דף סיכום בחינה

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	14.00	14.00
2	14.00	14.00
3	14.00	14.00
4	15.00	15.00
5	14.00	14.00
6	14.00	14.00
7	15.00	15.00

ציון בחינה סופי : 100.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

מבנים בדידים וקומבינטוריקה – תרגיל 2 – איליי דדון וגל פינטו

1. *בסעיפים הבאים, הוכיחו את הזהויות* ***בדרך קומבינטורית***:

א.

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \binom{n+1}{3}$$

<u>הוכחה:</u>

נבחר 3 מספרים שונים מבין המספרים $\{0,1,2,\ldots,n\}$, נוכיח את הזהות על ידי בחירת 3 המספרים בשתי דרכים שונות.

<u>אגף ימין:</u> ישנם $n+1$ מספרים ואנו בוחרים מהם 3 מספרים, לכן יש לכך $\boldsymbol{\binom{n+1}{3}}$ אפשרויות.

<u>אגף שמאל:</u> נבחר תחילה את המספר האמצעי ונסמנו k, נמנה את מספר האפשרויות השונות לבחור את 3 המספרים על ידי סכימת כל האפשרויות לבחירת 2 המספרים הנותרים, עבור כל ערך אפשרי של k. בחרנו את k להיות **המספר האמצעי**, ולכן $\boldsymbol{k \in \{1,2,\ldots,n-1\}}$. כעת נבחר את המספר השמאלי, ואת המספר הימני. נשים לב כי עבור המספר השמאלי ישנן k אפשרויות, עבור המספר הימני ישנן $n-k$ אפשרויות. לכן סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות לבחור את 3 המספרים הוא:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)}$$

ב.

$$\sum_{a,b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} a\binom{n}{a,b,c} = n \cdot 3^{n-1}$$

<u>הוכחה:</u>

ניקח קבוצה של n חברי כנסת, נוכיח את הזהות על ידי בחירת יו"ר כנסת ניטרלי, וחלוקת $n-1$ חברי הכנסת הנותרים ל3 מפלגות מובחנות.

<u>אגף ימין:</u>

תחילה נבחר את יו"ר הכנסת, ישנן n אפשרויות לכך. כעת נחלק את $n-1$ חברי הכנסת הנותרים ל3 מפלגות מובחנות, נשים לב כי עבור כל חבר כנסת ישנן 3 אפשרויות ולכן עבור אותם חברי כנסת, ישנן 3^{n-1} אפשרויות. סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות הוא $\boldsymbol{n \cdot 3^{n-1}}$.

<u>אגף שמאל:</u>

נבחר את יו"ר הכנסת, ישנן n אפשרויות לכך. כעת נמנה את מספר הסידורים של $n-1$ חברי הכנסת הנותרים ב3 מפלגות מובחנות, ע"י מעבר על כל גדלי המפלגות האפשריות, n_1, n_2, n_3, ובחירת $n-1$ חברי כנסת לאותן קבוצות בגדלים n_1, n_2, n_3, כלומר סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות הוא:

$$n \cdot \sum_{n_1,n_2,n_3\geq 0 \mid n_1+n_2+n_3=n-1} \binom{n-1}{n_1,n_2,n_3}$$

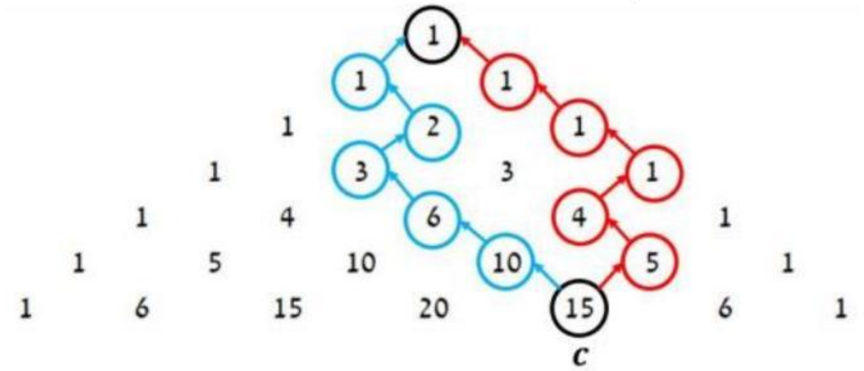
נכניס את גורם ה n לתוך הסכום, ונציב $n_1 = a-1, n_2 = b, n_3 = c$, נקבל:

$$\sum_{a\geq 1, b,c\geq 0 \mid a-1+b+c=n-1} n\cdot\binom{n-1}{a-1,b,c}$$
$$=\sum_{a\geq 1, b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} \frac{n\cdot(n-1)!}{(a-1)!\cdot b!\cdot c!}$$
$$=\sum_{a\geq 1, b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} \frac{n!}{\frac{a!}{a}\cdot b!\cdot c!}$$
$$=\sum_{a\geq 1, b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} a\cdot\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!}$$
$$=\sum_{a\geq 1, b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} a\binom{n}{a,b,c}$$

נשים לב כי כאשר $a=0$, הביטוי בתוך הסכום גם שווה ל0, ולכן נוכל לכתוב את הסכום גם כך:

$$\boldsymbol{\sum_{a,b,c\geq 0 \mid a+b+c=n} a\binom{n}{a,b,c}}$$

2. *יהי c תא במשולש פסקל.* ***מסלול*** *מ-c לראש המשולה הוא מסלול המורכב מתאים, מתחיל מ-c ומסתיים בתא העליון במשולש.* ***מסלול חוקי*** *הוא מסלול מ-c לראש המשולש כך שכל תא במסלול סמוך לתא הקודם במסלול ונמצא בשורה מעליו. בציור מתוארים שני מסלולים חוקיים מתא המכיל את הערך 15 אל ראש המשולש.*



א. *כמה מסלולים חוקיים קיימים מתא c כלשהו לראש המשולש?*

<u>פתרון:</u>

נסמן את השורה שבה האיבר c נמצא באות n, ואת האינדקס באותה השורה באות k.

נשים לב כי $n\geq 0$ וגם $0\leq k\leq n$.

נראה באינדוקציה שמספר המסלולים החוקיים מהתא c ועד לראש המשולש הוא $\binom{n}{k}$.

<u>בסיס:</u> $n=0$, אז נובע כי גם $k=0$ ו-c הוא האיבר בראש המשולש, ולכן יש רק מסלול חוקי אחד בבדי להגיע ממנו ועד לראש המשולה, נשים לב כי אכן $\binom{0}{0}=1$.

<u>הנחה וצעד:</u> נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.

נחלק למקרים ונבדוק כל מקרה בנפרד:

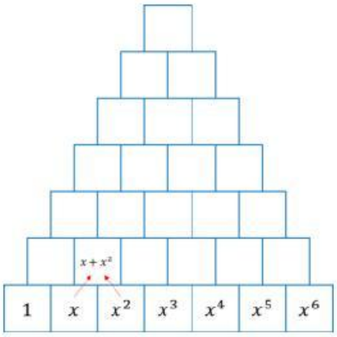
<u>מקרה 1: $k=0$ או $k=n$</u>: נשים לב כי כאשר $k=0$ או $k=n$, התא c נמצא באחת משוקי המשולש, ולכן מספר המסלולים החוקיים להגיע ממנו ועד לראש המשולש הוא 1. (תמיד לבחור רק באיבר השמאלי או רק באיבר הימני שמעליו).

נשים לב כי אכן $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$.

<u>מקרה 2: $0<k<n$</u>: אז נובע כי מעל התא c נמצאים שני איברים, אחד מימין ואחד משמאל, אז מס' המסלולים החוקיים לראש המשולש יהיה הסכום בין מס' המסלולים החוקיים מכל אחד מהם, כלומר, מהנחת האינדוקציה: $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

שזה אכן שווה ל $\binom{n}{k}$ מזהות פסקל.

ב. *יהי $0 \le k$ מספר קבוע ושלם. נניח שמוחקים את ערכי התאים במשולש, ובשורה ה-k כותבים את הביטויים $1, x^2, x^3, \dots, x^k$, לפי סדר זה. לאחר מכן בכל תא מעל השורה ה-k כותבים את סכום שני הביטויים שמתחתיו. הוכיחו שהביטוי שייכתב בראש המשולש שווה ל-$(1+x)^k$.*



<u>פתרון:</u> נשים לב שעבור כל $0 \le i \le k$, כל מסלול של האיבר x^i עד לראש המשולש, תורם גורם של x^i אל הסכום הכולל שמגיע לראש המשולש, ולכן המקדם של האיבר x^i בסכום כולל זה, יהיה מספר המסלולים ממנו ועד לראש המשולש.

הוכחנו בסעיף הקודם כי מספר המסלולים יהיה $\binom{k}{i}$, ולכן האיבר בראש המשולש יהיה שווה לסכום הבא:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot x^i$$

נכפיל כל גורם ב-1 ולכן ניתן לרשום את הסכום גם בצורה הבאה:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot x^i \cdot 1^{k-i}$$

ובעזרת הבינום של ניוטון נסיק כי סכום זה שווה ל $(x+1)^k$ כלומר $(1+x)^k$ כנדרש.

(3)

.3

א. *בבסיס צבאי ישנם 6 עמודי חשמל. בבל בוקר החיילים מקבלים 3 פחיות צבע אדומות, 2 פחיות צבע כוחות ופחית צבע ירוקה כדי לצבוע את העמודים (כל עמוד נצבע ע"י בדיוק פחית אחת שלמה). אחרי שהחיילים סיימו לצבוע, הרס"ר עובר בבסיס, והחיילים מקבלים ריתוק אם הצביעה של העמודים זהה לצביעה שהוא כבר ראה בעבר. מהו מספר הימים המקסימלי שיכול לעבור מבלי שהחיילים יקבלו ריתוק?*
<u>הערה:</u> אנחנו מניחים כאן כי יש חשיבות לזהות העמוד שנצבע. למשל, יש הבדל בין צביעת העמוד שליד השק"ם באדום ולבין צביעת העמוד שליד השלישות באדום.

<u>פתרון:</u> כדי למנות את מספר האפשרויות השונות לצבוע את 6 העמודים, נמנה את מספר האפשרויות לחלק את 6 העמודים ל-3 קבוצות כאשר הקבוצה הראשונה היא קבוצת העמודים שנצבעו באדום, השנייה – העמודים שנצבעו בכחול, והשלישית – העמודים שנצבעו בירוק.
ישנן 6 פחיות צבע ולכן על החיילים להשתמש בכלל הפחיות שקיבלו, כלומר קבוצות העמודים שייצבעו יהיו בגדלים 3, 2 ו-1 בהתאמה.
אז סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות יהיה **מספר הדרכים לחלק את 6 העמודים לקבוצות מובחנות בגדלים 3, 2 ו-1** כלומר, מספר האפשרויות שווה למקדם המולטינומי:

$$\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$$

ב. *מה תהיה התשובה אם הרכב הפחיות שהחיילים מקבלים כל בוקר הוא: 3 אדומות, 3 כחולות ו-3 ירוקות, בהנחה שניתן להשתמש רק בפחיות שהתקבלו באותו יום?*

<u>פתרון:</u> באופן דומה לסעיף הקודם, נצטרך להשתמש במקדם המולטינומי, אך הפעם, מספר הפחיות שקיבלו החיילים גבוה ממספר העמודים ולכן נצטרך לסכום את מספר האפשרויות עבור כל צירופי הגדלים האפשריים לקבוצות העמודים הצבועים, נקבל:

$$\binom{6}{3,3,0}+\binom{6}{3,2,1}+\binom{6}{3,1,2}+\binom{6}{3,0,3}+\binom{6}{2,3,1}+\binom{6}{2,2,2}+\binom{6}{2,1,3}$$
$$+\binom{6}{1,3,2}+\binom{6}{1,2,3}+\binom{6}{0,3,3}$$
$$= 3\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!} + 3!\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!} + \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 6!\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \mathbf{510}$$

ג. *מה תהיה התשובה אם הרכב הפחיות שהחיילים מקבלים כל בוקר הוא: 5 אדומות, 5 כחולות ו-5 ירוקות, בהנחה שניתן להשתמש רק בפחיות שהתקבלו באותו יום?*

<u>פתרון:</u> נשים לב כי במקרה זה נוכל להביע את מספר האפשרויות הנ"ל בעזרת מספר האפשרויות הכולל לחלוקת כל אחד מ-6 העמודים ל-3 הקבוצות, שהוא 3^6, אך נצטרך להחסיר ממספר זה את האפשרויות בהן היו קבוצות בגודל 6, כלומר מספר האפשרויות יהיה:

$$3^6 - 3 \cdot \frac{6!}{6! \cdot 0! \cdot 0!} = 3^6 - 3 = \mathbf{726}$$

(5)

4. *כמה סיסמאות שונות ניתן להרכיב ע"י שינוי סדר התווים בסיסמה "$tennessee1224$", כך שלא יופיעו שתי ספרות ברצף?*

<u>פתרון:</u> נשים לב כי ישנן 9 אותיות ו-4 ספרות בסיסמה "$tennesee1224$", תחילה נסדר את 9 האותיות, ישנן 4 אותיות מסוג e, 2 אותיות n, 2 אותיות s, ואות t אחת, אז מספר הסידורים הפנימיים עבור האותיות בלבד הוא המקדם המולטינומי הבא:

$$\binom{9}{4,2,2,1} = \frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 3780$$

כעת, על מנת להבטיח כי לא יופיעו שתי ספרות ברצף, נתבונן באותיות שהצבנו **כמחיצות**, ונתבונן ברווחים הנמצאים בין האותיות ובקצוות **כתאים** בהם ניתן יהיה להציב את 4 הספרות שלנו. בדומה לדוגמה הבאה: _|_|_|_|_|_|_|_|_|_

לכן בעת ישנם 10 תאים בהם נוכל למקם את 4 הספרות, נשים לב כי ישנן 2 ספרות 2, וספרה אחת של 1 ושל 4, לכן מספר האפשרויות לכך יהיה הביטוי הבא:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} = 2520$$

(4)

אז כעת נוכל להשתמש בעיקרון המכפלה ולקבל כי סה"כ ישנן

$$2520 \cdot 3780 = \mathbf{9,525,600}$$

אפשרויות לסידור תווי הסיסמה "$tennessee1224$" כך שלא יופיעו שתי ספרות ברצף.

5. *חשבו את המקדמים של:*

א. s^3t^2 *בביטוי* $(s+t-2)^{10}$.

<u>פתרון:</u> נשים לב כי $(s+t-2)^{10}=(s+t-2)\cdot(s+t-2)\cdots(s+t-2)$
ולכן כאשר נפתח את הסוגריים, הביטויים שיכילו את s^3t^2 יהיו אותם ביטויים בהם נבחר הגורם s מתוך הסוגריים 3 פעמים, והגורם t מתוך הסוגריים 2 פעמים. (משאר הסוגריים ייבחר הגורם -2 בהתאם, כלומר 5 פעמים).
סה"כ ישנן $\binom{10}{3,2,5}$ אפשרויות שונות לבחור ביטויים אלו.
כל ביטוי יהיה שווה ל $s^3\cdot t^2\cdot(-2)^5$ כלומר בעל מקדם קבוע של -32.
לכן כאשר נחבר את הביטויים יחד נקבל שהמקדם של s^3t^2 הוא

$$(-32)\cdot\binom{10}{3,2,5}=(-32)\cdot 2520=\mathbf{-80640}$$

ב. a^4bc^{11} *בביטוי* $(3a-7b+c+23d)^{16}$.

<u>פתרון:</u> בדומה לסעיף א', נצטרך לסכום את כל הביטויים בהם נבחר הגורם $3a$ מתוך 4 סוגריים, הגורם $-7b$ מתוך זוג סוגריים אחד, והגורם c מתוך 11 סוגריים (הגורם $23d$ ייבחר בהתאם 0 פעמים), סה"כ ישנם $\binom{16}{4,1,11,0}$ ביטויים כאלו.
כל ביטוי יהיה שווה ל $(3a)^4\cdot(-7b)^1\cdot c^{11}\cdot(23d)^0$ ולכן כאשר נחבר את הביטויים יחד נקבל:

$$\binom{16}{4,1,11,0}\cdot(3a)^4\cdot(-7b)^1\cdot c^{11}\cdot(23d)^0$$
$$=21840\cdot 3^4\cdot(-7)^1\cdot a^4bc^{11}=\mathbf{-12,383,280}\ a^4bc^{11}$$

ג. x^{30} *בביטוי* $(1+x^3+x^8)^{11}$.

<u>פתרון:</u> נצטרך לסכום את כל הביטויים המכילים את x^{30} לאחר פתיחת הסוגריים.
נשים לב כי ניתן להגיע לגורם x^{30} רק כאשר נבחר 3 פעמים את הגורם x^8, ופעמיים את הגורם x^3 (הגורם 1 ייבחר 6 פעמים בהתאם), או כאשר נבחר 0 פעמים את הגורם x^8, 10 פעמים את הגורם x^3 ופעם אחת את הגורם 1.
לדרך הראשונה קיימות $\binom{11}{3,2,6}$ אפשרויות,
וכל ביטוי כאן יהיה שווה ל $(x^8)^3\cdot(x^3)^2\cdot 1^6=x^{30}$ כלומר בעל מקדם של 1.
לדרך השנייה קיימות $\binom{11}{0,10,1}$ אפשרויות,
וכל ביטוי כאן יהיה שווה ל $(x^8)^0\cdot(x^3)^{10}\cdot 1^1=x^{30}$ כלומר בעל מקדם של 1.
לכן כאשר נחבר את הביטויים יחד נקבל שהמקדם של x^{30} הוא:

$$\binom{11}{3,2,6}\cdot 1+\binom{11}{0,10,1}\cdot 1=4620+11=\mathbf{4631}$$

ד. z^{50} בביטוי $(1+z^{14}+z^{21})^{100}$.

פתרון:
בדומה לסעיף הקודם, נצטרך לסכום את כל הביטויים המכילים את z^{50} לאחר פתיחת הסוגריים. אך נשים לב כי לא ניתן להגיע לחזקה של 50 בעזרת הגורמים z^{21}, z^{14}, 1.
לכן נסיק כי המקדם של z^{50} הוא **0**.

.6

א. *כמה סדרות $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ קיימות, כל שלכל $i \in [2n]$: $a_i \in \{1,-1\}$, סכום כל האיברים בסדרה הוא 0, ולכל $i \in [2n]$: $\sum_{j=1}^{i} a_j \geq 0$?*

פתרון:
אנו צריכים למצוא את מספר הסדרות באורך $2n$ המורכבות מערכי 1, -1, בהן סכום הסדרה שווה ל 0, אך גם סכום של כל רישא של הסדרה גדול או שווה ל 0.
כלומר, נשים לב כי **בכל תת-סכום**, **מספר ערכי ה 1** תמיד חייב להיות **גדול או שווה למספר ערכי ה -1**, על מנת שלא נקבל תת-סכום שלילי, **וסה"כ מספר ערכי ה 1** צריך להיות **שווה למספר ערכי ה -1**, כדי לקבל את הסכום הכולל 0.
לכן, בעיה זו היא בדיוק שקולה לבעיית סידור סוגריים מאוזנות, כאשר הערך 1 מייצג את פתיחת הסוגריים, והערך -1 מייצג את סגירתן.
ולמדנו בהרצאה כי מספר סדרות הסוגריים המאוזנות שווה למספר קטלן ה n-י (C_n), כלומר שווה ל:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

ב. *כמה סדרות כאלה קיימות, שבהן $a_1 = a_2 = 1$?*

פתרון: נשתמש בשיטת המשלים ונסמן:
$A =$ קב' הסדרות המקיימות את התנאי בסעיף א'.
$B =$ קב' הסדרות מ A **שלא** מקיימות את התנאי $a_1 = a_2 = 1$.
$C = A \setminus B =$ קב' הסדרות מ A המקיימות את התנאי $a_1 = a_2 = 1$.
ראשית, אנו יודעים מהסעיף הקודם שגודלה של A הוא $\boldsymbol{C_n}$.
ונרצה לחשב את גודלה של B, בעזרתו נמצא את גודלה של C.
נשים לב כי לכל סדרה ב B מתקיים כי $a_1 = 1$ מכיוון שאחרת, נקבל תת-סכום שלילי.
אז נמצא את מספר הסדרות הללו שמקיימות: $a_1 = 1, a_2 = -1$.
נשים לב ש $a_1 + a_2 = 0$ ולכן סכום כל סדרה ב B שווה לסכום תת-הסדרה בהמשך: $a_3, a_4, \dots, a_{2n}$. אז בבדי שסכום הסדרה ב B יהיה שווה ל 0, סכום תת-הסדרה הזו גם צריך להיות 0. לכן, מספר הסדרות ב B שווה בדיוק למספר הסדרות השונות באורך $2n-2$, המקיימות את התנאי בסעיף א'.
$2n-2 = 2(n-1)$ אז נובע כי גודלה של B שווה ל C_{n-1}.
וסה"כ קיבלנו: $|C| = |A| - |B| = C_n - C_{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} - \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

ג. *כמה סדרות כאלה קיימות, שבהן $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$?*

<u>פתרון:</u> בדומה לסעיף הקודם, נשתמש בשיטת המשלים.
אז נמצא את מספר הסדרות המאוזנות **שאינן** מקיימות כי $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$
נשים לב שישנן מספר אפשרויות לאיברים a_1, a_2, a_3, a_4:
(1) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = -1$
(2) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1$
(3) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -1$
(4) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 1$
(5) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1$

אז נחשב את מספר הסדרות המאוזנות עבור כל אחת מן האפשרויות הללו.
<u>עבור (1) ו (2)</u>: ניתן לראות כי $a_3 + a_4 = 0$ ולכן סכום כל סדרה שכזו שווה לסכום תת הסדרה: $a_1, a_2, \ a_5, a_6, \dots, a_{2n}$, תת-סדרה זו מקיימת ששני איבריה הראשונים שווים ל 1 ואורך הסדרה הוא $2(n-2)$ לכן מהסעיף הקודם נסיק כי מספר הסדרות השונות המקיימות את התנאי יהיה $C_{n-1} - C_{n-2}$ עבור כל אחת מן האפשרויות.

באופן שקול ניתן לראות כי אותו הטיעון מתקיים גם עבור <u>אפשרות (3)</u>, כאשר נתבונן בתת הסדרה $a_1, a_4, a_5, \dots, a_{2n}$, ולכן נסיק כי גם כאן ישנן $C_{n-1} - C_{n-2}$ סדרות.

<u>עבור (4) ו (5):</u> ניתן לראות כי $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ ולכן סכום כל סדרה שכזו שווה לסכום תת הסדרה: $a_5, a_6, \dots, a_{2n}$.
אז בכדי שסכום הסדרה כולה יהיה שווה ל 0, גם סכום תת-הסדרה הזו צריך להיות שווה ל 0. אורך תת הסדרה הוא $2(n-2) = 2n - 4$ ולכן, באופן דומה לסעיף ב', מספר הסדרות בכל אחת מן האפשרויות הללו שווה ל C_{n-2}.

לסיכום, בעזרת שיטת המשלים נוכל להסיק כי מספר הסדרות השונות המקיימות את התנאי המקורי הוא:

$$C_n - 3 \cdot (C_{n-1} - C_{n-2}) - 2 \cdot C_{n-2} = \boldsymbol{C_n + C_{n-2} - 3 \cdot C_{n-1}} =$$
$$\boldsymbol{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} + \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2} - \frac{3}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$$

ד. *כמה סדרות $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ קיימות, כך שלכל $i \in [2n]$: $a_i \in \{1, -1\}$, סכום כל האיברים בסדרה הוא $\boldsymbol{-4}$, ולכל $i \in [2n]$: $\sum_{j=1}^{i} a_j \geq \boldsymbol{-4}$?*

<u>פתרון:</u> נתבונן בסדרות הנ"ל כסדרות **מהלכים סריגיים** מהראשית על המישור, כאשר **כל איבר $\boldsymbol{1}$ מייצג צעד ימינה** (התקדמות בציר ה-x), **וכל איבר $\boldsymbol{-1}$ מייצג צעד למעלה** (התקדמות בציר ה-y).
נשים לב כי סה"כ ישנם $2n$ צעדים וההפרש בין מספר הצעדים למעלה ומספר הצעדים ימינה הוא 4. כלומר, אנו צריכים לקבל שנקודת סוף המסלול היא נקודה שבה $y = x + 4$ וגם $x + y = 2n \Leftarrow y = 2n - x \Leftarrow x + 4 = 2n - x$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x = n - 2} \Rightarrow \boldsymbol{y = n + 2}$$
בנוסף, בכל צעד $i \in [2n]$, מתקיים אי השוויון: $x - y \geq -4$ כלומר $y \leq x + 4$.
אז קיבלנו שכל סדרה שכזו **אינה חוצה את הישר $\boldsymbol{y = x + 4}$ כלפי מעלה**,

ומסתיימת בנקודה $(\boldsymbol{n-2, n+2})$, ונרצה לספור את מספר הסדרות השונות שמקיימות תנאים אלו.
נפשט את ההוכחה ע"י הזזת המהלכים מקום אחד ימינה, כלומר אנו מתבוננים **במסלולים הסריגיים היוצאים מהנקודה $(\boldsymbol{1,0})$ ומסתיימים בנקודה $(\boldsymbol{n-1, n+2})$ ותמיד מתחת ממש לישר $\boldsymbol{y=x+4}$**.

<u>אז נגדיר:</u>
$\boldsymbol{S}=$ קב' כל סדרות המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ אל $(n-1, n+2)$ **שאינן נוגעות** בישר $y=x+4$.
$\boldsymbol{A}=$ קב' **כל** סדרות המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ אל $(n-1,n+2)$.
$\boldsymbol{B}=$ קב' כל סדרות המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ אל $(n-1,n+2)$, אשר **נוגעות** בישר $y=x+4$ (או חוצות אותו).
ונרצה לחשב את $|S|$, שכן משיטת המשלים, $|S|=|A|-|B|$.

בנוסף נגדיר $\boldsymbol{C}=$ קב' כל סדרות המהלכים הסריגיים מ $(\boldsymbol{-4,5})$ אל $(n-1,n+2)$, מכיוון שזוהי הנקודה הסימטרית ל $(1,0)$ ביחס לישר $y=x+4$.

<u>כעת נראה התאמה בין סדרות B לסדרות C:</u>
בהינתן $b\in B$, נמצא את המקום הראשון בו b נוגע בישר $y=x+4$ (מקום כזה קיים בהכרח מכך ש $b\in B$), **ונשקף את קטע המסלול עד לנק' זו** ביחס לישר $y=x+4$.
כלומר, עבור כל צעד ימינה ב b, ניקח צעד למעלה, ועבור כל צעד למעלה, ניקח צעד ימינה. התאמה זו מחליפה סדרות מהלכים מ $(1,0)$ אל $(n-1,n+2)$, בסדרת מהלכים מ $(-4,5)$ אל $(n-1,n+2)$, **כלומר בסדרת מהלכים מ $\boldsymbol{C}$**.
נוכל להגדיר את ההתאמה ההפוכה: בהינתן $c\in C$, נמצא את המקום הראשון שבו c נוגע בישר $y=x+4$, קיים כזה כי c חותך את הישר על מנת להגיע לנקודה הסופית $(n-1,n+2)$, **ונשקף את קטע המסלול עד לנקודה זו** ביחס לישר $y=x+4$.
נקבל סדרת מהלכים מ $(1,0)$ אל $(n-1,n+2)$ הנוגעות בישר $y=x+4$, ולכן **זוהי סדרת מהלכים ב $\boldsymbol{B}$**.
קל לוודא שאלו שתי פונקציות הופכיות ולכן הינן חח"ע ועל. מכך נובע ש $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|$.
מספר סדרות המהלכים הסריגיים מנקודה (a,b) לנקודה (c,d) הוא $\binom{c-a+d-b}{c-a}$ ולכן

$$|\boldsymbol{A}|=\binom{n-1-1+n+2-0}{n-1-1}=\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{n-2}}$$
$$|\boldsymbol{C}|=\binom{n-1-(-4)+n+2-5}{n-1-(-4)}=\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{n+3}}$$

כיוון ש $|B|=|C|$ נקבל ש $|B|=\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{n+3}}$ ולכן:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{S}|=|A|-|B|&=\binom{2n}{n-2}-\binom{2n}{n+3}\\&=\frac{(2n)!}{(n-2)!\cdot(n+2)!}-\frac{(2n)!}{(n+3)!\cdot(n-3)!}\\&=\frac{(2n)!}{(n-2)!\cdot(n+2)!}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+3)\cdot\frac{1}{n+2}}\right)\\&=\binom{2n}{n-2}\cdot\left(1-\frac{n+2}{n+3}\right)=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{n+3}}\cdot\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{n-2}}\end{aligned}$$

7. במערכת צירים, צפרדע עומדת על הנקודה $(0,0)$ ויוצאת לטיול הכולל $2n$ קפיצות. במהלך הטיול, אסור לה לצאת מהרביע הראשון, כלומר, לדרוך על נקודה (x,y) שבה $x<0$ או $y<0$. במקרים הבאים, מצאו כמה טיולים אפשריים קיימים:

*א. הקפיצות האפשריות עבור הצפרדע הן קפיצות **למעלה** (מ-(x,y) ל-$(x,y+1)$), קפיצות **למטה** (מ-(x,y) ל-$(x,y-1)$) וקפיצה **ימינה** (מ-(x,y) ל-$(x+1,y)$). בנוסף, הצפרדע חייבת לסיים את הטיול על ציר ה-x.*

<u>פתרון:</u>

נסמן $\boldsymbol{X}=$ מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם ימינה.

$\boldsymbol{Y_1}=$ מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם למעלה.

$\boldsymbol{Y_2}=$ מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם למטה.

נשים לב כי הצפרדע מסיימת את הטיול על ציר ה-x, כלומר שיעור ה y של נקודת הסיום שווה ל 0, לכן $Y_1=Y_2$, נסמן גם $Y=Y_1=Y_2$.
נשים לב כי בציר ה-x, הצפרדע יכולה רק לקפוץ **ימינה** ולא שמאלה, ולכן מספר הקפיצות שבחרה ימינה שווה לשיעור ה x של נקודת הסיום, אז נחשב את מספר המסלולים האפשריים השונים על ידי סכימת מספר כל המסלולים עבור כל נקודת סיום אפשרית $(X,0)$ כאשר $0\le X\le n$.
ישנם סך הכך $2n$ צעדים אז $X+Y_1+Y_2=2n$ ולכן $X=2n-Y_1-Y_2$ אז $X=2n-2Y$ כלומר **$\boldsymbol{X}$ הוא מספר זוגי**.
כעת, נתבונן בכל סדרת צעדים המתארים מסלול של הצפרדע, בתור סדרה באורך $2n$ המורכבת מסימני חצים $(\uparrow,\downarrow,\rightarrow)$ המייצגים את הצעד בו הצפרדע בחרה לקפוץ, בדומה לדוגמה הבאה: $\downarrow\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow$.
אנו נרצה למצוא את **מספר הסידורים השונים המקיימים את תנאי השאלה**.
ראשית, נבחר את המיקומים עבור הצעדים ימינה $(\rightarrow)$,
עבור כל נקודת סיום אפשרית $(X,0)$ ישנן $\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{X}}$ אפשרויות לכך.
כעת נרצה לסדר בשאר המקומות, את הצעדים למעלה $(\uparrow)$ ולמטה $(\downarrow)$, כך שהצפרדע לא יורדת מתחת לציר ה-x, אך מסיימת עליו. כלומר נרצה לסדר את הצעדים כך שבכל שלב, מספר הצעדים למטה לא עולה על מספר הצעדים למעלה, ובסוף המסלול מספר הצעדים למעלה שווה למספר הצעדים למטה, לכן מספר הסידורים לכך הוא **בדיוק מספר קטלן עבור סדרה באורך $\boldsymbol{2Y}$**, כלומר $\boldsymbol{C_Y}=\boldsymbol{C_{n-\frac{X}{2}}}$.

אז סה"כ קיבלנו שמספר הסידורים הוא:

$$\sum_{0\le even\ X\le 2n}\binom{2n}{X}\cdot C_{n-\frac{X}{2}}=\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}}\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{2i}}\cdot\boldsymbol{C_{n-i}}$$

ב. *הקפיצות האפשריות עבור הצפרדע הן קפיצות למעלה, למטה, ימינה (כמו בסעיף הקודם)* ***ושמאלה*** *(מ-(x,y) ל-$(x-1,y)$). בנוסף, הצפרדע חייבת לסיים את הטיול בנקודה $(0,0)$).*

<u>פתרון:</u>
באופן דומה לסעיף הקודם, נסמן:
$\boldsymbol{X_1}$ = מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם ימינה.
$\boldsymbol{X_2}$ = מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם שמאלה.
$\boldsymbol{Y_1}$ = מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם למעלה.
$\boldsymbol{Y_2}$ = מספר הצעדים שהצפרדע קפצה בהם למטה.

נשים לב כי הצפרדע מסיימת את הטיול בנקודה $(0,0)$, לכן $X_1 = X_2$ וגם $Y_1 = Y_2$ אז נסמן $Y = Y_1 = Y_2$, $X = X_1 = X_2$.
כעת, נמצא את מספר הסידורים השונים של סדרות באורך $2n$ המורכבות מסימני החצים $(\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow)$ ומקיימות את תנאי השאלה.
נעשה זאת בעזרת סכימה של כל הסידורים **עבור כל אפשרות של $\boldsymbol{X}$** $(0 \le X \le n)$.
ראשית, נבחר את המיקומים עבור הצעדים בציר הx, כלומר ימינה $(\rightarrow)$ ושמאלה $(\leftarrow)$.
ישנם $X_1 + X_2 = X + X = 2X$ צעדים מסוג זה ולכן קיימות $\binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{2X}}$ אפשרויות לכך.
כעת נרצה לסדר את אותם צעדים כך שהצפרדע לא יוצאת מהרביע הראשון, ומסיימת בנקודה $(0,0)$, כלומר נרצה לסדר את הצעדים כך שבכל שלב, מספר הצעדים שמאלה לא עולה על מספר הצעדים ימינה, ובסוף המסלול מספר הצעדים ימינה שווה בדיוק למספר הצעדים שמאלה, לכן מספר הסידורים לכך הוא **בדיוק מספר קטלן עבור סדרה באורך $\boldsymbol{2X}$**, כלומר $\boldsymbol{C_X}$.
באופן דומה, בשאר המקומות נסדר את הצעדים למעלה $(\uparrow)$ ולמטה $(\downarrow)$, כך שהצפרדע לא יורדת מתחת לציר ה-x, אך מסיימת עליו. מספר הסידורים לכך הוא **בדיוק מספר קטלן עבור סדרה באורך $\boldsymbol{2n-2X}$**, כלומר $\boldsymbol{C_{n-X}}$.

אז סה"כ קיבלנו שמספר הסידורים הוא:

$$\sum_{0 \le X \le n} \binom{2n}{2X} \cdot C_X \cdot C_{n-X} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\boldsymbol{2n}}{\boldsymbol{2i}} \cdot \boldsymbol{C_i} \cdot \boldsymbol{C_{n-i}}$$

(7)