第9章 系统的状态变量分析法

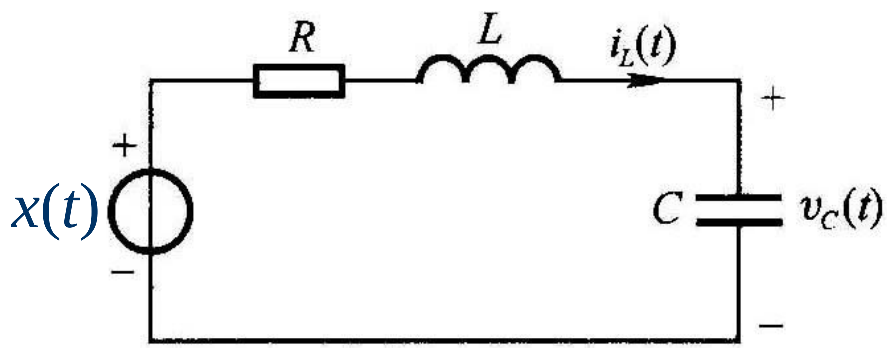
9.1 系统的状态变量和状态方程

1、经典的线性系统理论

- 系统函数
- 系统外部特性
- 单输入单输出系统

2、状态变量分析

- 状态变量
- 系统内部特性
- 多输入多输出系统



$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=x(t)$$

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)-Ri_L(t)-v_C(t) \\ C\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=i_L(t) \end{cases}$$

9.1 系统的状态变量和状态方程

经典分析法中（输出输入分析法）

不关心系统内部变量的变化情况，只对输出变量$y(t)$感兴趣，这种方法称为端口方法或输入输出分析法。

状态变量分析法中

只要知道 $t=t_0$ 时的一组数据和 $t\geq t_0$ 时的系统输入，就能完全确定系统在 $t\geq t_0$ 的任何时间的行为。

这一组数据就称为系统在 $t=t_0$ 的**状态**（数据个数要最少）。

9.1 系统的状态变量和状态方程

- 表示系统状态随时间*t*变化的变量称为**状态变量。**

  n **阶系统有*n*个状态量**

- 描述系统状态变量的一阶导数与状态变量和激励信号关系的方程称为**状态方程**。

  状态方程是*n* 个一阶微分方程组。

- 描述系统输出与状态变量和激励之间关系的方程称为**输出方程。**

  输出方程是代数方程组。

用状态变量法分析系统的优点：

1）便于研究系统内部物理量的变化

2）适合于多输入多输出系统

3）也适用于非线性系统或时变系统

4）便于分析系统的稳定性

5）便于采用数字解法，为计算机分析系统提供了有效途径

（1） 连续系统状态方程和输出方程的一般形式

设系统有k个状态变量：$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t)$

m个输入信号：$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$

r 个输出信号：$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_r(t)$

则状态方程和输出方程分别为：

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda}_1(t) = a_{11}\lambda_1(t) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(t) + b_{11}x_1(t) + \cdots + b_{1m}x_m(t) \\
\dot{\lambda}_2(t) = a_{21}\lambda_1(t) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(t) + b_{21}x_1(t) + \cdots + b_{2m}x_m(t) \\
\qquad \cdots \\
\dot{\lambda}_k(t) = a_{k1}\lambda_1(t) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(t) + b_{k1}x_1(t) + \cdots + b_{km}x_m(t)
\end{cases}
$$

其中 $\dot{\lambda}(t)$ 为状态变量$\lambda(t)$ 的一阶导数。

$$\begin{cases} y_1(t)=c_{11}\lambda_1(t)+\cdots+c_{1k}\lambda_k(t)+d_{11}x_1(t)+\cdots+d_{1m}x_m(t) \\ y_2(t)=c_{21}\lambda_1(t)+\cdots+c_{2k}\lambda_k(t)+d_{21}x_1(t)+\cdots+d_{2m}x_m(t) \\ \quad\cdots \\ y_r(t)=c_{r1}\lambda_1(t)+\cdots+c_{rk}\lambda_k(t)+d_{r1}x_1(t)+\cdots+d_{rm}x_m(t) \end{cases}$$

上述状态方程和输出方程可以写成矩阵形式：

状态方程：$[\dot{\lambda}(t)]_{k\times1}=[A]_{k\times k}[\lambda(t)]_{k\times1}+[B]_{k\times m}[x(t)]_{m\times1}$

输出方程：$[y(t)]_{r\times1}=[C]_{r\times k}[\lambda(t)]_{k\times1}+[D]_{r\times m}[x(t)]_{m\times1}$

其中：

$$[\dot{\lambda}(t)]=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\\ \cdots\\ \dot{\lambda}_k(t)\end{bmatrix}\quad [\lambda(t)]=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \cdots\\ \lambda_k(t)\end{bmatrix}\quad [x(t)]=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \cdots\\ x_m(t)\end{bmatrix}\quad [y(t)]=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \cdots\\ y_r(t)\end{bmatrix}$$

9.1 系统的状态变量和状态方程

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2k} \\ \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2m} \\ \cdots & \\ b_{k1} & b_{k2}\cdots b_{km} \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1k} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2k} \\ \cdots & \\ c_{r1} & c_{r2}\cdots c_{rk} \end{bmatrix}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

（2）离散系统状态方程和输出方程的一般形式

设系统有k个状态变量：　$\lambda_1[n],\ \lambda_2[n],\ \cdots,\lambda_k[n]$

m个输入信号：　$x_1[n],\ x_2[n],\ \cdots,x_m[n]$

r 个输出信号：　$y_1[n],\ y_2[n],\ \cdots,y_r[n]$

则状态方程和输出方程分别为：

$$\begin{cases} \lambda_1[n+1]=a_{11}\lambda_1[n]+\cdots+a_{1k}\lambda_k[n]+b_{11}x_1[n]+\cdots+b_{1m}x_m[n] \\ \lambda_2[n+1]=a_{21}\lambda_1[n]+\cdots+a_{2k}\lambda_k[n]+b_{21}x_1[n]+\cdots+b_{2m}x_m[n] \\ \qquad\cdots \\ \lambda_k[n+1]=a_{k1}\lambda_1[n]+\cdots+a_{kk}\lambda_k[n]+b_{k1}x_1[n]+\cdots+b_{km}x_m[n] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1[n]=c_{11}\lambda_1[n]+\cdots+c_{1k}\lambda_k[n]+d_{11}x_1[n]+\cdots+d_{1m}x_m[n] \\ y_2[n]=c_{21}\lambda_1[n]+\cdots+c_{2k}\lambda_k[n]+d_{21}x_1[n]+\cdots+d_{2m}x_m[n] \\ \qquad\cdots \\ y_r[n]=c_{r1}\lambda_1[n]+\cdots+c_{rk}\lambda_k[n]+d_{r1}x_1[n]+\cdots+d_{rm}x_m[n] \end{cases}$$

(2) 离散系统状态方程和输出方程的一般形式

上述状态方程和输出方程可以写成矩阵形式：

状态方程： $$[\lambda[n+1]]_{k\times 1}=[A]_{k\times k}[\lambda[n]]_{k\times 1}+[B]_{k\times m}[x[n]]_{m\times 1}$$

输出方程： $$[y[n]]_{r\times 1}=[C]_{r\times k}[\lambda[n]]_{k\times 1}+[D]_{r\times m}[x[n]]_{m\times 1}$$

其中：

$$[\lambda[n+1]]=\begin{bmatrix}\lambda_1[n+1]\\ \lambda_2[n+1]\\ \cdots\\ \lambda_k[n+1]\end{bmatrix}\qquad [\lambda[n]]=\begin{bmatrix}\lambda_1[n]\\ \lambda_2[n]\\ \cdots\\ \lambda_k[n]\end{bmatrix}$$

$$[x[n]]=\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\\ \cdots\\ x_m[n]\end{bmatrix}\qquad [y[n]]=\begin{bmatrix}y_1[n]\\ y_2[n]\\ \cdots\\ y_r[n]\end{bmatrix}$$

(2) 离散系统状态方程和输出方程的一般形式

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2k} \\ \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots a_{kk} \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2m} \\ \cdots & \\ b_{k1} & b_{k2}\cdots b_{km} \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1k} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2k} \\ \cdots & \\ c_{r1} & c_{r2}\cdots c_{rk} \end{bmatrix} \qquad [D]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

9.2 连续系统状态方程的建立

建立状态方程的基本步骤包括：

（1）确定状态变量的个数，它等于系统的阶数；

（2）选择状态变量；

（3）列写状态变量的一阶微分方程组；

（4）对步骤（3）中所列写的方程组进行化简，为求解方便起见，一般写成矢量矩阵的形式。

9.2.1 系统状态方程的直观编写

具体步骤：

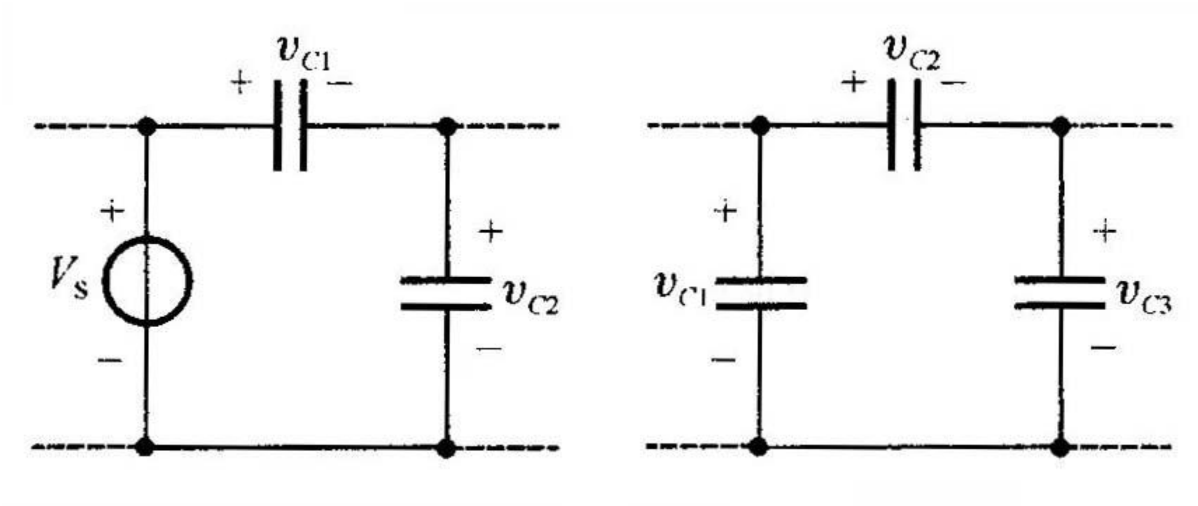
（1）确定状态变量的个数：它等于独立的储能元件的个数，即**独立电感和电容个数**之和；

（2）选择状态变量：一般选择流过电感的电流$i_L(t)$和电容两端电压$v_C(t)$作为状态变量；

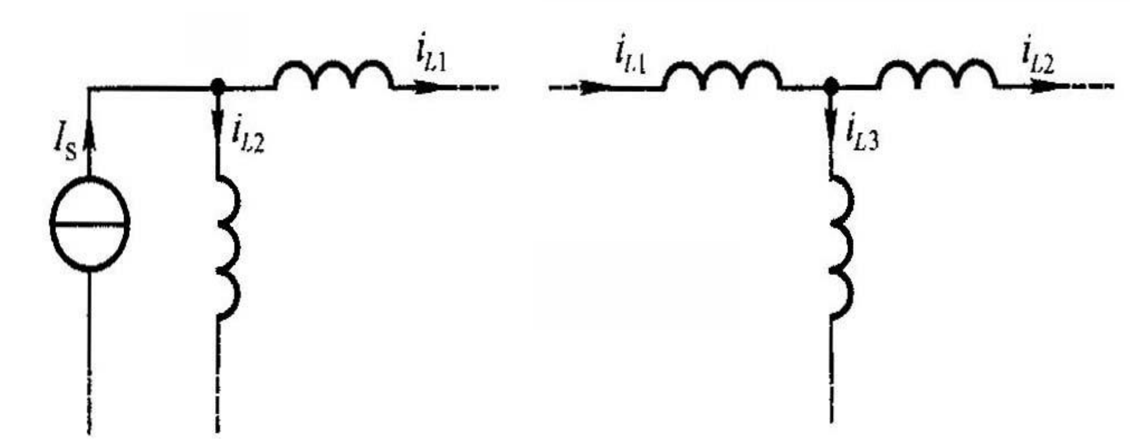
（3）微分方程的编写：依据网络约束条件（即KVL和KCL）来建立电路方程；

（4）消去非状态变量：运算化简成状态方程的标准形式，并写成矢量矩阵形式。

9.2.1 系统状态方程的直观编写



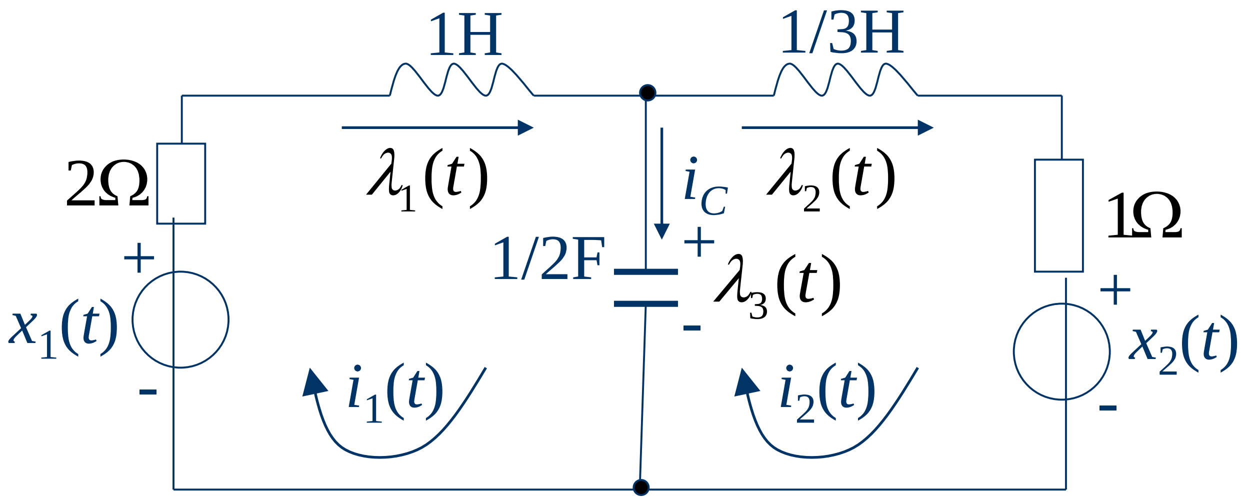
$$v_{C1} = v_{C2} + v_{C3}$$



$$i_{L1} = i_{L2} + i_{L3}$$

9.2.1 系统状态方程的直观编写

例： 给定下图所示电路，列写状态方程。



解：

回路1：
$$2\lambda_1(t)+\frac{d}{dt}\lambda_1(t)+\lambda_3(t)=x_1(t)$$

回路2：
$$\lambda_2(t)+\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\lambda_2(t)-\lambda_3(t)=-x_2(t)$$

节点1：
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda_3(t)=\lambda_1(t)-\lambda_2(t)$$

9.2.1 系统状态方程的直观编写

整理得:

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t) = -2\lambda_1(t) - \lambda_3(t) + x_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -3\lambda_2(t) + 3\lambda_3(t) - 3x_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = 2\lambda_1(t) - 2\lambda_2(t)\end{cases}$$

表示成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

9.2.2 系统状态方程的间接编写

系统状态方程间接编写的一般步骤：

（1) 根据给定系统的表示方式（微分方程、冲激响应、系统函数），模拟出系统的信号流图（直接型、级联型、并联型）；

（2) 确定状态变量的个数，它等于系统的阶数；

（3) 依据系统的信号流图，选择积分器的输出作为状态变量；

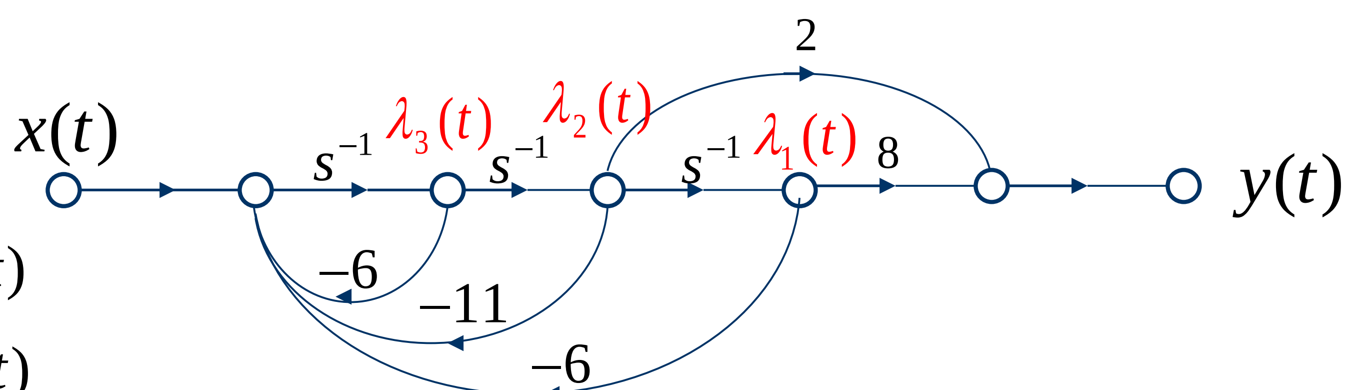
（4) 根据信号流图的运算规则，列写状态方程和输出方程，并写成矩阵形式；

例9.2-2： 分别给出用直接型、级联型和并联型结构实现下式所示系统的状态方程和输出方程：

$$H(s)=\frac{2s+8}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：(1) 直接型

$$H(s)=\frac{2s^{-2}+8s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}}$$



$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=\lambda_2(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)=\lambda_3(t)\\ \dot{\lambda}_3(t)=-6\lambda_1(t)-11\lambda_2(t)-6\lambda_3(t)+x(t)\end{cases}$$

$$y(t)=8\lambda_1(t)+2\lambda_2(t)$$

写成矩阵形式：

9.2.2 系统状态方程的间接编写

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_3(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = -6\lambda_1(t) - 11\lambda_2(t) - 6\lambda_3(t) + x(t) \end{cases}$$

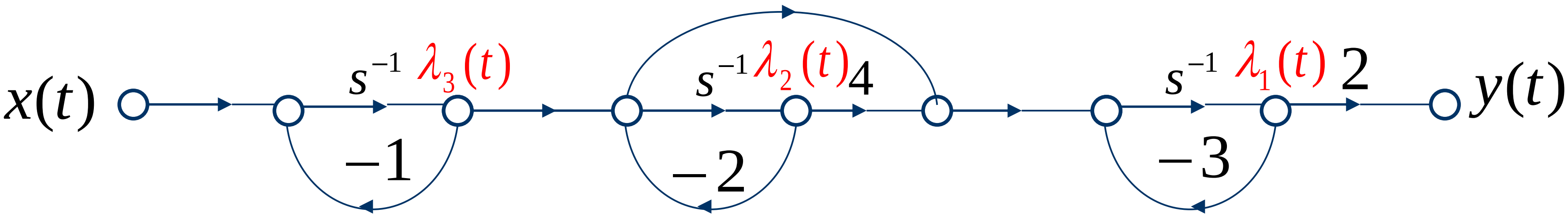
$$y(t) = 8\lambda_1(t) + 2\lambda_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\left[y(t) \right] = \left[8 \quad 2 \quad 0 \right] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

(2) 级联型 $H(s)=\dfrac{2s+8}{s^3+6s^2+11s+6}$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{s+4}{s+2}\cdot\frac{2}{s+3}=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\cdot\frac{1+4s^{-1}}{1+2s^{-1}}\cdot\frac{2s^{-1}}{1+3s^{-1}}$$



$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-3\lambda_1(t)+4\lambda_2(t)+[-2\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]=-3\lambda_1(t)+2\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\\ \dot\lambda_2(t)=-2\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\\ \dot\lambda_3(t)=-\lambda_3(t)+x(t)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot\lambda_1(t)\\ \dot\lambda_2(t)\\ \dot\lambda_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=2\lambda_1(t)$$

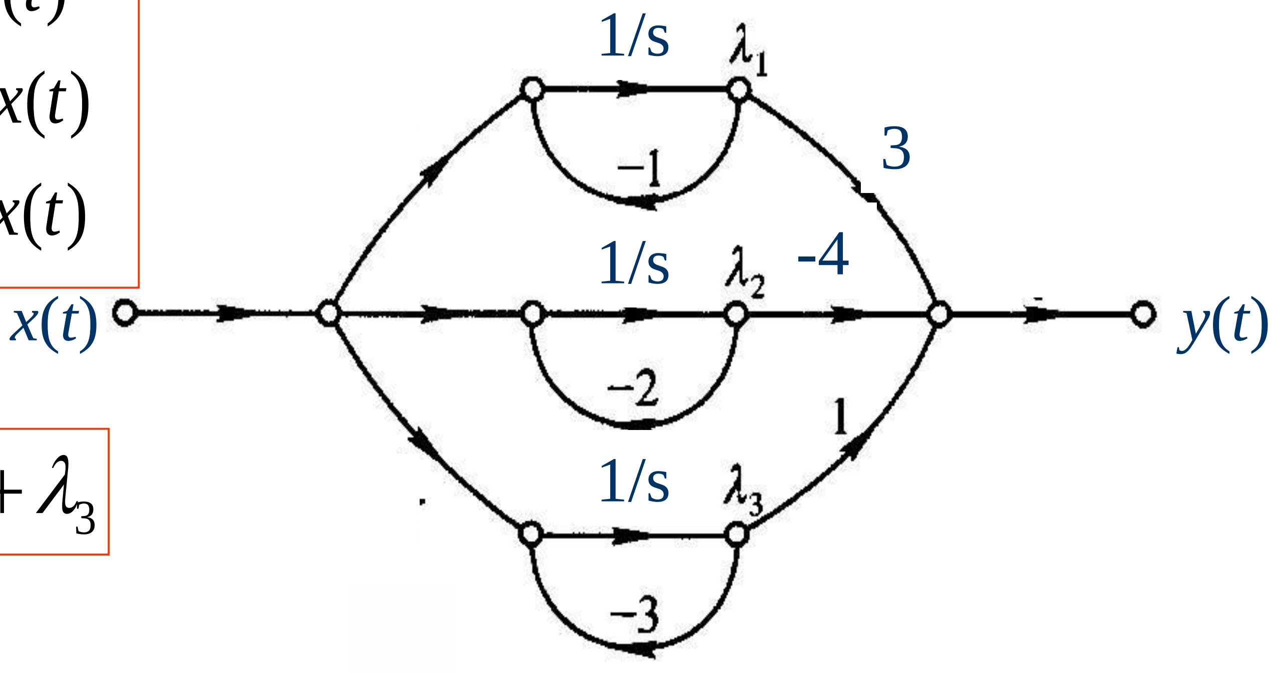
9.2.2 系统状态方程的间接编写

并联型

$$H(s)=\frac{2s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+1}+\frac{-4}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{3s^{-1}}{1+s^{-1}}+\frac{-4s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{s^{-1}}{1+3s^{-1}}=H_1(s)+H_2(s)+H_3(s)$$

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=-\lambda_1(t)+x(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)=-2\lambda_2(t)+x(t)\\ \dot{\lambda}_3(t)=-3\lambda_3(t)+x(t)\end{cases}}$$



$$\boxed{y(t)=3\lambda_1-4\lambda_2+\lambda_3}$$

9.2.2 系统状态方程的间接编写

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + x(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -2\lambda_2(t) + x(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = -3\lambda_3(t) + x(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 3\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

例9.2-3 用并联结构形式列写下列系统的状态方程和输出方程。

$$H(s)=\frac{s+4}{(s+1)^3(s+2)(s+3)}$$

解：

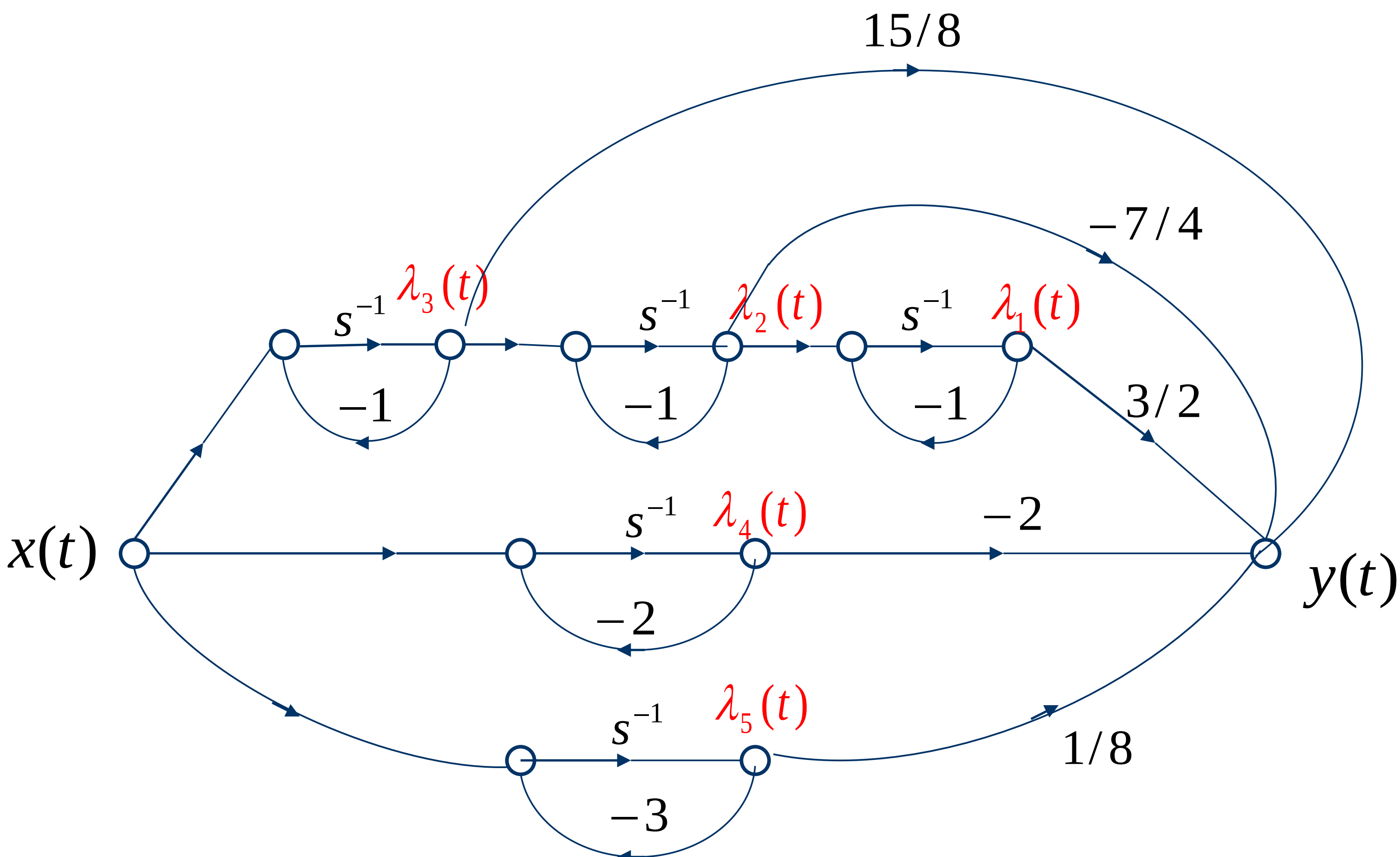
$$H(s)=\frac{3/2}{(s+1)^3}+\frac{-7/4}{(s+1)^2}+\frac{15/8}{s+1}+\frac{-2}{s+2}+\frac{1/8}{s+3}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\right)^2+\frac{15}{8}\cdot\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}-2\cdot\frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{s^{-1}}{1+3s^{-1}}$$

根据上式可以画出如下流图：

9.2.2 系统状态方程的间接编写

$$H(s)=\frac{3}{2}\left(\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\right)^3-\frac{7}{4}\left(\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\right)^2+\frac{15}{8}\cdot\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}-2\cdot\frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{s^{-1}}{1+3s^{-1}}$$



9.2.2 系统状态方程的间接编写

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_2(t) + \lambda_3(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = -\lambda_3(t) + x(t) \\ \lambda_4(t) = -2\lambda_4(t) + x(t) \\ \lambda_5(t) = -3\lambda_5(t) + x(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}\lambda_1(t) - \frac{7}{4}\lambda_2(t) + \frac{15}{8}\lambda_3(t) - 2\lambda_4(t) + \frac{1}{8}\lambda_5(t)$$

9.2.2 系统状态方程的间接编写

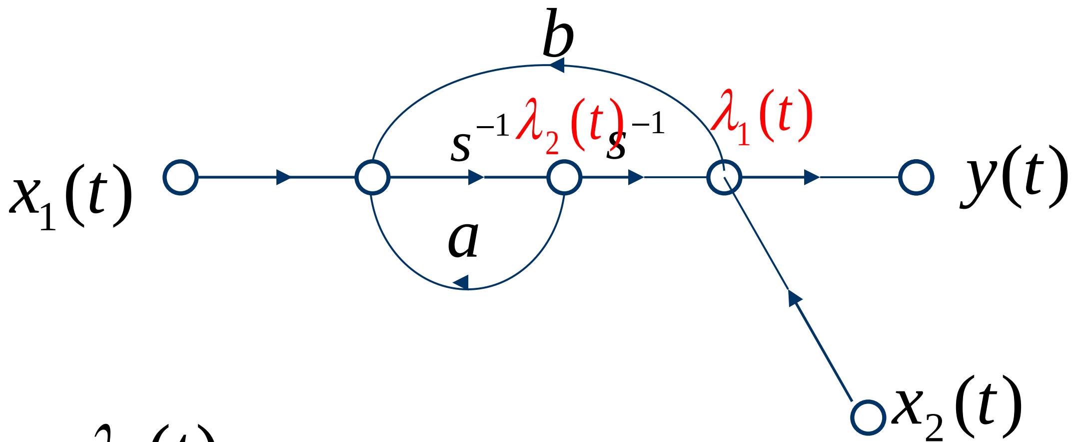
写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \\ \dot{\lambda}_4(t) \\ \dot{\lambda}_5(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \\ \lambda_4(t) \\ \lambda_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8} & -2 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \\ \lambda_4(t) \\ \lambda_5(t) \end{bmatrix}$$

9.2.2 系统状态方程的间接编写

例 已知系统的信号流图如下图所示，列写系统的状态方程与输出方程（写成矩阵形式）。



解：

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=\lambda_2(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)=a\lambda_2(t)+b[\lambda_1(t)+x_2(t)]+x_1(t)\end{cases}$$

$$=b\lambda_1(t)+a\lambda_2(t)+x_1(t)+bx_2(t)$$

$$y(t)=\lambda_1(t)+x_2(t)$$

9.3　连续时间系统状态方程的求解

$$\begin{cases}\left[\dfrac{d}{dt}\lambda(t)\right]=[A][\lambda(t)]+[B][x(t)]\\ [y(t)]=[C][\lambda(t)]+[D][x(t)]\end{cases}$$

两边取拉氏变换

$$\begin{cases}s[\Lambda(s)]-[\lambda(0^-)]=[A][\Lambda(s)]+[B][X(s)]\\ [Y(s)]=[C][\Lambda(s)]+[D][X(s)]\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}[\Lambda(s)]=(s[I]-[A])^{-1}[\lambda(0^-)]+(s[I]-[A])^{-1}[B][X(s)]\\ [Y(s)]=[C](s[I]-[A])^{-1}[\lambda(0^-)]+\left[[C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D]\right][X(s)]\end{cases}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$\begin{cases} [\Lambda(s)] = \underbrace{\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[\lambda(0^-)]}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B][X(s)]}_{\text{零状态解}} \\ [Y(s)] = \underbrace{[C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[\lambda(0^-)]}_{\text{零输入响应}[Y_{zi}(s)]} + \underbrace{\left[[C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]\right][X(s)]}_{\text{零状态响应}[Y_{zs}(s)]} \end{cases}$$

这样，就可以通过求逆变换，得到时域表示式。

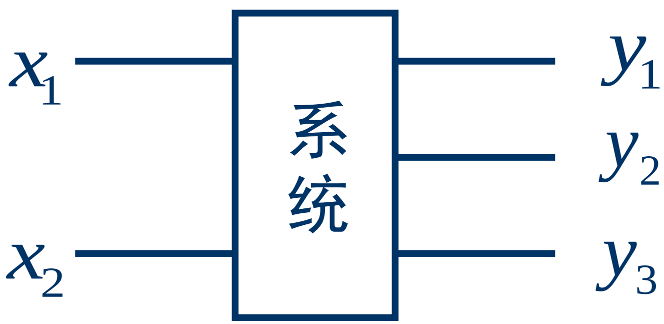
其中：$\left[H(s)\right] = [C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]$ -------- 系统函数矩阵

$$= \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{r1}(s) & H_{r2}(s) & \cdots & H_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$H_{ij}(s)=\left.\frac{\text{第}i\text{个输出}Y_i(s)\text{中对第}j\text{个输入}X_j(s)\text{的响应}}{\text{第}j\text{个输入}X_j(s)}\right|_{\text{其他输入}=0}$$

例如：



$$[H(s)]=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \\ H_{31}(s) & H_{32}(s) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$H_{11}(s)=\left.\frac{Y_1(s)}{X_1(s)}\right|_{X_2(s)=0} \qquad H_{12}(s)=\left.\frac{Y_1(s)}{X_2(s)}\right|_{X_1(s)=0} \qquad H_{21}(s)=\left.\frac{Y_2(s)}{X_1(s)}\right|_{X_2(s)=0}$$

$$H_{22}(s)=\left.\frac{Y_2(s)}{X_2(s)}\right|_{X_1(s)=0} \qquad H_{31}(s)=\left.\frac{Y_3(s)}{X_1(s)}\right|_{X_2(s)=0} \qquad H_{32}(s)=\left.\frac{Y_3(s)}{X_2(s)}\right|_{X_1(s)=0}$$

矩阵的逆

设

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ & \cdots & & \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{bmatrix}$$

$[A]^{-1}$ 存在的条件是：1）$[A]$是方阵；2） $|A| \neq 0$（非奇异、满秩）

性质： $(1)\ [A]^{-1}[A]=[A][A]^{-1}=[I]$　　$(2)\ \left([A]^{-1}\right)^{-1}=[A]$

$$[A]^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[A]}{|A|}$$

其中： $\mathrm{adj}[A]$ -------- $[A]$的伴随矩阵

$|A|$ -------- $[A]$的行列式

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ & \cdots & & \\ a_{K1} & a_{K2} & \cdots & a_{KK} \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1}=\frac{adj[A]}{|A|}$$

$$\mathrm{adj}[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{K1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{K2} \\ & \cdots & & \\ A_{1K} & A_{2K} & \cdots & A_{KK} \end{bmatrix}$$

其中，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余因子（代数余子式）

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}$$

m_{ij} 是划去矩阵[A]的第 i 行和第 j 列后所得的 $(K-1)\times(K-1)$ 阶矩阵的行列式。

9.3 连续时间系统状态方程的求解

例 已知 $[A]=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&2\end{bmatrix}$ 求 $[A]^{-1}$

解： $|A|=-1\neq 0$ 所以，$[A]$存在逆矩阵。

$$\operatorname{adj}[A]=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-2&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

其中：$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}=0$ $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1 \quad \cdots$

所以

$$[A]^{-1}=\frac{adj[A]}{|A|}=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

对于二阶矩阵 $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$[A]^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

例 已知 $[A]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 求 $[A]^{-1}$

解:

$$[A]^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

例9.3-1 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

起始状态和输入信号分别为:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

求系统的状态变量和输出信号。

解： $$(s[I]-[A])^{-1}=\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda(s)]=(s[I]-[A])^{-1}[\lambda(0^-)]+(s[I]-[A])^{-1}[B][X(s)]$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-2}{s}+\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+1}\end{bmatrix}$$

所以 $$\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}+2e^{t}-2\\ 1-2e^{-t}\end{bmatrix}u(t)$$

$$[H(s)]=[C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s+1)(s-1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

零状态响应：

$$[Y_{zs}(s)]=[H(s)][X(s)]=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_{1zs}(t)\\ y_{2zs}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}u(t)$$

零输入响应：

$$[Y_{zi}(s)]=[C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[\lambda(0^-)]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s+1)(s-1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1zi}(t) \\ y_{2zi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u(t)$$

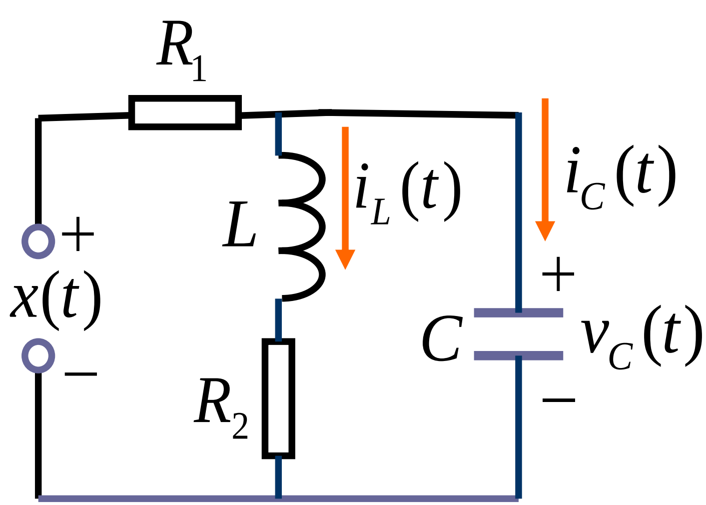
全响应：
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1zi}(t) \\ y_{2zi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{1zs}(t) \\ y_{2zs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} u(t)$$

例9.3-3 下图所示电路中，已知 $R_1 = R_2 = 1\Omega, L = 1\text{H}, C = 1\text{F},$

$x(t) = u(t)$ (设起始状态为零）

（1）求$i_L(t)$与$v_C(t)$；（2）求$y(t)=i_C(t)$。

解： 设 $\lambda_1(t) = v_C(t),\ \lambda_2(t) = i_L(t)$



$$\begin{cases} L\dfrac{d\lambda_2(t)}{dt} + R_2\lambda_2(t) = \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) + C\dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = \dfrac{x(t)-\lambda_1(t)}{R_1} \end{cases}$$

代入各元件阻值并整理得：

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\lambda_1(t) - \lambda_2(t) + x(t) \\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt} = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \end{cases}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\lambda_1(t) - \lambda_2(t) + x(t) \\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt} = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \end{cases}$$

$$y(t) = C\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\lambda_1(t) - \lambda_2(t) + x(t)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\lambda_1(t)}{dt} \\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + x(t)$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$[A]=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix},\quad [D]=1$$

（1）求$i_L(t)$与$v_C(t)$，即求$\lambda_1(t)$和$\lambda_2(t)$

$$(s[I]-[A])^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}$$

$$[\Lambda(s)]=(s[I]-[A])^{-1}[\lambda(0^-)]+(s[I]-[A])^{-1}[B][X(s)]$$

$$\because\ [\lambda(0^-)]=0,\ [X(s)]=\frac{1}{s}$$

$$\therefore\ [\Lambda(s)]=(s[I]-[A])^{-1}[B][X(s)]=\frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

9.3 连续时间系统状态方程的求解

$$[\Lambda(s)] = (s[I]-[A])^{-1}[B][X(s)] = \frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s[(s+1)^2+1]} \\[2ex] \dfrac{1}{s[(s+1)^2+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1/2}{s} + \dfrac{-1/2(s+1)+1/2}{(s+1)^2+1} \\[2ex] \dfrac{1/2}{s} + \dfrac{-1/2(s+1)-1/2}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}[\Lambda(s)] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(1+e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t)u(t) \\[2ex] \dfrac{1}{2}(1-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t)u(t) \end{bmatrix}$$

（2）求$y(t)=i_C(t)$

$$\because [H(s)]=[C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D]$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+1=\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

$$\therefore \quad [Y(s)]=[H(s)][X(s)]=\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

$$y(t)=i_C(t)=e^{-t}\cos t\cdot u(t)$$

9.4 离散系统状态方程的建立

9.4.1 根据给定系统的差分方程建立状态方程

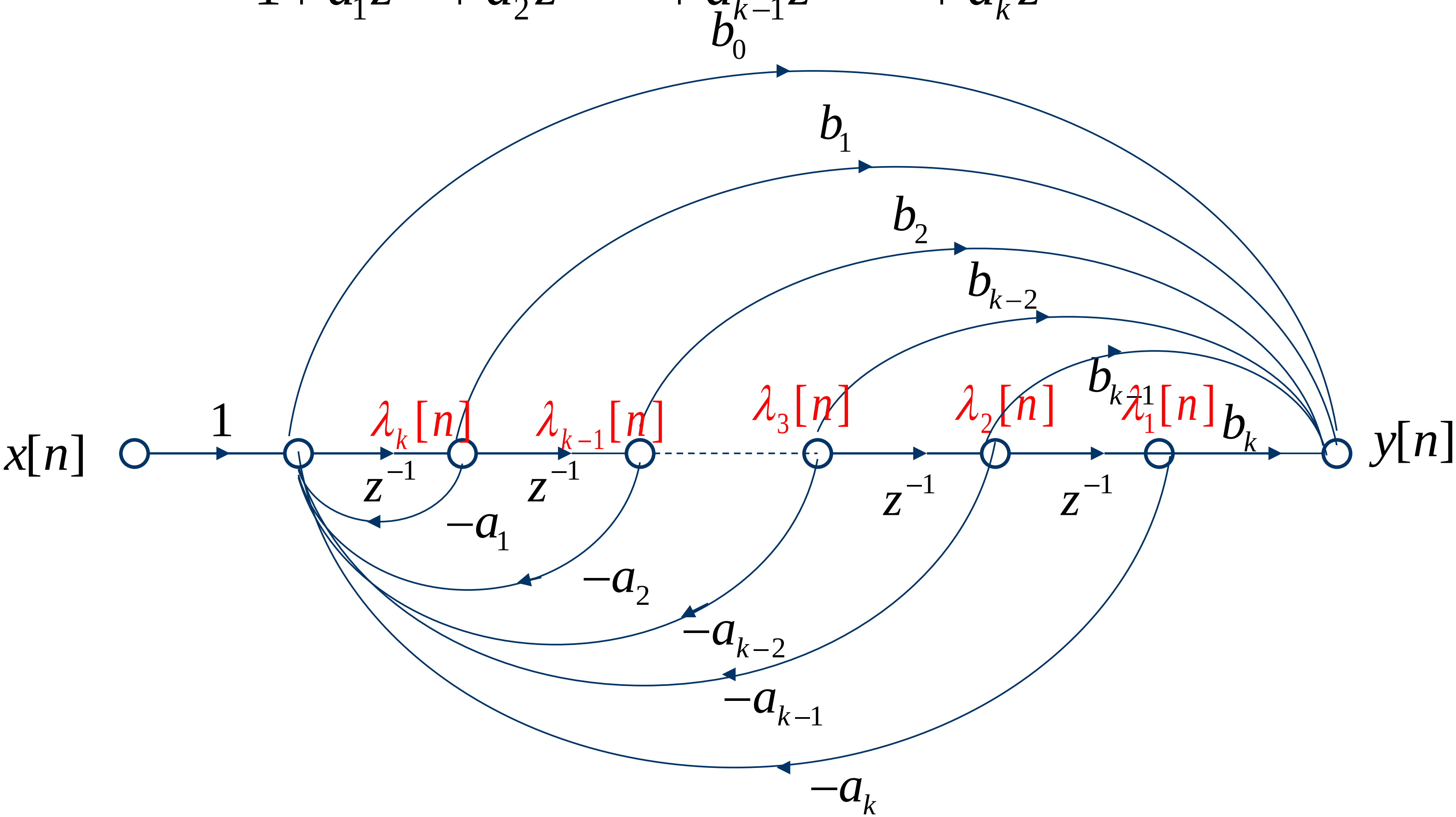
$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+\cdots+a_{k-1}y[n-(k-1)]+a_ky[n-k]$$
$$=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]+\cdots+b_{k-1}x[n-(k-1)]+b_kx[n-k]$$

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{k-1}z^{-(k-1)}+b_kz^{-k}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\cdots+a_{k-1}z^{-(k-1)}+a_kz^{-k}}$$

根据上式可画出直接型信号流图。

9.4.1 根据给定系统的差分方程建立状态方程

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{k-1}z^{-(k-1)}+b_kz^{-k}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\cdots+a_{k-1}z^{-(k-1)}+a_kz^{-k}}$$



选择每个延时器的输出作为状态变量。

9.4.1 根据给定系统的差分方程建立状态方程

$$
\begin{cases}
\lambda_1[n+1]=\lambda_2[n] \\
\lambda_2[n+1]=\lambda_3[n] \\
\vdots \\
\lambda_{k-1}[n+1]=\lambda_k[n] \\
\lambda_k[n+1]=-a_k\lambda_1[n]-a_{k-1}\lambda_2[n]-\cdots-a_2\lambda_{k-1}[n]-a_1\lambda_k[n]+x[n]
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
y[n]&=b_k\lambda_1[n]+b_{k-1}\lambda_2[n]+\ldots+b_2\lambda_{k-1}[n]+b_1\lambda_k[n]+b_0\lambda_k[n+1] \\
&=(b_k-a_kb_0)\lambda_1[n]+(b_{k-1}-a_{k-1}b_0)\lambda_2[n]+\ldots+ \\
&\quad(b_2-a_2b_0)\lambda_{k-1}[n]+(b_1-a_1b_0)\lambda_k[n]+b_0x[n]
\end{aligned}
$$

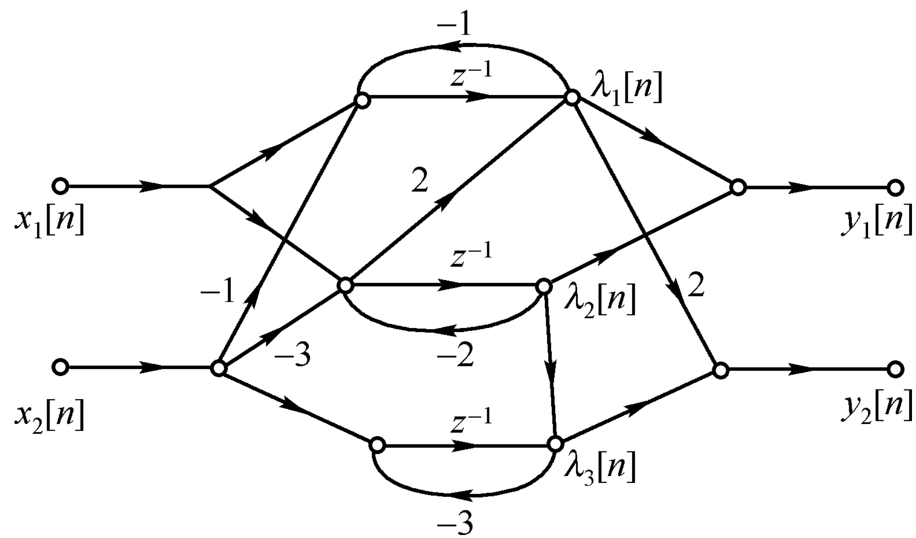
9.4.1 根据给定系统的差分方程建立状态方程

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n+1] \\ \lambda_k[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n] \\ \lambda_k[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \left[(b_k - a_k b_0),\ (b_{k-1} - a_{k-1} b_0),\ \cdots\ (b_2 - a_2 b_0), (b_1 - a_1 b_0) \right] \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n] \\ \lambda_k[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n]$$

9.4.2 根据给定系统的框图或信号流图建立状态方程

例9.4-1 列写图示离散系统的状态方程和输出方程。



$$\lambda_1[n+1] = -(\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + x_1[n] - x_2[n]$$

$$\lambda_2[n+1] = -2\lambda_2[n] + x_1[n] - 3x_2[n]$$

$$\lambda_3[n+1] = -3(\lambda_2[n] + \lambda_3[n]) + x_2[n]$$

$$y_1[n] = (\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + \lambda_2[n]$$

$$y_2[n] = 2(\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + (\lambda_2[n] + \lambda_3[n])$$

经整理得：
$$\lambda_1[n+1] = -\lambda_1[n]+4\lambda_2[n] - x_1[n]+5x_2[n]$$
$$\lambda_2[n+1] = -2\lambda_2[n] + x_1[n] - 3x_2[n]$$
$$\lambda_3[n+1] = -3\lambda_2[n] - 3\lambda_3[n]+ x_2[n]$$
$$y_1[n] = \lambda_1[n] - 3\lambda_2[n] + 2x_1[n] - 6x_2[n]$$
$$y_2[n] = 2\lambda_1[n] - 7\lambda_2[n] + \lambda_3[n] + 4x_1[n] - 12x_2[n]$$

矩阵形式：
$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \\ \lambda_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

9.3.2 根据给定系统的框图或信号流图建立状态方程

$$\begin{cases}\left[\lambda[n+1]\right]=[A]\left[\lambda[n]\right]+[B]\left[x[n]\right]\\ \left[y[n]\right]=[C]\left[\lambda[n]\right]+[D]\left[x[n]\right]\end{cases}$$

两边取单边z变换

$$\begin{cases}z[\Lambda(z)]-z\left[\lambda[0]\right]=[A][\Lambda(z)]+[B][X(z)]\\ [Y(z)]=[C][\Lambda(z)]+[D][X(z)]\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}[\Lambda(z)]=\left(z[I]-[A]\right)^{-1}z\left[\lambda[0]\right]+\left(z[I]-[A]\right)^{-1}[B][X(z)]\\ [Y(z)]=[C]\left(z[I]-[A]\right)^{-1}z\left[\lambda[0]\right]+\left[[C]\left(z[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]\right][X(z)]\end{cases}$$

9.5 离散时间系统状态方程的求解

$$\begin{cases}[\Lambda(z)]=\underbrace{\left(z[I]-[A]\right)^{-1}z\left[\lambda[0]\right]}_{\text{零输入解}}+\underbrace{\left(z[I]-[A]\right)^{-1}[B][X(z)]}_{\text{零状态解}}\\ [Y(z)]=\underbrace{[C]\left(z[I]-[A]\right)^{-1}z\left[\lambda[0]\right]}_{\text{零输入响应}[Y_{zi}(z)]}+\underbrace{\left[[C]\left(z[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]\right][X(z)]}_{\text{零状态响应}[Y_{zs}(z)]}\end{cases}$$

这样，就可以通过求逆变换，得到时域表示式。

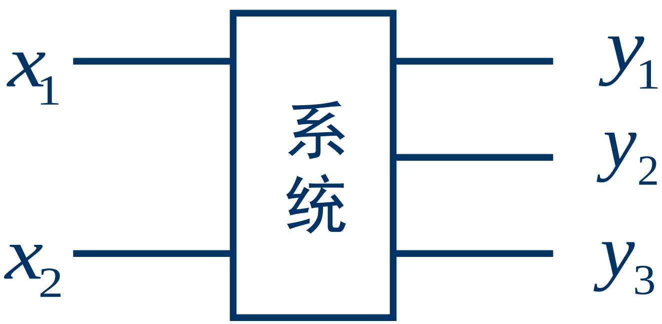
其中: $\left[H(z)\right]=[C]\left(z[I]-[A]\right)^{-1}[B]+[D]$-------- 系统函数矩阵

$$=\begin{bmatrix}H_{11}(z) & H_{12}(z) & \cdots & H_{1m}(z)\\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \cdots & H_{2m}(z)\\ \cdots & & & \\ H_{r1}(z) & H_{r2}(z) & \cdots & H_{rm}(z)\end{bmatrix}_{r\times m}$$

9.5 离散时间系统状态方程的求解

$$H_{ij}(z)=\left.\frac{\text{第}i\text{个输出}Y_i(z)\text{中对第}j\text{个输入}X_j(z)\text{的响应}}{\text{第}j\text{个输入}X_j(z)}\right|_{\text{其它输入}=0}$$

例如：



$$[H(z)]=\begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \\ H_{31}(z) & H_{32}(z) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$H_{11}(z)=\left.\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}\right|_{X_2(z)=0}\qquad H_{12}(z)=\left.\frac{Y_1(z)}{X_2(z)}\right|_{X_1(z)=0}\qquad H_{21}(z)=\left.\frac{Y_2(z)}{X_1(z)}\right|_{X_2(z)=0}$$

$$H_{22}(z)=\left.\frac{Y_2(z)}{X_2(z)}\right|_{X_1(z)=0}\qquad H_{31}(z)=\left.\frac{Y_3(z)}{X_1(z)}\right|_{X_2(z)=0}\qquad H_{32}(z)=\left.\frac{Y_3(z)}{X_2(z)}\right|_{X_1(z)=0}$$

9.5 离散时间系统状态方程的求解

例 已知某离散系统状态方程的系数矩阵为

$$[A]=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix},\quad [C]=[1\quad -1],\quad [D]=[0\quad 1]$$

（1）画出系统的信号流图；（2）求系统函数矩阵$[H(z)]$;

（3）若 $x_1[n]=\delta[n],\ x_2[n]=u[n],$ 求$y[n]$。

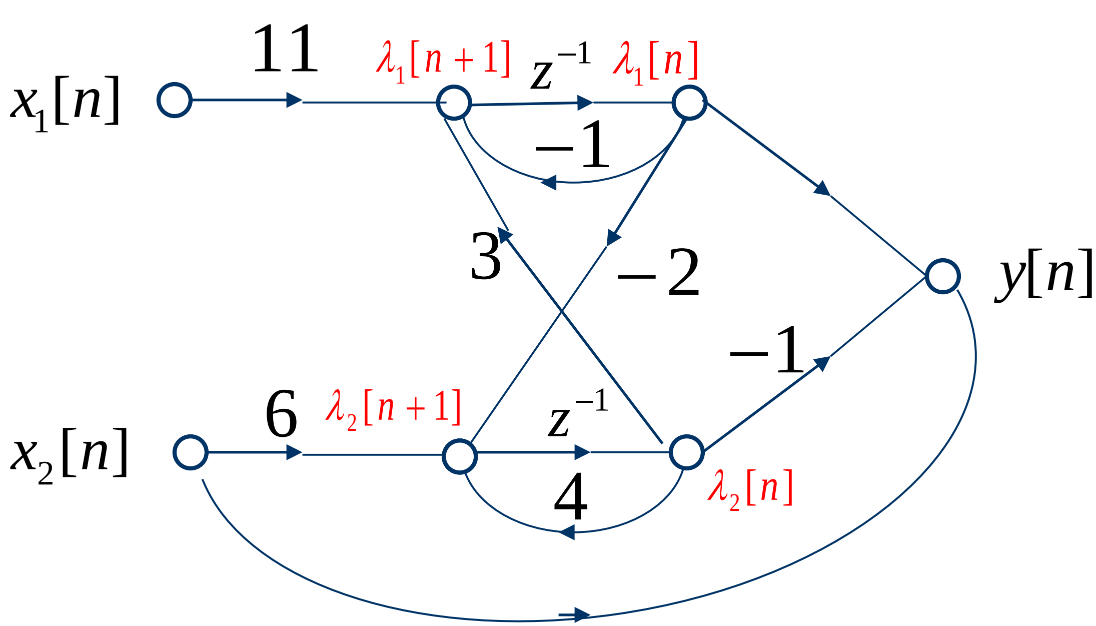
解： 根据$[A]$、$[B]$、$[C]$、$[D]$矩阵可列出状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix}\lambda_1[n+1]\\ \lambda_2[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1[n]\\ \lambda_2[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1[n]\\ y_2[n]\end{bmatrix}=[1\quad -1]\begin{bmatrix}\lambda_1[n]\\ \lambda_2[n]\end{bmatrix}+[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1[n+1] = -\lambda_1[n] + 3\lambda_2[n] + 11x_1[n] \\ \lambda_2[n+1] = -2\lambda_1[n] + 4\lambda_2[n] + 6x_2[n] \\ y[n] = \lambda_1[n] - \lambda_2[n] + x_2[n] \end{cases}$$

（1）根据上述状态方程和输出方程可画出系统的信号流图



9.5 离散时间系统状态方程的求解

(2) $[A]=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$, $[B]=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, $[C]=[1 \quad -1]$, $[D]=[0 \quad 1]$

$$(z[I]-[A])^{-1}=\begin{bmatrix}z+1 & -3\\ 2 & z-4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}\begin{bmatrix}z-4 & 3\\ -2 & z+1\end{bmatrix}$$

$$[H(z)]=[C](z[I]-[A])^{-1}[B]+[D]$$

$$=\frac{[1 \quad -1]}{(z-1)(z-2)}\begin{bmatrix}z-4 & 3\\ -2 & z+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}+[0 \quad 1]$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{11}{z-1} & \dfrac{z-7}{z-1}\end{bmatrix}=[H_{11}(z) \quad H_{12}(z)]$$

9.5 离散时间系统状态方程的求解

(3) $$[Y(z)]=[H(z)][X(z)]=[H_{11}(z) \quad H_{12}(z)]\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix}$$

$$=[\frac{11}{z-1} \quad \frac{z-7}{z-1}]\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}=\frac{z^2+4z+11}{(z-1)^2}$$

$$=-11-\frac{6z}{(z-1)^2}+\frac{12z}{z-1}$$

$$y[n]=-11\delta[n]+(12-6n)u[n]=\delta[n]+(12-6n)u[n-1]$$

9.6 由状态方程判断系统的稳定性

9.6.1 连续时间系统的稳定性判别

$$[H(s)] = [C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D] \qquad (1)$$

$$(s[I]-[A])^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s[I]-[A])}{\det(s[I]-[A])} \qquad (2)$$

将式（2）代入式（1）得：

$$[H(s)] = \frac{[C]\mathrm{adj}(s[I]-[A])[B]+[D]\det(s[I]-[A])}{\det(s[I]-[A])}$$

$[H(s)]$的极点就是$\det(s[I]-[A])=0$的根，对于因果系统$[H(s)]$的所有极点位于左半s平面，则系统稳定（对于高阶系统，可以利用劳斯准则来判断，见附录D）。

9.6.1 连续时间系统的稳定性判别

例9.6-1 已知
$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

试求其中K值在什么范围内系统稳定。

解： 系统的特征多项式为

$$\det(s[I]-[A]) = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -K & s+1 \end{vmatrix} = s^2+3s+2-K$$

要使系统稳定必须满足：

$2-K>0$, 即当$K<2$时，系统稳定。

9.6.2 离散时间系统的稳定性判据

$$[H(z)]=\frac{[C]\mathrm{adj}(z[I]-[A])[B]+[D]\det(z[I]-[A])}{\det(z[I]-[A])}$$

$[H(z)]$的极点就是 $\det(z[I]-[A])=0$ 的根，对于因果系统$[H(z)]$的所有极点位于单位圆内，则系统稳定（对于高阶系统，可以利用朱里准则来判断，见附录D）。

9.6.2 离散时间系统的稳定性判据

例9.6-2： 已知 $\begin{bmatrix}\lambda_1[n+1]\\ \lambda_2[n+1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1[n]\\ \lambda_2[n]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x[n]$

问该系统是否稳定。

解： 系统的特征多项式为

$$A(z)=\det(z[I]-[A])=\begin{vmatrix} z-\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{6} & z-\frac{1}{3}\end{vmatrix}=z^2-\frac{5}{6}z$$

系统的两极点分别为0和 $\frac{5}{6}$ ，均在单位圆内，所以该系统稳定。

9.7 系统的状态变量分析法的MATLAB实现

tf2ss----系统函数到状态方程的转换

ss2tf---系统函数的计算

ss和lsim----系统的状态方程的求解

例9.7-1 写出下列系统的状态方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+2x(t)$$

解:

```
a1=[1 2];b1=[1 3 2];
[A1,B1,C1,D1]=tf2ss(a1,b1)
```

例9.7-2 已知某连续系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(t)\\ \mathrm{e}^{-3t}u(t)\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\lambda_1(0^-)\\ \lambda_2(0^-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

求该系统的系统函数矩阵$\boldsymbol{H}(s)$和输出，并绘制输出的时域波形。

9.7 系统的状态变量分析法的MATLAB实现

解：

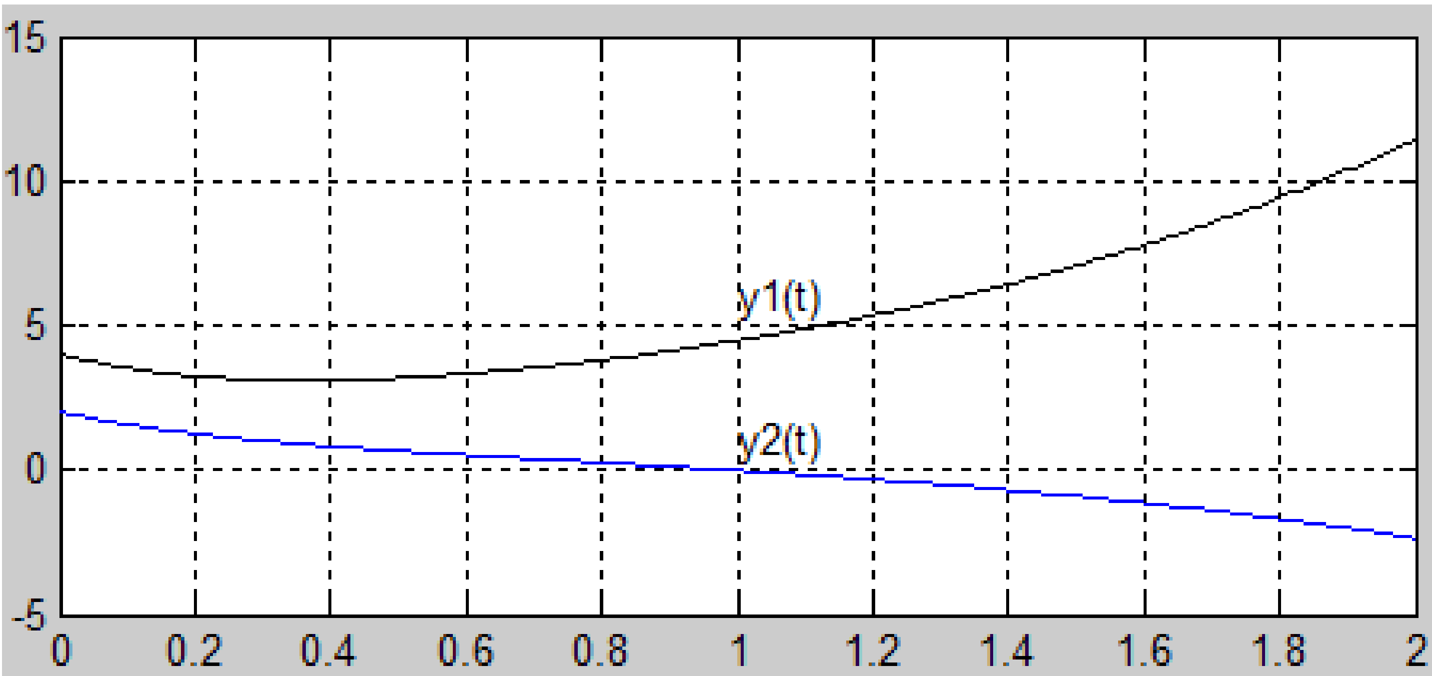
```
A=[1 0;1 -3];B=[1 0; 0 1];C=[1 -1; 0 -1];D=[1 1; 1 0];
[a1,b1]=ss2tf(A,B,C,D,1)   %求与输入x1(t)有关的系统函数
[a2,b2]=ss2tf(A,B,C,D,2)   %求与输入x2(t)有关的系统函数
```

运行结果为：

```
a1 =1    3    -1                a2 =1    1    -2
    1    2     4                    0   -1     1
b1 =1    2    -3                b2 =1    2    -3
```

```
A=[1 0;1 -3];B=[1 0; 0 1];C=[1 -1; 0 -1];D=[1 1; 1 0];
r0=[1 -1];dt=0.01;t=0:dt:2;                 %r0为系统的初始条件
x(:,1)=ones(length(t),1);x(:,2)=exp(-3*t)'; %系统的激励信号
sys= ss(A,B,C,D); y=lsim(sys,x,t,r0);
plot(t,y(:,1),'r');text(1,6,'y1(t)');hold on;
plot(t,y(:,2));text(1,1,'y2(t)');hold off;
```

9.7 系统的状态变量分析法的MATLAB实现



例9.7-3 已知某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$$

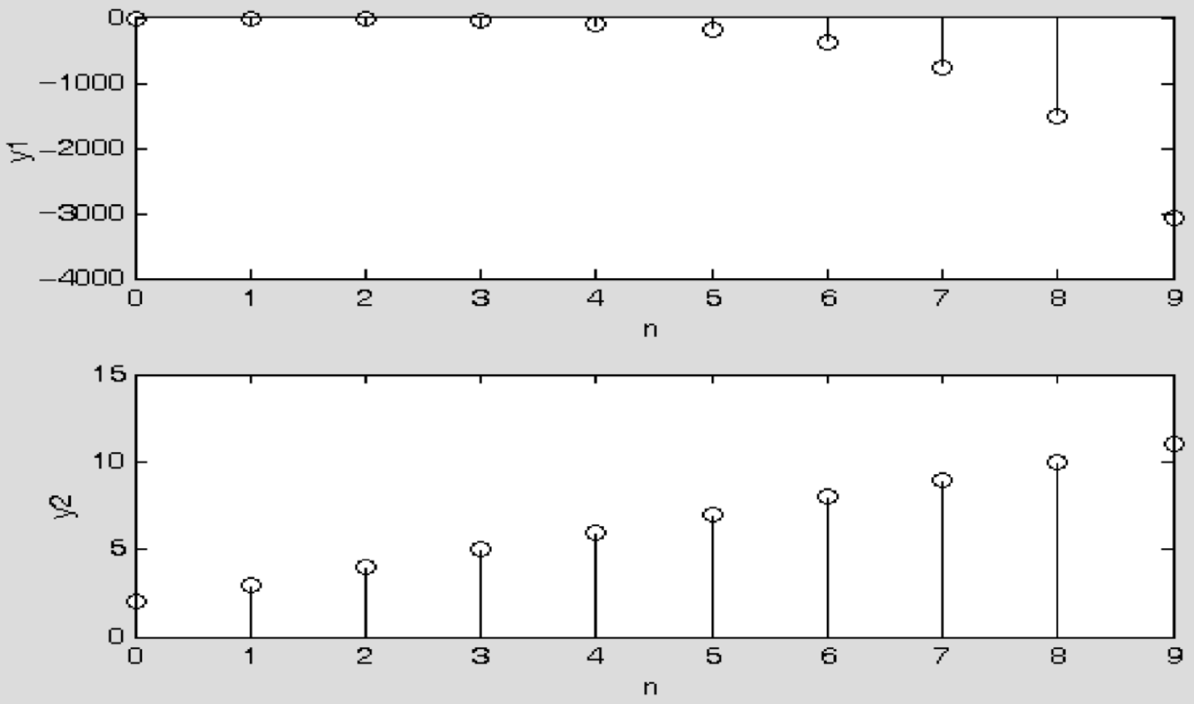
其初始状态和输入分别为 $\begin{bmatrix} \lambda_1[0] \\ \lambda_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad x[n] = u[n]$

求该系统的输出，并绘制输出的时域波形。

9.7 系统的状态变量分析法的MATLAB实现

解：

```
A=[–1 3; –2 4];B=[2;1];C=[–1 2; 1 –1];D=[0;0];
r0=[1; –1];N=10;x=ones(1,N);
sys=ss(A,B,C,D,[]);y=lsim(sys,x,[],r0);
subplot(2,1,1);y1=y(:,1)';stem((0:N–1),y1);
xlabel('n');ylabel('y1');
subplot(2,1,2);y2=y(:,2)';stem((0:N–1),y2);
xlabel('n');ylabel('y2');
```



本章小结

1. 状态变量与状态方程；

2. 状态方程的建立（连续系统和离散系统）

3. 状态方程的求解（变换域解法）

4. 系统稳定性的判断