דף סיכום בחינה

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	14.00	14.00
2	14.00	14.00
3	14.00	14.00
4	15.00	15.00
5	14.00	14.00
6	14.00	14.00
7	15.00	15.00

ציון בחינה סופי : 100.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

<u>מבנים בדידים וקומבינטוריקה – תרגיל 5 – איליי דדון וגל פינטו</u>

1. *יהא G גרף 6-רגולרי. הוכיחו כי ניתן לצבוע את צלעות G (ללא הגבלה על מספר הצבעים) כך שלכל קודקוד ולכל צבע, מספר הצלעות החלות בקודקוד וצבועות בצבע זה הוא 0 או 2.*

<u>פתרון:</u>
<u>נוכיח תחילה את טענת העזר:</u>
"לכל גרף לא מכוון $G = (V, E)$, אם לכל $v \in V$, $\mathbf{deg(}\boldsymbol{v}\mathbf{)}$ **זוגית**, אז **כל קודקוד מדרגה חיובית שייך למעגל פשוט** ב-G".
<u>הוכחת טענת העזר:</u>
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, ונניח שלכל $v \in V$, $\deg(v)$ זוגית.
יהי $v \in V$ קודקוד **מדרגה חיובית** ב-G. תחילה נראה כי v שייך **למעגל כלשהו** ב-G.
דרגתו של v **חיובית** אז v שייך **למסלול כלשהו** ב-G.
ניקח את המסלול בעל האורך המקסימלי ב-G המתחיל ב-v, נסמן אותו:
$$P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$$
ונראה כי P הוא **מעגל**, כלומר $v_k = v$.
נניח בשלילה כי $v \neq v_k$, ונספור את **מספר הקשתות** ב-P שחלות ב-v_k:
הקשת האחרונה במסלול, $\{v_{k-1}, v_k\}$, **חלה ב $\boldsymbol{v_k}$**, ואם המסלול P עבר ב-v_k יותר מפעם אחת, אז עבור כל מעבר **באמצע המסלול**, נספור עוד **2 קשתות** החלות ב-v_k.
כלומר סך הכל **מספר קשתות** המסלול P החלות ב-v_k הוא **אי-זוגי**, אך מהנתון, $\deg(v_k)$ **זוגית**, אז **חייב** להיות קודקוד v_{k+1} **שמחובר** ל v_k בקשת, **וקיבלנו מסלול**
$$P' = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1})$$
באורך גדול יותר מאורכו של P, **בסתירה למקסימליות** של P.
אז $v = v_k$ ולכן $P = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k = v)$ הוא **מעגל המכיל את $\boldsymbol{v}$**.
אם P הוא גם **מעגל פשוט** אז סיימנו, אחרת, **קיים קודקוד** במסלול P שחוזרים עליו, כלומר **קיימים אינדקסים** $0 \leq i < j < k$ כך ש $v_i = v_j$. אז ניקח את המעגל
$$C = (v = v_0, v_1, v_2, \dots, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_{j+1}}, \dots, v_k = v)$$
כלומר נדלג על כל הקודקודים מ $i + 1$ ועד j כולל, ונקבל **מעגל קטן יותר** שמכיל את v.
אם קיבלנו **מעגל פשוט** אז סיימנו, אחרת נמשיך בתהליך זה עד לקבלת **מעגל פשוט**.
■

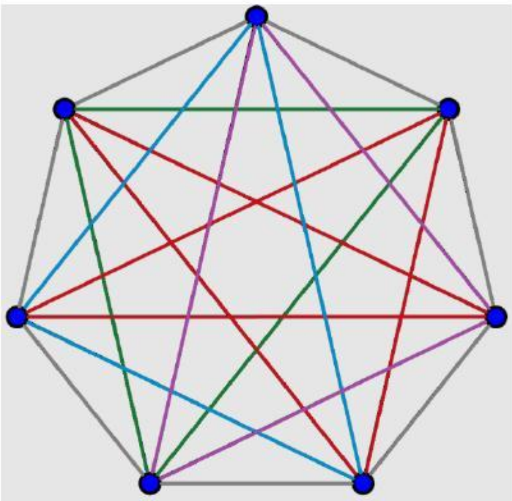
<u>בעת נוכיח את הטענה המרכזית:</u> נראה כי **ניתן לצבוע את צלעות G** כך **שלכל קודקוד ולכל צבע**, מספר הצלעות החלות בקודקוד **וצבועות בצבע זה הוא 0 או 2**.
ניקח קודקוד כלשהו $v \in V$. **דרגת כל הקודקודים** ב-G היא 6, כלומר **זוגית** (וחיובית), ובפרט גם דרגתו של v, אז מטענת העזר, v **שייך למעגל פשוט** כלשהו ב-G:
$$C_1 = (v_0, v_1, \dots, v_p, v_o)$$
נצבע את קשתות מעגל זה בצבע מס' 1, נשים לב שמכיוון שזהו **מעגל פשוט**, כל קודקוד שעברנו בו **מחובר בדיוק ל-2 צלעות** מהמעגל, ולכן **בדיוק 2 מהקשתות החלות בו נצבעו בצבע מס' 1**.
בעת נתבונן בגרף G_2 המתקבל **מהשמטת צלעות $\boldsymbol{C_1}$**. נשים לב שב-G_2 **דרגות כל הקודקודים זוגיות**, ומכיוון שדרגת כל קודקוד ב-G היא 6, וצבענו לכל היותר 2 קשתות בכל קודקוד, לא ייתכן שצבענו את כל הצלעות, אז קיים קודקוד $u \in V$ שלא צבענו את כל צלעותיו, אז מטענת העזר, u **שייך למעגל פשוט** ב-G_2, נסמן אותו $\boldsymbol{C_2}$.

נצבע את קשתות המעגל C_2 בצבע מס' 2, נשים לב שמכיוון שזהו **מעגל פשוט**, כל קודקוד שעברנו בו **מחובר בדיוק ל-2 צלעות מהמעגל**, ולכן **בדיוק 2 מהקשתות החלות בו נצבעו בצבע מס' 2**.

נמשיך כך את התהליך וכל עוד לא צבענו את כל צלעות הגרף G, עבור כל גרף G_{i-1}, **נשמיט את צלעות C_{i-1}** לקבלת הגרף G_i, **ניקח קודקוד כלשהו** שעוד לא צבענו את כל צלעותיו, **ניקח מעגל פשוט C_i** שמכיל את הקודקוד, **ונצבע את צלעותיו בצבע מס' i**.

מכיוון שהגרף סופי, התהליך יסתיים ולבסוף נקבל **צביעה של צלעות הגרף G**, שעבור כל קודקוד, **מספר הקשתות הצבועות בכל צבע הוא 0 או 2**.

■



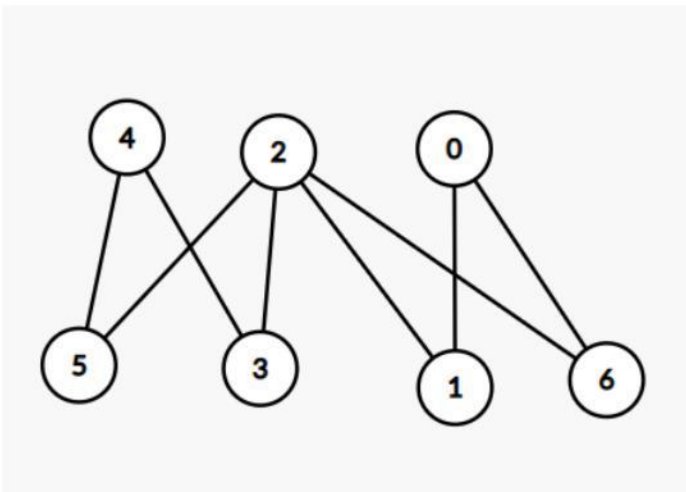
2. יהא G גרף קשיר עם מספר אי זוגי של קודקודים (לפחות שלושה קודקודים) המכיל מעגל אוילר. הוכיחו כי יש ב-G לפחות שלושה קודקודים מאותה דרגה.

<u>פתרון:</u>
נסמן ב-n את מס' הקודקודים ב-G. ידוע כי n אי-זוגי, כלומר $\boldsymbol{n-1}$ **זוגי**.
מכיוון ש-G **מכיל מעגל אוילר**, אנו יודעים שדרגת כל הקודקודים בו **זוגית**, ומכיוון שהגרף **קשיר**, **אין** בו קודקוד בעל **דרגה $\boldsymbol{0}$**, לכן **הדרגות האפשריות** עבור הקודקודים הן $\{2,4,6,\dots,n-1\}$, כלומר קיימות $\boldsymbol{\frac{n-1}{2}}$ **דרגות אפשריות**.
כעת, מכיוון שישנם $\boldsymbol{n}$ **קודקודים** ו- $\boldsymbol{\frac{n-1}{2}}$ **דרגות אפשריות**, נקבל מעיקרון שובך היונים המורחב שקיימים לפחות $\left\lceil \frac{n}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n-1} \right\rceil = \boldsymbol{3}$ **קודקודים עם אותה הדרגה.**

(2)

3. הוכיחו או הפריכו:
אם G הוא גרף דו-צדדי קשיר המכיל מעגל אוילר, אז מספר הצמתים ב-G זוגי.

<u>פתרון:</u>
הטענה **לא נכונה**, דוגמה נגדית:



(3)

גרף זה הוא גרף **דו-צדדי**, **קשיר**, דרגת כל הקודקודים זוגית, ולכן הגרף **מכיל מעגל אוילר**:
$$C_{euler} = (5,4,3,2,1,0,6,2,5)$$
אך **מספר הקודקודים** הוא 7, כלומר **אי-זוגי**.

4. *נניח כי* $G=(V,E)$ *הינו איחוד של שני גרפים מישוריים* $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$ *(שני הגרפים עם אותה קבוצות קודקודים) – כלומר,* $E=E_1\cup E_2$.
הוכיחו כי $\chi(G)\le 12$.

<u>פתרון:</u>
<u>תחילה נוכיח את טענת העזר:</u>
"לכל גרף $G=(V,E)$, אם $|V|\ge 3$ וגם G הינו **איחוד של שני גרפים מישוריים** $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$, אז **קיים קודקוד** $v\in V$ כך ש $\boldsymbol{\deg_G(v)<12}$."
<u>הוכחת טענת העזר:</u>
יהי גרף $G=(V,E)$ ונניח כי $|V|\ge 3$ וגם G הינו **איחוד של שני גרפים מישוריים** $G_1=(V,E_1), G_2=(V,E_2)$
G_1 ו-G_2 גרפים מישוריים עם $|V|\ge 3$ קודקודים ולכן ממשפט שלמדנו:
$\boldsymbol{|E_1|\le 3\cdot(|V|-2)}$ וגם $\boldsymbol{|E_2|\le 3\cdot(|V|-2)}$.
$E=E_1\cup E_2$ אז $\boldsymbol{|E|}=|E_1\cup E_2|\le|E_1|+|E_2|\le\boldsymbol{3\cdot(|V|-2)+3\cdot(|V|-2)}$
כלומר: $\boldsymbol{|E|\le 6\cdot|V|-12}$.
לכן, ממשפט הדרגות:

$$\sum_{v\in V}\boldsymbol{\deg_G(v)}=2\cdot|E|\le 12\cdot|V|-24<\boldsymbol{12\cdot|V|}$$

נראה שקיים קודקוד שדרגתו קטנה מ-12. **נניח בשלילה** כי $\forall v\in V,\deg_G(v)\ge 12$, אז:

$$\sum_{v\in V}\boldsymbol{\deg_G(v)\ge 12\cdot|V|}$$

אבל הוכחנו כי

$$\sum_{v\in V}\boldsymbol{\deg_G(v)<12\cdot|V|}$$

אז הגענו לסתירה.

<u>בעת נוכיח את הטענה המרכזית, באינדוקציה על $|V|=n$:</u>
<u>בסיס:</u>
$n=1$: אז הגרף G מכיל רק קודקוד אחד, ניתן לצבוע אותו רק בצבע אחד,
ולכן $\boldsymbol{\chi(G)}=1\le\boldsymbol{12}$ כנדרש.
$n=2$: אז הגרף G מכיל 2 קודקודים, אז $\boldsymbol{\chi(G)}\le 2\le\boldsymbol{12}$ כנדרש.
<u>הנחה:</u> יהי $\boldsymbol{n}\ge 2$ ונניח כי לכל גרף $G=(V,E)$, אם $\boldsymbol{|V|=n}$ וגם G הינו **איחוד של שני גרפים מישוריים** $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$, אז $\boldsymbol{\chi(G)\le 12}$.
<u>צעד:</u> נוכיח עבור $n+1$:
יהי $G=(V,E)$ גרף בעל $\boldsymbol{|V|=n+1}$ קודקודים ונניח כי G הינו **איחוד של שני גרפים מישוריים** $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$. נראה כי $\boldsymbol{\chi(G)\le 12}$.
$n\ge 2$ אז $|V|=n+1\ge 3$, אז מטענת העזר, **קיים קודקוד** $\boldsymbol{v\in V}$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{\deg_G(v)<12}$$

נתבונן בגרפים:
$G'=G\backslash\{v\}=(V',E')$, $\boldsymbol{G_1'=G_1}\backslash\{\boldsymbol{v}\}=(V',E_1')$, $\boldsymbol{G_2'=G_2}\backslash\{\boldsymbol{v}\}=(V',E_2)$
ראשית, $\boldsymbol{|V'|}=|V\backslash\{v\}|=|V|-1=n+1-1=\boldsymbol{n}$.
שנית, הגרפים G_1, G_2 הם **גרפים מישוריים** ולכן גם לאחר שנוציא מהם את הקודקוד v (יחד עם הקשתות החלות בו), נקבל שהגרפים $G_1{}'$, $G_2{}'$ גם עדיין **מישוריים**.

כמו כן, הגרף G' הוא בדיוק הגרף המתקבל **מאיחוד** ${G_1}'$ ו- ${G_2}'$, מכיוון שיש להם את **אותה קב' קודקודים**, וגם **קב' קשתות** הגרף G היא **בדיוק איחוד קב' הקשתות משני הגרפים**:

$$\boldsymbol{E'} = E\backslash\{v\} = (E_1 \cup E_2)\backslash\{v\} = (E_1\backslash\{v\}) \cup (E_2\backslash\{v\}) = \boldsymbol{E'_1 \cup E'_2}$$

(כאשר $E\backslash\{v\}$ מסמן את קב' הקשתות מתוך E שאינן חלות בקודקוד v)

ולכן, מהנחת האינדוקציה, $\boldsymbol{\chi(G') \leq 12}$.

בעת, נחזיר את הקודקוד v אל הגרף G', יחד עם הקשתות שחלו בו, **ונקבל את הגרף המקורי $\boldsymbol{G}$**. מכיוון ש $\boldsymbol{\deg_G(v) < 12}$, נוכל לצבוע את הקודקוד v **בצבע ייחודי משכניו**, מתוך צבעי קודקודי G', ולקבל שגם עבור הגרף G מתקיים $\boldsymbol{\chi(G) \leq 12}$.

(4)

5. נסחו הכללה לנוסחת אוילר עבור גרף G מישורי בעל d רכיבי קשירות. הוכיחו את נכונותה.

<u>פתרון:</u>

נראה שלכל גרף מישורי $G = (V, E)$ בעל d רכיבי קשירות, מתקיים:

$$\boldsymbol{|V| - |E| + |F| = d + 1}$$

כאשר F היא קבוצת הפאות של הגרף G.

<u>הוכחה:</u> יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי בעל d רכיבי קשירות.

נסמן לכל $1 \leq i \leq d$ את **רכיב הקשירות ה-$\boldsymbol{i}$** בתור תת-גרף $G_i = (V_i, E_i)$.

מכיוון שכל אחד מרכיבי הקשירות מהווה **גרף מישורי וקשיר**, אנו יודעים שלכל $\boldsymbol{i}$ מתקיים:

$$\boldsymbol{|V_i| - |E_i| + |F_i| = 2}$$

לכן כאשר נסכום את המשוואות יחד, נקבל:

$$\sum_{i=1}^{d} |V_i| - \sum_{i=1}^{d} |E_i| + \sum_{i=1}^{d} |F_i| = 2 \cdot d$$

נשים לב כי רכיבי הקשירות **זרים זה לזה בקודקודיהם וצלעותיהם** ולכן מתקיים:

$$\boldsymbol{|V| = \sum_{i=1}^{d} |V_i| \qquad |E| = \sum_{i=1}^{d} |E_i|}$$

אך רכיבי הקשירות אינם לגמרי זרים זה לזה בפאות, הפאה היחידה **המשותפת** לכל רכיבי הקשירות היא **הפאה האינסופית**, ולכן **נספרת $\boldsymbol{d}$ פעמים** בסכום הפאות, אז בכדי לספור את **מספר הפאות בגרף $\boldsymbol{G}$** נצטרך להתחשב בזאת **ולהחסיר** את הפאה $d - 1$ פעמים מסכום הפאות, כלומר נקבל:

$$|F| = \left(\sum_{i=1}^{d} |F_i|\right) - (d - 1)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} |F_i| = |F| + d - 1}$$

אז סה"כ, נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{d} |V_i| - \sum_{i=1}^{d} |E_i| + \sum_{i=1}^{d} |F_i| = 2 \cdot d$$

$$\Rightarrow |V| - |E| + |F| + d - 1 = 2d$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow |V| - |E| + |F| = d + 1}$$

(5)

6. <u>סעיף א':</u>

יהי G גרף עם n קודקודים.

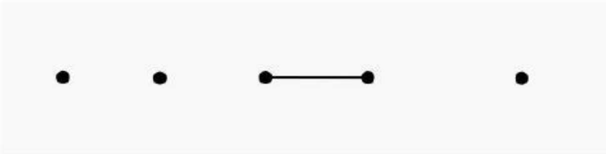
הוכיחו כי אם ב-G ישנן $\left(\binom{n-1}{2}+2\right)$ צלעות, אז G מכיל מעגל המילטון.

<u>פתרון:</u>

נסמן: $G=(V_G,E_G)$, $|V_G|=n$.

אז מהנתון: $\boldsymbol{|E_G|=\binom{n-1}{2}+2\geq 2}$.

נשים לב כי **גרפים שבהם מספר הקודקודים הוא 1 או 2**, מכילים **רק 0 או 1 צלעות**:



ולכן, מכיוון ש-G **מכיל לפחות 2 צלעות**, נובע כי $n\neq 1,2$, כלומר $\boldsymbol{n\geq 3}$.

כעת, בעזרת **משפט $\boldsymbol{ORE}$**, מספיק שנראה **כי לכל $\boldsymbol{x,y\in V}$ שאינם שכנים**, מתקיים $\boldsymbol{\deg(x)+\deg(y)\geq n}$, ומכך ינבע כי G מכיל **מעגל המילטון**.

יהיו $x,y\in V$ שאינם שכנים.

נתבונן בגרף $\boldsymbol{H=(V_H,E_H)=G\setminus\{x,y\}}$.

ראשית, $\boldsymbol{|V_H|}=|V_G\setminus\{x,y\}|=|V_G|-2=\boldsymbol{n-2}$.

אז נבחין כי **מספר הצלעות** בגרף H מקיים: $\boldsymbol{|E_H|\leq\binom{|V_H|}{2}=\binom{n-2}{2}}$.

כעת, נשים לב כי כל **צלעות הגרף $\boldsymbol{G}$ החלות בקודקודים $\boldsymbol{x,y}$** הן בדיוק **הצלעות שהורדנו מהגרף $\boldsymbol{G}$ לקבלת הגרף $\boldsymbol{H}$**, לכן קב' הקשתות החלות ב-x או ב-y היא בדיוק $\boldsymbol{E_G\setminus E_H}$.

מכיוון ש-$\boldsymbol{x,y}$ **אינם שכנים, אין להם צלע משותפת**, אז מספר הצלעות החלות בהם הוא בדיוק **סכום הדרגות שלהם**, כלומר:

$$\boldsymbol{\deg(x)+\deg(y)=|E_G\setminus E_H|}$$

ניזכר כי $\boldsymbol{E_H\subseteq E_G}$ אז נקבל:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\deg(x)+\deg(y)}=|E_G\setminus E_H|=|E_G|-|E_H|&\geq\binom{n-1}{2}+2-\binom{n-2}{2}\\&=\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}-\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2}+2\\&=\frac{(n-2)}{2}\cdot\big(n-1-(n-3)\big)+2\\&=\frac{n-2}{2}\cdot 2+2=\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

ולכן נובע כי G מכיל **מעגל המילטון**, כנדרש.

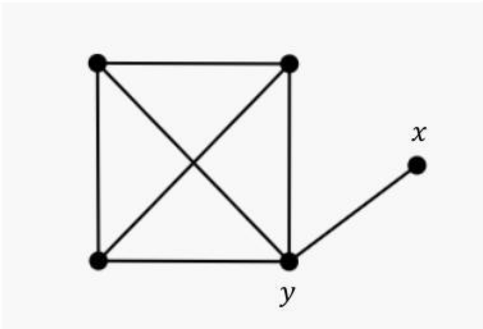
סעיף ב':

תארו גרף עם $\left(\binom{n-1}{2}+1\right)$ צלעות שאינו מכיל מעגל המילטון. נמקו את נכונות בנייתכם.

פתרון:

ניקח את הגרף $\boldsymbol{K_{n-1}}$,
נוסיף לו קודקוד $\boldsymbol{x}$, יחד עם **צלע כלשהי** $(\boldsymbol{x,y})$ עבור קודקוד $y \in K_{n-1}$ כלשהו.
אז **מספר צלעות הגרף** הוא בדיוק $\boldsymbol{\binom{n-1}{2}+1}$.
אבל, **דרגת הקודקוד $\boldsymbol{x}$ היא $\boldsymbol{1}$** ולכן **לא ייתכן שקיים מעגל העובר בו**, לכן **לא קיים בגרף מעגל העובר בכל הקודקודים**, אז בפרט הגרף גם אינו מכיל **מעגל המילטון**.

דוגמה להמחשה עבור K_4:



(6)

7. יהא $G=(V,E)$ גרף מישורי שבו לכל $v \in V$ מתקיים ש- $\deg(v) \geq 5$, וקיים קודקוד $x \in V$ כך ש $\deg(x) = 10$.
הוכיחו כי יש ב- G לפחות 17 קודקודים.

<u>פתרון:</u>
נסמן: $|V| = n$, $|E| = m$.
מהנתון, לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \geq 5$, וקיים קודקוד $x \in V$ כך ש $\deg(x) = 10$,
לכן, **סכום הדרגות בגרף מקיים:**

$$\sum_{v \in V} \mathbf{deg}(\boldsymbol{v}) = \deg(x) + \sum_{v \in V \setminus \{x\}} \deg(v) \geq 10 + (n-1) \cdot 5 = \mathbf{5}\boldsymbol{n} + \mathbf{5}$$

וממשפט הדרגות:

$$2 \cdot m = 2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

כעת, נשים לב כי דרגתו של x היא 10 אז כמובן **שמס' הקודקודים בגרף גדול/שווה ל-3**,
ולכן מכיוון שהגרף גם **מישורי**, ממשפט שלמדנו נובע כי $\boldsymbol{m} \leq \mathbf{3} \cdot (\boldsymbol{n} - \mathbf{2})$.
אז כאשר נאחד את אי השוויונות נקבל:

$$\mathbf{6} \cdot (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \geq 2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \mathbf{5}\boldsymbol{n} + \mathbf{5}$$

כלומר

$$6n - 12 \geq 5n + 5$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{n} \geq \mathbf{17}$$

(7)