=u[n]$。

解：采用单边 z 变换求解，注意到输入$x[n]$是因果序列

$$Y(z)-0.5\left\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\right\}-0.5\left\{z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right\}=X(z)+z^{-1}X(z)$$

整理，得到

$$\left(1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}\right)Y(z)=(1+z^{-1})X(z)+\left\{0.5y[-1]+0.5z^{-1}y[-1]+0.5y[-2]\right\}$$

8.4 离散时间系统响应的z变换求解

$$\left(1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}\right)Y(z)=(1+z^{-1})X(z)+\left\{0.5y[-1]+0.5z^{-1}y[-1]+0.5y[-2]\right\}$$

从而 $$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}\cdot X(z)+\frac{0.5y[-1]+0.5z^{-1}y[-1]+0.5y[-2]}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{z^2+z}{z^2-0.5z-0.5}\cdot X(z)}}_{Y_{zs}(z)}+\underbrace{\boxed{\frac{\{0.5y[-1]+0.5y[-2]\}z^2+0.5zy[-1]}{z^2-0.5z-0.5}}}_{Y_{zi}(z)}$$

（1）代入$y[-1]=0$，$y[-2]=0$，$x[n]=u[n]$，即 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-0.5z-0.5}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{1}{9}\left\{\frac{-z}{z+0.5}+\frac{10z}{z-1}+\frac{12z}{(z-1)^2}\right\}\Rightarrow Y_{zs}(z)$$

8.4 离散时间系统响应的z变换求解

（1）$Y(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2-0.5z-0.5}\cdot\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{9}\left\{\dfrac{-z}{z+0.5}+\dfrac{10z}{z-1}+\dfrac{12z}{(z-1)^2}\right\}$

$$y[n]=\frac{1}{9}\left[-(-0.5)^n+10+12n\right]u[n]\Rightarrow y_{zs}[n]$$

（2）代入$y[-1]=1$，$y[-2]=2$，$x[n]=u[n]$，即 $X(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z)=\frac{z^2+z}{z^2-0.5z-0.5}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1.5z^2+0.5z}{z^2-0.5z-0.5}$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{-z}{z+0.5}+\frac{10z}{z-1}+\frac{12z}{(z-1)^2}\right\}+\frac{1}{6}\left\{\frac{z}{z+0.5}+\frac{8z}{z-1}\right\}$$

$$y[n]=\frac{1}{9}\left[-(-0.5)^n+10+12n\right]u[n]+\frac{1}{6}\left[(-0.5)^n+8\right]u[n]\Rightarrow y_{zs}[n]+y_{zi}[n]$$

8.4 离散时间系统响应的z变换求解

例8.4-3 求解差分方程所描述的LTI离散系统的脉冲响应：

$$y[n]+0.2y[n-1]-0.24y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

解：对差分方程两边作 z 变换

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)$$

整理，得到 $\left(1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}\right)Y(z)=(1-z^{-1})X(z)$

$$Y(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}\cdot X(z)=\frac{z^2-z}{z^2+0.2z-0.24}\cdot X(z)\Rightarrow Y_{zs}(z)$$

求解的是单位样值响应，即$x[n]=\delta[n]$，亦即$X(z)=1$，故

$$H(z)=\frac{z^2-z}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{1.6z}{z+0.6}+\frac{-0.6z}{z-0.4}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

考虑 $H(z)$ 取不同收敛域ROC的情况，则有

8.4 离散时间系统响应的z变换求解

$$H(z)=\frac{z^2-z}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{1.6z}{z+0.6}+\frac{-0.6z}{z-0.4}$$

考虑 $H(z)$ 取不同收敛域ROC的情况，则有

ROC1： $|z|>0.6$，

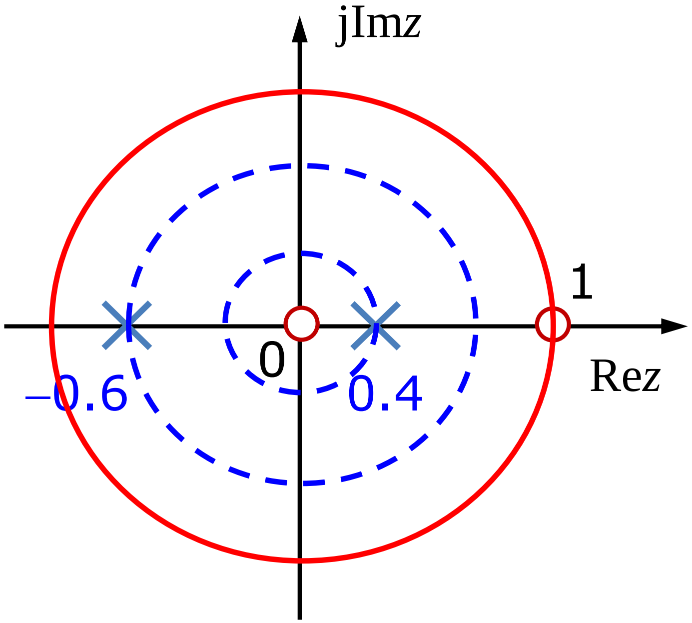
$h[n]=[1.6(-0.6)^n-0.6(0.4)^n]\,u[n]$。

ROC2： $|z|<0.4$，

$h[n]=-[1.6(-0.6)^n-0.6(0.4)^n]\,u[-n-1]$。

ROC3： $0.4<|z|<0.6$，

$h[n]=-1.6(-0.6)^n\,u[-n-1]-0.6(0.4)^n u[n]$ 。



8.5 系统函数与单位样值响应

LTI离散时间系统

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI离散系统}} \longrightarrow y[n]=y_{zs}[n]$$

若 $x[n]=\delta[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=h[n]$ ---- 单位样值响应

若 $x[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=x[n]*h[n]$

根据z域卷积定理，则

$$Y_{zs}(z)=\mathscr{Z}\left[x[n]*h[n]\right]=X(z)H(z),\quad （R_{+}<|z|<R_{-}）$$

即 $$H(z)=\mathscr{Z}\left[h[n]\right]=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$ ——LTI离散系统的系统函数

8.5 系统函数与单位样值响应

8.5.1 系统函数与单位样值响应

- **LTI离散系统的系统函数** $H(z)=\mathcal{Z}\left[h[n]\right]$
- **LTI离散系统的脉冲响应** $h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\right]$

假设LTI离散系统的系统函数为如下有理分式形式

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\cdots+b_{M-1}z^{-(M-1)}+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\cdots+a_{N-1}z^{-(N-1)}+a_Nz^{-N}}$$

其中，系数 a_i和b_i，$i=0$，1，…，M，…，N都是实数。这里假设 $N\geq M$。

$$H(z)=z^{N-M}\cdot\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{N-1}z+a_N}$$

或者 $H(z)=B_0z^{N-M}\cdot\dfrac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$

8.5.1 系统函数与单位样值响应

$$H(z)=B_0 z^{N-M}\cdot\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

假设上式所示系统函数$H(z)$的极点都是一阶极点，为讨论简单起见，假设离散系统都是因果系统，则$H(z)$的部分分式展开式及其单位样值响应$h[n]$分别为

$$H(z)=A_0+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m z}{z-p_m}$$

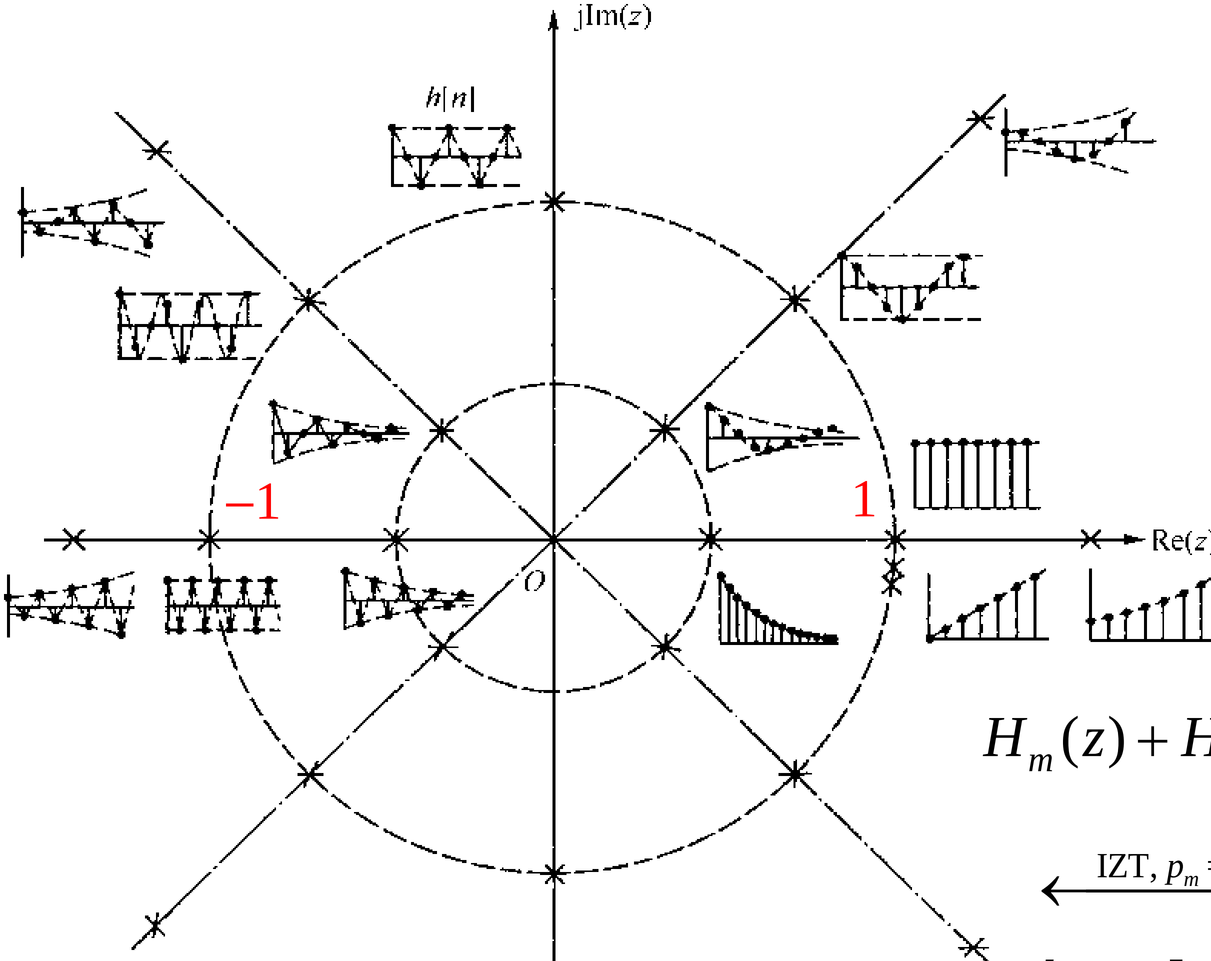
$$h[n]=\mathscr{Z}^{-1}\left[H(z)\right]=A_0\delta[n]+\sum_{m=1}^{N}A_m(p_m)^n u[n]$$

p_m可以是实数，也可能是成对出现的共轭复数。

即脉冲响应$h[n]$的波形变化性质取决于$H(z)$的极点，而其幅度值由系数A_m决定，且A_m与$H(z)$的零点分布有关。即$H(z)$的极点决定着$h[n]$的波形特征，而零点只影响$h[n]$的幅度和相位。

8.5.1 系统函数与单位样值响应

$$H_m(z)=\frac{A_m z}{z-p_m}\xleftrightarrow{\text{IZT}, p_m\text{为实数}} h_m[n]=A_m(p_m)^n u[n]$$



$p_m>0$，$h[n]$恒为正值，

若$p_m>1$，则$h[n]$递增；

$p_m<1$，　$h[n]$递减；

$p_m=1$，　$h[n]$为常数

$p_m<0$，？？？

当p_m为复数时，则共轭对出现

$$H_m(z)+H_{m+1}(z)=\frac{A_m z}{z-p_m}+\frac{A_m^* z}{z-p_m^*}$$

$$\xleftrightarrow{\text{IZT}, p_m=\rho e^{\pm j\phi}\text{为复数对}, A_m=Ae^{j\theta}}$$

$$h_{m,m+1}[n]=2A\rho^n\cos(n\phi+\theta)u[n]$$

8.5.2 系统函数与线性常系数差分方程

- 常系数线性差分方程：是描述LTI离散系统的重要方程式；
- 利用z变换的线性性质和时移性质，可以将差分方程转化为代数方程求解（见8.4节），考虑到系统激励和响应一般都是有始序列，因此求解差分方程时使用的是单边z变换。

—— **设N阶LTI离散时间系统的差分方程表示为**

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] =$$

$$b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$

式中，系数 a_i，b_j都是常（实）数。

—— **则系统的系统函数$H(z)$为** $H(z) = \dfrac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

8.5.2 系统函数与线性常系数差分方程

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+\cdots+a_N y[n-N]=$$
$$b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+\cdots+b_M x[n-M]$$

—— 设输入信号为 $x[n]=x[n]u[n]$，起始状态为$y[-N]$, $y[-N+1]$, …, $y[-2]$, $y[-1]$，对差分方程两边做单边z变换，得代数方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y[l]z^{-l}\right]=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

整理，得 $$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right)Y(z)=\left(\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right)X(z)-\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left(\sum_{l=-k}^{-1} y[l]z^{-l}\right)\right\}$$

即

$$Y(z)=\underbrace{\boxed{\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}X(z)}}_{Y_{zs}(z)}+\underbrace{\boxed{\frac{-\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left(\sum_{l=-k}^{-1} y[l]z^{-l}\right)}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}}_{Y_{zi}(z)}$$

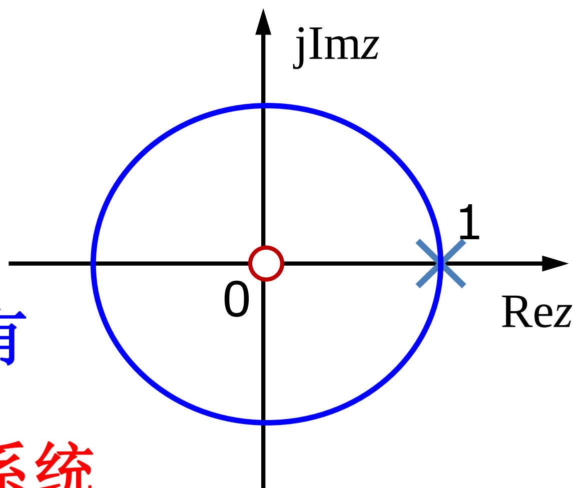
8.5.2 系统函数与线性常系数差分方程

例8.5-1 求解差分方程 $y[n]-y[n-1]=x[n]$ 所描述的LTI离散系统的单位样值响应$h[n]$；如果系统是因果系统，当$y[-1]=1$，$x[n]=nu[n]$时，求系统的完全响应，并判断其解的各个分量，包括零状态响应与零输入响应，自由响应和强迫响应。

解：对差分方程两边作 z 变换 $Y(z)-z^{-1}Y(z)=X(z)$

即 $(1-z^{-1})Y(z)=X(z)$

从而 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$



考虑 $H(z)$ 取不同收敛域ROC的情况，则有

ROC1：$|z|>1$，$h[n]=u[n]$。$\Rightarrow$ 因果系统

ROC2：$|z|<1$，$h[n]=u[-n-1]$。$\Rightarrow$ 非因果系统

8.5.2 系统函数与线性常系数差分方程

$y[n]-y[n-1]=x[n]$　　当$y[-1]=1$；$x[n]=nu[n]$时，

对差分方程两边作单边 z 变换

$$Y(z)-\left\{z^{-1}Y(z)+y[-1]\right\}=X(z)$$

即　$(1-z^{-1})Y(z)=X(z)+y[-1]$

从而　$Y(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}\cdot X(z)+\dfrac{y[-1]}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}\cdot X(z)+y[-1]\cdot\dfrac{z}{z-1}$

代入$y[-1]=1$，$x[n]=nu[n]$，即　$X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

得　$Y(z)=\boxed{\dfrac{z}{z-1}\cdot\dfrac{z}{(z-1)^2}}+\boxed{\dfrac{z}{z-1}}$

$Y_{zs}(z)$ ⟵ 　　 ⟶ $Y_{zi}(z)$

$$\Rightarrow y_p[n]=\frac{n^2+n}{2}u[n]$$

$$\Rightarrow y_h[n]=u[n]=y_{zi}[n]$$

$$\Rightarrow y_{zi}[n]=u[n]$$

$$\Rightarrow y_{zs}[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}mu[m]u[n-m]=\frac{n(n+1)}{2}u[n]$$

8.5.2 系统函数与线性常系数差分方程

例（补）：设LTI因果离散系统的系统函数为：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.15z^{-2}}$$

如果系统的输入信号为$x[n]=(-1)^n u[n]$，起始状态为$y[-1]=1$，$y[-2]=0$，求该系统的全响应。

解：

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.15z^{-2}}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{3/8}{1-0.3z^{-1}}+\frac{5/8}{1+0.5z^{-1}}$$

所以：$y_{zs}[n]=\frac{1}{8}\left[3(0.3)^n+5(-0.5)^n\right]u[n]$

假设：$y_{zi}[n]=A(0.3)^n+B(-0.5)^n$

$$\boxed{A=\frac{9}{80},\quad B=-\frac{5}{16}}$$

则：$y_{zi}[-1]=y[-1]=A(0.3)^{-1}+B(-0.5)^{-1}=\frac{10}{3}A-2B=1$

$$y_{zi}[-2]=y[-2]=A(0.3)^{-2}+B(-0.5)^{-2}=\frac{100}{9}A+4B=0$$

8.5.3 系统函数与系统的因果性

- **因果系统**：当 $n < n_0$时， 输入$x[\mathbf{n}] = 0$， 输出$y[\mathbf{n}] = 0$

$\Leftrightarrow$ **LTI系统是因果系统的充要条件是 $h[n]$为因果序列**

- **LTI系统的系统函数是 $h[n]$的z变换**，即 $H(z) = \mathcal{Z}[h[n]]$

LTI因果系统 $\Leftrightarrow$ $H(z)$ 的收敛域ROC： $|z| > R_+$且包含∞。

例8.5-3 判断由下列系统函数描述的LTI系统是否是因果系统。

$$(1)\ H(z) = \frac{2z^3 + 3z + 3}{z^2 + 0.3z - 0.4}; \qquad (2)\ H(z) = \frac{z}{z-0.4} + \frac{3}{z+2},\ |z| > 2$$

$\Rightarrow$是因果系统；

解：

$$(1)\ \ H(z) = \frac{2z^3 + 3z + 3}{z^2 + 0.3z - 0.4} = \frac{2z^3 + 3z + 3}{(z-0.5)(z+0.8)} = 2z - 0.6 + \frac{3.98z + 2.76}{(z-0.5)(z+0.8)}$$

$h[n]$中包含$2\delta[n+1]$，故（1）是非因果系统；

8.5.4 系统函数与系统的稳定性

- **稳定系统**：当输入$x[n]$有界，即 $|x[n]| \le A_x < \infty$时，
  输出$y[n]$也有界，即 $|y[n]| \le A_y < \infty$。

$\Leftrightarrow$ **LTI系统**是稳定系统的充要条件**是 $h[n]$绝对可和**，即

$$\text{LTI稳定系统} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = S_h < \infty$$

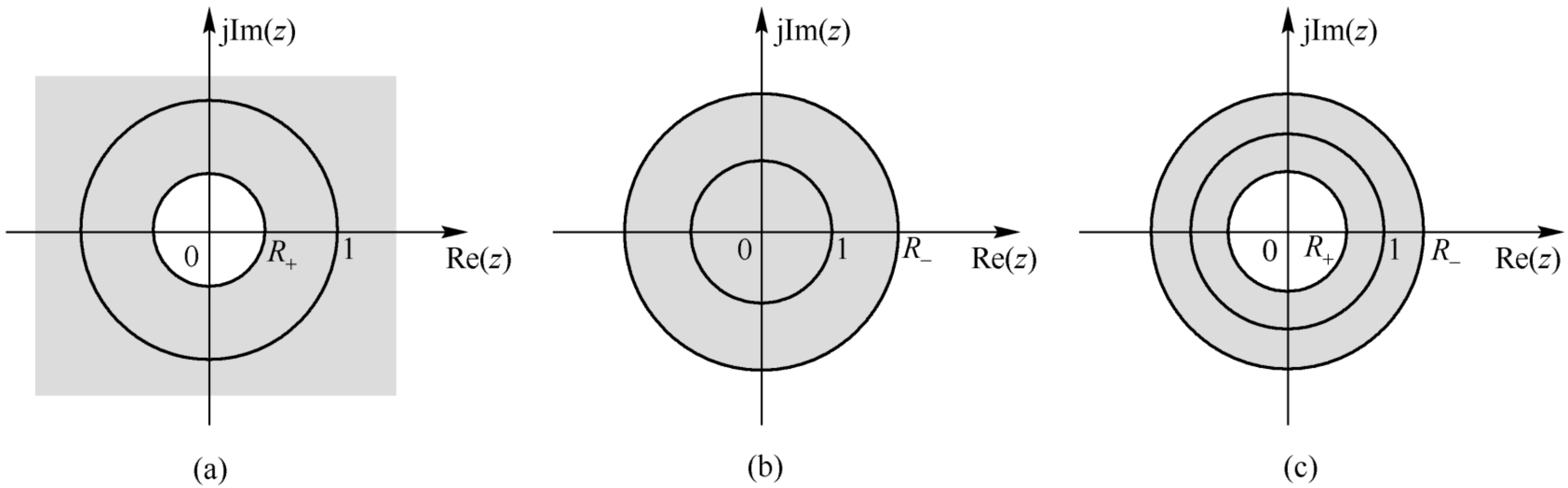
- **LTI系统的系统函数是 $h[n]$的z变换**，即

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] z^{-n}|$$

故而 $$|H(z)|_{|z|=1} \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

LTI稳定系统 $\Leftrightarrow$ $H(z)$ 的收敛域ROC包含单位圆。

8.5.4 系统函数与系统的稳定性



因果系统；稳定系统	非因果系统；稳定系统	非因果系统；稳定系统
h[*n*]是因果序列	*h*[*n*]是左边序列	*h*[*n*]是双边序列

LTI因果稳定系统 $\Leftrightarrow$ ***H*(z)** 的全部极点都在单位圆内部。

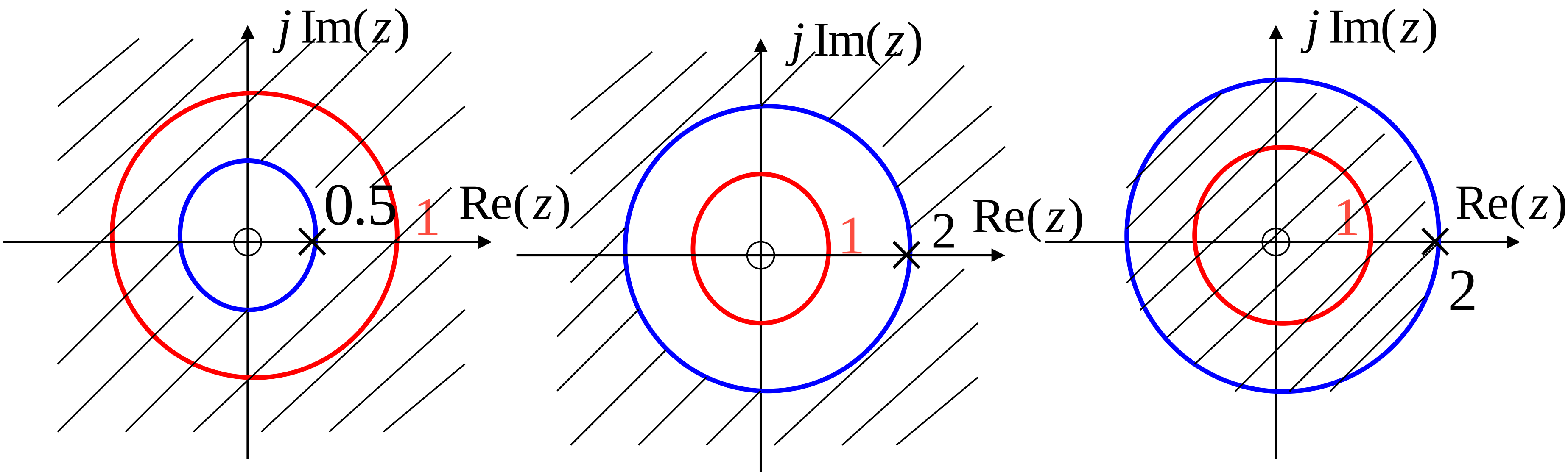
8.5.4 系统函数与系统的稳定性

例8.5-4 检验下列各系统的因果性与稳定性。

$$(1)\ H(z)=\frac{z}{z-0.5},\quad |z|>0.5; \qquad (2)\ H(z)=\frac{z}{z-2},\quad |z|>2$$

$$(3)\ H(z)=\frac{z}{z-2},\quad |z|<2; \qquad (4)\ H(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z-2)},\quad 0.5<|z|<2$$

解： (1) $h[n]=0.5^n u[n]$ (2) $h[n]=2^n u[n]$ (3) $h[n]=-2^n u[-n-1]$

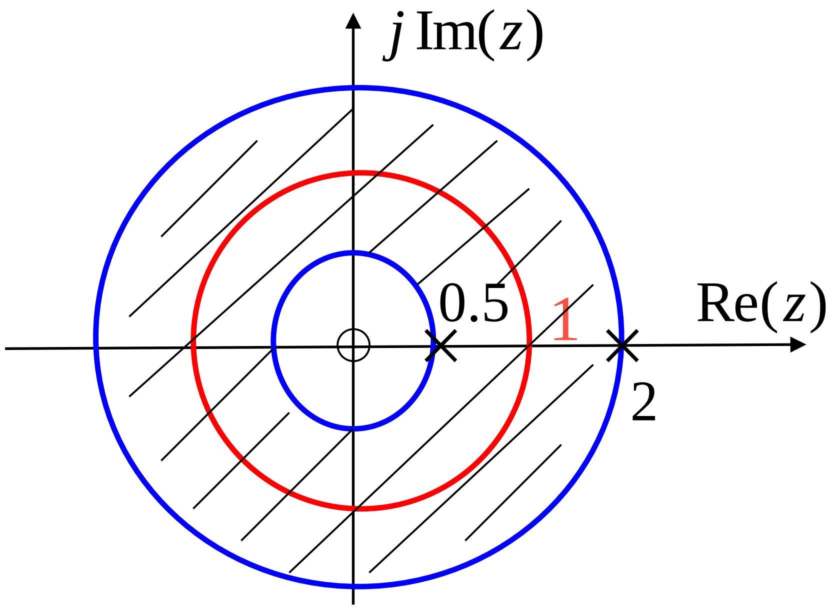


因果、稳定　　因果、非稳定　　非因果、稳定

8.5.4 系统函数与系统的稳定性

$$(4)\quad H(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z-2)}\qquad 0.5<|z|<2$$

$$h[n]=-\frac{2}{3}\left(0.5^n u[n]+2^n u[-n-1]\right)$$



非因果、稳定

8.6 系统函数零极点分布与系统频响特性

1 LTI离散系统的分析方法

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI离散系统}} \longrightarrow y[n]=y_{zs}[n]$$

若 $x[n]=\delta[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=h[n]$

若输入信号 $x[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y[n] = x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$

假设该离散系统稳定，则系统频响特性为：

$$H(e^{j\omega})=\text{DTFT}\,[h[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

频域：$X(e^{j\omega})=\text{DTFT}\,[x[n]] \xrightarrow{\text{稳定LTI离散系统}} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

系统函数为： $H(z)=\mathcal{Z}\big[h[n]\big]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$

8.6 系统函数零极点分布与系统频响特性

2 系统函数和频响特性的关系

假设离散系统稳定，则$H(z)$ 的收敛域ROC包含单位圆，从而系统频响特性为：

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{DTFT}\,[h[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

假设LTI离散系统的系统函数$H(z)$为（其中 $N \geq M$）：

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \cdot \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_{M-1} z + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}$$

或者 $H(z) = H_0 z^{N-M} \cdot \dfrac{\prod_{r=1}^{M}(z - z_r)}{\prod_{m=1}^{N}(z - p_m)}$ 则 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(N-M)} \cdot \dfrac{\prod_{r=1}^{M}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - z_r)}{\prod_{m=1}^{N}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - p_m)}$

8.6 系统函数零极点分布与系统频响特性

8.6.1 零极点矢量表示

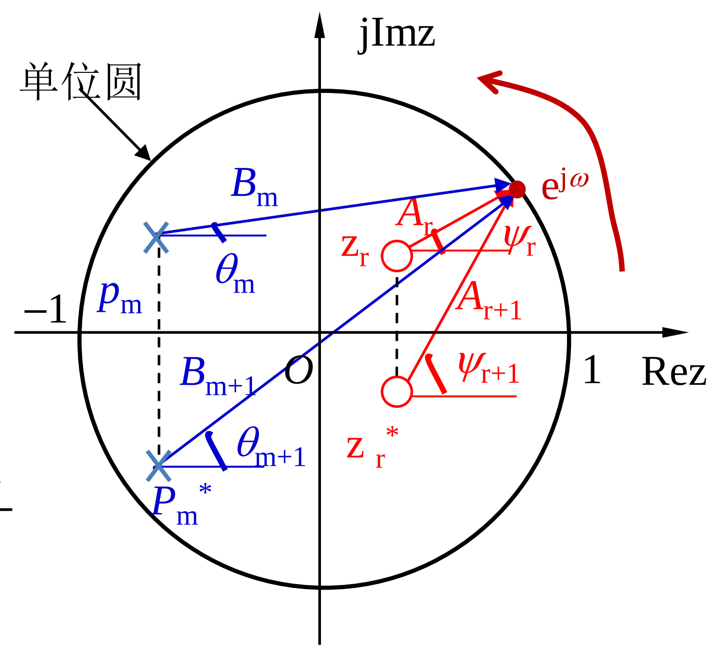
$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(N-M)}\cdot\frac{\prod_{r=1}^{M}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-z_r)}{\prod_{m=1}^{N}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-p_m)}=H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-p_m=B_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_m}$$

----极点矢量

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-z_r=A_r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_r}$$

----零点矢量

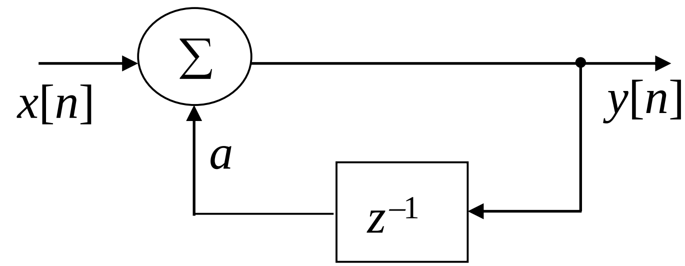


幅频特性 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=|H_0|\times\dfrac{A_1A_2\cdots A_M}{B_1B_2\cdots B_N}$

相频特性 $\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{m=1}^{N}\theta_m+\arg(H_0)$

8.6.2 频响特性矢量分析法

例8.6-1 已知LTI因果离散系统的结构框图如图8.6-2所示。分别求$0 < a < 1$和$-1 < a < 0$两种情况下的频率响应特性，并画出幅频特性与相频特性曲线。



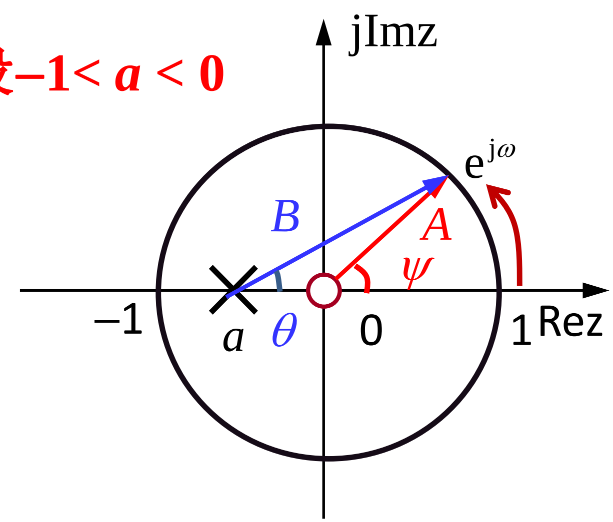
解：根据系统框图

(1) 求系统函数：列写差分方程

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]，\text{也即：}\quad y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

设$-1 < a < 0$



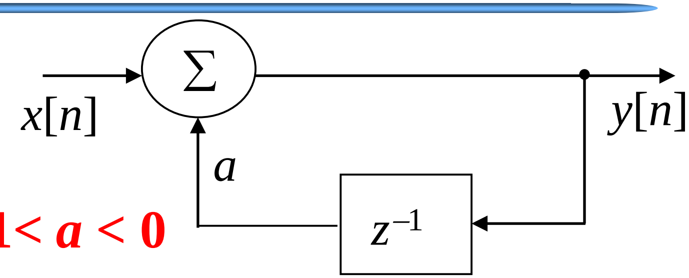
（2）求零点与极点，并画出零极点图；

（3）写出频响特性函数（矢量表示）：

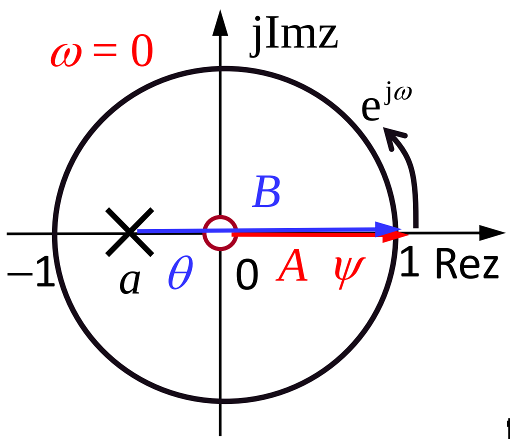
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a} = \frac{Ae^{j\psi}}{Be^{j\theta}}$$

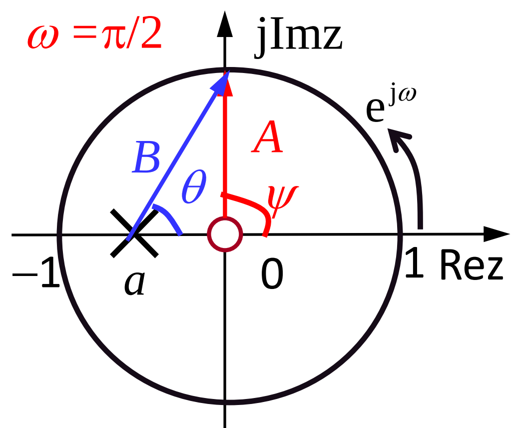
8.6.2 频响特性矢量分析法

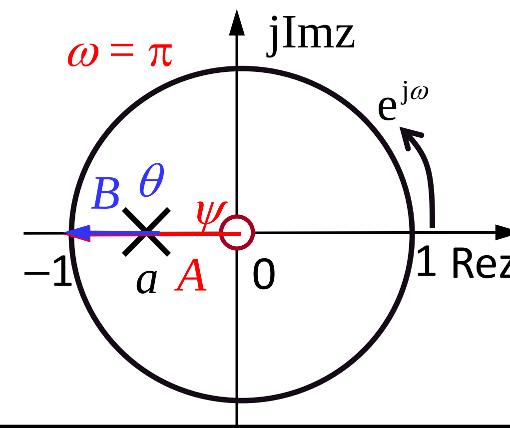
$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}=\frac{Ae^{j\psi}}{Be^{j\theta}}$$

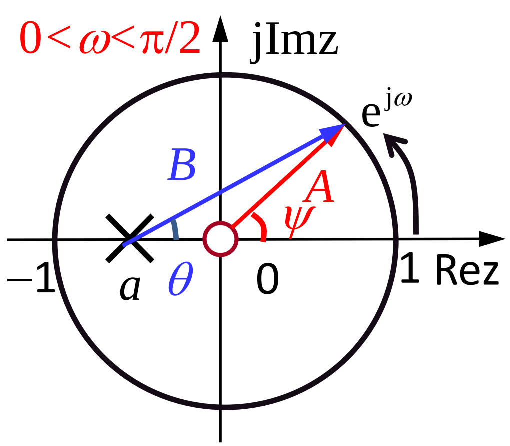


（4）分析零点、极点矢量变化：设$-1< a < 0$







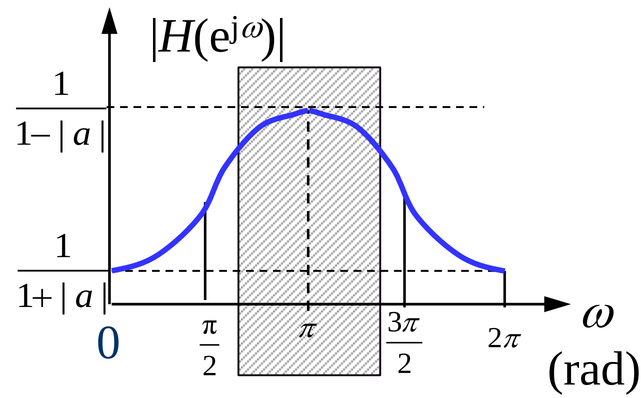


	B	θ	A	ψ	A/B	$\psi-\theta$
$\omega=0$	$1+\lvert a\rvert$	0°	1	0°	$1/(1+\lvert a\rvert)$	0°
$0<\omega<\pi/2$	$\downarrow$	$\uparrow$	1	$\uparrow$	$\uparrow$	>0
$\omega=\pi/2$	$\sqrt{1+a^2}$	$\tan^{-1}1/\lvert a\rvert$	1	90°	$1/\sqrt{1+a^2}$	$90^\circ-\tan^{-1}\frac{1}{\lvert a\rvert}$
$\omega=\pi$	$1-\lvert a\rvert$	180°	1	180°	$1/(1-\lvert a\rvert)$	0°

8.6.2 频响特性矢量分析法

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a} = \frac{Ae^{j\psi}}{Be^{j\theta}}$$

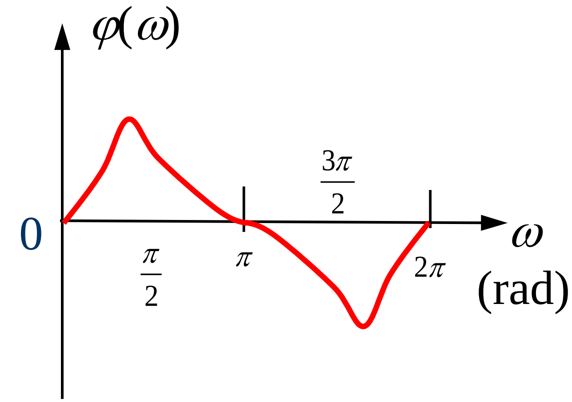
	B	θ	A	ψ	A/B	$\psi-\theta$
$\omega=0$	$1+\|a\|$	0°	1	0°	$1/(1+\|a\|)$	0°
$0<\omega<\pi/2$	$\downarrow$	$\uparrow$	1	$\uparrow$	$\uparrow$	>0
$\omega=\pi/2$	$\sqrt{1+a^2}$	$\tan^{-1}1/\|a\|$	1	90°	$1/\sqrt{1+a^2}$	$90^\circ-\tan^{-1}\frac{1}{\|a\|}$
$\omega=\pi$	$1-\|a\|$	180°	1	180°	$1/(1-\|a\|)$	0°



数字高频率范围

（5）绘制幅频和相频曲线：$-1<a<0$

（6）图形解释与说明：

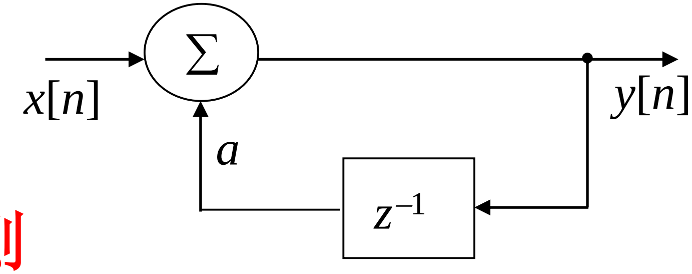


- ✦ 高通滤波器（幅频）；
- ✦ 相频特性：关于$\omega=\pi$反对称；
- ✦ 通带参数：3dB截止频率：$\omega_c=?$

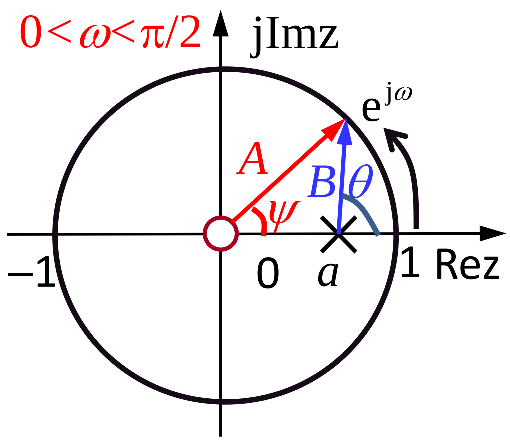
✦ 其他分析：如时域特性
——冲激响应，阶跃响应等

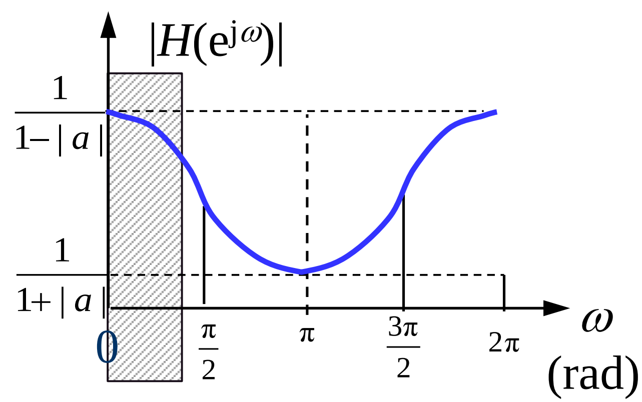
8.6.2 频响特性矢量分析法

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a} = \frac{Ae^{j\psi}}{Be^{j\theta}}$$

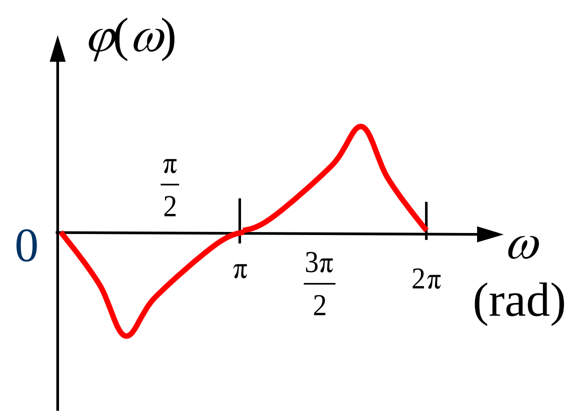


B. 当0< a < 1时，可作类似分析，则



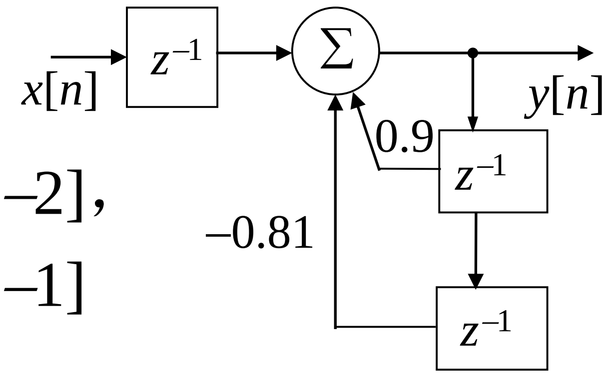


- 低通滤波器（幅频）；
- 相频特性：
  关于ω = π 反对称；



8.6.2 频响特性矢量分析法

例8.6-2 分析图8.6-4所示二阶离散系统的幅频特性。



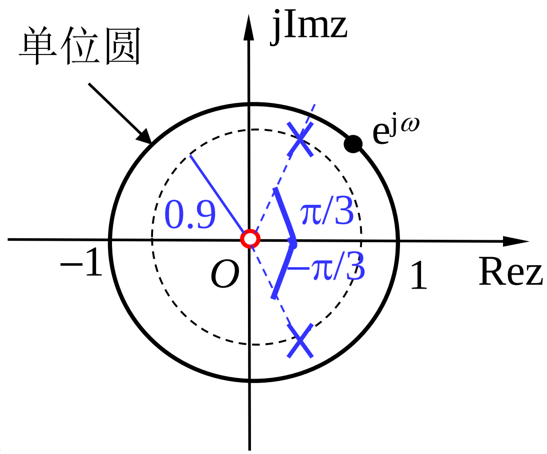
解：(1) 求系统函数： 列写差分方程

$$y[n] = x[n-1] + 0.9y[n-1] - 0.81y[n-2],$$

即： $$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.81y[n-2] = x[n-1]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

$$= \frac{z}{z^2-0.9z+0.81} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

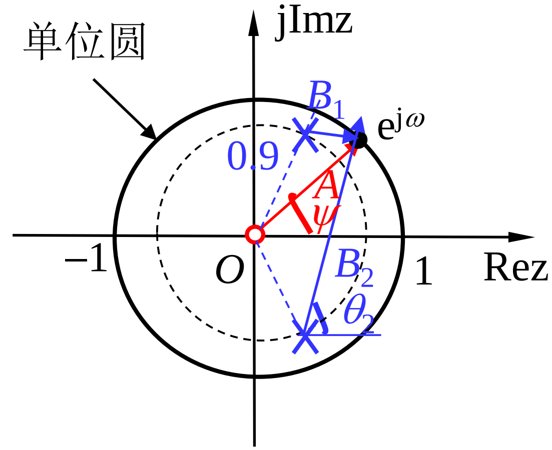


（2）求零点与极点，并画出零极点图：

$$p_{1,2} = \frac{0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 4\times 0.81}}{2} = 0.9\times\frac{1\pm j\sqrt{3}}{2} = 0.9e^{\pm j\pi/3}$$

8.6.2 频响特性矢量分析法

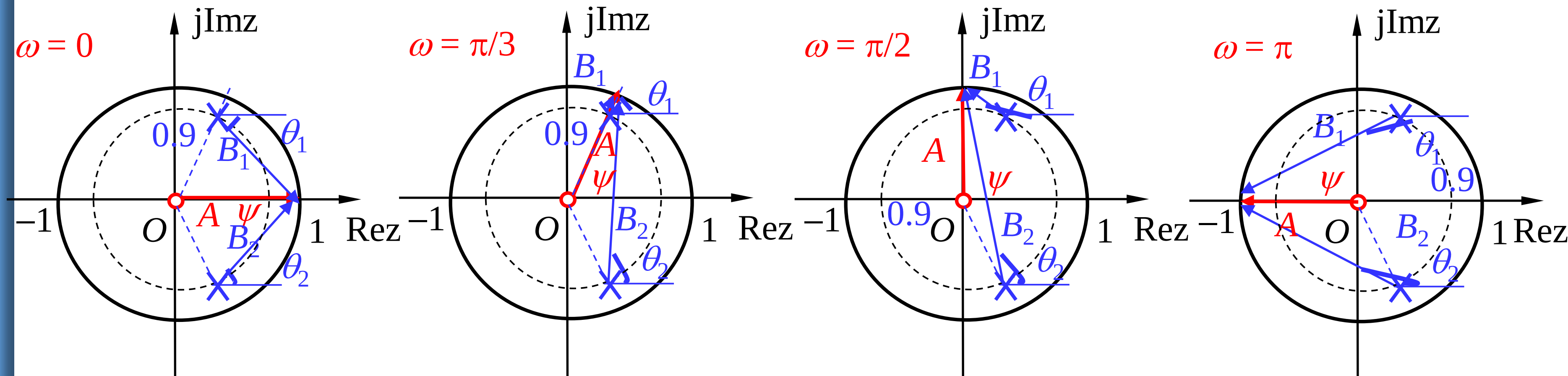
$$H(z)=\frac{z}{z^2-0.9z+0.81}=\frac{z}{(z-0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3})(z-0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3})}$$



（3）写出频响特性函数（矢量表示）：

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}{B_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}B_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}$$

（4）分析零点、极点矢量变化：



$B_1=B_2=0.954,$ $\theta_1+\theta_2=0;$ $A=1,\psi=0$

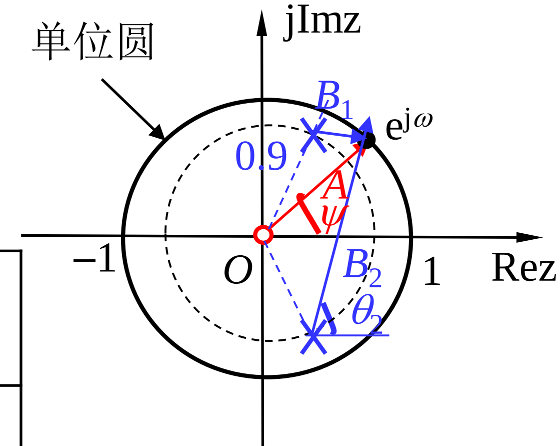
$B_1=0.1,\ B_2=1.65$ $\theta_1+\theta_2=147^\mathrm{o};$ $A=1,\psi=60^\mathrm{o}$

$B_1=0.584,\ B_2=1.86$ $\theta_1+\theta_2=258^\mathrm{o};$ $A=1,\psi=90^\mathrm{o}$

$B_1=B_2=1.646$ $\theta_1+\theta_2=180^\mathrm{o};$ $A=1,\psi=180^\mathrm{o}$

8.6.2 频响特性矢量分析法

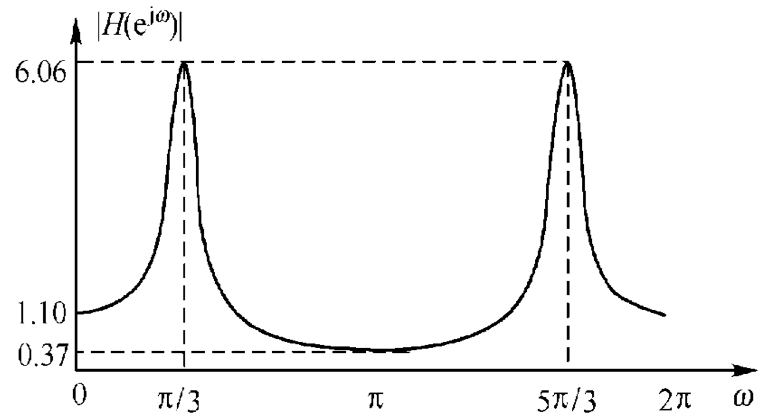
$$H(z)=\frac{z}{z^2-0.9z+0.81}=\frac{z}{(z-0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3})(z-0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3})}$$



（4）分析零点、极点矢量变化：

	B_1	B_2	$\theta_1+\theta_2$	ψ	$1/B_1B_2$	$\psi-(\theta_1+\theta_2)$
$\omega=0$	0.954	0.954	0	0	1.10	0
$\omega=\pi/3$	0.1	1.65	147°	60°	6.06	–87°
$\omega=\pi/2$	0.584	1.860	258°	90°	0.925	–168°
$\omega=\pi$	1.646	1.646	0	180°	0.37	180°

（5）绘制频响曲线：

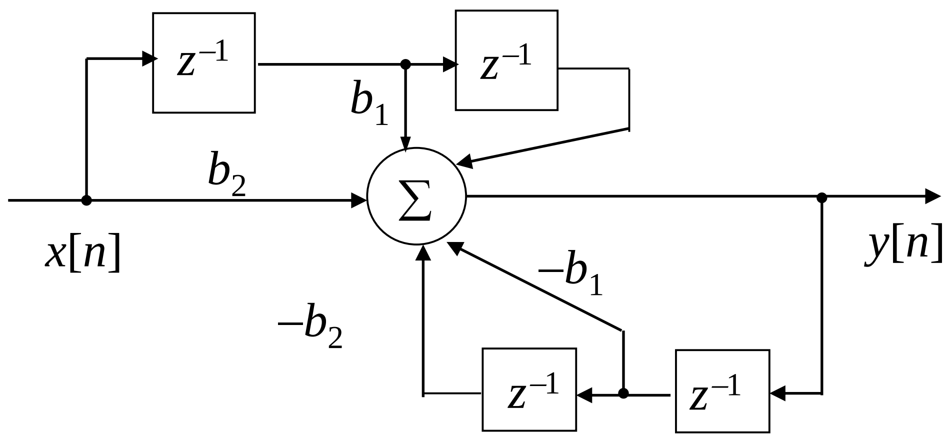


(b)

（6）图形解释与说明：

- 带通滤波器（幅频）；
- 谐振滤波器：
  谐振频率 $\omega_c=\pi/3$

例8.6-3证明图8.6-6(a)所示二阶离散系统为全通系统。其中b_1, b_2为实数，且满足$b_1^2-4b_2<0$。。



解： **(1) 求系统函数**：列写差分方程

$$y[n] = b_2x[n] + b_1x[n-1] + x[n-2] - b_1y[n-1] - b_2y[n-2]$$

即： $$y[n] + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] = b_2x[n] + b_1x[n-1] + x[n-2]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_2 + b_1z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{b_2z^2 + b_1z + 1}{z^2 + b_1z + b_2} = \frac{b_2z + b_1 + z^{-1}}{z + b_1 + b_2z^{-1}}$$

8.6.2 频响特性矢量分析法

$$H(z)=\frac{b_2z^2+b_1z+1}{z^2+b_1z+b_2}=\frac{b_2z+b_1+z^{-1}}{z+b_1+b_2z^{-1}}$$

（2）求极点，判断系统稳定性条件：

$$p_{1,2}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^{\,2}-4b_2}}{2}$$

$$\xrightarrow{b_1^{\,2}-4b_2<0}\text{复数极点，记 } p_{1,2}=r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\theta}=\sqrt{|b_2|}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\theta}$$

系统存在频响特性，要求系统稳定，则

(1) 当$r<1$，即$|b_2|<1$时，系统是因果系统，而且稳定

(2) 当$r>1$，即$|b_2|>1$时，系统非因果但稳定。

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\frac{b_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+b_1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+b_1+b_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

$$=\frac{b_2(\cos\omega+\mathrm{j}\sin\omega)+b_1+(\cos\omega-\mathrm{j}\sin\omega)}{(\cos\omega+\mathrm{j}\sin\omega)+b_1+b_2(\cos\omega-\mathrm{j}\sin\omega)}=\frac{(b_2+1)\cos\omega+b_1+\mathrm{j}(b_2-1)\sin\omega}{(b_2+1)\cos\omega+b_1-\mathrm{j}(b_2-1)\sin\omega}$$

$$\Rightarrow|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=1$$ 即系统是全通系统。

8.6.2 频响特性矢量分析法

（3）分析全通离散系统的系统函数特点：

$$H(z)=\frac{b_2z^2+b_1z+1}{z^2+b_1z+b_2}=\frac{b_2z+b_1+z^{-1}}{z+b_1+b_2z^{-1}}$$

A. 分子多项式各项系数正好与分母多项式各项系数顺序相反；

$$(b_1^2-4b_2<0)$$

极点：$p_{1,2}=\dfrac{-b_1\pm j\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2}\quad\Rightarrow|p_i|^2=b_2$

零点：$z_{1,2}=\dfrac{-b_1\pm j\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2b_2}\quad\Rightarrow|z_i|^2=\dfrac{1}{b_2}$

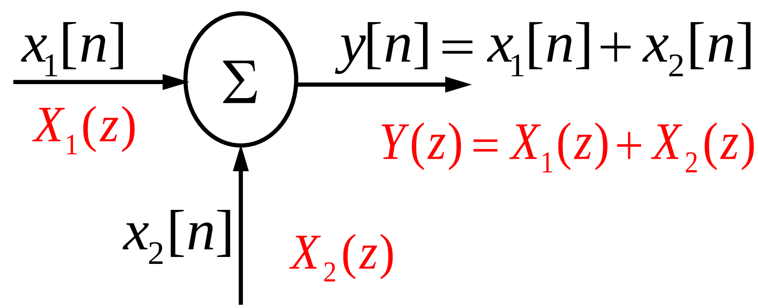
B. 零点正好是极点的共轭倒数：

8.7 LTI离散系统的系统框图及信号流图

- 可以用延时器、加法器和数乘器连接成为的系统框图表示离散系统运算的差分方程；
- LTI离散时间系统通常可以利用软件，即编写程序在通用的计算机或微处理机上实现离散系统，也可以用专用的数字信号处理芯片进行实现；
- 用系统框图表示离散系统的优点有很多，其中突出的有：

便于选择系统结构或者系统算法，分析系统所需的存储器大小和运算量的多少。

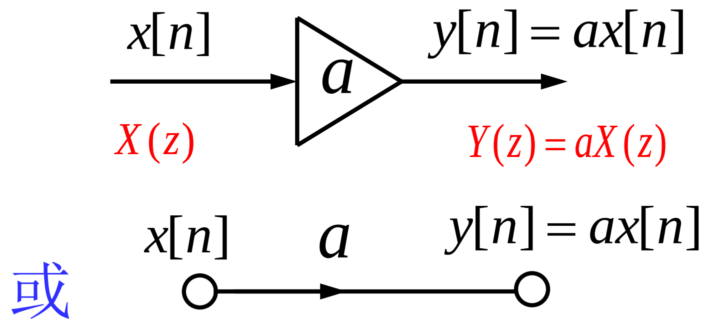
8.7.1 系统框图



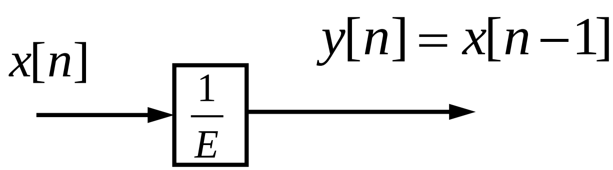
（a） 加法器

8.7.1 系统框图

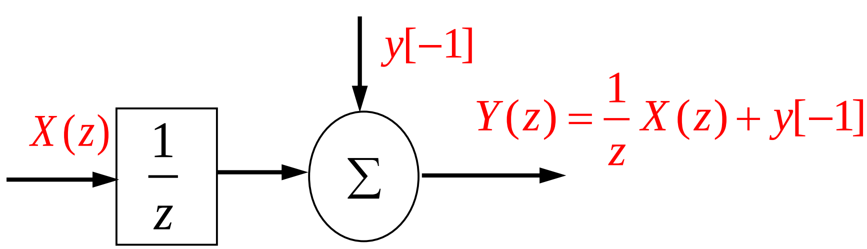
信号流图： 用点（表示信号或者加法）与带有箭头的线（表示传输方向）表示各种运算如下，数乘系数（实常数增益），**1/z**（延时器复数增益），或***H*(z)**。



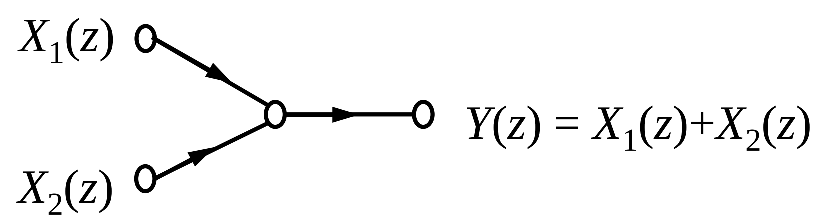
（b） 数乘器



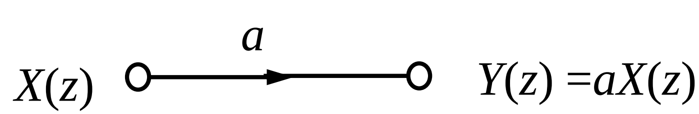
(c) 延时器（时域表示）



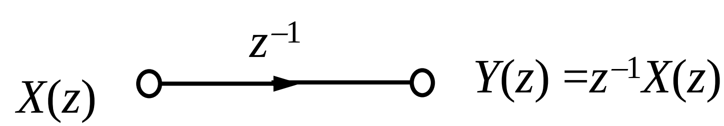
延时器（z域表示）



加法器



数乘器



单位延时器

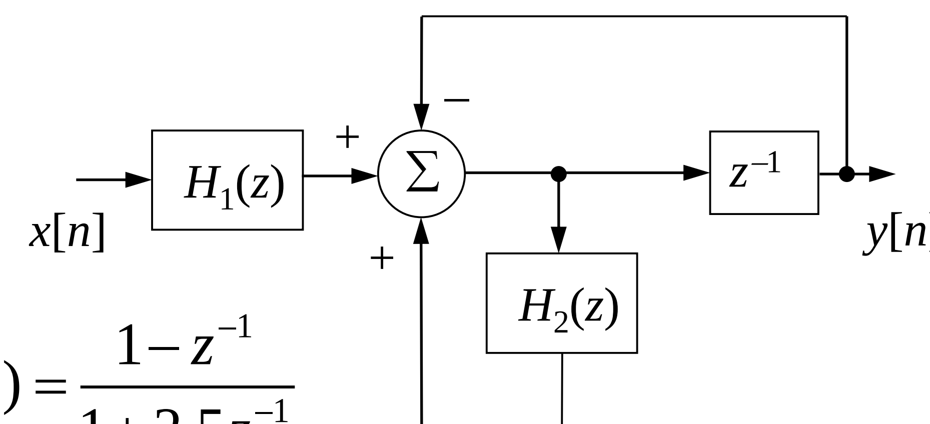
8.7.2 模拟离散系统的信号流图

如： $X(z) \xrightarrow{H(z)} Y(z)$

系统输入输出关系： $Y(z)=H(z)X(z)$ $\Rightarrow$ 系统函数： $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

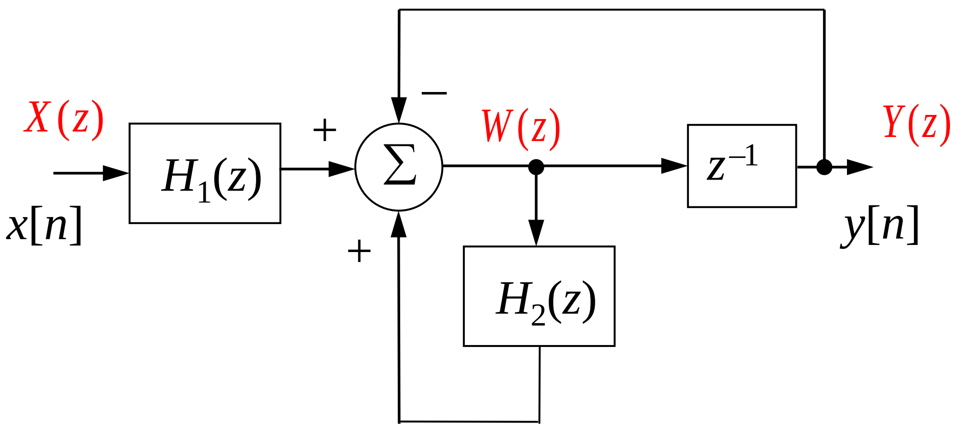
离散时间系统信号流图的性质、计算与化简规则和连续时间系统相同：即信号只能沿着支路箭头方向传输；在z域中，延时器类似于乘法器运算，而且支路增益可以是任意的系统函数。

例10：计算如图所示系统框图所示系统的系统函数，其中：



$$H_1(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}} \qquad H_2(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+2.5z^{-1}}$$

8.7.2 模拟离散系统的信号流图



$$H_1(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$H_2(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+2.5z^{-1}}$$

解：

$$W(z)=X(z)H_1(z)+W(z)H_2(z)-Y(z)$$

$$Y(z)=z^{-1}W(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{z+1-zH_2(z)}$$

离散时间系统一般也有三种结构形式：

分别是**直接形式、级联形式和并联形式**。

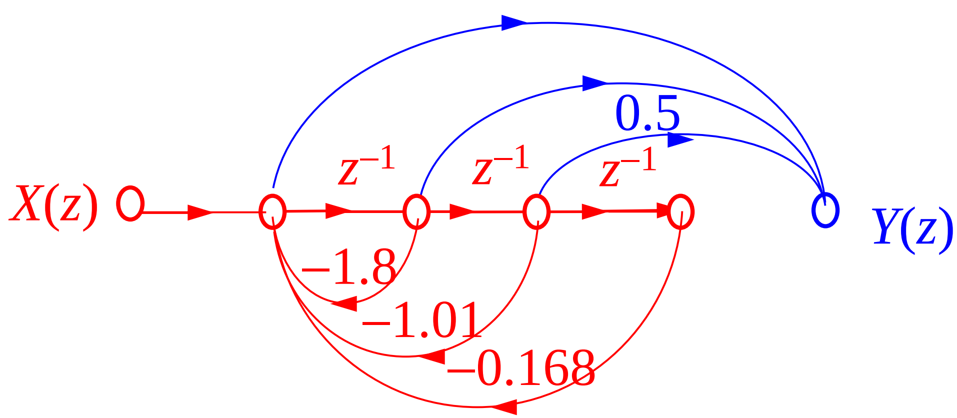
8.7.2 模拟离散系统的信号流图

例11: 分别用直接型、级联型和并联型信号流图模拟系统，已知系统函数为

$$H(z)=\frac{z(z^2+z+0.5)}{(z+0.8)(z^2+z+0.21)}$$

解: （1）直接型

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}{1+1.8z^{-1}+1.01z^{-2}+0.168z^{-3}}$$

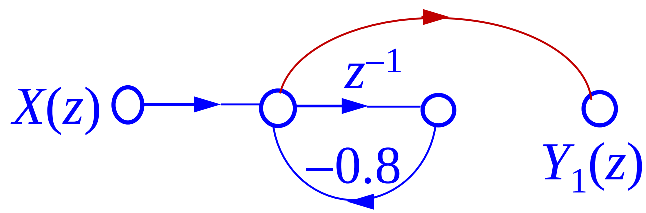


8.7.2 模拟离散系统的信号流图

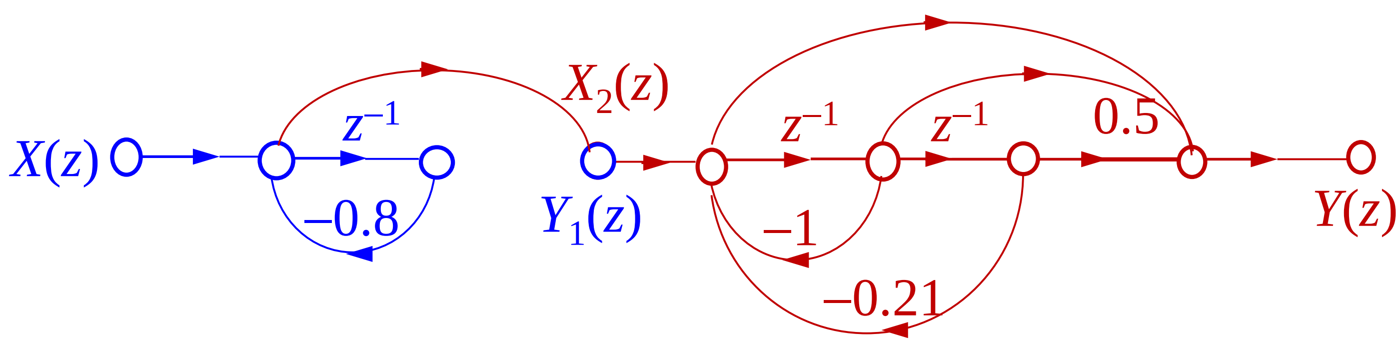
（2）级联型

$$H(z)=\frac{z(z^2+z+0.5)}{(z+0.8)(z^2+z+0.21)}=\frac{z}{z+0.8}\cdot\frac{z^2+z+0.5}{z^2+z+0.21}$$

令 $H_1(z)=\dfrac{z}{z+0.8}=\dfrac{1}{1+0.8z^{-1}}$

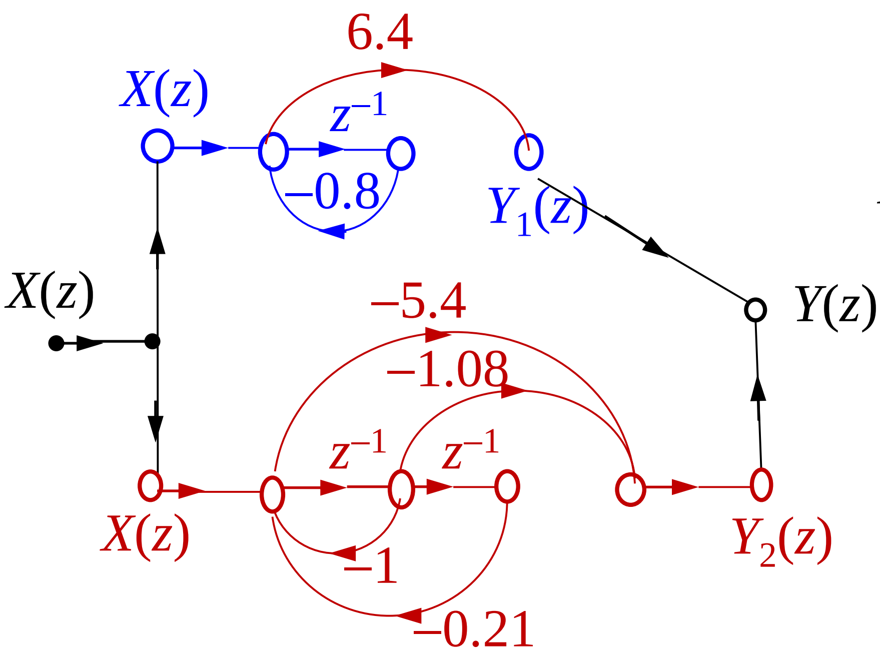


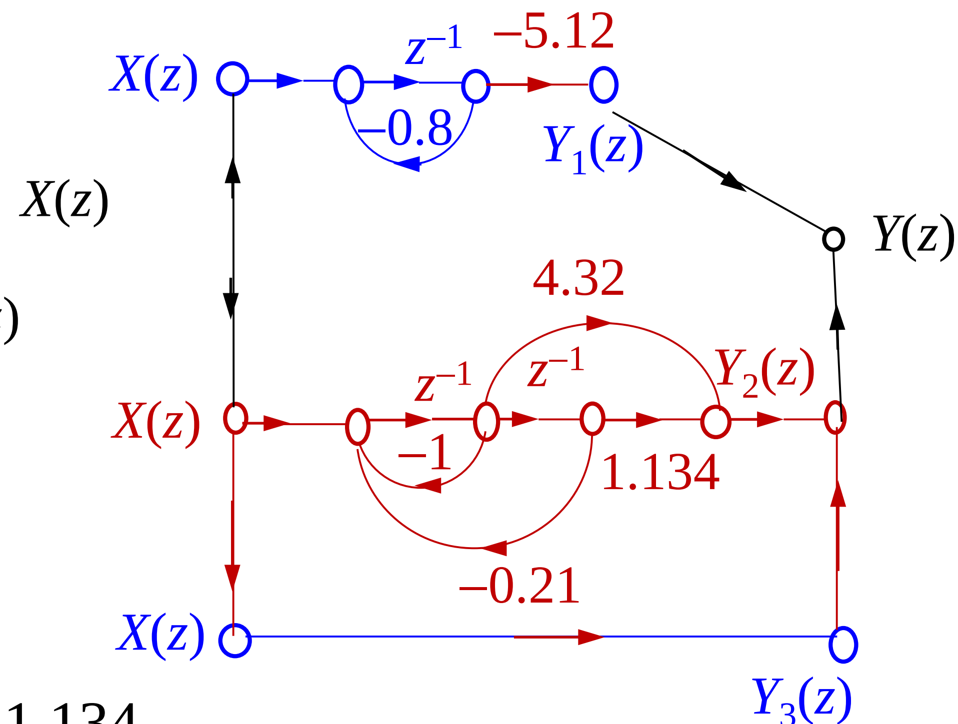
$$H_2(z)=\frac{z^2+z+0.5}{z^2+z+0.21}=\frac{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}{1+z^{-1}+0.21z^{-2}}$$



（3）并联型 $H(z)=\dfrac{z(z^2+z+0.5)}{(z+0.8)(z^2+z+0.21)}=\dfrac{6.4z}{z+0.8}+\dfrac{-5.4z^2-1.08z}{z^2+z+0.21}$

令 $H_1(z)=\dfrac{6.4}{1+0.8z^{-1}}$ $H_2(z)=\dfrac{-5.4-1.08z^{-1}}{1+z^{-1}+0.21z^{-2}}$

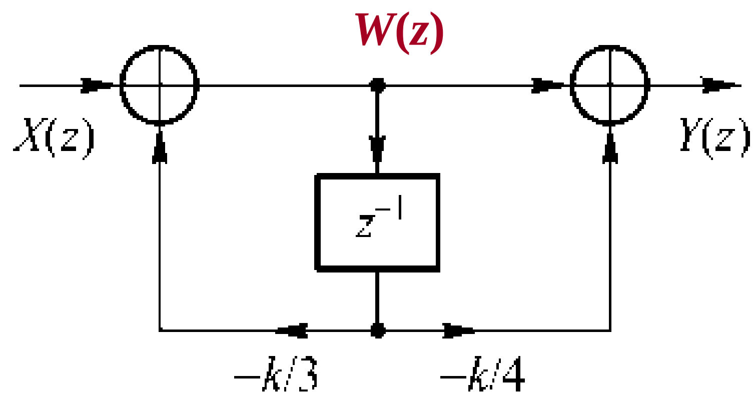




或者 $H(z)=1+\dfrac{-5.12}{z+0.8}+\dfrac{4.32z+1.134}{z^2+z+0.21}$

8.7.2 模拟离散系统的信号流图

例8.7-2 某因果数字滤波器的系统框图如图所示。
（1）确定其系统函数；（2）若滤波器稳定，确定k的取值；
（3）如果$k=1$，画出滤波器的零、极点分布图和幅频特性曲线；
（4）如果$k=1$，$x[n]=(2/3)^n$，求$y[n]$。



解：（1）设$W(z)$如图，则

$$W(z)=X(z)-\frac{k}{3}z^{-1}W(z)$$

$$Y(z)=W(z)+(-\frac{k}{4})z^{-1}W(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+(-k/4)z^{-1}}{1+(k/3)z^{-1}}=\frac{z-k/4}{z+k/3}$$

（2）由于数字滤波器是因果的，从而收敛域为 $|z|>|k/3|$

根据LTI离散系统稳定的条件 $|k|<3$

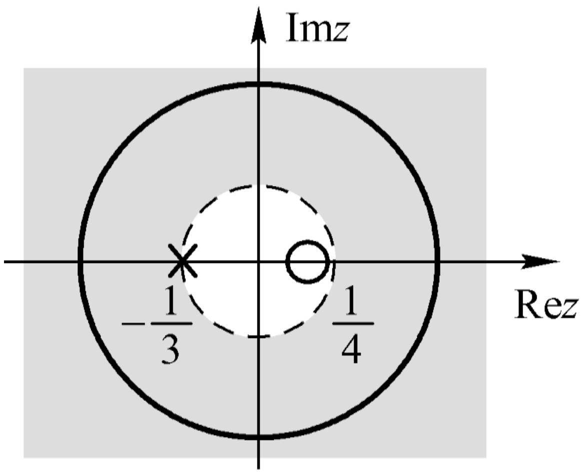
8.7.2 模拟离散系统的信号流图

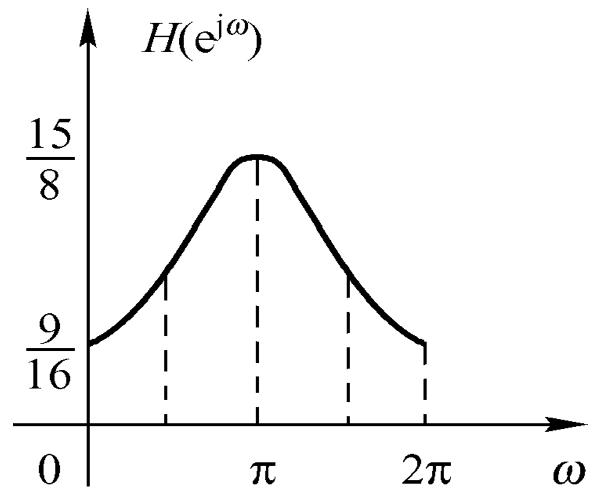
$$H(z)=\frac{z-k/4}{z+k/3}$$

（3）当$k=1$时，系统函数为

$$H(z)=\frac{z-1/4}{z+1/3}$$

其零极点图和幅频特性 如图所示：





（4）当$k=1$时，

$$y[n]=H(z)|_{z=2/3}\cdot x[n]=\frac{5}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

8.8 离散信号与系统z域分析的MATLAB实现

在7.6节，介绍了两个：专用函数filter 和专用函数conv；

在本节，介绍以下专用函数：

转换函数 tf2zp，zp2tf：实现不同信号流图结构的转换；

绘制零极点分布图的函数 zplane；

计算系统单位样值响应的函数 impz。

例8.8-1 绘制系统的零极点分布图，并绘出系统的单位样值响应$h[n]$的时域波形。已知离散时间系统的系统函数的零极点分别为

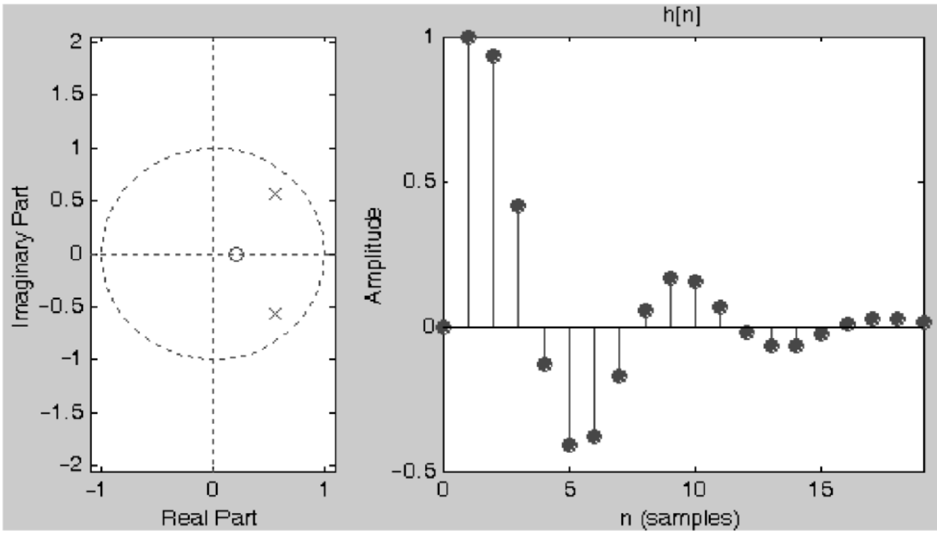
$$z = 0.2;\quad p_1 = 0.8\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}};\quad p_2 = 0.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

解： 绘制零极点分布图

```
z=0.2;p=[0.8*exp(pi*i/4);0.8*exp(-pi*i/4)];
k=1;subplot(121);zplane(z,p);
[b, a]=zp2tf(z,p,k);subplot(122);impz(b,a,20);title('h[n]');
```

8.8 离散信号与系统z域分析的MATLAB实现

```
z=0.2;p=[0.8*exp(pi*i/4);0.8*exp(-pi*i/4)];
k=1;subplot(121);zplane(z,p);
[b, a]=zp2tf(z,p,k);subplot(122);impz(b,a,20);title('h[n]');
```



例8.8-2 求下列序列的z变换或z逆变换。

(1) $x_1[n]=(1/3)^n u[n]$;　　(2) $x_2[n]=\cos\dfrac{n\pi}{2}$;

(3) $X_3(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$;　　(4) $X_4(z)=\dfrac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)}$

解： 用符号表达式并通过调用ztrans和iztrans函数来计算上述结果

```
syms n z;x1 = (1/3).^n;x2 = cos(n*pi/2);
z1 = ztrans(x1)
z2 = ztrans(x2)
z3 = z/((z+1)*(z-2));z4 = (z.^2)/((z-0.5)*(z-0.25));
x3 = iztrans(z3)
x4 = iztrans(z4)
```

例8.8-3 线性时不变系统的结构如图8.8-2所示，求系统的零状态响应$y[n]$并绘制系统的零极点分布图和频响特性，以及零状态响应$y[n]$的图形，其中已知：

$$h_1[n]=(0.5)^n u[n];\quad h_2[n]=(0.8)^n u[n];$$

和 $x[n]=u[n]-u[n-1]$

解： 系统的单位样值序列$h[n]$等于$h_1[n]$和$h_2[n]$的卷积，系统的零状态响应$y[n]$等于$h[n]$和$x[n]$的卷积。

8.8 离散信号与系统z域分析的MATLAB实现

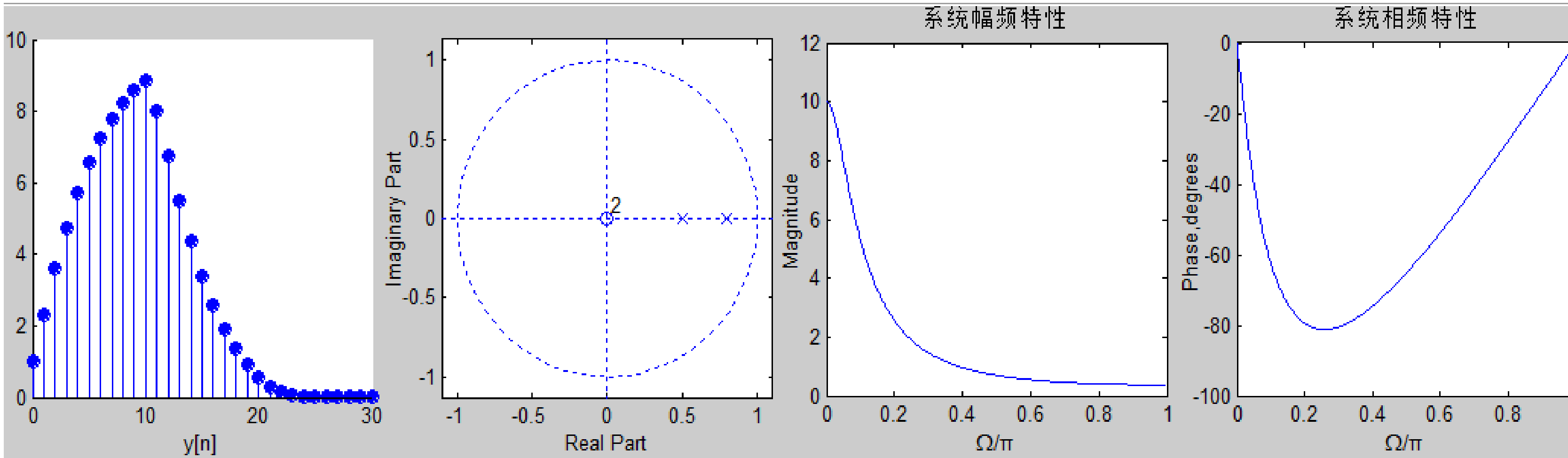
由于$h_1[n]$和$h_2[n]$是无限长右边序列，而MATLAB的卷积函数只能计算有限长序列的卷积，故仅取$h_1[n]$和$h_2[n]$在0～10区间的值，这样会造成一部分误差。系统函数$H(z)$的计算如下：

$$H_1(z)=\frac{z}{z-0.5};\quad H_2(z)=\frac{z}{z-0.8}$$

故 $$H(z)=H_1(z)H_2(z)=\frac{z^2}{z^2-1.3z+0.4}$$

```
n1=0:10;h1=(0.5).^n1;h2=(0.8).^n1;h=conv(h1,h2);x=ones(1,11);y=conv(h,x);
n2=length(y);n3=0:n2-1;subplot(221);stem(n3,y,'filled');xlabel('y[n]');
b=[1 0 0];a=[1 -1.3 0.4];subplot(222);zplane(a,b);
[H w]=freqz(b,a);Hm=abs(H);Hp=angle(H)*180/pi;
subplot(223);plot(w/pi,Hm);title('系统幅频特性');
xlabel('\Omega/π');ylabel('Magnitude');
subplot(224);plot(w/pi,Hp);title('系统相频特性');
xlabel('\Omega/π');ylabel('Phase,degrees');
```

8.8 离散信号与系统z域分析的MATLAB实现



本章小结

1. 离散序列的z变换：

2. z逆变换计算的部分分式展开法（一阶极点）

3. z变换的性质—— 应用较多的性质：

4. LTI离散系统的z变换分析方法——系统函数：

5. 数字滤波器的结构