第3章 离散时间信号与系统的时域分析

3.1 离散时间信号—序列

3.2 离散时间系统

3.3 LTI离散时间系统的单位样值响应

3.4 用MATLAB产生和实现离散信号与系统

3.1 离散时间信号——序列

连续时间信号（确定性）：对于任意给定的时刻，有确定的数值与之对应，一般用连续时间函数表示：

$x(t)$ 或 $f(t)$等，t 是任意实数

离散时间信号：定义为只在**某些离散瞬时**给出函数值的信号（或时间函数），也简称为序列（sequence）或离散信号。

$x[n]$ 或 $f[n]$等，而且 n 必须是整数

数字信号：函数值是数字量（二进制数表示）的离散信号。

$\hat{x}[n]$ 或 $\hat{f}[n]$等，其中 n 必须是整数

而且 $\hat{x}[n]$ 或 $\hat{f}[n]$是有限位数二进制所表示的数值。

通常，离散信号可由连续信号的测量采样得到；

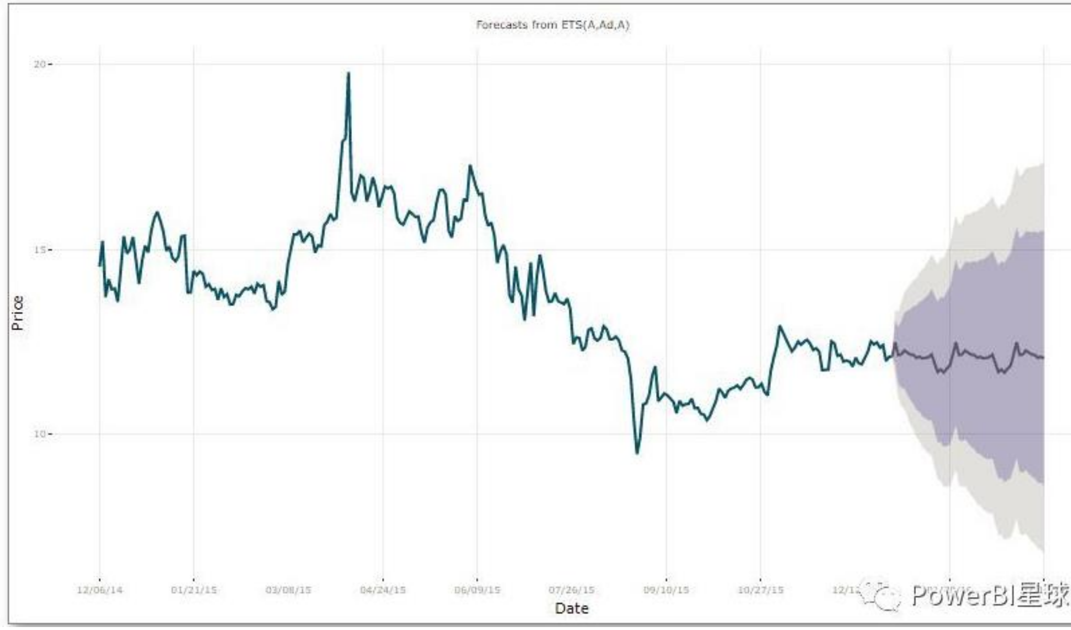
而数字信号则是对采样的离散信号进行量化编码得到，即

$$x[n]=x(nT)=x(t)\big|_{t=nT} \text{ ——采样}$$

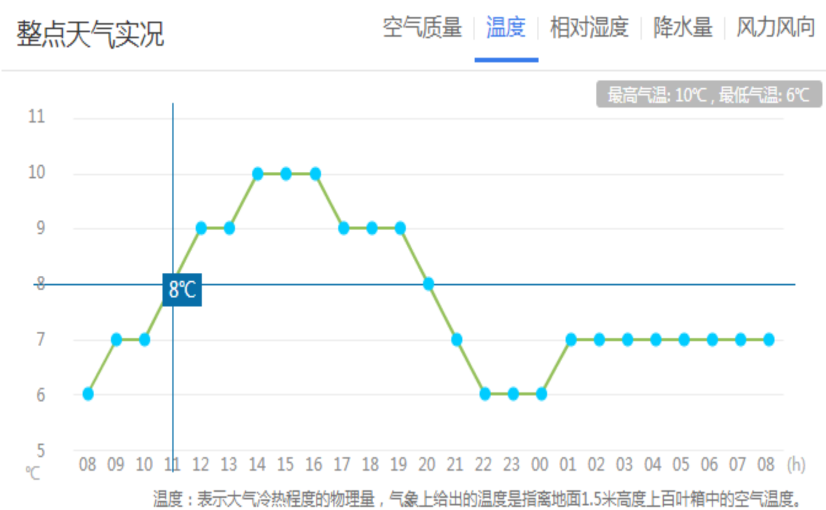
$$\hat{x}[n]=Q\big[x[n]\big] \text{——量化}$$

3.1.1 离散时间信号的定义和表示

—— 离散信号



—— 数字信号



3.1.1 离散时间信号的定义和表示

通常离散信号$x[n]$也称为序列，但自变量n只能取整数。

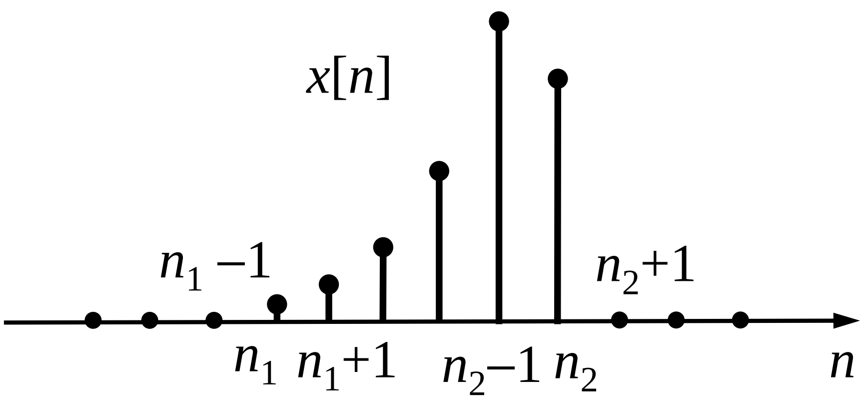
例如：$x[n] = 2^n$，$n = 0$，±1，±2，±3，…… 或记为

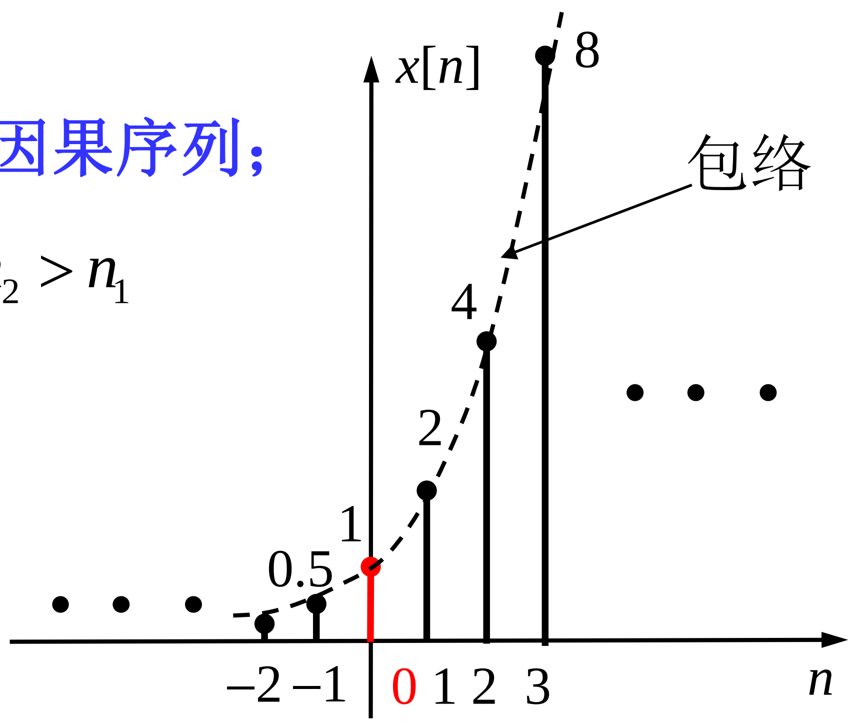
$$x[n]=\{\cdots,\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{1},2,4,8,\cdots\}$$

左边序列：$x[n]=0,\ \ n>n_2$

右边序列：$x[n]=0,\ \ n<n_1$ $\Rightarrow$因果序列；

有限长序列：$x[n]=0,\ \ n<n_1,\ n>n_2>n_1$





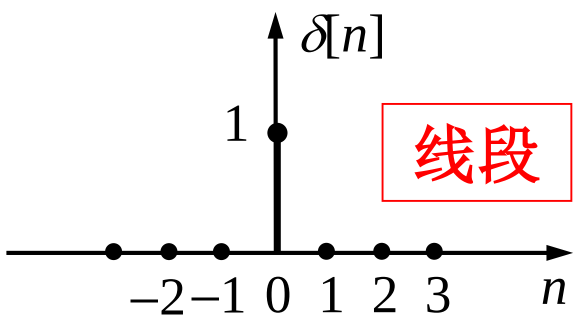
$\Rightarrow$因果序列：$n_1 \geq 0$

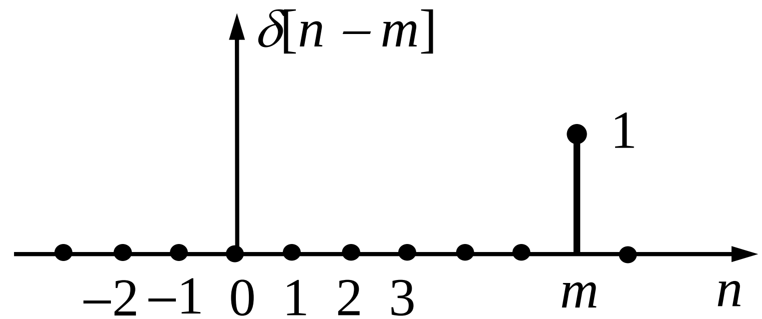
3.1.2 典型序列

1. 单位样值信号（unit sample sequence）

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$$\delta[n-m]=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases},\quad m\text{是整数}$$





$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-m]=x[m]\delta[n-m]$$

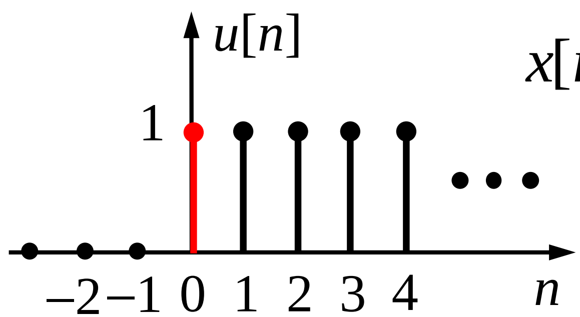
$$\delta[-n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}=\delta[n]$$

3.1.2 典型序列

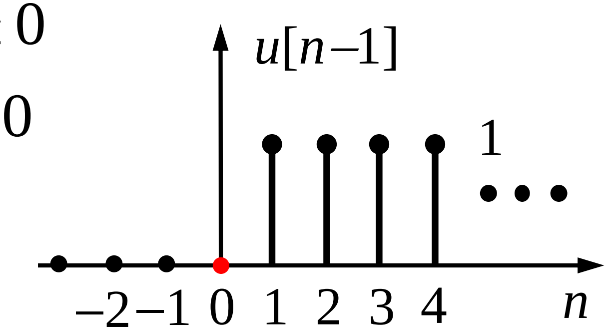
2. 单位阶跃序列（unit step sequence）

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

$$u[n-1]=\begin{cases}1 & n\ge 1\\ 0 & n<1\end{cases}$$



$$x[n]u[n]=\begin{cases}x[n], & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



$\Rightarrow u[n]-u[n-1]=\delta[n]$ —— 差分运算

—— 右边序列；

—— 因果序列

或 $u[n]=u[n-1]+\delta[n]$

$$=u[n-2]+\delta[n-1]+\delta[n]$$

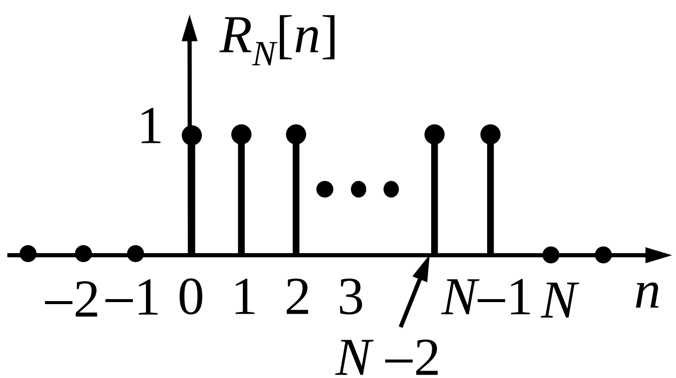
$$= \ldots = \sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-m] \;\underline{\underline{n-m=k}}\; = \sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$ —— 累加运算

3. 有限长矩形脉冲序列（rectangular sequence）

$$R_N[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$R_N[n]=u[n]-u[n-N]$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\delta[n-m]$$



$$x[n]R_N[n]=\begin{cases}x[n] & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

N —— 序列的长度；

(从第一个不为零的数值起，到最后一个不为0的数值，总的样本个数)

——长度N的有限长序列

3.1.2 典型序列

4. 指数序列（exponential sequence）

$$f[n] = a^n$$

$$x[n] = a^n u[n]$$

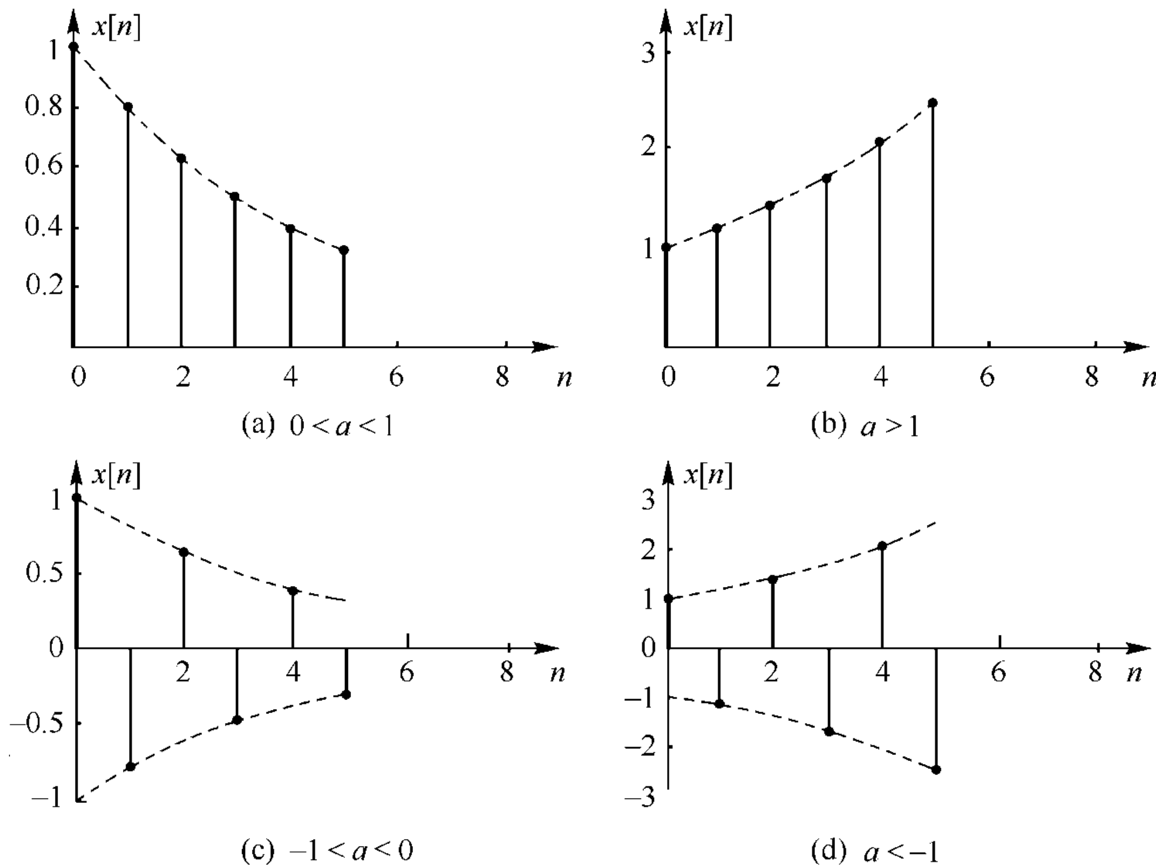
$$= \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

当 $a = 1 \Rightarrow f[n] = 1;$

$$x[n] = u[n]$$

当 $a = -1 \Rightarrow f[n] = (-1)^n;$

$$x[n] = (-1)^n u[n]$$



—— 与连续指数函数的比较： $x(t) = Ae^{\alpha t}u(t)$

3.1.2 典型序列

$$x(t) = Ae^{\alpha t}u(t)$$

$$x[n] = x(nT) = Ae^{\alpha nT}u[nT] = A(e^{\alpha T})^n u[n]$$

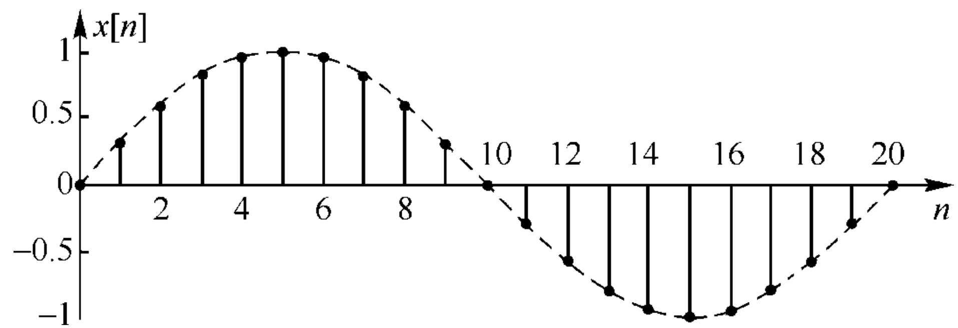
5. 正弦序列（sinusoidal sequence）

$$x[n] = \sin \omega_0 n$$

若取 $\omega_0 = \pi / 10$

$$x[n+20] = \sin \frac{\pi}{10}(n+20)$$

$$= \sin \frac{\pi}{10} n = x[n]$$



$$\Rightarrow x[n] = \cos \omega_0 n \,|_{\omega_0 = \pi}$$

$$= (-1)^n$$

——周期序列（周期为$N = 20$）

3.1.2 典型序列

对正弦序列 $x[n]=\sin\omega_0 n$

如果：$2\pi/\omega_0 = p/q$（p, q为互质整数）为有理数，则正弦序列为周期序列；

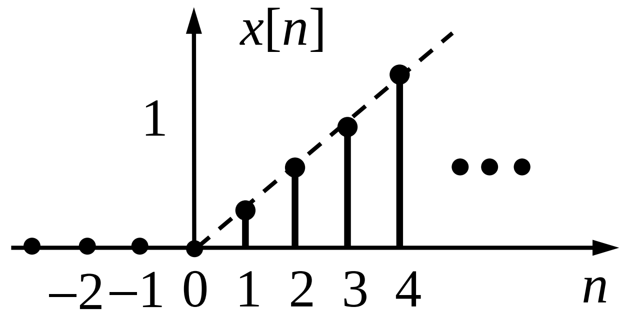
如果：$2\pi/\omega_0$是无理数，则正弦序列是非周期序列 。

ω_0为序列正弦包络的振荡频率，也称为正弦序列的频率。

3.1.2 典型序列

6. 单位斜变序列（ramp sequence）

$$x[n]=\begin{cases} n, & n\ge 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$



$$x[n]=nu[n]$$

7. 复指数序列（complex exponential sequence）

$$x[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n \Rightarrow |x[n]|=1$$

更一般地：

$$x[n]=(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})^n=r^n\cos\omega_0 n+\mathrm{j}r^n\sin\omega_0 n \quad \Rightarrow |x[n]|=r^n$$

3.1.3 序列的运算

（1） 序列的加减

$$f[n]=f_1[n]+f_2[n] \text{ 或 } f[n]=f_1[n]-f_2[n]$$

（2） 信号的乘法和数乘

$$f[n]=f_1[n]\cdot f_2[n]\;;$$

和 $f[n]=Kf_1[n]$， K是常数

（3）时移运算： $f[n]\to f[n-n_0]$ （n_0是整数）

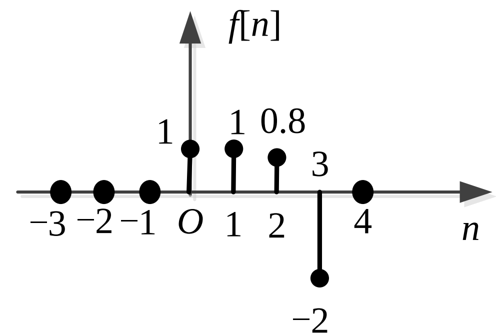
（4）反褶运算： $f[n]\to f[-n]$： （绕纵轴转180度）

3.1.3 序列的运算

（5）差分运算： $\nabla f[n] = f[n] - f[n-1]$ （后向）

$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$ （前向）

累加运算： $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$



例1：按要求计算并画出下述序列的图形。

$f[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 0.8, -2\}$

求：$x_1[n] = \Delta f[n]$;　$x_2[n] = \nabla f[n]$　$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} f[m]$

解：$x_1[n]$、$x_2[n]$与 $x_3[n]$ 分别为

$x_1[n] = \Delta f[n] = \{1, \underset{\uparrow}{0}, -0.2, -2.8, 2\}$

$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} f[m]$

$x_2[n] = \nabla f[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -0.2, -2.8, 2\}$

$= \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2.8, 0.8, 0.8, 0.8, \ldots\}$

3.1.3 序列的运算

（6）序列的分解：

（A）奇偶分解： $f[n]=f_{\mathrm{e}}[n]+f_{\mathrm{o}}[n]$， 其中

$$f_{\mathrm{e}}[n]=\frac{1}{2}\{f[n]+f[-n]\}=f_{\mathrm{e}}[-n]$$

$$f_{\mathrm{o}}[n]=\frac{1}{2}\{f[n]-f[-n]\}=-f_{\mathrm{o}}[-n]$$

（B）单位样值分解：

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]$$

（C）傅里叶级数分解—— DFS， DFT等（DSP课程 ）：

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

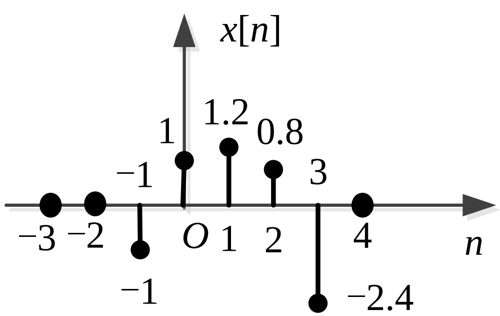
3.1.3 序列的运算

例2：写出下述序列的冲激序列求和形式，并计算序列的偶分量与奇分量。

$$x[n]=\{-1,\underset{\uparrow}{1},1.2,0.8,-2.4\}$$

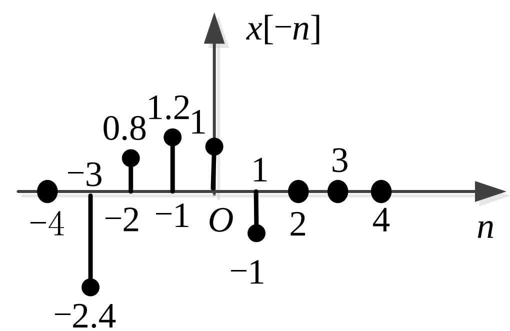
解：

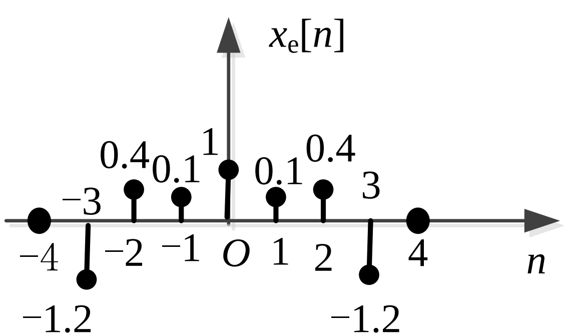
$$x[n]=-\delta[n+1]+\delta[n]+1.2\delta[n-1]+0.8\delta[n-2]-2.4\delta[n-3]$$

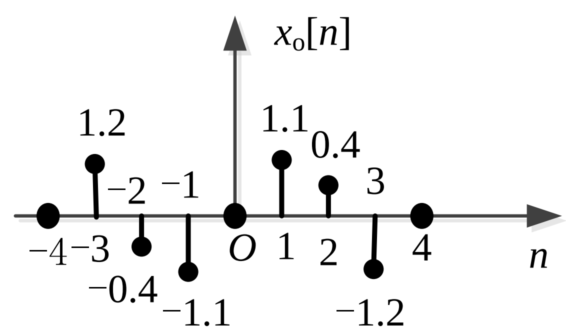


$$x_e[n]=\{x[n]+x[-n]\}/2$$

$$x_o[n]=\{f[n]-f[-n]\}/2$$







3.1.3 序列的运算

（7） 序列的卷积和运算

定义 $$s[n]=x[n]*y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]y[n-m]$$

例3： 计算下列序列对的卷积和。

$$f_1[n]=a^n u[n],\qquad f_2[n]=Au[n]\quad ,\quad (0<a<1)$$

解： $$s[n]=f_1[n]*f_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1[m]f_2[n-m]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^m u[m]Au[n-m]=A\left(\sum_{m=0}^{n}a^m\right)u[n]$$

$$=\frac{A\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}u[n]$$

3.1.3 序列的运算

卷积和计算方法二：

- 对比连续时间信号 的卷积积分计算：

$$s(t)=\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

— 图解四步骤：(1)反褶； (2)时移；

(3)相乘---确定积分上下限及被积函数； (4)积分

- 卷积和计算也可以类似，按照四步骤进行：

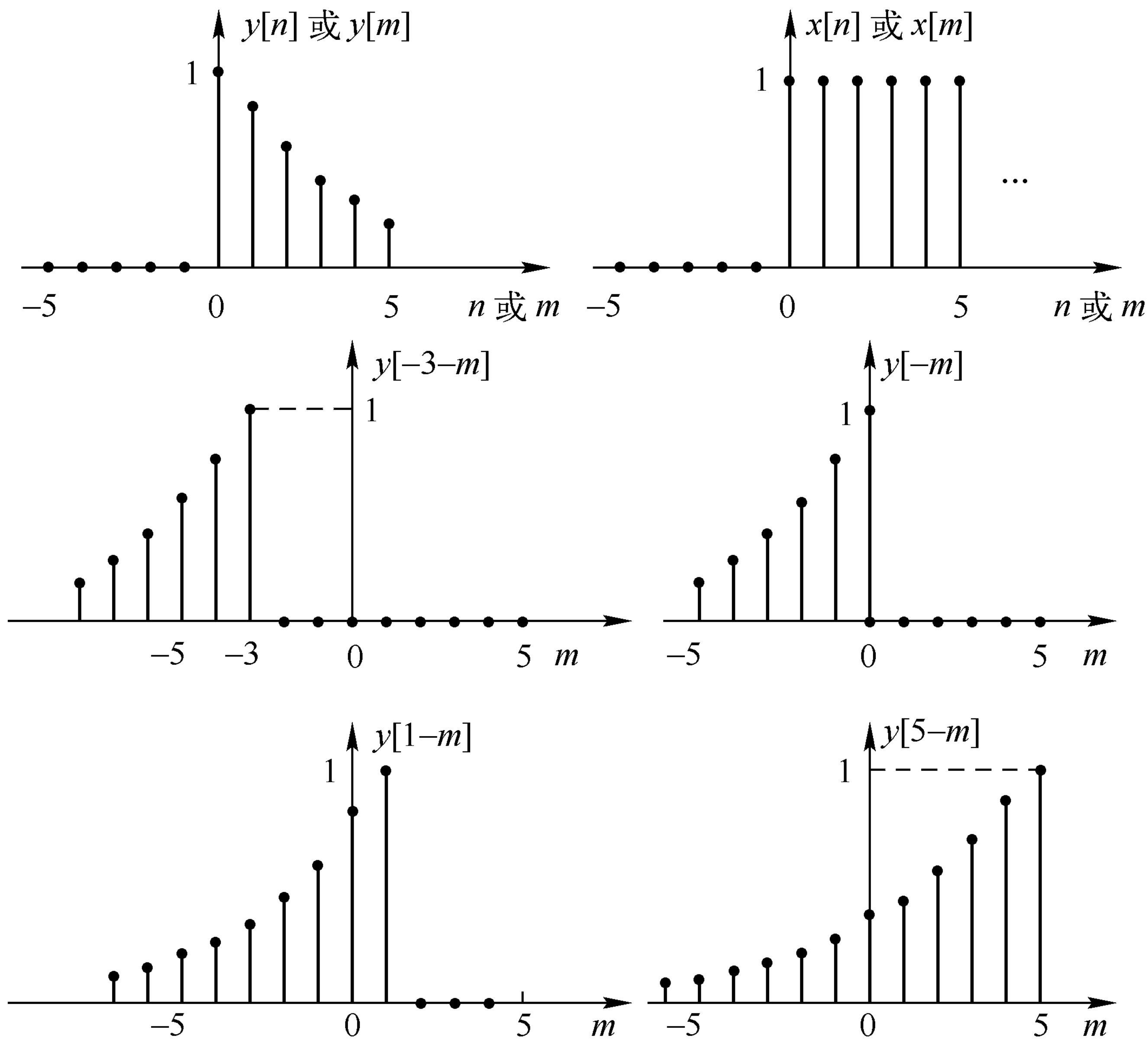
$$s[n]=x[n]*y[n]=\sum_{m=n_1}^{n_2} x[m]y[n-m]$$

(1)反褶； (2)时移；

(3)相乘---确定积分上下限及被积函数； (4)积分

3.1.3 序列的运算

例4：



y[n] 或 y[m]
1
–5
0
5
n 或 m
x[n] 或 x[m]
1
…
–5
0
5
n 或 m
y[–3–m]
1
–5
–3
0
5
m
y[–m]
1
–5
0
5
m
y[1–m]
1
–5
0
5
m
y[5–m]
1
–5
0
5
m

3.1.3 序列的运算

- 卷积和具有类似于卷积积分的诸多性质：

（C-1）卷积和的代数性质

（1）交换律： $f_1[n] * f_2[n] = f_2[n] * f_1[n]$

（2）分配律： $f[n] * \{x_1[n] + x_2[n]\} = f[n] * x_1[n] + f[n] * x_2[n]$

（3）结合律： $\{f_1[n] * f_2[n]\} * x[n] = f_1[n] * \{f_2[n] * x[n]\}$

假设： $s[n] = f_1[n] * f_2[n]$

（C-2） 卷积和的差分与累加性质

差分性质为： $\nabla s[n] = \left(\nabla f_1[n]\right) * f_2[n] = f_1[n] * \left(\nabla f_2[n]\right)$

积分性质为： $\sum_{m=-\infty}^{n} s[m] = \left(\sum_{m=-\infty}^{n} f_1[m]\right) * f_2[n] = f_1[n] * \left(\sum_{m=-\infty}^{n} f_2[m]\right)$

3.1.3 序列的运算

假设： $s[n]=f_1[n]*f_2[n]$

（C-3） 时移特性

$$s[n-n_0]=f_1[n-n_0]*f_2[n]=f_1[n]*f_2[n-n_0]$$

$$=f_1[n-n_1]*f_2[n-(n_0-n_1)]$$

（C-4） 与冲激序列或阶跃序列的卷积和

(1) $\delta[n]*f[n]=f[n]$; (2) $\delta[n-m]*f[n]=f[n-m]$;

(3) $u[n]*f[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} f[m]$; (4) $u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$

（C-5）时限特点： 如果 $f_1[n]$，$n_1\le n\le n_2$（定义域范围）；

$f_2[n]$，$n_3\le n\le n_4$

则： $s[n]=f_1[n]*f_2[n]$， $n_1+n_3\le n\le n_2+n_4$

3.1.3 序列的运算

卷积和计算方法三：

例5：计算下列序列对的卷积和。

$$f_1[n]=\{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,3,2\},\quad f_2[n]=\{\underset{\uparrow}{1},1,0.8,-2\}$$

解：
$$s[n]=f_1[n]*f_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[m]f_2[n-m]=\sum_{m=-2}^{3} f_1[m]f_2[n-m]$$

$$=f_2[n+2]+2f_2[n+1]+3f_2[n]+4f_2[n-1]+3f_2[n-2]+2f_2[n-3]$$

$$=\{1,3,\underset{\uparrow}{5.8},6.6,5.4,2.2,-3.6,-4.4,-4\}$$

该方法也等价于这样一个类似于多位数乘法的竖式计算过程：

$f_1[n]$				1	2	3	4	3	2
$f_2[n]$			×			1	1	0.8	−2
				−2	−4	−6	−8	−6	−4
			0.8	1.6	2.4	3.2	2.4	1.6	
		1	2	3	4	3	2		
	1	2	3	4	3	2			
$s[n]$	1	3	5.8	6.6	5.4	2.2	−3.6	−4.4	−4

（8）序列的能量与功率：

（2M+1）个样本的能量/功率

$$E_M=\sum_{n=-M}^{M}|f[n]|^2$$

$$P_M=\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}|f[n]|^2$$

所有样本的能量/功率

$$E_\infty=\lim_{M\to\infty}E_M=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f[n]|^2$$

$$P_\infty=\lim_{M\to\infty}P_M=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}|f[n]|^2$$

3.2 离散时间系统

▶连续时间系统：

— LTI连续时间系统

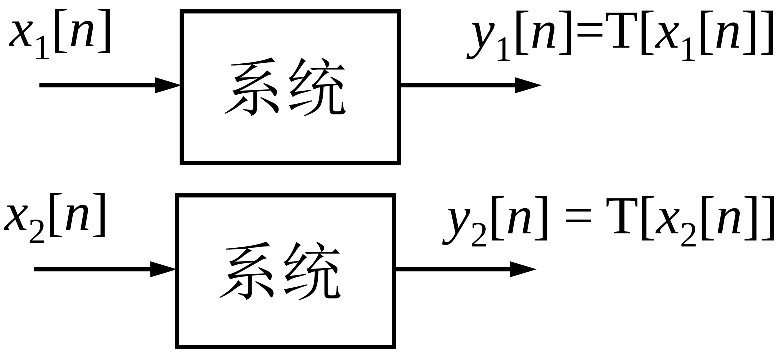
▶ 离散时间系统：

离散时间系统可以看成为一个离散信号的变换器，当输入信号$x[n]$经过该离散系统后，将变换成另一个序列------输出信号$y[n]$，其框图所示。

最基本的一类系统：线性时不变离散时间系统

3.2.1 LTI离散时间系统及其性质

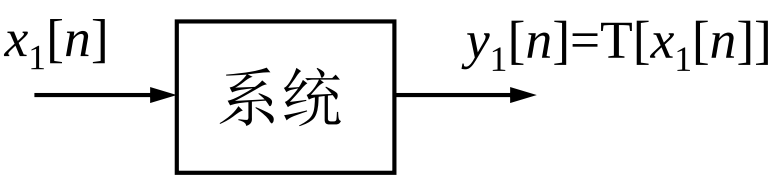
1. 线性特性： 包含叠加性与均匀性两种性质



----线性离散系统

2. 时不变特性： 若：$x[n] \rightarrow y[n]$，

则：$x[n-n_0] \rightarrow y[n-n_0]$，其中$\boldsymbol{n_0}$是常整数。



3.2.1 LTI离散时间系统及其性质

例6 判断累加器系统的线性特性及时不变特性。设累加器的输出$y[n]$与输入$x[n]$满足以下关系

$$y[n]=\mathrm{T}[x[n]]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

解： 假设 $y_1[n]=\mathrm{T}[x_1[n]]$ 和 $y_2[n]=\mathrm{T}[x_2[n]]$，

（1）当输入信号为$x_3[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$时，输出信号为

$$y_3[n]=\mathrm{T}[x_3[n]]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_3[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}\{a_1x_1[k]+a_2x_2[k]\}$$

$$=a_1\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]+a_2\sum_{k=-\infty}^{n}x_2[k]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$

所以 该系统具有线性性质。

3.2.1 LTI离散时间系统及其性质

（2）当输入信号为$x_4[n]= x_1[n-m]$时，输出信号为

$$y_4[n] = \mathrm{T}[x_4[n]] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_4[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k-m]$$

$$\underline{\underline{k-m=\mu}} = \sum_{\mu=-\infty}^{n-m} x_1[\mu] = y_1[n-m]$$

所以该系统是**时不变系统**。

综合起来，累加器系统是**线性时不变系统**。

3. 因果性：如果系统的输出信号$y[n]$在$n = n_0$时刻的输出样本$y[n_0]$仅由输入信号$x[n]$在$n \le n_0$时刻的样本值，即$\{x[n]|n \le n_0\}$决定，而与$n > n_0$时的样本值$x[n]$无关，则该系统是**因果系统**。

3.2.1 LTI离散时间系统及其性质

4. 稳定性： 当且仅当每一个有界的输入信号$x[n]$激励系统时，产生的输出信号$y[n]$也是有界的，则系统称为**稳定系统（BIBO）**。

可以看出：因果离散系统与稳定离散系统的定义和连续因果系统和稳定系统的定义相同。

例7 判断例6累加器$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$是否是因果系统及稳定系统。

解： 输出信号$y[n]$在时刻$n=m$的数值只和输入信号$x[n]$在时刻$n\le m$的数值有关，因此这是因果系统。

此外，如果$x[n]=u[n]\le \mathrm{A_x}$，则

$$y[n]=\mathrm{T}[x[n]]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]=(n+1)u[n]\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

因此，该系统是不稳定系统。

3.2.2 线性常系数差分方程

累加器： $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n]=y[n-1]+x[n]$$

即 $y[n]-y[n-1]=x[n]$ —— 常系数线性差分方程

▶ 线性时不变系统：既具有线性性质又具有时不变性质的系统。

— 系统方程：常系数线性差分方程（如上例累加器系统）。

— 与LTI连续系统相比：线性常系数微分方程，如RLC电路。

— LTI离散系统差分方程：

通常可以描述数据之间的算法联系

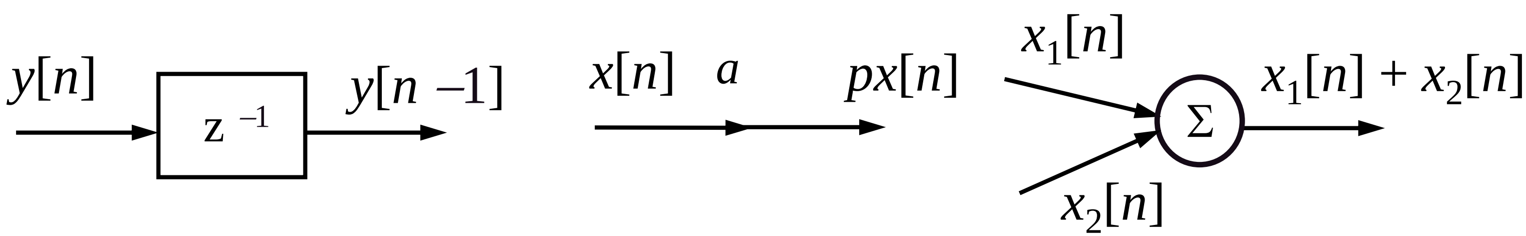
3.2.2 线性常系数差分方程

例8 假设银行的零存储蓄结算品种：每月存蓄或支出资金为$x[n]$，银行月息固定为p，该账户在第n月的结余资金为$y[n]$，确定$y[n]$与$x[n]$的关系。

解：容易判断： $y[n]=y[n-1]+y[n-1]\cdot p+x[n]$

即 $y[n]-(1+p)y[n-1]=x[n]$

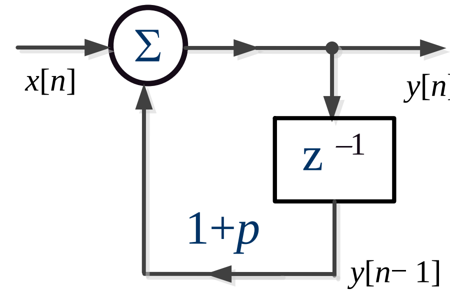
- 一般地，用加法器、数乘器和延时器（表示$y[n-1]$）表示离散信号之间的运算关系，进行描述离散系统的输入—输出关系。
- 上述运算关系表示成图形的连接方式，称为系统框图。



3.2.2 线性常系数差分方程

- 银行零存储蓄账户的模型就可以用框图表示为：

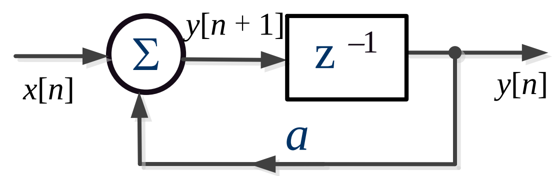
$$y[n]-(1+p)y[n-1]=x[n]$$



令 $a=1+p$，此框图就是教材**例3.2-3**

—— 后向差分方程式

例3.2-4：图中，$x[n]$和$y[n]$分别表示系统的输入和输出信号，写出系统表示的数学方程式。



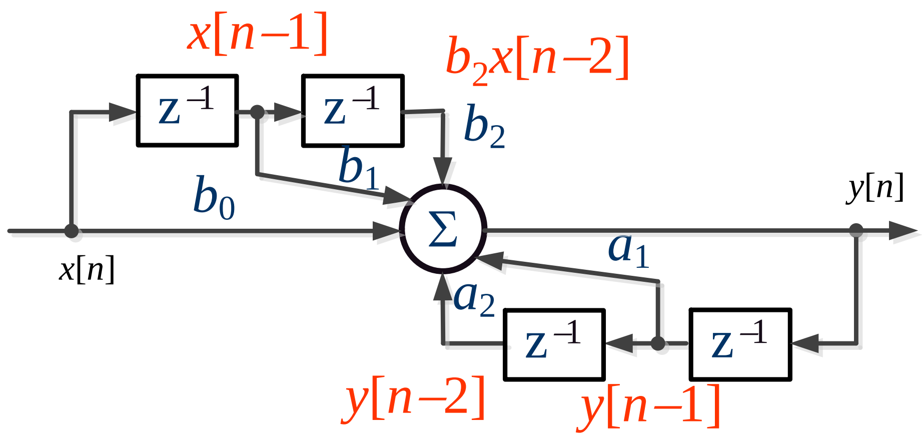
解：仿照上例： $y[n+1]-ay[n]=x[n]$

—— 前向差分方程式

—— 一阶差分方程式

3.2.2 线性常系数差分方程

例3.2-5：写出下图所示系统的数学方程式。



解：**仿照上例**：

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2]$$

即 $y[n]-a_1y[n-1]-a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$

—— 二阶常系数线性差分方程式

3.2.2 线性常系数差分方程

- LTI离散系统运算框图的特点：

  （1）信号之间运算必须顺着箭头方向；

  （2）加法器对输入输出信号的运算起着重要的连接作用。

- 差分方程的求解方法

  1. 递推解法（迭代法）
  2. 时域经典法
  3. 系统解法：零输入、零状态响应解法

  —— **时域直接求解法**

  4. z变换法（**第 8章**）
  5. 状态空间分析法（**第 9章**）

  —— **变换域算子求解法**

- 求解条件包括：

  $x[n]$和起始条件（边界条件）：$y[-1]$，$y[-2]$等。

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

N阶LTI离散时间系统，其激励信号 $x[n]$与响应信号 $y[n]$用N阶常系数线性差分方程表示

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] =$$

$$b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M]$$

式中，系数 a_i，b_j都是常（实）数。

▶唯一解条件：已知 $x[n]$ 和起始条件 $y[-1]$，$y[-2]$等共N个；

▶方程解的组成：$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

其中：

$y_h[n]$ 具有指数函数形式 $A\alpha^n$，称为齐次解，也称自由响应；

$y_p[n]$与$x[n]$形式相同，称为特解，也称强迫响应。

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

—— 齐次解$y_h[n]$，即$A\alpha^n$，是下式齐次差分方程的通解

$$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+\cdots+a_N y[n-N]=0$$

参数α是方程的根：$a_0+a_1\alpha^{-1}+\ldots+a_{N-1}\alpha^{-(N-1)}+a_N\alpha^{-N}=0$

—— 特征方程：$a_0\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\ldots+a_{N-1}\alpha+a_N=0$

—— 特征根：共N个，可以是单根，也可能重根；可以是实根，也可以是复数根（共轭，因为系数a_i都是实数）

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{N-1},\ \alpha_N$$

（1）特征根都为单根，微分方程的齐次解为

$$y_h[n]=A_1\alpha_1^{\,n}+A_2\alpha_2^{\,n}+\ldots+A_N\alpha_N^{\,n}$$

这里 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ 是由初始条件决定的系数。

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

（2）特征根为共轭复数的单根，设 $\alpha_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{j}\beta = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega}$

则所对应的齐次解为

$$A_1\alpha_1^{\ n}+A_2\alpha_2^{\ n}=A_1(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^n+A_2(r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n=r^n\left(C_1\cos\omega n+C_2\sin\omega n\right)$$

（3）特征根有重根，假设 α_1 是特征方程的 k 重根，则齐次解中相应于 α_1 的部分将有 k 项：

$$(A_1n^{k-1}+A_2n^{k-2}+\ldots+A_{k-1}n+A_k)\alpha_1^{\ n}$$

注意：N阶差分方程的齐次解中有待确定的系数总共是N个

$$A_1,A_2,\cdots,A_N$$

它们由差分方程的边界条件(初始条件)确定。

- 边界条件 $y[n_0]$，当取 n_0 =0, 1, 2，…时，称为初始条件或初始状态。

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

例9： 求下述差分方程的齐次解，

$$(1)\ \ y[n]+0.4y[n-1]-0.12y[n-2]=2x[n]+x[n-1]$$

$$(2)\ \ y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{13}{8}y[n-2]=x[n-1]$$

解： （1）特征方程为：$\alpha^2+0.4\alpha-0.12=0$，

特征根：$\alpha_1=-0.6$，　$\alpha_2=0.2$

齐次解为：$y_\mathrm{h}[n]=A_1(-0.6)^n+A_2(0.2)^n$

（2）特征方程为：$\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha+\frac{13}{8}=0$

特征根：$\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm \mathrm{j}5}{4}=\frac{\sqrt{26}}{4}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\theta}$，　$\theta=\arctan 5$

齐次解为：$y_\mathrm{h}[n]=\left(\frac{\sqrt{26}}{4}\right)^n\left(C_1\cos\theta n+C_2\sin\theta n\right)$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

▶ 特解$y_p[n]$ 是针对输入信号$x[n]$ 的特别部分。

一般和输入信号的数学表示相同，实际上是和下式（自由项）相同： $b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_Mx[n-M]$

自 由项	特 解 形 式	自 由 项	特 解 形 式
C（常数）	B（常数）	$e^{j\omega n}$	$Ae^{j\omega n}$（A为复数）
n	C_0+C_1n	$\sin\omega n$（$\cos\omega n$）	$C_1\sin\omega n+C_2\cos\omega n$
n^k	$C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_{k-1}n^{k-1}+C_kn^k$	α^n	$C\alpha^n$（α不是方程的特征根）
$e^{\alpha n}$（α为实数）	$Ce^{\alpha n}$	α^n	$(C_0+C_1n+C_2n^2+\ldots+C_{r-1}n^{r-1}+C_rn^r)\alpha^n$（$\alpha$是方程的$r$重特征根）

完全解： $y[n]=y_h[n]+y_p[n]$

例10 求差分方程 $y[n]-2y[n-1]-3y[n-2]=x[n]$

的完全解。其中激励信号为 $x[n]=n^2u[n]$

且边界条件为：$y[-1]=-1$ ，$y[-2]=0$

解： （1）齐次解：$\alpha^2-2\alpha-3=0$, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-1$

$$y_h[n]=c_1\cdot 3^n+c_2\cdot(-1)^n$$

（2）将$x[n]=n^2u[n]$代入差分方程的右端，得自由项为$n^2u[n]$

从而特解为 $y_p[n]=D_0n^2+D_1n+D_2$

其中， D_0, D_1和D_2为待定系数，代入原方程得

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

比较两端系数得到

$$D_0=-1/4,\quad D_1=-1,\quad D_2=-9/8$$

所以特解为 $y_{\mathrm{p}}[n]=-\dfrac{1}{4}n^2-n+\dfrac{9}{8}$

完全解为 $y[n]=y_{\mathrm{h}}[n]+y_{\mathrm{p}}[n]=c_1\cdot 3^n+c_2\cdot(-1)^n-\dfrac{1}{4}n^2-n+\dfrac{9}{8}$

（3）将边界条件 $y[-1]=-1, y[-2]=0$ ，代入上式，经过迭代

得到 $y[0]=-2, y[1]=-6$

从而： $c_1=-9/8,\ c_2=1/4$

所以完全响应为 $y[n]=-\dfrac{9}{8}\cdot 3^n+\dfrac{1}{4}\cdot(-1)^n-\dfrac{1}{4}n^2-n+\dfrac{9}{8},\quad n\geq 0$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

起始条件： $y[-1]$，$y[-2]$等，即 $\mathbf{y}[k], k \le -1$；

初始条件：$y[0]$，$y[1]$，$y[2]$等，即 $\mathbf{y}[k], k \ge 0$。

初始条件可以由起始条件和输入信号$\mathbf{x}[n], n \ge 0$ 经差分方程迭代确定。

即类似于求解微分方程， 要确定齐次解中的待定系数A_i，必须依据完全解和初始条件$y[0]$，$y[1]$，$y[2]$等确定。

3.3 线性时不变离散时间系统的单位样值响应

3.3.1 零输入响应与零状态响应

$$\text{自由响应} = \sum_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n = \text{齐次解}$$

$$\text{强迫响应} = y_{\mathrm{p}}[n] = \text{特解}$$

$$\text{完全响应} = \sum_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n + y_{\mathrm{p}}[n] = \text{完全解}$$

$$\text{完全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

3.3 线性时不变离散时间系统的单位样值响应

零状态响应 $y_{zs}[n]$：当起始状态 $y_{zs}[k]=0,\ k\le -1$时，由激励信号$x[n]$作用系统所产生的响应。

零状态响应的形式为：$y_{zs}[n]=\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k{}^n+y_p[n]$

其中系数C_{zsk}由零状态的初始条件 $y_{zs}[k],k\ge 0$ 来确定，若

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_Ny[n-N]=$$

$$b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_Mx[n-M]$$

则 $y_{zs}[0]=\sum_{i=0}^{M}b_ix[-i],\ y_{zs}[1]=-a_1y_{zs}[0]+\sum_{i=0}^{M}b_ix[1-i],\ldots$

零输入响应 $y_{zi}[n]$：当激励信号$x[n]=0$，由起始状态 $y[-1]$, $y[-2]$, …, $y[-N]$所引起的响应。 $y_{zi}[n]=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k{}^n$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p[n]}_{\text{强迫响应}}=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+y_p[n]}_{\text{零状态响应}}$$

例3.3-1 已知某系统的差分方程为

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=\frac{1}{3}u[n]$$

试分别求下面两种起始状态下的完全响应。

（1）$y[-1]=0$，

（2）$y[-1]=1$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

解：

（1）齐次解为 $y_{\mathrm{h}}[n]=C\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

当$n\geq 0$时，方程右端自由项为常数1/3，故可假设特解为D，将其代入差分方程，解得D = 2/3。从而完全解为

$$y[n]=C\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$$

再将$y[-1]$ = 0代入方程，得到$y[0]$ = 1/3，因而可得C = -1/3。所以完全响应（零状态响应）写为

$$y[n]=y_{\mathrm{zs}}[n]=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\right]u[n]$$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

（2）齐次解为 $y_{\mathrm{h}}[n]=C\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

当$n\geq 0$时，方程右端自由项为常数1/3，故可假设特解为D，将其代入差分方程，解得D = 2/3。从而完全解为

$$y[n]=C\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}$$

再将$y[-1]$ = 1代入方程，得到$y[0]$ = 5/6，从而得到C = 1/6。

所以完全响应为

$$y[n]=\left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\right]u[n]$$

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

也可以按下述方法求解：

零输入响应为 $$y_{zi}[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

再将$y[-1]=1$代入$y_{zi}[n]$，可得到$A=1/2$。所以$y_{zi}[n]$ 为

$$y_{zi}[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

零状态响应为 $$y_{zs}[n]=B\left(\frac{1}{2}\right)^n+y_p[n]$$

当$n\geq 0$时，方程右端自由项为常数1/3，故可假设$y_p[n]$为D，将其代入差分方程，解得$D=2/3$。

3.2.3 线性常系数差分方程的经典解法

考虑零状态条件，即$y[-1] = 0$代入方程，迭代出$y[0] = 1/3$，可得到$B = -1/3$。所以零状态响应为

$$y_{zs}[n] = \left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\right]u[n]$$

完全响应为：

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\right]u[n]$$

3.3.2 单位样值响应——定义

▶ **单位样值响应：** 离散时间系统受单位样值信号$\delta[n]$激励而产生的零状态响应，称为单位样值响应（也称为单位冲激响应），一般以$h[n]$表示。$h[n]$在离散时间系统中的作用，完全类似于连续系统中的由$\delta(t)$引起的冲激响应$h(t)$。

连续系统： $x(t)=\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y_{zs}(t)=h(t)$

离散系统： $x[n]=\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y_{zs}[n]=h[n]$

3.3.2 单位样值响应——求解

例3.3-2： 已知$y[n]-1/3y[n-1]=x[n]$, 试求其单位样值响应 $h[n]$。

解： $y[n] - 1/3\, y[n-1] = x[n]$

$$h[n] - 1/3h[n-1] = \delta[n]$$

对于因果系统，

$h[-1]=0$， $x[-1]=\delta[-1]=0$

$$h[0]=\frac{1}{3}h[-1]+\delta[0]=0+1=1$$

$$h[1]=\frac{1}{3}h[0]+\delta[1]=\frac{1}{3}$$

$$h[2]=\frac{1}{3}h[1]+\delta[2]=(\frac{1}{3})^2$$

$$\vdots$$

$$h[n]=\frac{1}{3}h[n-1]+\delta[n]=(\frac{1}{3})^n$$

$$\boxed{h[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

------ 齐次解的形式

例3.3-3 已知因果系统的差分方程为

$$y[n]-4y[n-1]+4y[n-2]=x[n]$$

求$h[n]$。

解：写出特征方程 $\alpha^2-4\alpha+4=0$，$\alpha_{1,2}=2$

$$h_h[n]=(C_1 n+C_2)\cdot 2^n$$

起始状态为零 $h[-2]=h[-1]=0$ ，则 $h[0]=1$，$h[1]=4$

$$\begin{cases} 1=C_2 \\ 4=(C_1+C_2)2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1 \end{cases}$$

$$h[n]=(n+1)\cdot 2^n u[n]$$

3.3.3 LTI离散时间系统的卷积和分析

◗ 单位样值响应（ **h[n]** ）的应用之一：

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]\xrightarrow{\text{LTI离散系统}}y_{zs}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$$

A） 求 LTI系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$（输入为 $\forall x[n]$）

$$y_{zs}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]=x[n]*h[n]$$

B） 求LTI 系统的单位阶跃响应（g[n] 或 s[n] ）：

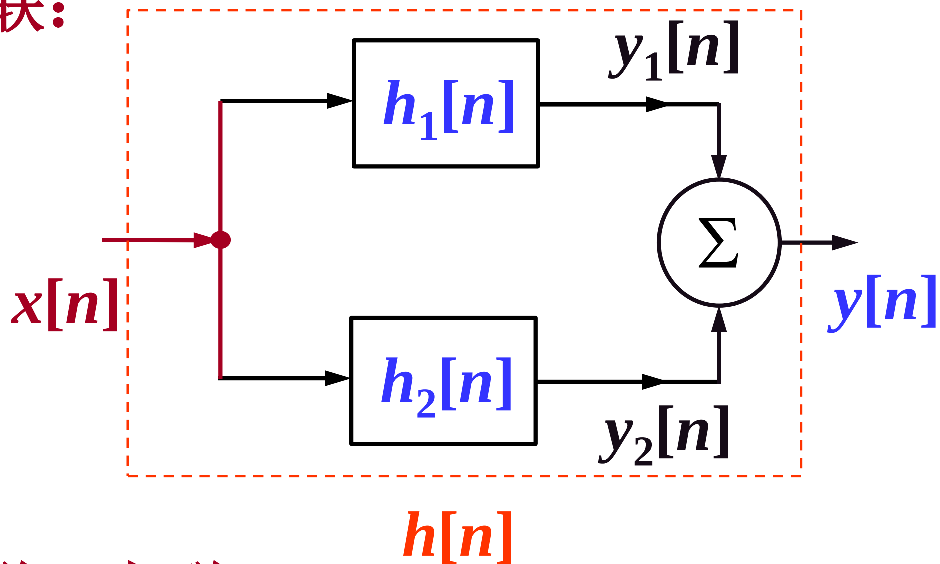
如果输入信号 **x[n] = u[n]** 且LTI离散系统起始条件为0，则此时系统的响应称为 **g[n]**。

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]\xrightarrow{\text{LTI离散系统}}y_{zs}[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}h[m]$$

3.3.3 LTI离散时间系统的卷积和分析

C）分析求解系统连接而组成的大系统：

▶并联：



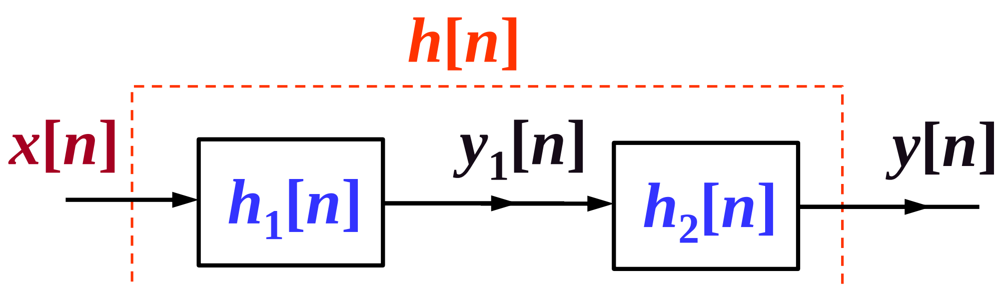
$$\boxed{h[n] = h_1[n] + h_2[n]}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$= x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\}$$

▶级联（串联）：



$$\boxed{h[n] = h_1[n] * h_2[n]}$$

$$y[n] = y_1[n] * h_2[n]$$

$$= \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$$

$$= x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

3.3.4 LTI离散系统的因果性与稳定性

- 单位样值响应（ $h[n]$ ）的应用之二：

A）利用LTI系统的冲激响应 判断LTI系统的因果性

如果 $n < n_0$时， 输入$x[n] = 0$ 且输出$y[n] = 0$，则该系统是因果系统。

如果 LTI系统的冲激响应 $h[n] = h[n]\,u[n]$ ， 即冲激响应$h[n]$是因果序列，则该系统是因果系统，反之亦然。

即： **LTI系统是因果系统的充要条件是冲激响应 $h[n]$ 是因果序列。**

B）利用LTI系统的冲激响应 判断LTI系统的稳定性

当系统输入$x[\mathbf{n}]$ 有界，即 $|x[\mathbf{n}]| \le \mathrm{A_x}$时，
其输出$y[\mathbf{n}]$也有界，即 $|y[\mathbf{n}]| \le \mathrm{B_y}$，则该系统是稳定系统。

如果 LTI系统的冲激响应 $h[\mathbf{n}]$ 是绝对可和函数，即满足条件不等式:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| = S_h < \infty$$

则该系统是稳定系统，反之亦然。

即： **LTI系统是稳定系统的充要条件是冲激响应 $h[n]$是绝对可和函数。**

3.3.4 LTI离散系统的因果性与稳定性

例13： 下述函数为LTI系统的冲激响应$h[n]$，判断这些系统是否稳定，是否具有因果性。

$$h_1[n]=2^n u[n],\qquad h_2[n]=2^n u[-n+2],\qquad h_3[n]=(-1)^n\ u[n-2]$$

$$h_4[n]=u[n]-u[n-10],\quad h_5[n]=(-0.8)^n u[n-2],\quad h_6[n]=(1.1)^{-n}\cos\pi n\, u[n+1]$$

解： 稳定系统有：

$$h_2[n],\quad h_4[n],\quad h_5[n],\quad h_6[n]$$

因果系统有：

$$h_1[n],\quad h_3[n],\quad h_4[n],\quad h_5[n]$$

3.4 用MATLAB产生和实现离散信号与系统

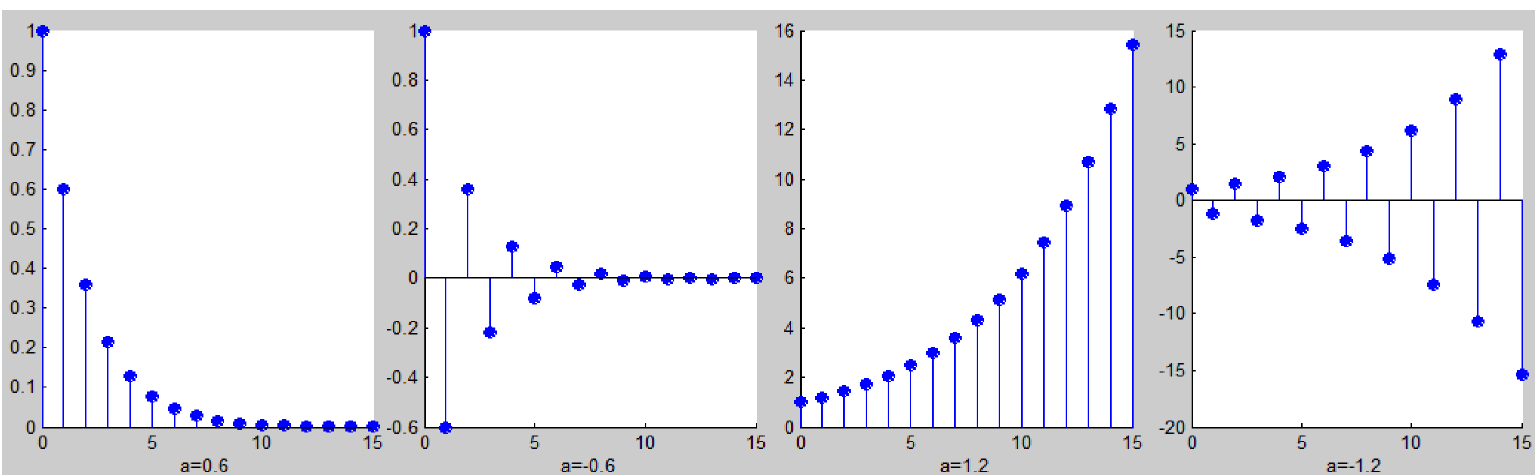
函数stem —— 绘制离散信号图形

例3.4-1 绘制指数序列的图形，其中a分别为0.6, –0.6, 1.2, –1.2，观察分析不同的a对时域序列的影响。

$$x[n] = a^n u[n]$$

解：

```
n = 0:15;x1 = 0.6.^n;x2 = (-0.6).^n;x3 = 1.2.^n;x4 = (-1.2).^n;
subplot(141);stem(n,x1,'filled');xlabel('a = 0.6');
subplot(142);stem(n,x2,'filled');xlabel('a = -0.6');
subplot(143);stem(n,x3,'filled');xlabel('a = 1.2');
subplot(144);stem(n,x4,'filled');xlabel('a = -1.2');
```



3.4 用MATLAB产生和实现离散信号与系统

例3.4-2 绘制矩形序列和正弦序列的图形。

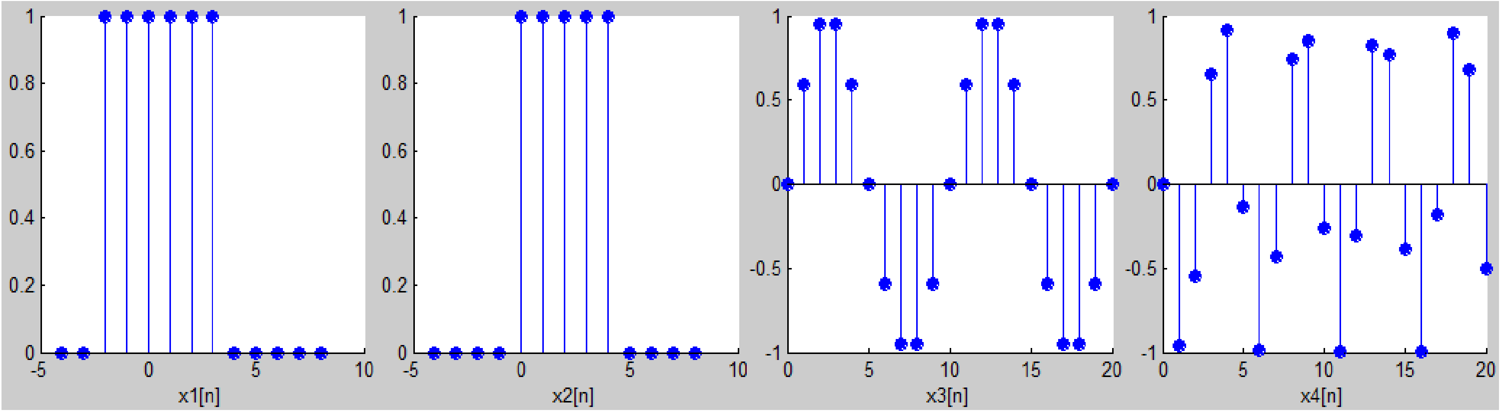
$$x_1[n]=u[n+2]-u[n-4] \qquad x_2[n]=u[n]-u[n-5]$$

$$x_3[n]=\sin\frac{n\pi}{5}\cdot u[n] \qquad x_4[n]=\sin 5n\cdot u[n]$$

解：编写单位阶跃序列的函数jyxl：

```
function x = jyxl (n)
x = (n> = 0);
```

```
n = -4:8; x1 = jyxl (n+2)- jyxl (n-4);x2 = jyxl (n)- jyxl (n-5);
n1 = 0:20; x3 = sin(n1*pi/5); x4 = sin(5*n1);
subplot(141); stem(n,x1,'filled'); xlabel('x1[n]');
subplot(142); stem(n,x2,'filled'); xlabel('x2[n]');
subplot(143); stem(n1,x3,'filled'); xlabel('x3[n]');
subplot(144); stem(n1,x4,'filled'); xlabel('x4[n]');
```



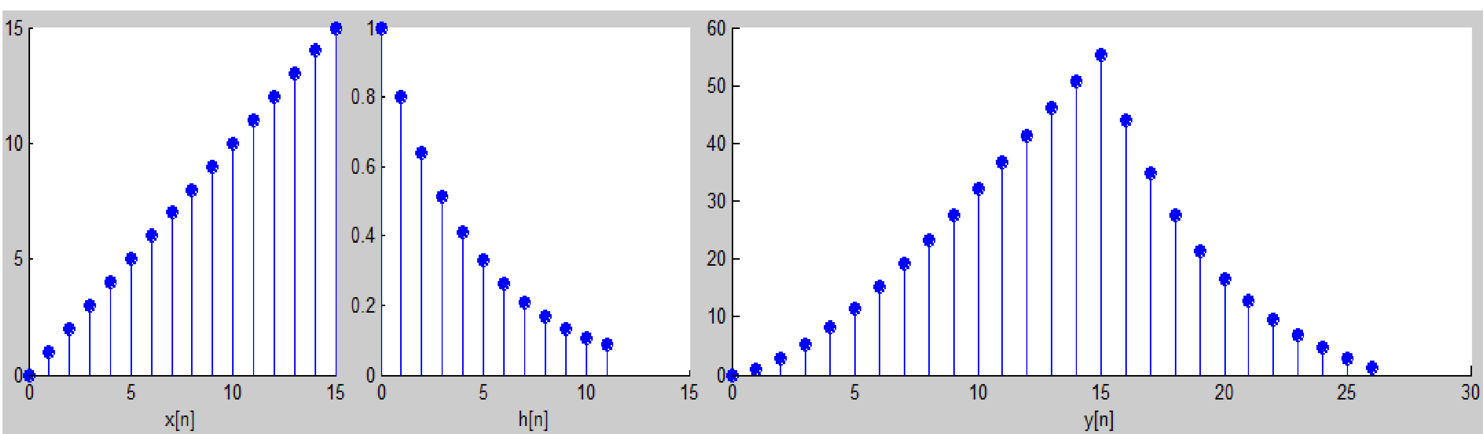
3.4 用MATLAB产生和实现离散信号与系统

例3.4-3 求系统的响应，已知LTI离散时间系统的激励序列和单位样值响应分别为：

$$x[n]=n(u[n]-u[n-16]) \qquad h[n]=0.8^{n}(u[n]-u[n-12])$$

解：

```
n1=0:15;x=n1;n2=0:11;h=(0.8).^n2;
y=conv(x,h);n=length(y);n3=0:n-1;
subplot(141);stem(n1,x,'filled');xlabel('x[n]');
subplot(142);stem(n2,h,'filled');xlabel('h[n]');
subplot(143);stem(n3,y,'filled');xlabel('y[n]');
p=get(gca,'position');p(3)=2.4*p(3);set(gca,'position',p);
```



3.4 用MATLAB产生和实现离散信号与系统

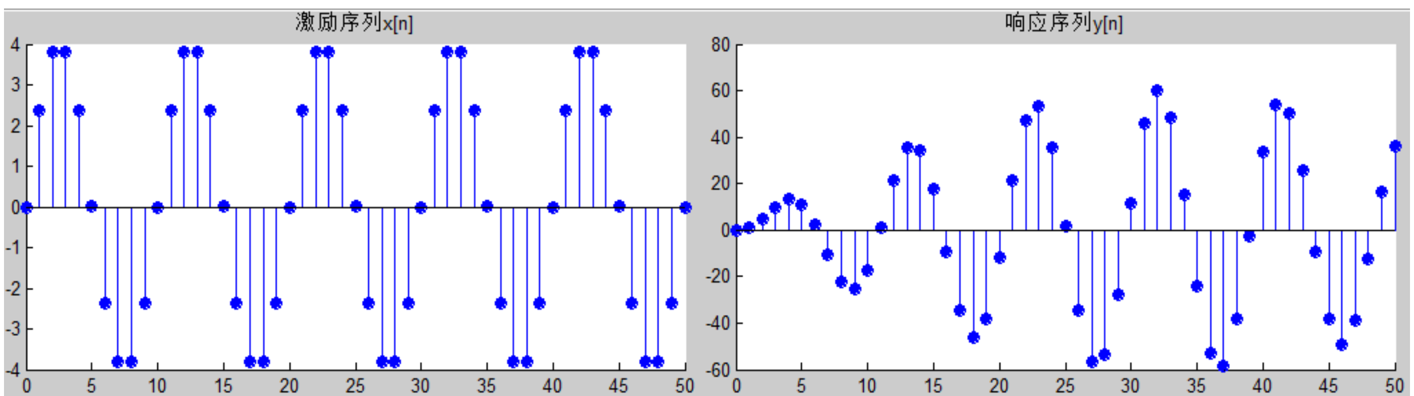
例3.4-4 求解差分方程，并绘制激励和响应序列的图形，已知差分方程和输入信号分别为：。

$$2y[n]-3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]+x[n-1]$$

$$x[n]=4\sin\frac{n\pi}{5}\cdot u[n]$$

解：

```
a=[2 -3 2];b=[1 1];n=0:50;x=4*sin(n*pi/5);
y=filter(b,a,x);subplot(211);stem(n,x,'filled');
title('激励序列x[n]');
subplot(212);stem(n,y,'filled');title('响应序列y[n]');
```



本章小结

1. 离散时间信号 $x[n]$表示及典型离散信号

2. 离散信号的运算

3. LTI离散系统的表示与分析求解

4. LTI离散系统的单位样值响应 $h[n]$