第7章 离散时间信号与系统的频域分析

7.1 离散时间傅里叶变换

7.2 常用序列的傅里叶变换

7.3 离散时间序列傅里叶变换的性质

7.4 离散时间系统的频域分析

7.5 数字滤波器的概念

7.6 离散信号与系统频域的MATLAB分析

7.1 离散时间傅里叶变换

▶ 第4章—— 连续时间信号的频域表示与分析

非周期信号***f*(*t*)** 的傅里叶变换：

$$F(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt$$

------ 连续谱、相对幅度

傅里叶逆变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$F(\mathrm{j}\Omega)=\left|F(\mathrm{j}\Omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}$$

$\left|F(\mathrm{j}\Omega)\right|$ ------------ 幅度谱　　　$\varphi(\Omega)$ ------------ 相位谱

7.1 离散时间傅里叶变换

7.1.1 离散时间傅里叶变换

- 序列$x[n]$进行复指数加权求和，从而表示成连续的函数——离散时间傅里叶变换（DTFT）$X(e^{j\omega})$，即 。

$$\text{DTFT:}\quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\text{或者}\quad X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T n}$$

其中：Ω -------- 模拟角频率， T --------取样间隔

$$\omega = \Omega T \quad (\text{为数字频率})$$

上两式是序列$x[n]$的傅里叶变换两种不同的表示形式。

DTFT存在的充分条件： $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

7.1.1 离散时间傅里叶变换

$$\text{DTFT}:\quad X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$\xleftrightarrow{\text{IDTFT}} x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}\omega$$

例7.1-1 求序列 $x[n]=a^n u[n]$（$|a|<1$）的傅里叶变换$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。

解： 据DTFT：$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a^n u[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}=\frac{1}{1-a(\cos\omega-\mathrm{j}\sin\omega)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)}$$

7.1.2 DTFT特点与性质

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

（1） 若序列$x[n]$的DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，其自变量$\omega$为实变量，但函数值一般是复数值的复值函数；

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \underbrace{\boxed{|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|}}_{\text{幅度谱}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\overbrace{\boxed{\varphi(\omega)}}^{\text{相位谱}}}$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X_{\mathrm{re}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + \mathrm{j}\, X_{\mathrm{im}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

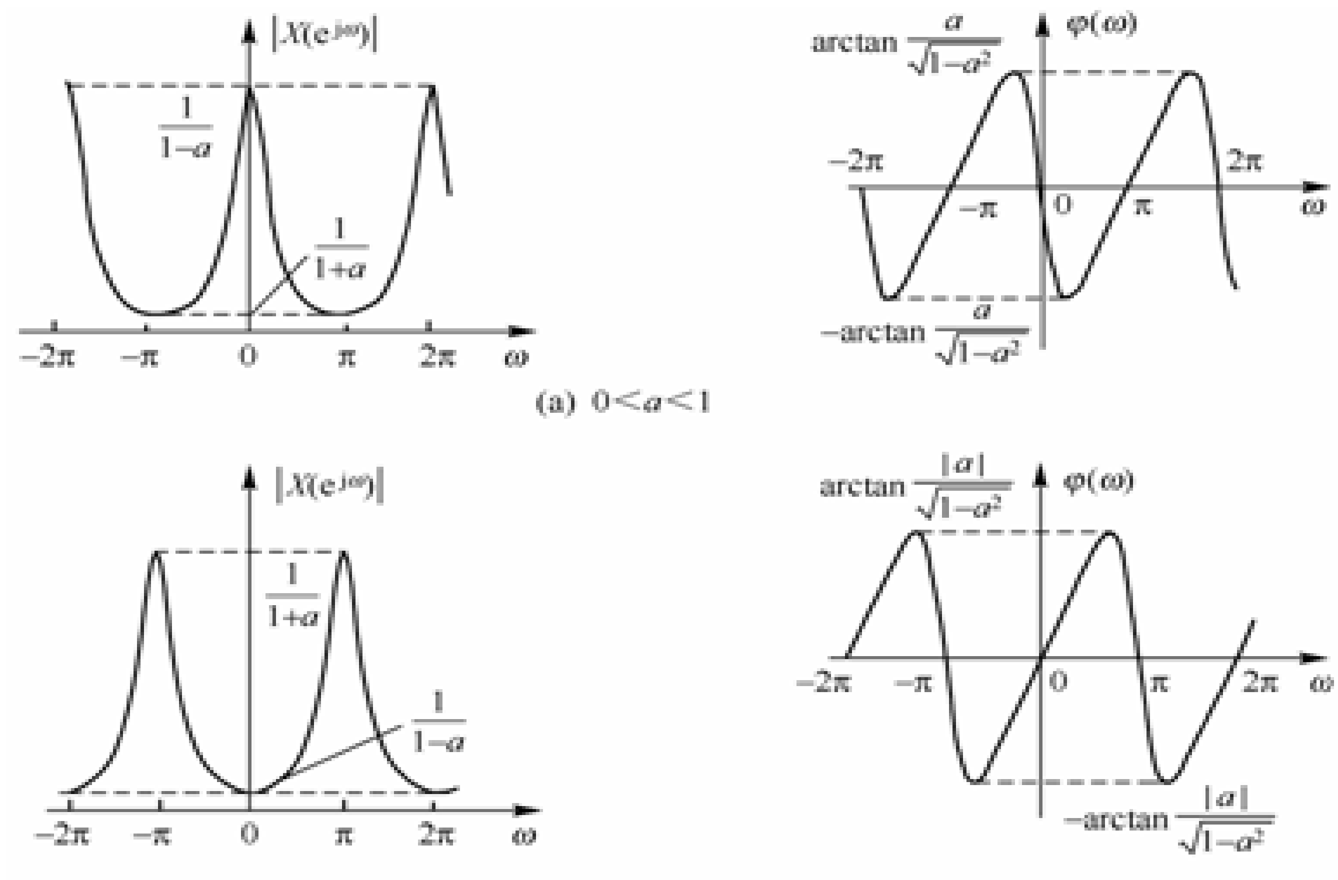
（2）DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是周期函数，周期为2π，因为复指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$是周期为2π的周期函数；

（3） 如果实序列$x[n]$绝对可和，则其DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的自变量$\omega$是连续变量，而$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是连续的复值函数。

7.1.2 DTFT特点与性质

例7.1-1 $x[n]=a^n u[n]$（$|a|<1$）的 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}=\dfrac{1}{1-a\cos\omega+\mathrm{j}a\sin\omega}$

$$\left|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}\qquad \varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$



(a) $0<a<1$

(b) $-1<a<0$

7.1.2 DTFT特点与性质

例7.1-2 计算矩形脉冲序列$x[n] = u[n + N_1] - u[n-(N_1+1)]$的傅里叶变换$X(e^{j\omega})$，当$N_1 = 2$时，画出其频谱图形。

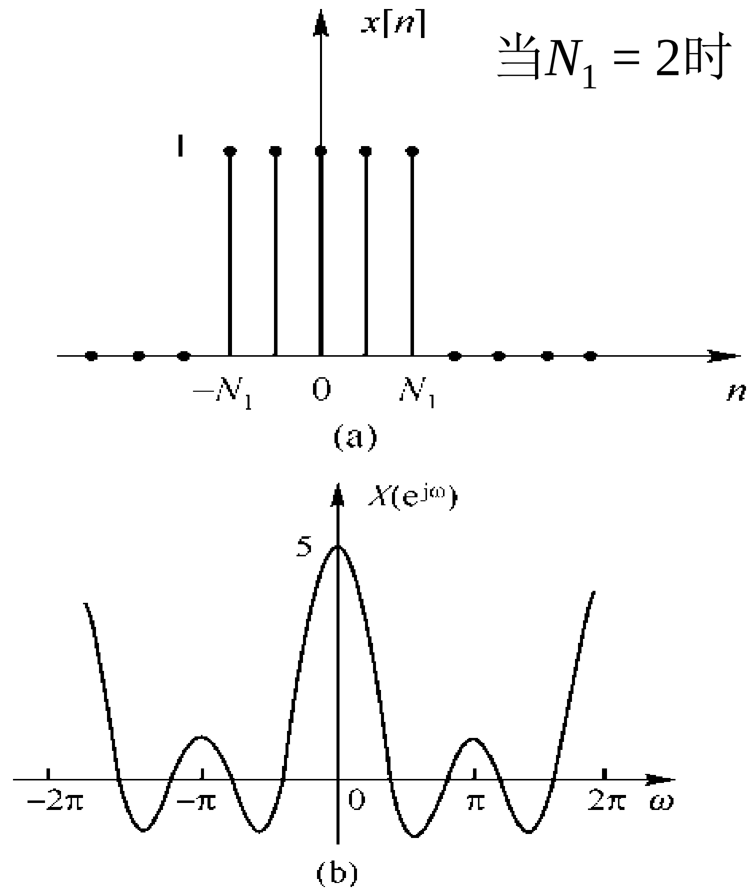
解:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega(N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

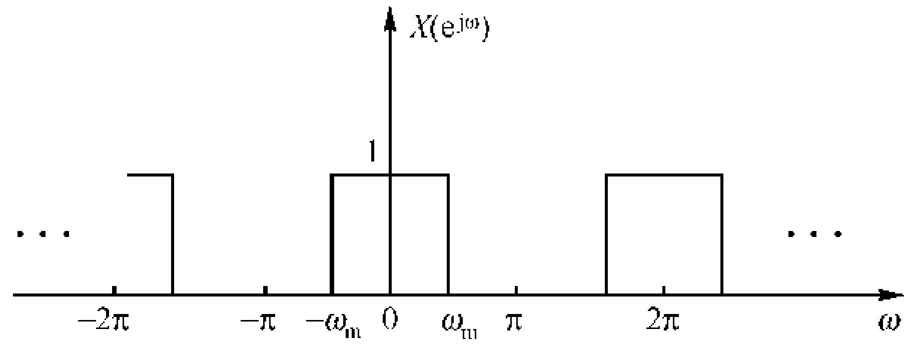
$$= \frac{\sin[\omega(N_1+1/2)]}{\sin(\omega/2)}$$

当$N_1 = 2$时



7.1.2 DTFT特点与性质

例7.1-3 已知序列$x[n]$的频谱$X(e^{j\omega})$如右图所示，求其逆变换即IDTFT $x[n]$。



(a)

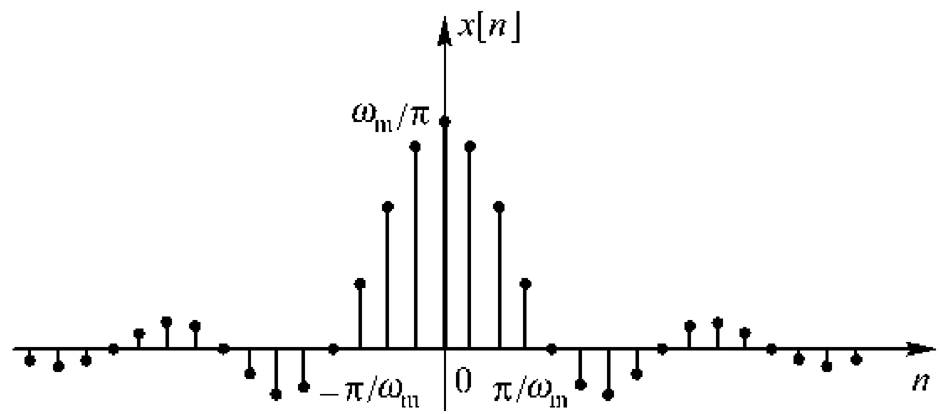
解：

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\omega_m}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_m n}{\omega_m n}$$

当$\omega_m=\pi/4$时，$x[n]$如图所示：



(b)

7.1.3 序列DTFT与采样信号傅里叶变换的联系

1. 离散序列 x[n] 与采样信号$x_s(t)$

离散序列： $x[n]=x_1(t)\big|_{t=nT}=x_1(nT)$

采样信号： $x_s(t)=x_1(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\delta(t-nT)$

2. 各自的傅里叶变换：

$$x[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$x_s(t)\xleftrightarrow{\text{CTFT}}X_s(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

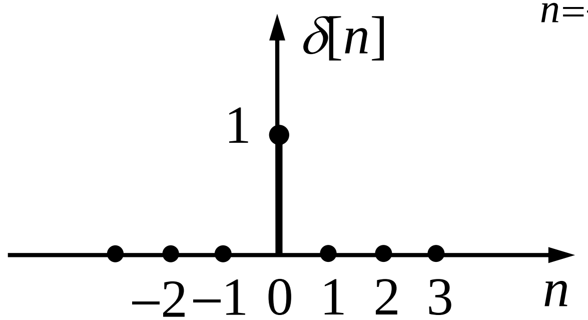
即 $X_s(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\delta(t-nT)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$

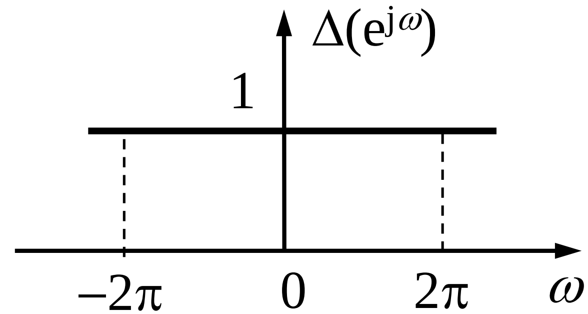
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega T}$$

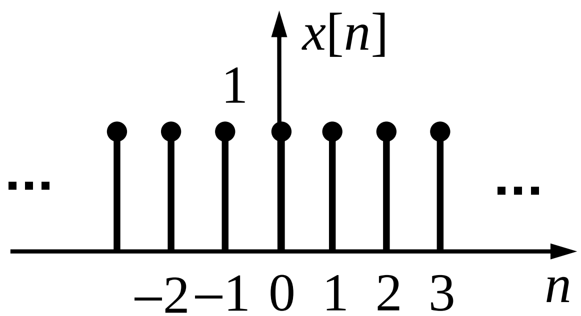
7.2 常用序列的傅里叶变换

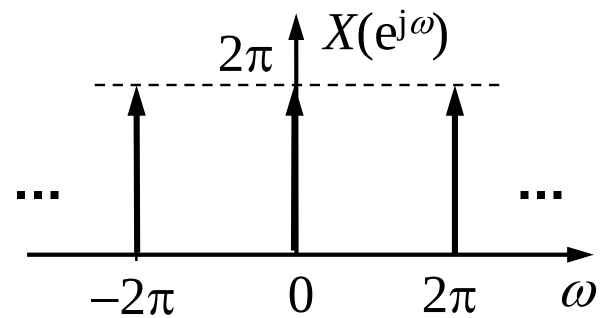
1. 常用序列$x[n]$及其傅里叶变换（DTFT）

$$\delta[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \Delta(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = 1$$









$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega = 1$$

即 $x[n] = 1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$

7.2 常用序列的傅里叶变换

1. 常用序列$x[n]$及其傅里叶变换（DTFT）

$$R_N[n]=u[n]-u[n-N]$$

$$\xleftrightarrow{\text{DTFT}} R_N(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT, }|a|<1} X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^{|n|}=a^n u[n]+a^{-n}u[-n-1]$$

$$\xleftrightarrow{\text{DTFT, }|a|<1} X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$$a^n\cos\omega_0 n\,u[n]=\frac{1}{2}a^n e^{j\omega_0 n}u[n]+\frac{1}{2}a^n e^{-j\omega_0 n}u[n]$$

$$\xleftrightarrow{\text{DTFT, }|a|<1} X(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}+\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}\right]=\frac{1-a\cos\omega_0 e^{-j\omega}}{1-2a\cos\omega_0 e^{-j\omega}+a^2e^{-j2\omega}}$$

7.2 常用序列的傅里叶变换

1. 常用序列$x[n]$及其傅里叶变换（DTFT）

$u[n]$ 已知 $x[n]=1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

设 $x_2[n]=\begin{cases}\alpha^n, & n\geq 0\\ -\alpha^{-n}, & n\leq -1\end{cases}, \quad 0<\alpha<1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{1-2\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$

和 $x_1[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ -1, & n\leq -1\end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

则 $x_1[n]=\lim_{\alpha\to 1}x_2[n] \Leftrightarrow X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\lim_{\alpha\to 1}X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{2(1-\cos\omega)}=\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$

故 $u[n]=\dfrac{1}{2}\{x_1[n]+x[n]\} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} U(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{1}{2}\{X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\}$

即 $U(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

7.3 DTFT的性质

假设： $F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}[f_1[n]]$ 和 $F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}[f_2[n]]$

1 线性 $\mathrm{DTFT}[a_1 f_1[n]+a_2 f_2[n]]=a_1F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+a_2F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

推广到多个信号：$\mathrm{DTFT}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i f_i[n]\right]=\sum_{i=1}^{N} a_i F_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

2、位移性

时移： $\mathrm{DTFT}[f[n-m]]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

频移： $\mathrm{DTFT}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}f[n]]=F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$

例1 已知 $x[n]=1 \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

则 $x_1[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}} X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$

3 频域微分特性

$$\mathrm{DTFT}\left(nf[n]\right)=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{\mathrm{d}\omega}$$

例7.3-2 求序列 $na^n u[n]$（$|a|<1$）的傅里叶变换。已知DTFT对

$$\mathrm{DTFT}\left[a^n u[n]\right]=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}},\quad |a|<1$$

解:

$$\mathrm{DTFT}\left[na^n u[n]\right]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\right]=\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2}$$

类似:

$$\mathrm{DTFT}\left[nu[n]\right]=\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+2\pi k)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\omega+2\pi k)$$

7.3 DTFT的性质

4 序列反褶 $\mathrm{DTFT}\left[f[-n]\right]=F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$

5 共轭与奇偶虚实性

$$\mathrm{DTFT}\left[f^*[n]\right]=F^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

推断：（1）如果序列 $f[n]$ 是实序列，即 $f[n]=f^*[n]$，则有

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=F^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\ =|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

即 $$\begin{cases}|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=|F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})| & \text{--偶函数（幅度谱）}\\ \varphi(\omega)=-\varphi(-\omega) & \text{--奇函数（相位谱）}\end{cases}$$

（2）如果实序列 $f[n]$ 是偶序列，即 $f[n]=f[-n]$，则有

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=F^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\qquad \text{（实偶函数）}$$

6 卷积定理

时域： $\mathrm{DTFT}\,[f_1[n] * f_2[n]] = F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

频域： $\mathrm{DTFT}\,[f_1[n]\cdot f_2[n]] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{1}{2\pi} F_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) * F_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

7 帕斯瓦尔定理：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 \,\mathrm{d}\omega$$

7.4 离散时间系统的频域分析

LTI离散时间系统

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI离散系统}} \longrightarrow y[n]=y_{zs}[n]$$

若 $x[n]=\delta[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=h[n]$ ---- 单位样值响应

若 $x_i[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{izs}[n] \ = x_i[n]*h[n]$

且 $x[n]=\sum_i a_i x_i[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=\sum_i a_i y_{izs}[n]$

$h[n] = h[n]\, u[n]$（因果序列） $\Leftrightarrow$ 因果系统（充要条件）

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = S_h < \infty$$（绝对可和）$\Leftrightarrow$ 稳定系统(充要条件)

7.4 离散时间系统的频域分析

LTI连续时间系统的频域分析

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI连续系统}} \longrightarrow y(t)=y_{zs}(t)$$

若 $x(t)=\delta(t) \xrightarrow{\text{LTI连续系统}} y_{zs}(t)=h(t)$ ---- 单位冲激响应

若 $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t} \xrightarrow{\text{LTI连续系统}} y(t) \;=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t} * h(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_0 \tau}\mathrm{d}\tau$

稳定的LTI连续时间系统的频响特性 $H(\mathrm{j}\Omega)$

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

7.4 离散时间系统的频域分析

7.4.1 LTI离散时间系统的频响特性

1. 系统频域分析条件：稳定系统，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = S_h < \infty \text{（绝对可和）}$$

2. 输入信号是复指数序列 $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 (n-m)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 m}$$

频响特性

记 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$ （$h[n]$DTFT）

$$y[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})$$
$$= |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})| \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega_0 n + \varphi(\omega_0)]}$$

则 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 m} = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|_{\omega=\omega_0} = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}$

7.4.1 LTI离散时间系统的频响特性

输入信号是正弦序列（余弦序列）

即输入： $x[n]=\cos\omega_0 n \quad =\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$

系统频响，即$h[n]$的DTFT $\quad H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$

为简化下面的计算，设*h*[*n*]是实序列（也称实系统）

则 $\quad H(e^{j\omega})=H^*(e^{-j\omega})$

利用LTI系统的线性性质和前述复指数输入的系统响应结果，则有

$$y[n]=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}H(e^{-j\omega_0})$$

$$=\frac{1}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{j[\omega_0 n+\varphi(\omega_0)]}+\frac{1}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{-j[\omega_0 n+\varphi(\omega_0)]}$$

$$=|H(e^{j\omega_0})|\cos\left(\omega_0 n+\varphi(\omega_0)\right)$$

7.4.1 LTI离散时间系统的频响特性

3. 结论:

当稳定的LTI离散实系统的输入信号$x[n]$为正弦信号 $\cos\omega_0 n$ 时，其输出信号$y[n]$ 也是正弦序列，且与$x[n]$具有相同的频率，但其幅度是$x[n]$ 乘以常数 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})|$，幅角加上常数 $\varphi(\omega_0)$，

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)} = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|_{\omega=\omega_0}$$

系统的频率响应特性 $$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})|$ ——幅频特性;

$\varphi(\omega_0)$ ——相频特性

7.4.2 LTI离散时间系统频响特性的特点

$$h[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

由于频响特性 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是单位样值响应序列$h[n]$的DTFT，因而具有DTFT的一般特点，即当$h[n]$绝对可和时，

（1）$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是连续变量ω的连续复值函数；

（2）$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是以2π为周期的周期函数；

（3）如果$h[n]$是实序列，则

$$H^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

7.5 数字滤波器的概念

LTI连续时间系统：= 模拟滤波器

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI连续系统}} \longrightarrow y(t) = y_{zs}(t)$$

若 $x(t)=\delta(t) \xrightarrow{\text{LTI连续系统}} y_{zs}(t)=h(t)$ ---- 单位冲激响应

假设该系统稳定，则系统频响特性为：

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

若输入信号 $x(t) \xrightarrow{\text{LTI连续系统}} y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

频域：$X(\mathrm{j}\Omega)=\mathscr{F}[x(t)] \xrightarrow{\text{稳定LTI连续系统}} Y(\mathrm{j}\Omega) \ = X(\mathrm{j}\Omega)H(\mathrm{j}\Omega)$

由于受到系统的作用，输出信号的频谱 $Y(\mathrm{j}\Omega)$不同于输入信号的频谱$X(\mathrm{j}\Omega)$，这样，连续系统也称为模拟滤波器。

7.5 数字滤波器的概念

7.5.1 数字滤波器原理

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI离散系统}} \longrightarrow y[n]=y_{zs}[n]$$

若 $x[n]=\delta[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y_{zs}[n]=h[n]$ ---- 单位样值响应

若输入信号 $x[n] \xrightarrow{\text{LTI离散系统}} y[n] = x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$

假设该离散系统稳定，且系统频响特性为：

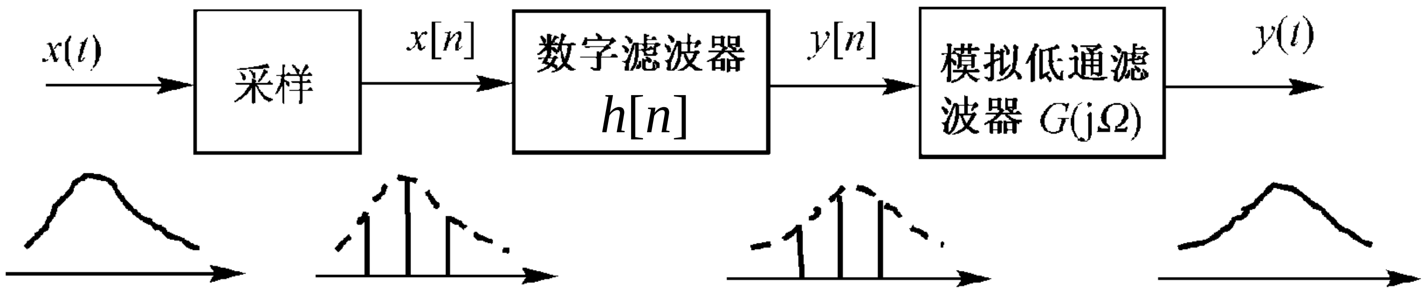
$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\,[h[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

频域：$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\,[x[n]] \xrightarrow{\text{稳定LTI离散系统}} Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

离散时间系统 = 数字滤波器

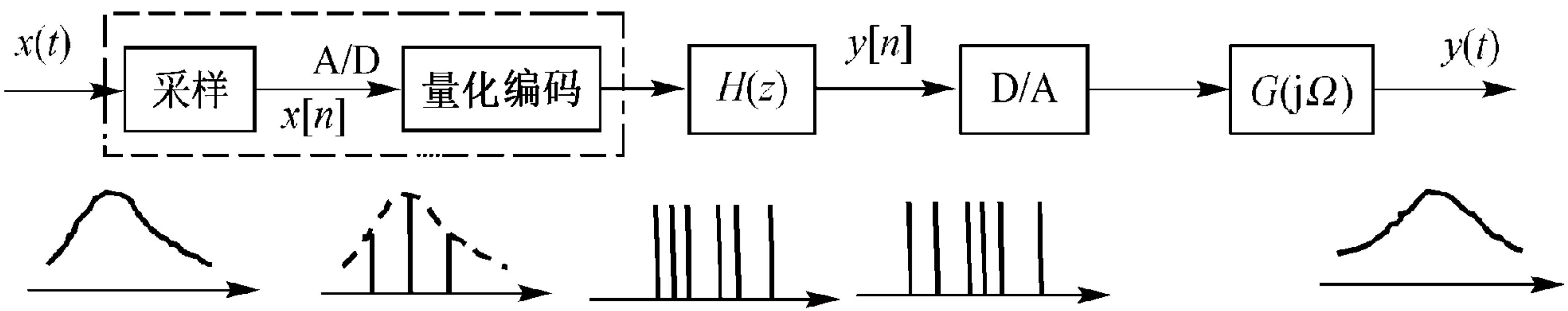
7.5.1 数字滤波器原理

1. 数字滤波器的典型应用及名称由来



(a)

数字滤波器可以用专门的数字信号处理芯片实现，也可以由通用的计算机实现信号处理，这样，由采样得到的离散信号需进行量化和编码，转化成二进制数表示的**数字信号**。



(b)

7.5.1 数字滤波器原理

2. 数字滤波器应用中信号处理过程的典型表示

时域中： $x[n]=x(t)\big|_{t=nT}=x(nT)\xrightarrow{h[n]}y[n]=x[n]*h[n]$

频域中： $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\,[h[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{DTFT}\,[x[n]]\xleftrightarrow{\text{等价于}}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega T}=X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\Omega)$$

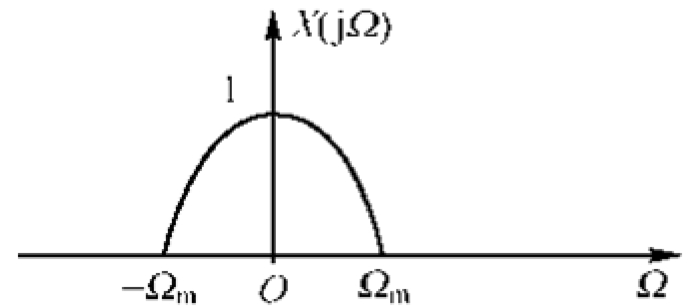
$$\xrightarrow{h[n]\leftrightarrow H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

$$\xrightarrow{h[n]\leftrightarrow H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})}Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})=Y_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\Omega)$$

7.5.1 数字滤波器原理

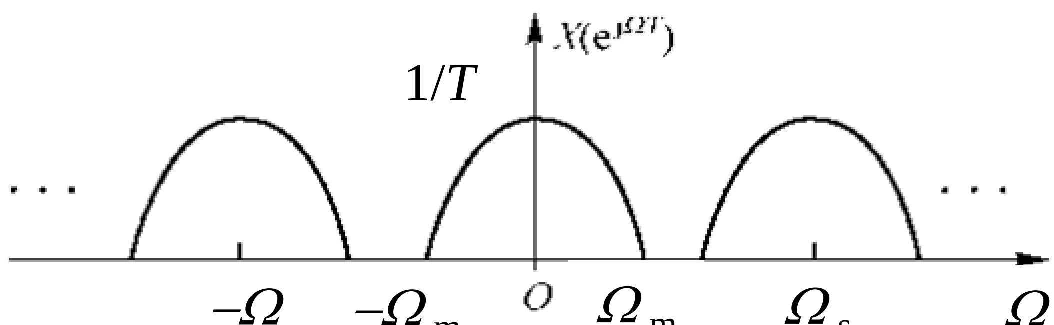
2. 数字滤波器应用中信号处理过程的典型表示

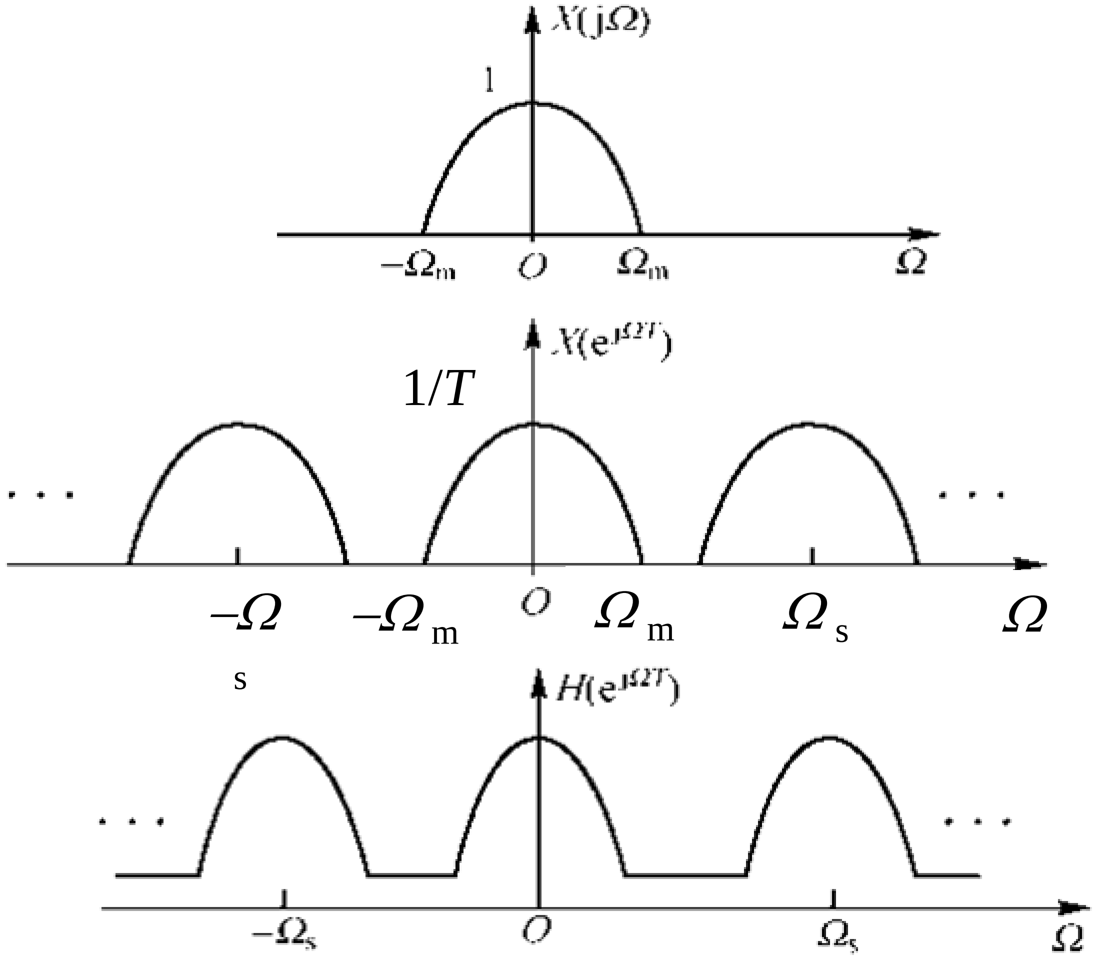
假设： $x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(\mathrm{j}\Omega)=0, \quad |\Omega| \ge \Omega_{\mathrm{m}}$



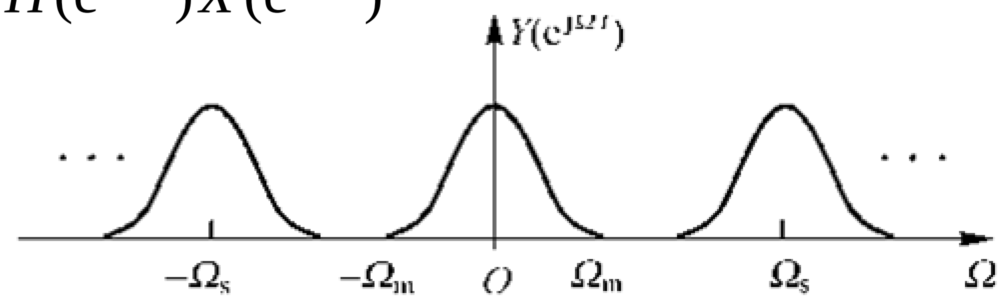
采样频率：$\Omega_{\mathrm{s}} = \dfrac{2\pi}{T} \ge 2\Omega_{\mathrm{m}}$

那么： $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}) = X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\Omega) = \dfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[\mathrm{j}(\Omega - k\Omega_{\mathrm{s}})]$

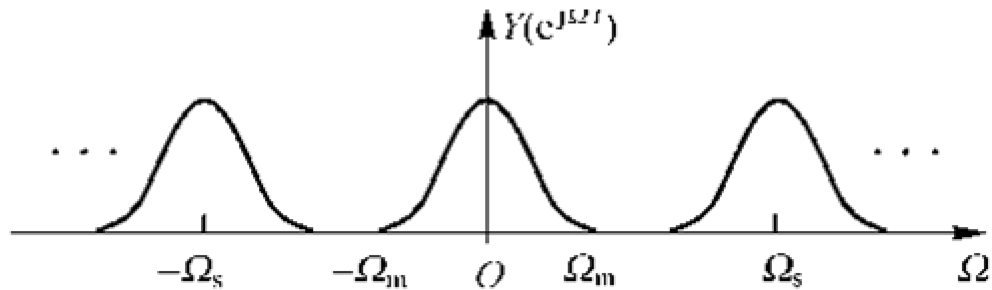




$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}) = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})$$

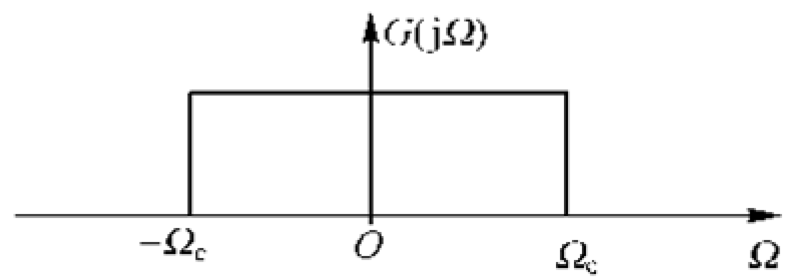


7.5.1 数字滤波器原理



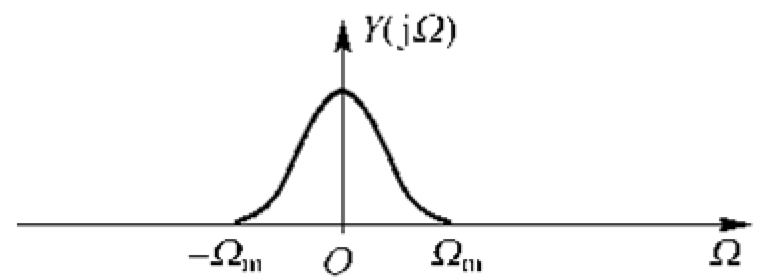
$$G(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\leqslant\Omega_{\mathrm{c}}\\ 0 & |\Omega|>\Omega_{\mathrm{c}}\end{cases},$$

其中：$\Omega_{\mathrm{m}}\leq\Omega_{\mathrm{c}}\leq\Omega_{\mathrm{s}}-\Omega_{\mathrm{m}}$



从而： $Y(\mathrm{j}\Omega)=G(\mathrm{j}\Omega)Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})$

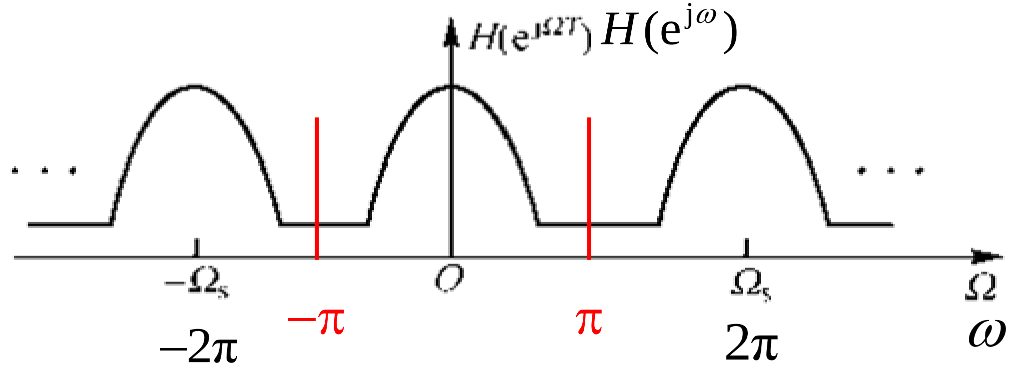
因为：$\Omega_{\mathrm{m}}\leq\Omega_{\mathrm{c}}\leq\Omega_{\mathrm{s}}-\Omega_{\mathrm{m}}$



7.5.2 理想数字低通滤波器

1. 数字滤波器

与连续系统的滤波特性一样，离散系统（数字滤波器）按其频响特性（幅频响应特性）也有低通、高通、带通、带阻和全通之分。由于频响特性$H(e^{j\omega})$的周期性，因此，这些特性只限于在 $-\pi < \omega \le \pi$ 范围内区分。



2. 理想数字滤波器

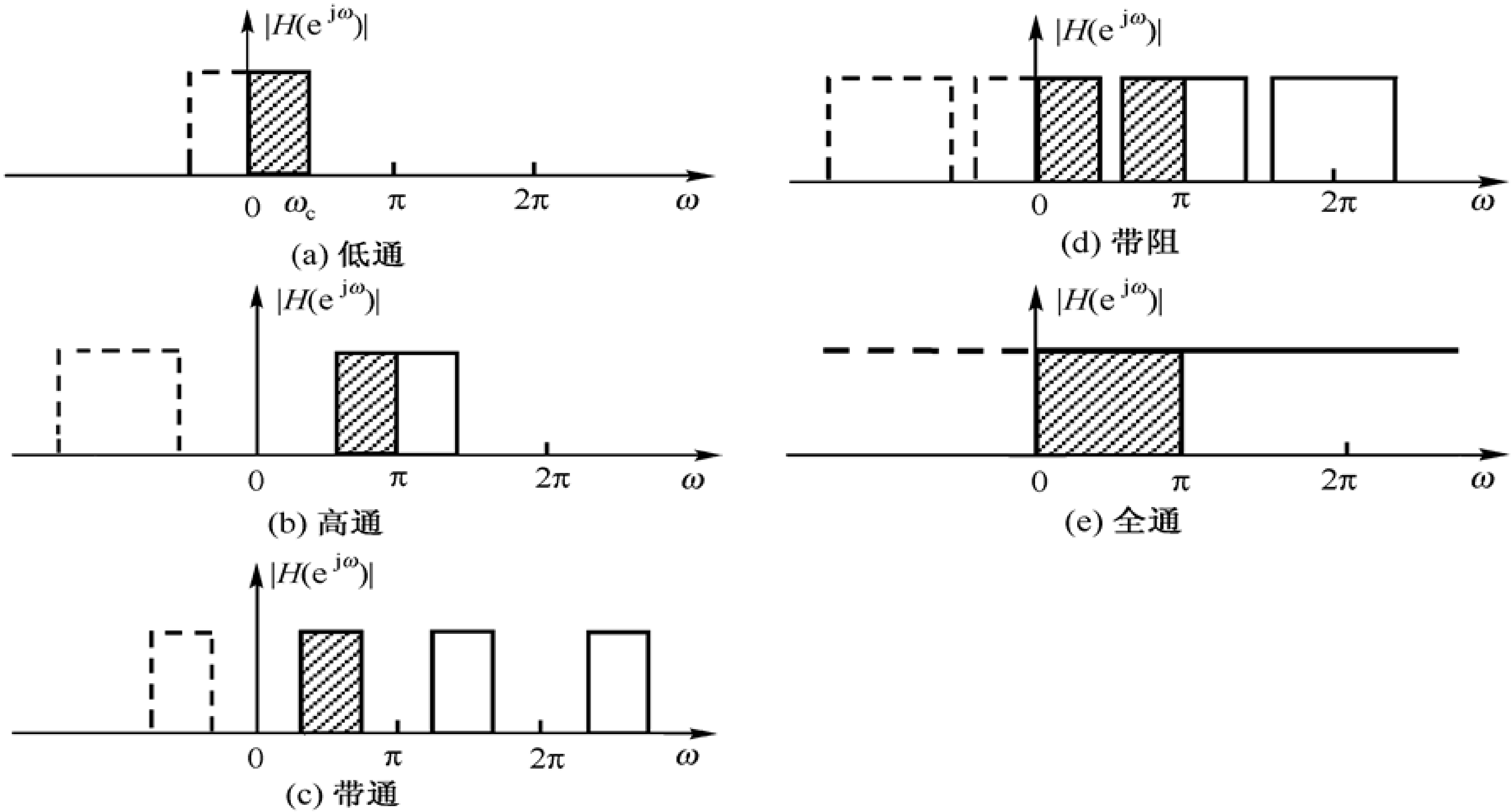
$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_L < |\omega| < \omega_h \\ 0, & |\omega| < \omega_L,\ \omega_h \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

通带

阻带

7.5.2 理想数字低通滤波器

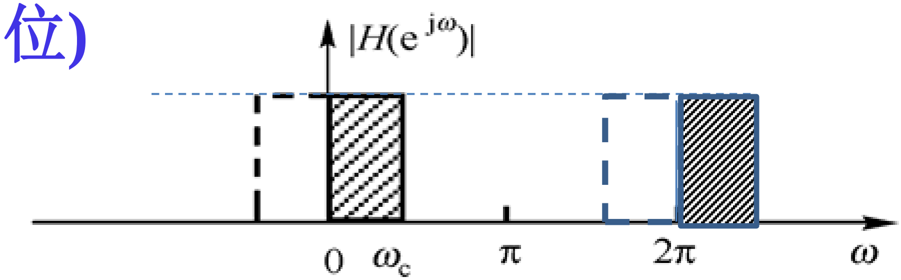
2. 理想数字滤波器



7.5.2 理想数字低通滤波器

3. 理想低通数字滤波器(0相位)

$$H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$



其中： ω_c 称为截止频率

相频特性 $\varphi(\omega)=0$

其单位样值响应 $h_{\mathrm{LP}}[n]$ 为

$$h_{\mathrm{LP}}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

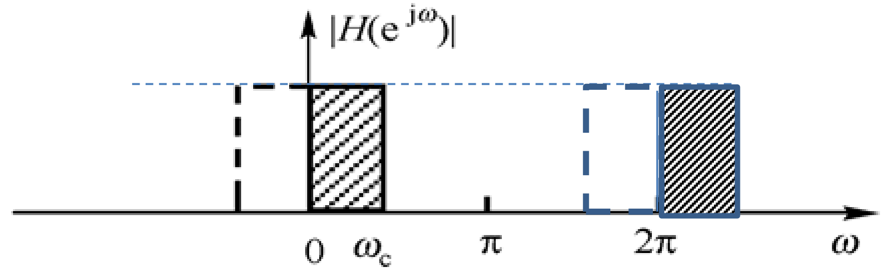
其中： n的取值范围是（$-\infty$，∞）

理想数字低通滤波器是非因果系统，因此实际上并不存在，这一特点与理想模拟低通滤波器相同。

在例7.1−3中，画过当$\omega_c=\pi/4$的序列图形，请参考。

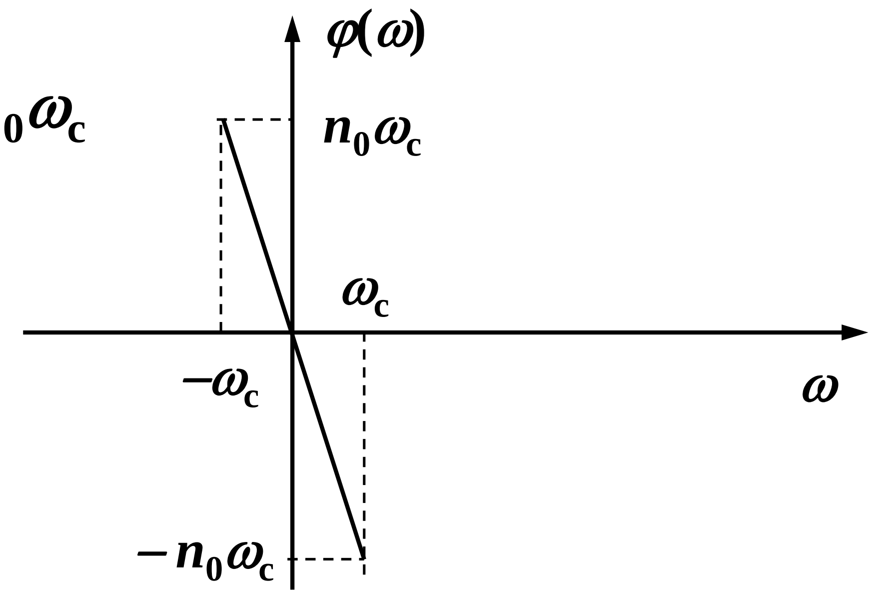
4. 理想低通数字滤波器（有相位）

$$H_{LP}(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c\le|\omega|\le\pi \end{cases}$$



其中：ω_c 称为截止频率

相频特性 $\varphi(\omega)=-n_0\omega_c$



其单位样值响应 $h_{LP}[n]$ 为

$$h_{LP}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{LP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega n_0}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\sin(\omega_c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}$$

其中：n 的取值范围是（$-\infty$，∞）

7.5.3 IIR数字滤波器与FIR数字滤波器

1. 有限长冲激响应（FIR）数字滤波器：

   是指冲激响应$h[n]$是有限长序列；

2. 无限长冲激响应（IIR）数字滤波器：

   是指冲激响应$h[n]$是无限长序列。

例7.5-1 求下述差分方程表示的LTI离散系统的单位样值响应$h[n]$及其频响特性$H(e^{j\omega})$。

(1) $y[n] + 0.3y[n-1] - 0.1y[n-2] = x[n]$

(2) $y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] + 2x[n-2]$

解： （1）**(a)** 求齐次解： $y_h[n] = A_1(-0.5)^n + A_2(0.2)^n$

特征方程为：$\alpha^2 + 0.3\alpha - 0.1 = 0$，

特征根： $\alpha_1 = -0.5,\ \alpha_2 = 0.2$

7.5.3 IIR数字滤波器与FIR数字滤波器

(1) $y[n]+0.3y[n-1]-0.1y[n-2]=x[n]$

(a) 求齐次解： $y_h[n]=A_1(-0.5)^n+A_2(0.2)^n$

(b) 求特解： $\text{右端}=\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$

则 $y_p[n]=0,\quad n>0$

(c) 完全解： $h_2[n]=y_h[n]+y_p[n]=A_1(-0.5)^n+A_2(0.2)^n,\ n\geq 1$

$$\text{依据}\begin{cases}h[0]=x[0]=1\\ h[1]=x[1]-0.3h[0]=-0.3\\ h[2]=-0.3h[1]+0.1h[0]=0.19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=5/7\\ A_2=2/7\end{cases}$$

$$h[n]=\frac{1}{7}\left[5\times(-0.5)^n+2\times(0.2)^n\right]u[n]\xleftrightarrow{\text{DTFT}}H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1+0.5e^{-j\omega})(1-0.2e^{-j\omega})}$$

——冲激响应$h[n]$是无限长序列，是IIR数字滤波器。

（2）$y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] + 2x[n-2]$

（2）当输入信号$x[n]=\delta[n]$代入差分方程后，得到单位样值响应

$$h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] = \{2, 3, 2\}, 0 \le n \le 2$$

$$\xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\omega}) = 2 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}(4\cos\omega + 3)$$

—— 冲激响应$h[n]$是有限长序列，是FIR数字滤波器。

比较方程（1）和（2），得到这一结论：

- FIR系统的差分方程具有非递归的特点，即输出信号$y[n]$是输入信号$x[n]$的延时加权$b_r\, x[n-r]$之和
- IIR系统的差分方程具有递归的特点，也即输出信号$y[n]$不单与输入信号$x[n]$的延时加权$b_r\, x[n-r]$之和有关，还与过去的输出样本$y[n-r]$有关

7.6 离散信号与系统频域的MATLAB分析

专用函数filter：计算对于指定时间范围的激励序列的响应；

专用函数conv：计算两个有限时间区间非零的离散时间序列卷积和。

例7.6-1 绘制序列DTFT的幅度谱和相位谱，并观察频谱的共轭性，其中序列为。

$$x[n]=(-0.8)^n,\quad -5\leqslant n\leqslant 5$$

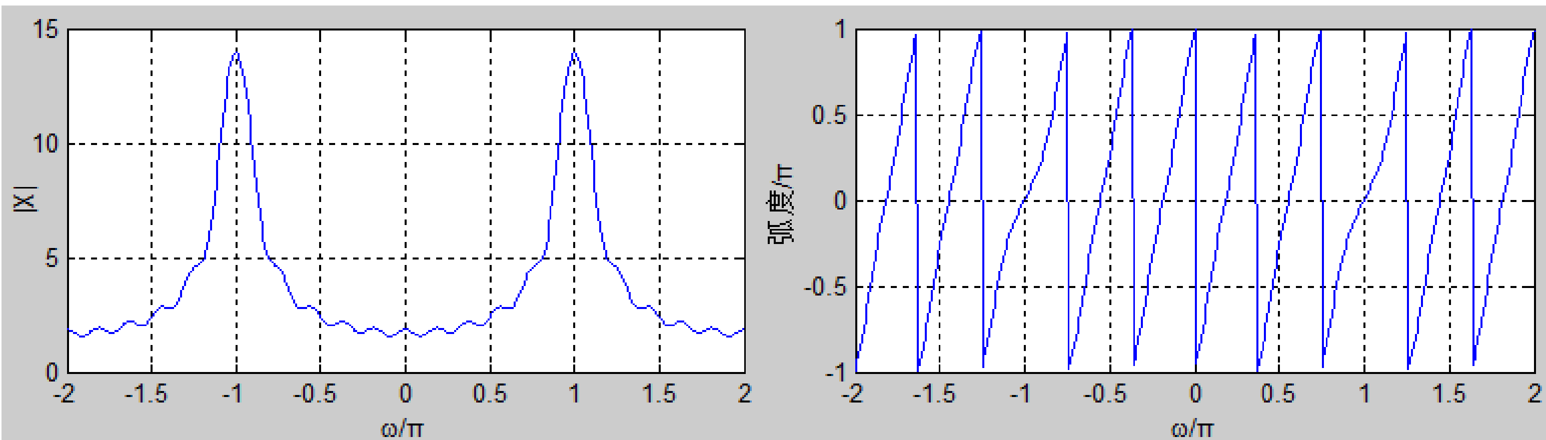
解： $x[n]$是离散值，它的频谱满足周期性，被定义在一个 周期上。我们将在 , 之间的两个周期中的401个频点上计算，并观察其共轭性。

```
n =-5:5; x = (-0.8).^n;k = -200:200; w = (pi/100)*k;
X = x*(exp(-j*pi/100)).^(n'*k);magX = abs(X); angX = angle(X);
subplot(211); plot(w/pi,magX);grid;
xlabel('\omega/π'); ylabel('|X|');axis([-2 2 0 15]);
subplot(212); plot(w/pi,angX/pi); grid;
xlabel('\omega/π'); ylabel('弧度/π'); axis([-2 2 -1 1]);
```

7.6 离散信号与系统频域的MATLAB分析

例7.6-1 绘制序列DTFT的幅度谱和相位谱，并观察频谱的共轭性，其中序列为。

$$x[n]=(-0.8)^n,\quad -5\leqslant n\leqslant 5$$



例7.6-2 已知离散系统的差分方程如下

$$y[n]+0.12y[n-1]+0.33y[n-3]+0.46y[n-4]=x[n]+0.7x[n-1]+0.4x[n-2]$$

试画出该系统的幅频特性和相频特性，并判断系统是什么类型滤波器。

7.6 离散信号与系统频域的MATLAB分析

例7.6-2 已知离散系统的差分方程如下

$$y[n]+0.12y[n-1]+0.33y[n-3]+0.46y[n-4]=x[n]+0.7x[n-1]+0.4x[n-2]$$

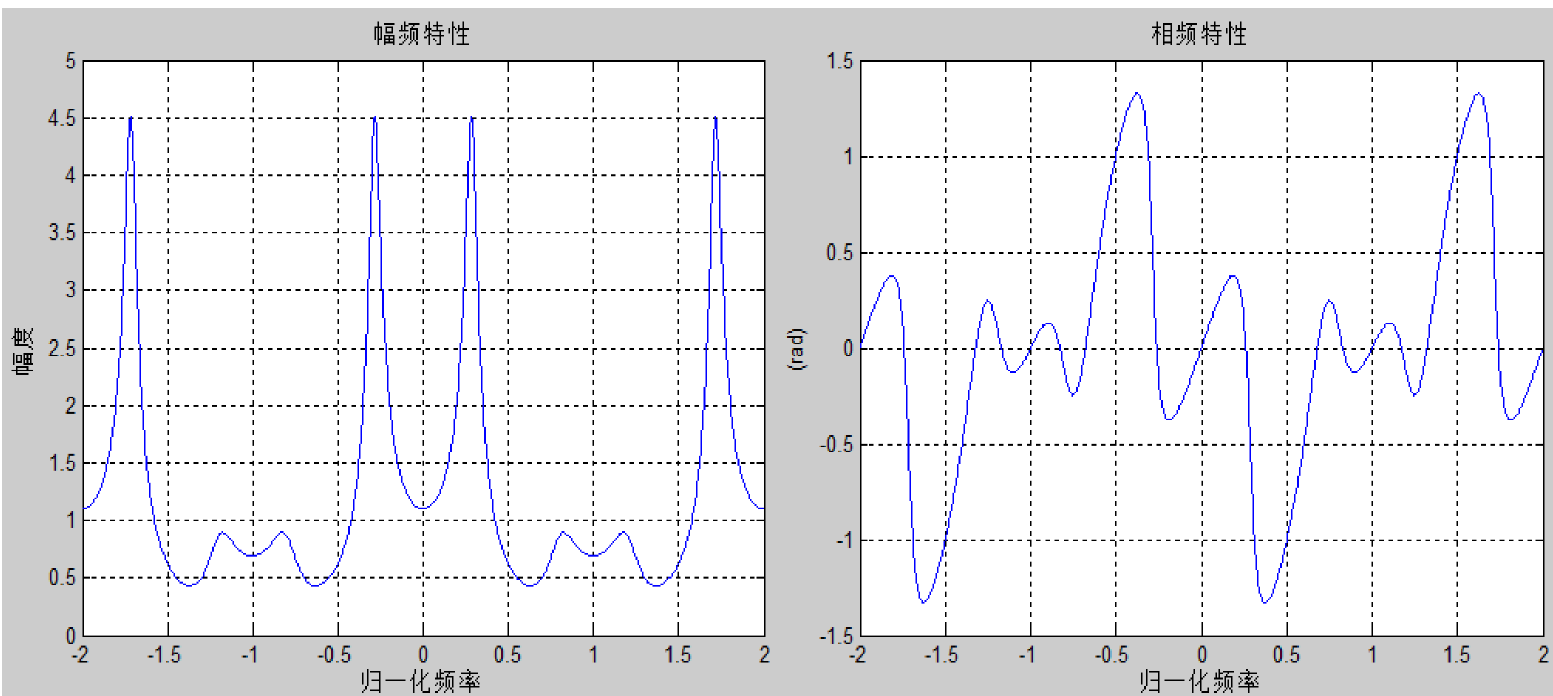
试画出该系统的幅频特性和相频特性，并判断系统是什么类型滤波器。

解：绘制系统的频响特性曲线可以调用库函数freqz，所编写的程序mat703.m如下。

```
b=[1,0.5,0.8];a=[1,0.12,0,0.33,0.46];
w=linspace(-pi,2*pi,1024);H=freqz(b,a,w);subplot(1,2,1);plot(w/pi,abs(H));grid on;
xlabel('归一化频率');ylabel('幅度');title('幅频特性');
subplot(1,2,2);plot(w/pi,angle(H));grid on;
xlabel('归一化频率');ylabel('(rad)');title('相频特性');
```

7.6 离散信号与系统频域的MATLAB分析

离散系统的频响特性如图7.6-2所示，在-2π到2π的范围绘制了频响特性，更便于观察该系统的频响特性，由图可见系统具有带通滤波器特性，由于差分方程的系数均为实数，系统的幅频特性偶对称，相频特性奇对称。



本章小结

1. 离散序列的DTFT：

2. DTFT的特点——周期连续函数

3. 稳定LTI离散系统的频响特性：

4. LTI离散系统的频域分析：

   数字滤波器