דף סיכום בחינה

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	14.00	14.00
2	14.00	14.00
3	14.00	14.00
4	14.00	11.00
5	15.00	15.00
6	14.00	14.00
7	15.00	15.00

ציון בחינה סופי : 97.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

מבנים בדידים וקומבינטוריקה – תרגיל 4 – איליי דדון וגל פינטו

1. *יהי $T=(V,E)$ עץ עם דרגת מקסימום Δ. הוכיחו כי ב T יש לפחות Δ עלים.*

<u>פתרון:</u>

נסמן ב-k את **מספר העלים בעץ.**

דרגת המקסימום בעץ היא Δ ולכן **קיים לפחות קודקוד אחד עם דרגה** Δ.

דרגת העלים היא 1, ושאר הדרגות הן **לפחות** 2, אז ממשפט הדרגות:

$$2\cdot|E|=2(n-1)=\sum_{v\in V}\deg(v)$$

$$=1\cdot\Delta+\sum_{v\ is\ leaf}\deg(v)+\sum_{all\ other\ v}\deg(v)\geq\Delta+k\cdot1+(n-k-1)\cdot2$$

$$\Rightarrow 2n-2\geq\Delta+k+2n-2k-2$$

$$\Rightarrow 2k-k\geq\Delta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k\geq\Delta}$$

(1)

2. *יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט בעל דרגת מינימום $\delta(G)=k$ כך שאורך כל מעגל בו הוא לפחות 5. הוכיחו כי מספר הקודקודים מקיים $|V|\geq k^2+1$.*

<u>פתרון:</u>

דרגת המינימום בגרף היא k. אז נבחר קודקוד כלשהו בגרף $v_0\in V$, יש לו לפחות $\boldsymbol{k}$ **שכנים**. נסמנם: $v_1,v_2,\dots,v_k$.

בעת, דרגת כל אחד מהקודקודים $v_1,v_2,\dots,v_k$ היא **לפחות** $\boldsymbol{k}$, אז לכל אחד מהם קיימים לפחות $\boldsymbol{k-1}$ **שכנים** שהם לא v_0.

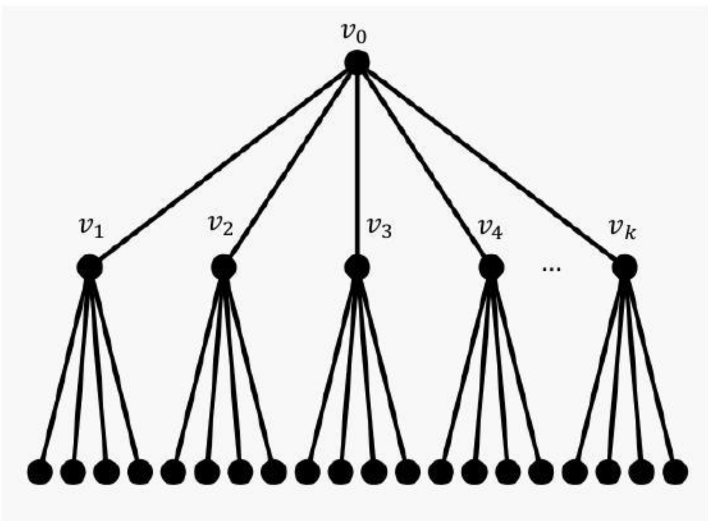
ונשים לב **ששכנים אלו שונים זה מזה**, וגם מ $v_1,v_2,\dots,v_k$, כי אחרת היה נסגר מעגל באורך 3 או 4, וזו תהיה סתירה לכך **שאורך כל מעגל הוא לפחות 5**.

לכן, **מספר הקודקודים** בגרף הוא לפחות

$$1+k+k\cdot(k-1)$$

$$=1+k+k^2-k$$

$$=\boldsymbol{1+k^2}$$



(2)

3. *הוכיחו כי בכל גרף פשוט וקשיר $G = (V, E)$ עם $n \geq 4$ קודקודים ולפחות $2n - 3$ צלעות, יש שני מעגלים באותו אורך.*

<u>פתרון:</u>
הגרף G **קשיר** ולכן קיים עץ $T = (V, E_T)$ כך ש T **עץ פורש** של G.
נסמן $n = |V|$, ונשים לב ש-T הוא עץ עם n קודקודים, אז יש לו $n - 1$ צלעות.
לגרף כולו יש לפחות $2n - 3$ צלעות, אז נרצה **להוסיף את צלעות הגרף החסרות**, אל העץ T, ובכך **למנות את מספר המעגלים הנוצרים** עד לקבלת הגרף G כולו.
תחילה, T הוא עץ ולכן הוא **קשיר**, **חסר מעגלים ומקסימלי בתכונה זו**, אז בהוספת הצלע הראשונה, נקבל גרף **קשיר ומכיל מעגל**.
בעת ממשפט שלמדנו, **הוספת כל צלע** נוספת לגרף קשיר **תיצור עוד מעגל**.
<u>הוכחה קצרה לכך:</u> נסמן ב $e = \{u, v\}$ את הצלע שנרצה להוסיף לגרף.
הגרף **קשיר** אז קיים מסלול p בין u ל v ולכן בהוספת הקשת $\{u, v\}$ סגרנו מעגל שהוא

$$C = p \circ e$$

■

בעת, מכיוון ש-G כולו מכיל לפחות $2n - 3$ צלעות, והתחלנו עם עץ בעל $n - 1$ צלעות, **נדרשנו להוסיף** לפחות $(2n - 3) - (n - 1) = \boldsymbol{n - 2}$ צלעות,
כלומר **יצרנו לפחות $\boldsymbol{n - 2}$ מעגלים** שונים.
נשים לב שכל אחד מהמעגלים שיצרנו הוא **באורך בין 3 ל-$\boldsymbol{n}$**.
וייתכנו שני מצבים:

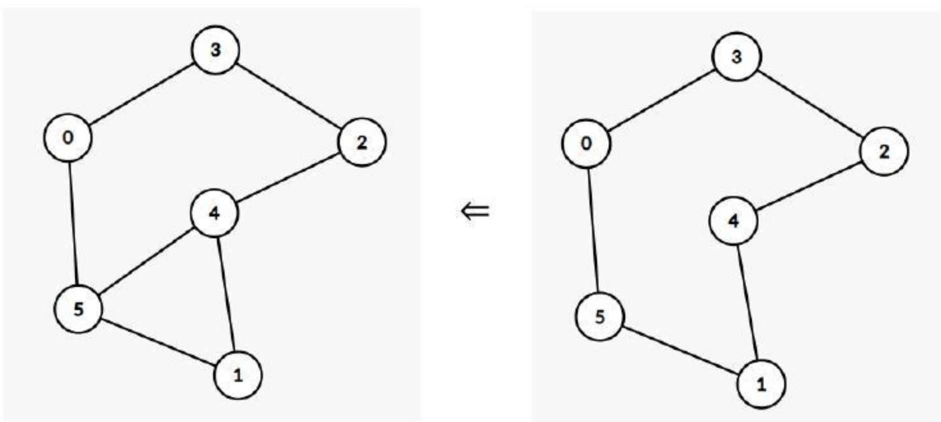
1) <u>כל מעגל שיצרנו היה **באורך בין 3 ל $\boldsymbol{n - 1}$**:</u> כלומר ישנם $n - 3$ אורכים שונים למעגלים, וישנם $n - 2$ מעגלים, אז מעיקרון שובך היונים, נקבל **שקיימים לפחות שני מעגלים עם אותו האורך**, וסיימנו.
2) <u>אחד המעגלים שיצרנו היה באורך n:</u> אז נשים לב שכאשר הגרף **מכיל מעגל באורך $\boldsymbol{n}$**, הוספת כל צלע נוספת, יוצרת **לפחות שני מעגלים שונים**.
<u>הוכחה קצרה לכך:</u> ניקח $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ מעגל פשוט ב-G באורך n.
נסמן את הצלע שנרצה להוסיף $e = \{v_i, v_j\}$ $(i < j)$.
מכיוון ש C מעגל שעובר בכל הקודקודים, קיימים **שני מסלולים שונים** בין v_i ל v_j:

$$p_1 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j) \quad , \quad p_2 = (v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots v_i)$$

ולכן בהוספת הקשת e, **ניצור שני מעגלים שונים**: $C_1 = p_1 \circ e$, $C_2 = p_2 \circ e$.

■

לפני שנמשיך בהוכחה, נתבונן בדוגמה הבאה:
ניקח גרף על 6 קודקודים, בעל מעגל באורך 6, ונוסיף את הצלע $\{4,5\}$:



נבחין כי **נוצרו שני מעגלים שונים** עקב הוספת הצלע $\{4,5\}$:
$C_1 = (4,5,1,4)$ וגם $C_2 = (5,0,3,2,4,5)$.

נחזור להוכחה, אז מכיוון שהוספת כל צלע נוספת **תיצור שני מעגלים**,
נקבל סה"כ **שמס' המעגלים** בגרף G הוא לפחות:

$$1 + 2 \cdot (n - 3) = 1 + 2n - 6 = \boldsymbol{2n - 5}$$

נבדוק מתי מספר זה **גדול** ממספר אורכי המעגלים השונים:

$$2n - 5 > n - 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n > 3}$$

ובמקרה שלנו, $\boldsymbol{n \geq 4}$ אז מעיקרון שובך היונים, נקבל **שקיימים לפחות שני מעגלים שונים באותו אורך**.

(3)

.4 *יהי G גרף פשוט כך שאין בו C_3 ולא P_4 כתת-גרף מושרה. הוכיחו כי G דו"צ.*

תזכורת: *בהינתן $X \subseteq V$, תת הגרף המושרה ע"י X הוא תת הגרף שקודקודיו הם X וקבוצת הצלעות שלו היא אוסף כל הצלעות ששתי קצותיהן ב X,*

ומסמנים $G[X] = \left(X, \left\{\{u,v\} \in E \mid u,v \in X\right\}\right)$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש במשפט שלמדנו שאומר כי "גרף G הוא **דו"צ** אמ"מ **כל המעגלים הפשוטים בו הם מאורך זוגי**".

נניח בשלילה שהגרף **אינו דו"צ**, כלומר מהמשפט, קיים בו לפחות **מעגל פשוט אחד באורך אי-זוגי**. אז ניקח את המעגל הפשוט מאורך אי-זוגי **הקצר ביותר**, נסמן אותו:

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$$

אורך המעגל k אינו יכול להיות 1 כי **הגרף פשוט**, ו-v_1 לא מכיל **קשת אל עצמו**.

k לא יכול להיות גם שווה ל-3 מכיוון ש C_3 **איננו תת-גרף מושרה** ב-G, אז $k \geq 5$.

נתבונן **בארבעת הקודקודים הראשונים** ב-C: v_1, v_2, v_3, v_4.

מהנתון, P_4 **איננו תת-גרף מושרה** ב-G ולכן **לא ייתכן** מצב בו **הקודקודים מחוברים רק בקו ישר**, אז חייבת להיות קשת נוספת בין שניים מהם. **-3**

(4)

קשת זו **לא יכולה** לחבר בין v_1 ל-v_3 או בין v_2 ל-v_4 כי מצב זה **יסגור מעגל באורך 3** (ו-C_3 איננו תת-גרף מושרה ב-G). **יש להוכיח באינדוקציה**

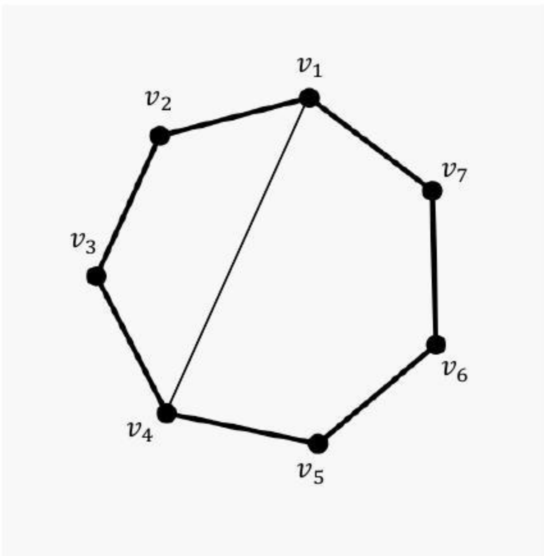
אז הקשת **חייבת** להיות בין v_1 ל-v_4 ובכך לסגור מעגל באורך 4.

אבל אז, נתבונן במעגל $C' = (v_1, v_4, v_5, \dots, v_k, v_1)$.

בעצם מצאנו מעגל שרק מדלג על הקודקודים v_2, v_3 ולכן קיבלנו **מעגל פשוט באורך $k-2$**

ומעגל זה הוא גם **מאורך אי-זוגי ואף קצר יותר מהמעגל C**,

והגענו לסתירה **למינימליות** של C.



5. *הוכיחו כל לכל גרף פשוט $G=(V,E)$ קיים תת גרף דו צדדי עם לפחות $\frac{1}{2}|E|$ צלעות.*

<u>פתרון:</u>

נוכיח **באינדוקציה על $\boldsymbol{n}$** שלכל גרף פשוט G על n קודקודים, הטענה מתקיימת.

<u>בסיס:</u> $n=1$, אז **אין צלעות** ולכן $|E|=0$ אז G הוא בעצמו גם גרף דו-צדדי המכיל $0=\frac{0}{2}=\frac{|E|}{2}$ צלעות, והטענה מתקיימת.

<u>הנחה:</u> יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח שלכל גרף פשוט G על n קודקודים, הטענה מתקיימת.

<u>צעד:</u> נוכיח עבור $n+1$:

יהי $G=(V,E)$ גרף על $n+1$ קודקודים.

אז $V\neq\emptyset$ ולכן ניקח קודקוד כלשהו $v\in V$.

נתבונן בגרף $\boldsymbol{G_1=G\backslash\{v\}=(V_1,E_{G_1})}$, כלומר **הגרף המתקבל ממחיקת הקודקוד $\boldsymbol{v}$ יחד עם כל הצלעות שחיברו אותו.**

$$|\boldsymbol{V_1}|=|V\backslash\{v\}|=|V|-1=n+1-1=\boldsymbol{n}$$

אז מהנחת האינדוקציה, **קיים תת-גרף דו-צדדי** $H_1=(A,B,E_{H_1})$ של G_1 ומתקיים $\boldsymbol{|E_{H_1}|\geq\frac{1}{2}|E_{G_1}|}$.

נסמן את $N_X(v)$ להיות **קבוצת הקודקודים** מתוך $X\subseteq V$, שהם **שכנים של הקודקוד $\boldsymbol{v}$ בגרף המקורי $\boldsymbol{G}$**.

ונניח בה"כ $|N_A(v)|\geq|N_B(v)|$.

נתבונן בגרף $\boldsymbol{H_2=(V,E_{H_2})}$ המתקבל מ H_1 לאחר **הוספת הקודקוד $\boldsymbol{v}$ אל הקבוצה $\boldsymbol{B}$**, יחד עם **כל הקשתות המקוריות שהיו לו עם קב' הקודקודים $\boldsymbol{A}$**, כלומר:

$$\boldsymbol{H_2=\left(A,B\cup\{v\},E_{H_1}\cup(N_A(v)\times\{v\})\right)}$$

ראשית, נשים לב כי $A\cup(B\cup\{v\})=V$ וגם $E_{H_1}\cup(N_A(v)\times\{v\})\subseteq E$ ולכן זהו **תת-גרף של $\boldsymbol{G}$**.

נשים לב גם כי $A\cap(B\cup\{v\})=\emptyset$ ומכיוון שחיברנו את v **אך ורק לקודקודים מהקב' $\boldsymbol{A}$**, הגרף נשאר **דו-צדדי**, ומתקיים:

$$\boldsymbol{|E_{H_2}|}=|E_{H_1}\cup(N_A(v)\times\{v\})|=|E_{H_1}|+|N_A(v)\times\{v\}|=\boldsymbol{|E_{H_1}|+|N_A(v)|}$$

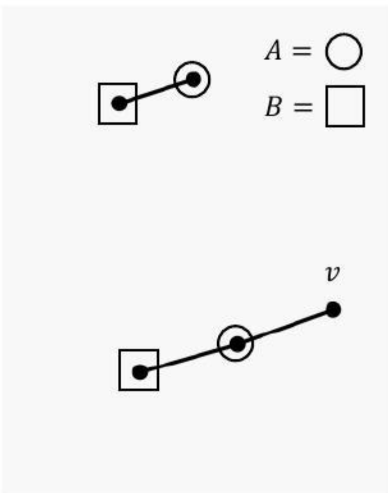
אז מהנחת האינדוקציה,

$$\boldsymbol{|E_{H_2}|}\geq\frac{1}{2}|E_{G_1}|+|N_A(v)|=\frac{1}{2}(|E_G|-|N_A(v)|-|N_B(v)|)+|N_A(v)|$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}|E_G|+\frac{1}{2}\cdot(|N_A(v)|-|N_B(v)|)}$$

והנחנו כי $\boldsymbol{|N_A(v)|\geq|N_B(v)|}$ אז סה"כ $\boldsymbol{|E_{H_2}|\geq\frac{1}{2}|E_G|}$ כנדרש.

(5)



6. *יהי $T = (V, E)$ עץ.*
הוכיחו שכל קודקוד ב T הוא בעל דרגה אי זוגית אם ורק אם לכל $e \in E$, שני רכיבי הקשירות בגרף $T \setminus \{e\}$ הם בגודל אי זוגי (כלומר מכילים מספר אי-זוגי של קודקודים כל אחד).

<u>פתרון:</u>

($\Leftarrow$) נניח **שלכל קודקוד** $v \in V$, $\deg_T(v)$ **אי-זוגית**.
ונראה כי **לכל $e \in E$, שני רכיבי הקשירות בגרף $T \setminus \{e\}$ הם בגודל אי-זוגי**.
נניח בשלילה שקיימת $e \in E$ כך **שמס' הקודקודים בלפחות אחד משני רכיבי הקשירות של $T \setminus \{e\}$ הוא זוגי**.
נסמן את **רכיב הקשירות** הזה C_1, ואת **מס' הקודקודים** בו k.
נשים לב כי לאחר מחיקת הצלע e, **הורדנו ב-1** את **הדרגה של אחד הקודקודים** ב-C_1, נסמן אותו v. שאר הקודקודים ב C_1 נשארו עם דרגה אי-זוגית.
אז נבדוק את סכום הדרגות ב-C_1:

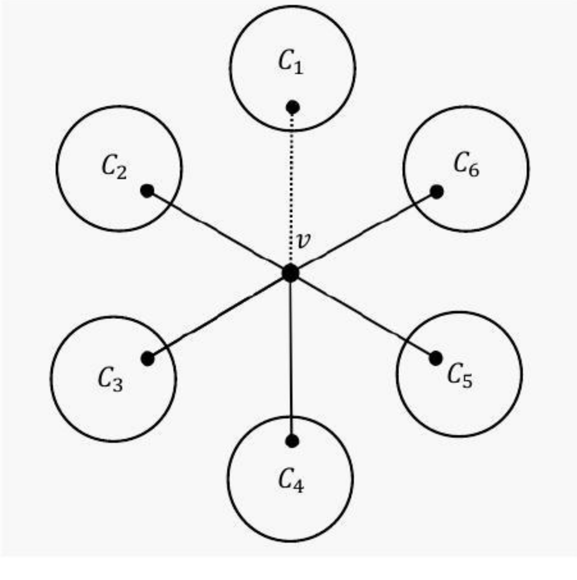
$$\sum_{\boldsymbol{u \in C_1}} \mathbf{deg}(\boldsymbol{u}) = \deg(v) + \sum_{u \in C_1 \setminus \{v\}} \deg(u) = even + (k-1) \cdot odd = \boldsymbol{odd}$$

כלומר, מכיוון שדרגת הקודקוד v **זוגית**, וישנם $k-1$ (מס' אי זוגי) קודקודים **אחרים** ב-C_1, **שדרגתם אי-זוגית**, נקבל **שסכום הדרגות ב-C_1 הוא אי-זוגי** וזו **סתירה למשפט הדרגות**.

($\Rightarrow$) נניח **שלכל $e \in E$, שני רכיבי הקשירות בגרף $T \setminus \{e\}$ הם בגודל אי-זוגי**.
ונראה כי **כל קודקוד** ב-T הוא בעל **דרגה אי-זוגית**.
נניח בשלילה שקיים קודקוד $v \in V$ כך **שדרגתו זוגית**.
אז ל v יש **מספר זוגי של שכנים**, נסמן אותם $v_1, v_2, \dots, v_k$.
נסמן ב-C_i כל **רכיב קשירות** המכיל את v_i **שנוצר ממחיקת הצלע** $\{v, v_i\}$.
נשים לב שמההנחה, כל אחד מרכיבי הקשירות C_i הוא **בגודל אי-זוגי**.
כעת **נתבונן ברכיב הקשירות** $T \setminus C_1$, שהוא רכיב הקשירות **השני שנוצר ממחיקת** $\{v, v_1\}$.
רכיב קשירות זה **מכיל את כל הקודקודים שלא נמצאים ב $\boldsymbol{C_1}$**, כלומר את **הקודקוד $\boldsymbol{v}$**, ואת קודקודי $\boldsymbol{C_i}$ עבור $2 \le i \le k$.
ניזכר כי k זוגי, ולכן מספר הקודקודים ב $T \setminus C_1$ הוא:

$$|\boldsymbol{T} \setminus \boldsymbol{C_1}| = 1 + \sum_{i=2}^{k} |C_i| = 1 + (k-1) \cdot odd = 1 + odd \cdot odd = \boldsymbol{even}$$

והגענו לסתירה, מכיוון שרכיב הקשירות $T \setminus C_1$ צריך גם להיות **בגודל אי-זוגי**.



7. *יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט כך שדרגת כל קודקוד לפחות 3, הוכיחו כי קיים ב G מעגל פשוט באורך זוגי.*
רמז: הסתכלו על מסלול פשוט באורך מקסימלי.

<u>פתרון:</u>
נסמן ב-P **מסלול פשוט מקסימלי** כלשהו בגרף G כך: $P=(v_0,v_1,v_2,\dots,v_k)$.
הדרגה המינימלית בגרף G היא 3 ולכן $\deg(v_0)\ge 3$, כלומר לקודקוד v_0 קיימים לפחות 3 **שכנים שונים**, אחד מהם הוא v_1, ושני השכנים הנותרים **חייבים להיות על המסלול** P, אחרת יכולנו **לחבר אותם לתחילת המסלול** ולקבל **מסלול ארוך יותר**, **בסתירה למקסימליות** של P.

אז נסמן את **שני השכנים האחרים** של v_0 כך: v_i, v_j כאשר $2\le i<j\le k$,
ונרכיב בעזרתם **מעגל פשוט באורך זוגי**.
נחלק למקרים:

1) <u>i אי-זוגי:</u> אז נתבונן **בתת-מסלול** של P: $P_i=(v_0,v_1,\dots,v_i)$,
ומכיוון ש v_i שכן של v_0 נוכל לקחת את המעגל:
$$C=P_i\circ(v_i,v_0)=(v_0,v_1,\dots,v_i,v_0)$$
אורך המעגל הוא $i+1$, כלומר **זוגי** כנדרש.

2) <u>j אי-זוגי:</u> באותו האופן, נתבונן **בתת-מסלול** של P: $P_j=(v_0,v_1,\dots,v_j)$,
ומכיוון ש v_j שכן של v_0 נוכל לקחת את המעגל:
$$C=P_j\circ(v_j,v_0)=(v_0,v_1,\dots,v_j,v_0)$$
אורך המעגל הוא $j+1$, כלומר **זוגי** כנדרש.

3) <u>i,j זוגיים:</u> נתבונן בתת-מסלול של P: $P'=(v_i,v_{i+1},\dots,v_j)$
ומכיוון ש v_i ו-v_j שכנים של v_0 נוכל לקחת את המעגל:
$$C=(v_0,v_i)\circ P'\circ(v_j,v_0)=(v_0,v_i,v_{i+1},\dots,v_j,v_0)$$
אורך המעגל הוא $1+(j-i)+1=\boldsymbol{(j-i)+2}$ כלומר **זוגי** כנדרש.

(7)