מבנים בדידים וקומבינטוריקה – תרגיל 3 – איליי דדון וגל פינטו

1. *בהינתן ארבע משימות שצריך לבצע וחמישה אנשים, בכמה דרכים ניתן להתאים לכל משימה זוג אנשים שיבצעו אותה כך שאף אחד לא יתחמק מלעבוד (כל אחד מחמשת האנשים ישתייך לפחות לאחד מארבעת הזוגות)?*
הבהרה: זוג מסוים של אנשים יכול לעבוד על יותר ממשימה אחת.

<u>פתרון:</u>
נסמן:
P – קבוצת האנשים.
E – קבוצת המשימות.

$$P=\{a,b,c,d,e\}$$
$$E=\{x,y,z,w\}$$

הבעיה לעיל שקולה לבעיה הבאה: מספר הפונקציות F כך ש:

$$F:\{x,y,z,w\}\to\left\{\{i,j\}\middle|i,j\in\{a,b,c,d,e\}\wedge i\neq j\right\}$$

על מנת להשתמש בעקרון המשלים נגדיר:

$$i\in\{a,b,c,d,e\},$$
$$F_i\subseteq F:F_i=\{f\in F|\ i\notin f(x),i\notin f(y),i\notin f(z),i\notin f(w)\}$$

במילים אחרות F_i זה כל הפונקציות כך שהאדם הi אינו משתתף באף אחת מהמשימות.
על פי עקרון המשלים:

$$|F|-\left|\bigcup_{i\in\{a,b,c,d,e\}}F_i\right|$$

נתחיל מחישוב גודל F:
בF מתאימים לכל אחת מארבע המשימות זוג כלומר בוחרים שני אנשים מתוך 5, לכל משימה.
על פי עקרון הכפל: $|F|=\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}=\binom{5}{2}^{4}$
נטפל כעת במקרים הרעים:
נבחין כי כאשר מדובר בחיתוך של יותר משלוש פונקציות, אין מצב כזה, כי צריך להיות בכל משימה לפחות שני אנשים ואם ארבעה או חמישה לא משתתפים, תנאי זה אינו מתקיים.
נבחין כי כאשר בוחרים להוציא את a או את b, מדובר במקרים סימטריים ולכן דבר ראשון נבחר אחד מתוך חמשת האנשים, לשם כך יש: $\binom{5}{1}$, כעת, נותרו ארבעה אנשים לסדר לזוגות, כלומר $F_a:\{x,y,z,w\}\to\{\ \{i,j\}\ |\ i,j\in\{b,c,d,e\}\wedge i\neq j\}$
על פי עיקרון הכפל: $|F_a|=\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}=\binom{4}{2}^{4}$.
כעת נתבונן במצב בו מוציאים שני אנשים, כלומר: $|F_a\cap F_b|$. על פי אותו העיקרון לעיל, צריך לבחור שני אנשים להוציא, לשם כך יש $\binom{5}{2}$ דרכים.

$$F_a\cap F_b:\{x,y,z,w\}\to\{\ \{i,j\}\ |\ i,j\in\{c,d,e\}\wedge i\neq j\}$$

על פי עיקרון הכפל:

$$|F_a\cap F_b|=\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}=\binom{3}{2}^{4}$$

כעת נתבונן במצב בו מוציאים שלושה אנשים, כלומר: $|F_a \cap F_b \cap F_c|$ על פי העקרון לעיל, ישנם $\binom{5}{3}$ דרכים לבחור שלושה אנשים לא לשתף במשימות, נבחין כי:

$$F_a \cap F_b \cap F_c : \{x, y, z, w\} \to \left\{\{i, j\} \mid i, j \in \{d, e\} \wedge i \neq j\right\}$$

על פי עיקרון הכפל: $|F_a \cap F_b \cap F_c| = \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} = \boldsymbol{\binom{2}{2}^4}$

על פי עיקרון ההכלה וההדחה:

$$\left| \bigcup_{i \in \{a,b,c,d,e\}} F_i \right| = \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}^4 - \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 + \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4$$

לסיכום:

$$|F| - \left| \bigcup_{i \in \{a,b,c,d,e\}} F_i \right| = \binom{5}{2}^4 - \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}^4 + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}^4 - \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2}^4$$

$$= \mathbf{4320}$$

2. *שישה חברים טסו לטיול בחו"ל.*
בטיסה היוצאת החברים ישבו בשורות 1,2,3 בכסאות A,B (הכסאות A ו-B בכל שורה סמוכים זה לזה).
בטיסה חזרה הם קיבלו בדיוק את אותם מקומות אבל אף אחד לא היה מוכן לשבת ליד (כלומר באותה שורה) מי שישב לידו בטיסה היוצאת.
בבמה דרכים הם יכולים להתיישב בטיסה חזרה לארץ?

<u>פתרון:</u>
נסמן:
B – קב' הסידורים עם האילוצים.
S – קב' כל הסידורים האפשריים.
A_i – קב' הסידורים כאשר השורה ה i נשארת במקום.

לכן פתרון בעיה זו שקול למציאת הגודל של קב' B, כאשר:

$$|B| = \left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right|$$

גודל הקב' S הוא מספר האופציות לסידור הוא $6!$ מכיוון שהמקומות והשורות הם מובחנים והחברים הם שונים.
עבור A_i: קיבוע השורה הi, נבחין כי תחילה נצטרך לקבע את השורה, לכך יש 3 אפשרויות.
כעת נותר להושיב את ארבעת האחרים, לכך יש $4!$ ונותר לסדר את הזוג שנשאר במקום, לכך יש $2!$, לסיכום: $|A_i| = 3 * 4! * 2 = 144$.

עבור $A_i \cap A_j$: נמצא את מספר הסידורים עבור קיבוע של שתי שורות, כלומר קיבוע השורה ה i וגם השורה ה j:

$$A_i \cap A_j \ such\ that\ i \ \neq j$$

לזוג ה i יש 3 אפשרויות ולזוג ה j יש שתי אפשרויות, לכן מספר האפשרויות להושיב אותן הוא: $3 \cdot 2$.
נותר להתייחס לסידור הפנימי של כל הזוגות, כל זוג הסידור הפנימי שלו הוא $2!$ ולכן:

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \ 3 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = \mathbf{48}$$

כעת נמצא את הקיבוע לשלושת השורות, כלומר: כל הזוגות נשארו באותו המקום ולכן, יש לנו $3!$ מקומות להושיב אותם, ולכל זוג יש $2!$ סידורים פנימיים ולכן:

$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = \mathbf{48}$$

אולם נבחין כי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

וראינו כי מספר האפשרויות בקיבוע של כל זוג שווה זה לזה, לכן ניתן להציב במשוואה הראשונית ולקבל:

$$|B| = \left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{3}A_i\right| = 6! - 3 \cdot 144 + 3 \cdot 48 - 48 = \mathbf{384}$$

3. *אם ידוע ש* $|B \cap C| = 22$ *,* $|A \cap C| = 9$ *,* $|A \cap B| = 7$ *,* $|C| = 60$ *,* $|B| = 42$ *,* $|A| = 15$ *, מהו לכל הפחות הגודל של* $A \cup B \cup C$*? מצאו דוגמה שבה* A, B, C *הן כאלו שהאיחוד אכן שווה בגודלו לחסם התחתון שמצאתם. מספיק להראות דיאגרמת וון של* A, B, C *מתאימות.*

<u>פתרון:</u>

במשימה זו התבקשנו למצוא את הגודל המינימלי של $A \cup B \cup C$ לכן נתבונן בעיקרון ההכלה והדחה:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

נציב את המספרים הקיימים:

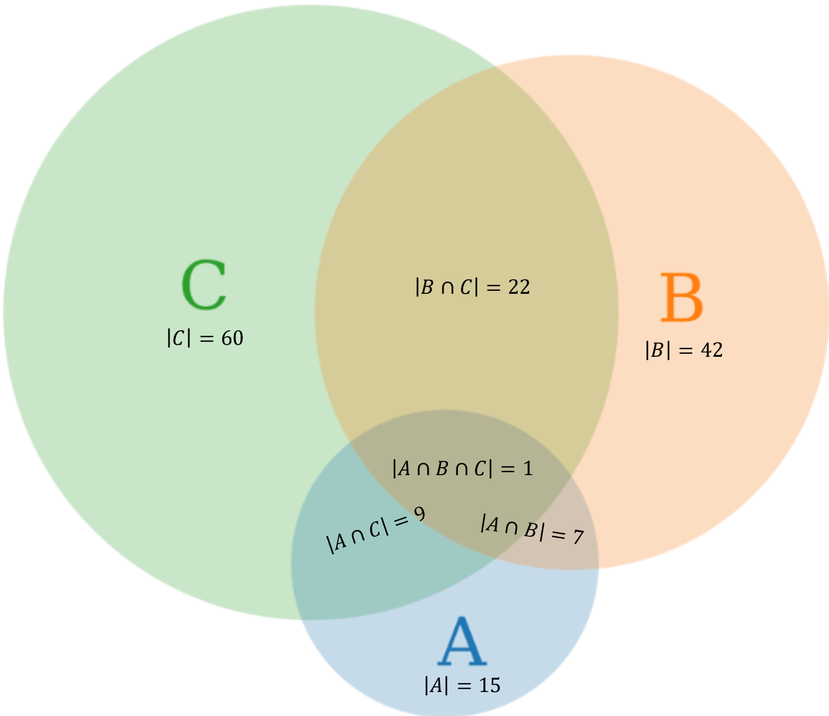
$$|A \cup B \cup C| = 15 + 42 + 60 - 7 - 9 - 22 + |A \cap B \cap C|$$

מכיוון ש: $|A \cap B| = 7$ וגם $|A \cap C| = 9$ וגם $|A| = 15$ אזי חייב להיות איבר בחיתוך של $A \cap C$ ו - $A \cap B$, כלומר הגודל המינימלי של $A \cap B \cap C$ הינו לפחות אחד, ולכן נציב $|A \cap B \cap C| \geq 1$ ונקבל:

$$|A \cup B \cup C| \geq 15 + 42 + 60 - 7 - 9 - 22 + 1 = \mathbf{80}$$

מכיוון שהתבקשנו למצוא את הגודל המינימלי של האיחוד, נסיק כי גודל זה הוא **80**.

<u>דיאגרמה:</u>

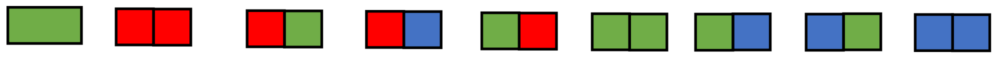


4. בהינתן לוח בגודל $n \times 1$, מצאו נוסחת נסיגה עבור מספר הריצופים של הלוח באריחים אדומים, כחולים וירוקים כך שהאריחים האדומים והאריחים הכחולים הם בגודל 1×1, האריחים הירוקים הם בגודל 2×1, 1×1 (יש אריחים ירוקים ריבועיים ואריחים ירוקים מלבניים ואפשר להשתמש בשני הסוגים) ואסור שאריח אדום יהיה צמוד מימין לאריח כחול. מצאו את תנאי ההתחלה ופתרו את הנוסחה.

<u>פתרון:</u>

ראשית, עבור לוח בגודל $n = 1$, ישנן **3** אפשרויות, מכיוון שניתן לרצף כל אחד משלושת האריחים מגודל 1×1, $a_1 = 3$.

עבור $n = 2$, לכל אריח קטן ישנן 3 אפשרויות, אך נחסיר את האפשרות בה האדום מופיע מימין לכחול, ונוסיף את האפשרות בה ריצפנו אריח ירוק גדול:

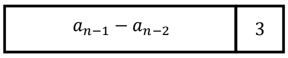


כלומר קיימות **9** אפשרויות שונות לריצוף הלוח, $a_2 = 9$.

ועבור כל $n > 2$, נסכום את מספר האפשרויות לפי מקרים:

1) <u>נרצף את $n - 1$ התאים השמאליים כך שהאריח הימני מביניהם אינו כחול:</u>

מספר האפשרויות לכך הוא מספר הריצופים של $n - 1$ התאים, a_{n-1}, אך נחסיר ממנו את מספר האפשרויות בהן האריח הימני היה הכחול, כלומר מספר האפשרויות לריצוף $n - 2$ התאים השמאליים, a_{n-2}.



סה"כ קיבלנו שמספר המקרים הללו הוא $a_{n-1} - a_{n-2}$.

אך עבור כל מקרה שכזה, ישנן 3 אפשרויות לריצוף התא הימני ביותר,

לכן מספר האפשרויות למקרה זה הוא $\mathbf{3 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})}$.

2) <u>נרצף את $n - 1$ התאים השמאליים כך שהאריח הימני מביניהם הוא כחול:</u>

מספר האפשרויות לכך הוא מספר הריצופים של $n - 2$ האריחים השמאליים, a_{n-2}.

עבור כל אפשרות בזו, נוכל לרצף באריח הימני ביותר רק את האריח הכחול או הירוק,

אז סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות למקרה זה הוא $\mathbf{2 \cdot a_{n-2}}$.

3) <u>נרצף את $n - 2$ התאים השמאליים ונציב ב2 התאים הימניים את האריח הירוק הגדול:</u>

מספר האפשרויות לכך הוא מספר הריצופים של $n - 2$ האריחים השמאליים, $\mathbf{a_{n-2}}$.

סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות הכולל הוא:

$$\mathbf{a_n} = 3 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2}) + 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-2}$$
$$= 3 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot a_{n-2} = \mathbf{3 \cdot a_{n-1}}$$

אז נמצא את השורשים לפולינום האופייני

$$p(x) = x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

ולכן הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הוא

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 0^n = A \cdot 3^n$$

נציב את אחד מתנאי ההתחלה שחישבנו, על מנת למצוא את A:

$$3 = a_1 = A \cdot 3^1$$
$$\Rightarrow A = 1$$
$$\Rightarrow \mathbf{a_n} = 1 \cdot 3^n = \mathbf{3^n}$$

(נשים לב כי הנוסחה שמצאנו מתאימה גם לשאר תנאי ההתחלה, גם עבור $n = 0$)

5. מהו מספר הסדרות באורך n מעל הקבוצה $\{1,2,\dots,7\}$ שבהן לא מופיעים מספרים זוגיים זה בסמוך לזה?
מצאו את נוסחת הנסיגה המתאימה, מצאו את תנאי ההתחלה ופתרו את הנוסחה.

פתרון:
נסמן את מספר הסדרות המתאימות ב a_n.
ראשית, עבור סדרה באורך $n = 0$, ישנה רק אפשרות $\mathbf{1}$ והיא הסדרה הריקה: $\boldsymbol{a_0 = 1}$.
עבור סדרה באורך $n = 1$, ישנן $\mathbf{7}$ אפשרויות לבחירת האיבר היחיד בסדרה: $\boldsymbol{a_1 = 7}$.

ועבור סדרה באורך $n = 2$, נציב תחילה את האיבר הראשון בסדרה, ונחלק למקרים בהם הוא זוגי/אי-זוגי:
<u>במידה והוא אי-זוגי</u> (4 אפשרויות לכך), נוכל להציב באיבר השני בסדרה כל מספר מתוך $\{1,2,\dots,7\}$ כלומר סך הכל קיבלנו שיש במקרה זה $4 \cdot 7$ אפשרויות.
<u>במידה והוא זוגי</u> (3 אפשרויות לכך), נוכל להציב באיבר השני בסדרה רק מספרים אי זוגיים מתוך $\{1,2,\dots,7\}$ כלומר יש לכך 4 אפשרויות, וקיבלנו שיש במקרה זה $3 \cdot 4$ אפשרויות.
סה"כ קיבלנו שמספר האפשרויות הוא $\boldsymbol{a_2} = 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = \mathbf{40}$.

כעת נחשב את מספר האפשרויות a_n עבור סדרה באורך כללי n:
נסמן:
b_n = מס' הסדרות המתאימות, המסתיימות במספר זוגי.
c_n = מס' הסדרות המתאימות, המסתיימות במספר אי-זוגי.
ונרצה לחשב את $a_n = b_n + c_n$.

תחילה נביע את b_n:
נשים לב שכל סדרה מתאימה שמסתיימת **במספר זוגי** צריכה שהאיבר לפני האחרון יהיה מספר **אי-זוגי**, כלומר כל סדרה שכזו היא צירוף של המספר הזוגי אל **תת-סדרה מתאימה באורך $\boldsymbol{n-1}$** אך גם **מסתיימת במספר אי-זוגי**.
מספר האפשרויות עבור תת הסדרה הוא c_{n-1}, ולהצבת המספר האחרון ישנן $\mathbf{3}$ אפשרויות, לכן ניתן להביע את b_n כך:

$$\boldsymbol{b_n = 3 \cdot c_{n-1}}$$

כעת נביע את c_n:
נשים לב שכל סדרה מתאימה שמסתיימת **במספר אי-זוגי** היא צירוף של המספר האי-זוגי אל **תת-סדרה מתאימה באורך $\boldsymbol{n-1}$ כלשהי**. למספר הזוגי ישנן $\mathbf{4}$ אפשרויות ולתת הסדרה ישנן $\boldsymbol{a_{n-1}}$ אפשרויות, לכן סה"כ ניתן להביע את c_n כך:

$$\boldsymbol{c_n = 4 \cdot a_{n-1}}$$

אז נציב את c_n בנוסחאות של b_n ו-a_n ונקבל:

$$b_n = 3 \cdot (4 \cdot a_{n-2}) = 12 \cdot a_{n-2}$$
$$a_n = b_n + c_n$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 12 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-1}}$$

ובעת נפתור את נוסחת הנסיגה ע" מציאת השורשים לפולינום האופייני:

$$p(x) = x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$p(x) = (x+2)\cdot(x-6) = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x = -2, x = 6}$$

ולכן הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הוא:

$$\boldsymbol{a_n = A\cdot(-2)^n + B\cdot 6^n}$$

כעת נציב את תנאי הבסיס שחישבנו ונקבל:

$$1 = a_0 = A + B$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{B = 1 - A}$$
$$7 = a_1 = A\cdot(-2) + (1-A)\cdot 6$$
$$\Rightarrow 7 = -2\cdot A + 6 - 6\cdot A$$
$$\Rightarrow 8A = -1$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A = -\frac{1}{8}} \Rightarrow \boldsymbol{B = \frac{9}{8}}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = -\frac{1}{8}\cdot(-2)^n + \frac{9}{8}\cdot 6^n}$$

ואף נוודא את עצמנו ונחשב בשנית את a_2, נצפה לקבל גם כאן $a_2 = 40$:

$$\boldsymbol{a_2} = -\frac{1}{8}\cdot(-2)^2 + \frac{9}{8}\cdot 6^2 = -\frac{4}{8} + \frac{9\cdot 36}{8} = \boldsymbol{40}$$

6. בהינתן לוח בגודל $2 \times n$, מצאו נוסחת נסיגה עבור מספר הריצופים של הלוח באריחים אדומים, כחולים וירוקים, כולם בגודל 1×1, כך שלא יהיו אריחים ירוקים ליד (משמאל או מימין) או מעל ומתחת לאריחים כחולים (רק באלכסון מותר). אין צורך לפתור את הנוסחה.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

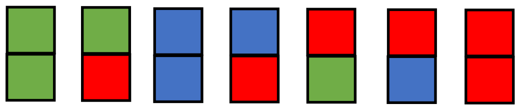
a_n = מספר הריצופים המתאימים עבור לוח בגודל $2 \times n$.

b_n = מספר הריצופים המתאימים המסתיימים באריח אדום בפינה העליונה הימנית, ואריח כחול בפינה התחתונה הימנית.

c_n = מס' הריצופים המתאימים המסתיימים בשני אריחים כחולים בעמודה הימנית.

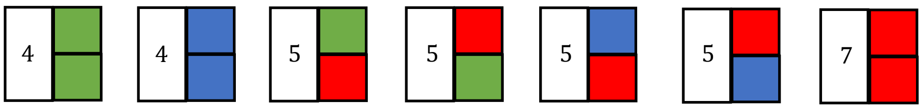
ראשית, עבור לוח בגודל $n = 0$ ישנה רק אפשרות אחת, $\boldsymbol{a_0 = 1}$.

עבור לוח בגודל $n = 1$, ישנם 7 ריצופים אפשריים (3 כאשר העליון הוא אדום, ו2 עבור כחול/ירוק), $\boldsymbol{a_1 = 7}$.



ועבור לוח בגודל $n = 2$, כאשר בצד ימין יש <u>2 אריחים אדומים</u>, ישנן **7** אפשרויות לריצוף 2 האריחים השמאליים (כמספר הזוגות האפשריים במקרה הקודם).

כאשר בצד ימין יש <u>אריח אדום וכחול (או אדום וירוק)</u> – ישנן רק **5** אפשרויות עבור 2 האריחים השמאליים, על מנת להבטיח שאריח כחול וירוק לא יהיו סמוכים זה לזה. וכאשר בצד ימין יש <u>2 אריחים כחולים (או ירוקים)</u> ישנן אפשרויות לריצוף 2 האריחים השמאליים.

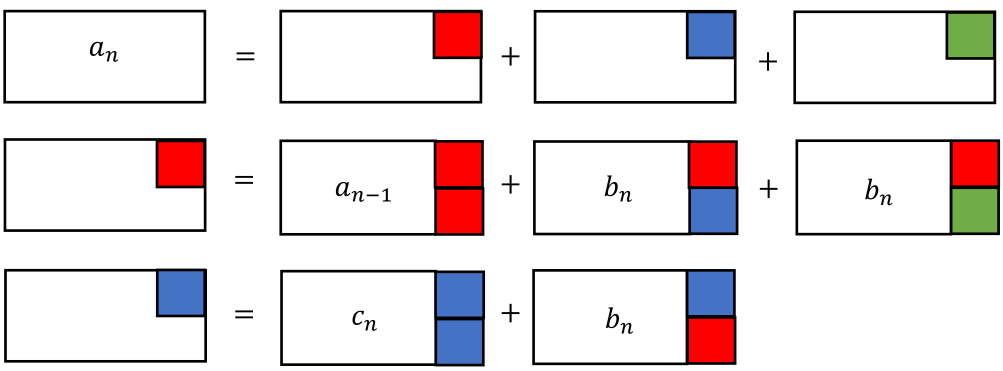


סה"כ קיבלנו $\boldsymbol{a_2} = 7 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = \boldsymbol{35}$

נשים לב כי מכיוון שהאילוץ על אריחים ירוקים וכחולים הוא סימטרי,

מספר הריצופים b_n ו c_n מתאים גם אם נחליף את האריחים הכחולים בירוקים.

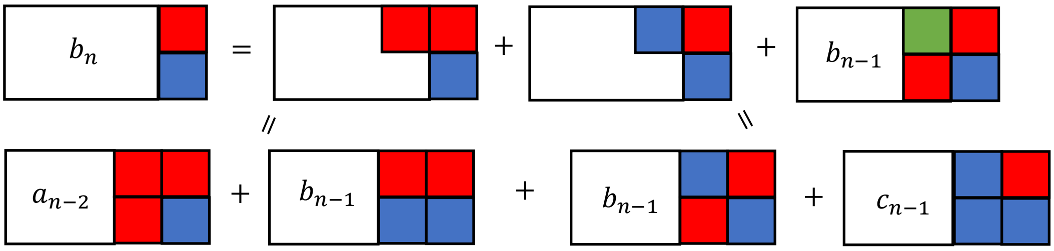
אז נביע את מספר הריצופים a_n בצורה הבאה:



לכן קיבלנו סה"כ:

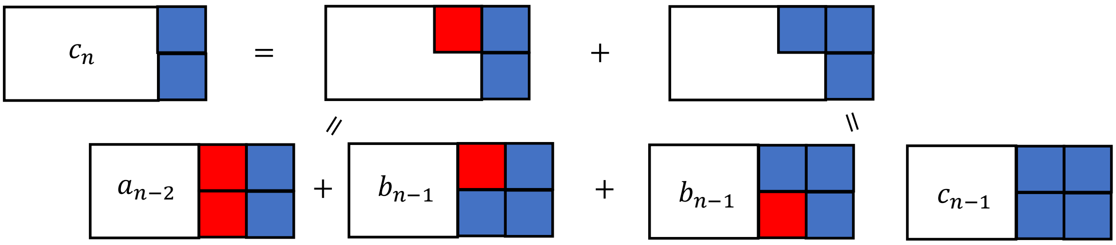
$$\boldsymbol{a_n} = a_{n-1} + b_n + b_n + 2 \cdot (c_n + b_n) = \boldsymbol{a_{n-1} + 4 \cdot b_n + 2 \cdot c_n}$$

כעת נביע את b_n:



ולכן סה"כ: $\boldsymbol{b_n = a_{n-2} + 3 \cdot b_{n-1} + c_{n-1}}$

ונביע את c_n:



וסה"כ קיבלנו: $\boldsymbol{c_n = a_{n-2} + 2 \cdot b_{n-1} + c_{n-1}}$

כעת, נבודד מהמשוואה הראשונה את $4 \cdot b_n$ ונקבל: $4 \cdot b_n = a_n - a_{n-1} - 2 \cdot c_n$

נכפיל את המשוואה השנייה ב4 ונציב את $4 \cdot b_n$ שחישבנו:

$$4 \cdot b_n = 4 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot (4 \cdot b_{n-1}) + 4 \cdot c_{n-1}$$

$$a_n - a_{n-1} - 2 \cdot c_n = 4 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2} - 2 \cdot c_{n-1}) + 4 \cdot c_{n-1}$$

$$\boldsymbol{a_n - 4 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot c_n - 2 \cdot c_{n-1}}$$

נכפיל את המשוואה השלישית ב2 ונציב את $4 \cdot b_n$ שחישבנו:

$$2 \cdot c_n = 2 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot b_{n-1} + 2 \cdot c_{n-1}$$

$$2 \cdot c_n = 2 \cdot a_{n-2} + (a_{n-1} - a_{a-2} - 2 \cdot c_{n-1}) + 2 \cdot c_{n-1}$$

$$\boldsymbol{2 \cdot c_n = a_{n-2} + a_{n-1}}$$

וכעת נציב את $2 \cdot c_n$ במשוואה הרביעית ונקבל:

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} - (a_{n-3} + a_{n-2})$$

$$\boldsymbol{a_n = 5 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}}$$

7. *מצאו נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה* $a_n = \frac{3}{4}a_{n-2} - \frac{1}{4}a_{n-3}$ *עם תנאיי ההתחלה* $a_0 = 4, a_1 = 3, a_2 = 2$.

<u>פתרון:</u>

נמצא את השורשים לפולינום האופייני

$$\boldsymbol{p(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0}$$

נשים לב כי $\boldsymbol{x = -1}$ הוא שורש של הפולינום: $(-1)^3 - \frac{3}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4} = 0$

אז נוציא את הגורם $(x+1)$ מהפולינום וכך נמצא את שאר השורשים:

$$p(x) = (x+1)\cdot\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = (x+1)\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

אז השורשים הם: $\boldsymbol{x = -1}$ עם **ר"א** 1, $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ עם **ר"א** 2.

ולכן הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הוא:

$$\boldsymbol{a_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\cdot C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

נציב את תנאי ההתחלה, על מנת למצוא את A, B, C:

$$4 = a_0 = A + B$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B = 4 - A}$$

$$3 = a_1 = A\cdot(-1) + (4 - A)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot C\cdot\frac{1}{2}$$

$$3 = -A + 2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$$

$$\boldsymbol{C = 3A + 2}$$

$$2 = a_2 = A\cdot(-1)^2 + (4 - A)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot(3A + 2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2 = A + 1 - \frac{1}{4}A + \frac{3}{2}A + 1$$

$$\frac{9}{4}A = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A = 0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B = 4}, \boldsymbol{C = 2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$