דף סיכום בחינה

מספר שאלה	הערה	ניקוד מירבי	ציון
1		16.00	16.00
2		16.00	16.00
3		17.00	17.00
4		17.00	17.00
5	טעות חישוב בסעיף ד	17.00	16.00
6		17.00	17.00

ציון בחינה סופי : 99.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

מבנים בדידים וקומבינטוריקה – תרגיל 1 – איליי דדון וגל פינטו

1. *א. כמה מילים בנות 5 אותיות ניתן להרכיב מהתווים A,B,...,H (כל תו מופיע פעם אחת לכל היותר)?*

ישנן 8 אותיות מ A ועד H כולל ולכן מספר המילים בנות 5 אותיות שניתן להרכיב מתווים אלו, ללא חזרות, הוא $\frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

ב. כמה מילים לא ריקות ניתן להרכיב מהאותיות A,B,...,H (כל תו מופיע פעם אחת לכל היותר)?

בדומה לסעיף הקודם, אך נצטרך לסכום את מספר המילים בנות 1..8 אותיות שניתן להרכיב מתווים אלו, ללא חזרות:

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{8!}{(8-i)!}$$

ג. כמה מילים בנות 9 אותיות שהינן פלינדרום ניתן להרכיב מהאותיות A,B,...,Z?
(פלינדרום: מילה אשר בקריאתה בצורה רגילה ובמהופך מקבלים את אותו ערך)

ישנן 26 אותיות מA ועד Z, ונשים לב כי כל פלינדרום באורך 9 מוגדר על ידי בחירת 5 התווים הראשונים. ארבעת התווים האחרונים נקבעים באופן ישיר על פי ה-4 הראשונים. ולכן מספר הפלינדרומים באורך 9 המורכבים מהאותיות A,...,Z הוא $26^5 = 11{,}881{,}376$.

(1)

2. *כמה מספרים 5 ספרתיים $abcde$, המורכבים מהספרות 1-9, קיימים, המקיימים $a \le b \le c \le d \le e$?*

בחירת כל מספר 5 ספרתי המסודר בצורה עולה, מתאימה לבחירת מספר הפעמים שכל ספרה הופיעה בו. כלומר אם לדוגמה המספר שלנו הוא 22237, נוכל לקודד את בחירת מספר זה בתור: בחירת הספרה 2 שלוש פעמים, הספרה 3 פעם אחת, והספרה 7 פעם אחת.
לכן, ניתן למנות את המספרים $abcde$ השונים על ידי מציאת מספר הפתרונות למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 = 5$, כאשר X_i הוא מספר הפעמים שהופיעה הספרה ה i.
בדוגמתנו, הפתרון המתאים עבור המספר 22237 הוא $X_2 = 3, X_3 = 1, X_7 = 1$ ושאר הערכים 0, את אותו הפתרון זה נוכל גם להציג כך:

(2)

$$+111 + 1 + + + +1 + +$$

כאשר כל תו $'1'$ מייצג מופע של ספרה, וכל תו $'+'$ מייצג התקדמות לספרה הבאה בתור.
ישנן 9 ספרות מ1-9 ולכן בכל פתרון ישנם 8 סימני חיבור המפרידים בין הספרות השונות.
ובכל פתרון ישנם 5 סימני אחדות, המייצגים את מופעי הספרות $abcde$.
מספר הפתרונות למשוואה שלנו הוא מספר הדרכים בהם אנו יכולים לסדר את 8 סימני החיבור, כלומר מספר הדרכים בהן אנו יכולים לבחור 8 מקומות מבין סך 13 המקומות.
לכן סה"כ ישנם $\binom{13}{8} = 1287$ מספרים 5 ספרתיים שונים המקיימים את התנאי הנדרש.

3. א. כמה פונקציות $f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$ (כאשר $n\geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k)\neq f(k+1)$ לכל $1\leq k\leq n-1$.

נתחיל באיבר הראשון, ל $f(1)$ קיימות n אפשרויות. לאיבר הבא, $f(2)$, בתור יהיו רק $n-1$ אפשרויות על מנת להבטיח כי $f(1)\neq f(2)$.
וכנ"ל לגבי כל האיברים הבאים, לכן, על פי עיקרון המכפלה, מספר הפונקציות הכולל יהיה $n\cdot(n-1)^{n-1}$.

ב. כמה פונקציות $f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$ חח"ע ועל יש, המקיימות $f(k)-k$ זוגי לכל $k\in\{1,2,\dots,n\}$?

על מנת להבטיח כי $f(k)-k$ זוגי לכל $k\in\{1,2,\dots,n\}$ נצטרך שהפונקציה f תשלח מספרים זוגיים למספרים זוגיים, ומספרים אי-זוגיים למספרים אי זוגיים.
ועל מנת להבטיח כי f חח"ע ועל, נצטרך שהמספרים יהיו שונים זה מזה.
נתחיל באיבר הראשון, לאיבר $f(1)$ קיימות $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ אפשרויות, ככמות המספרים האי זוגיים מ1 עד n (כולל n עצמו במידה והוא גם אי-זוגי).
לאיבר $f(2)$ קיימות $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ אפשרויות, ככמות המספרים הזוגיים מ1 עד n.
לאיבר $f(3)$ קיימות $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1$ אפשרויות, ככמות המספרים האי-זוגיים מ1 עד n אך לא כולל $f(1)$, על מנת להבטיח כי הפונקציה f תהיה חח"ע ועל.
באופן דומה, עבור האיבר $f(4)$ קיימות $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$ אפשרויות.
וכך הלאה עבור כל שאר האיברים.
(3)
כעת, על מנת לקבל את מספר הפונקציות הכולל, נשתמש בעיקרון המכפלה המורחב ונכפיל בין מספר האפשרויות לכל איבר, נשים לב כי נוכל לשנות את הסדר ההכפלה ולהתחיל באפשרויות למספרים האי-זוגיים בנפרד, ולאחר מכן להכפיל באפשרויות למספרים הזוגיים, זאת על מנת לפשט את הביטוי לשימוש בעצרת, לבסוף נקבל את הביטוי הבא:

$$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil!\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor!$$

<u>הערה:</u> נשים לב כי במידה ו n זוגי, הביטוי נהיה אפילו פשוט יותר: $(\frac{n}{2}!)^2$

4. הוכיחו שמתוך קבוצה של 10 מספרים דו-ספרתיים שונים, תמיד ניתן למצוא שתי תתי קבוצות זרות שסכומן זהה (סכומן – סכום איבריהן).

תהא A קבוצה של 10 מספרים דו-ספרתיים שונים.
ראשית, נראה כי תמיד ניתן למצוא שתי תתי קבוצות **שונות**, שסכומן זהה.
מס' תתי הקבוצות השונות של A הוא $|P(A)|=2^{|A|}=2^{10}=1024$.
נשים לב כי הסכום המקסימלי של תת-קבוצה של A הוא גם סכום הקבוצה A שאיבריה הגדולים ביותר, וזהו סכום הקבוצה $\{90,91,92,\dots,99\}$ השווה ל $945=\frac{(90+99)\cdot 10}{2}$.
ומכיוון שסכום כל תת-קבוצה לא יכול להיות שלילי, טווח הערכים של סכום כל תת-קבוצה של A יהיה $0\leq S_{A'}\leq 945$ כלומר קיימות לכל היותר 946 אפשרויות שונות לסכום תת-קבוצה של A.

אז כאשר נתאים כל תת-קבוצה לסכומה, מכיוון שמס' תתי הקבוצות השונות גדול ממס' הסכומים האפשריים, על פי עיקרון שובך היונים חייבות להיות לפחות שתי תתי קבוצות שונות בעלות אותו סכום איברים.
נסמן תתי-קבוצות אלו ב X ו Y.
X ו Y קבוצות שונות ולכן כאשר נוריד מכל אחת מהן את האיברים המשותפים, נקבל קבוצות **זרות**.
נתבונן בקבוצת החיתוך $X \cap Y$, קבוצה זו כמובן מוכלת בקבוצה X וגם מוכלת בקבוצה Y ולכן כאשר נוציא את אותם איברים משותפים נקבל את הסכומים הבאים:

$$S_{Y\setminus(X\cap Y)} = S_Y - S_{X\cap Y} \qquad S_{X\setminus(X\cap Y)} = S_X - S_{X\cap Y}$$

ניזכר שהוכחנו כי $S_X = S_Y$ ולכן מהמשוואות שלמעלה נובע כי

(4)

$$S_{X\setminus(X\cap Y)} = S_{Y\setminus(X\cap Y)}$$

X ו Y תתי-קבוצות של A ולכן כמובן שהקבוצות הנ"ל גם תתי-קבוצות של A.
ולכן מצאנו שתי תתי-קבוצות **זרות** של A שסכומן זהה. מש"ל.

5. *ב"ארץ לעולם-לא" מצא פיטר פן ספינה עם 20 ילדים אבודים. הילדים זכרו את שמם ושם משפחתם, אך לא את יום הולדתם.*
פתרו את הסעיפים הבאים כל אחד בפני עצמו:

א. *פיטר פן רצה לסדר את כל הילדים במעגל כך שילדים בני אותה משפחה ישבו אחד ליד השני. ידוע כי ישנם 3 ילדים ממשפחת בראון, ו2 ילדים ממשפחת מילר ושאר הילדים מגיעים כל אחד ממשפחה אחרת. כמה אפשרויות סידור קיימות?*

על מנת לסדר את 20 הילדים כך שבני אותה משפחה ישבו אחד ליד השני, נשים לב כי מכיוון שהילדים מגיעים מ-17 משפחות שונות, ראשית נסדר את המשפחות עצמן כקבוצות. מספר הפרמוטציות של 17 משפחות במעגל הוא $16!$.
עבור כל משפחה, קיימות $n!$ פרמוטציות כאשר n הוא גודל המשפחה.
אז מס' כל הסידורים האפשריים יהיה $16! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot \ldots \cdot 1! = 12 \cdot 16!$.

ב. *כשהתחיל פיטר פן לסדר, ראה ששלושה ילדים – ג'ון כריס והארי לא מפסיקים לריב כשהם שלושתם יחד, כמה אפשרויות יש לו לסדר את הילדים כך ששלושתם לא ישבו במקבץ אחד?*

מספר הסידורים האפשריים של 20 ילדים הוא $20!$. נשתמש בעיקרון הסכום ונפחית מהמספר הכולל את מספר הסידורים בהם שלושת הילדים יחד.
כלומר את מספר הסידורים של 18 "קבוצות" שזה $18!$ כפול מספר הסידורים בתוך כל קבוצה, כלומר כפול $3!$. (רק קבוצה אחת בעלת 3 איברים, שאר ה"קבוצות" הם יחידים, ולכן עבורן קיים רק סידור אחד ויחיד).
אז סה"כ מס' הסידורים בהם שלושתם הילדים לא ביחד הוא $20! - 18! \cdot 3!$.

ג. *כעת פיטר פן רוצה לחלק לילדים ימי הולדת, אך רצה שבדיוק שני ילדים יחגגו ביום זהה, וכל שאר הילדים יחגגו בימים שונים, כמה אפשרויות יש לכך, בהנחה שיש 365 ימים בשנה?*

ראשית, נבחר 2 ילדים מבין 20 הילדים, יש לכך $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$ אפשרויות. כעת נבחר לילדים אלו את יום ההולדת המשותף, קיימות 365 אפשרויות לכך.

עבור 18 הילדים הנותרים נצטרך לבחור ימים שונים זה מזה ולכן קיימות $\frac{364!}{346!} = 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot 347$ אפשרויות שונות לכך.

אז סך הכל מספר האפשרויות יהיה: $190\cdot \frac{365!}{346!} = 190\cdot 365\cdot \frac{364!}{346!}$.

ד. *מה מספר האפשרויות לחלק לילדים ימי הולדת אם פיטר פן רוצה שיהיה לפחות יום אחד בשנה שבו יחגגו יותר מילד אחד?*

ראשית, נבחר 2 ילדים מבין 20 הילדים, יש לכך $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$ אפשרויות. כעת נבחר לילדים אלו את יום ההולדת המשותף, קיימות 365 אפשרויות לכך.

עבור 18 הילדים הנותרים נבחר יום כלשהו בשנה ולכן קיימות 365^{18} אפשרויות שונות לכך. אז סך הכל מספר האפשרויות יהיה: $190\cdot 365\cdot 365^{18} = 190\cdot 365^{19}$ אפשרויות לכך.

ה. *פיטר פן רוצה לחגוג את ימי ההולדת של ילדי הספינה יחד עם 29 ילדי "ארץ לעולם-לא". להפתעתו גילה שימי ההולדת גם של ילדי הספינה וגם של "ארץ לעולם-לא" מתרכזים ב-3 חודשים בשנה. וונדי עזרה לו והזמינה עוגות. היא נתנה לכל ילד לבחור עוגה מבין 4 סוגים שונים, הוכיחו כי קיים חודש בו וונדי תצטרך להזמין 5 עוגות לפחות מאותו סוג.*

ישנם 20 ילדים בספינה ו29 ילדים ב"ארץ לעולם-לא", סה"כ 49 ילדים.
ימי ההולדת של 49 הילדים מתרכזים ב-3 חודשים ולכן על פי עיקרון שובך היונים המורחב, קיים חודש אחד לפחות בו חוגגים $\left\lceil \frac{49}{3} \right\rceil = 17$ ילדים שונים.
כל ילד בוחר עוגה מבין 4 סוגים שונים ולכן באותו החודש, על פי עיקרון שובך היונים המורחב, קיים סוג עוגה אחד לפחות בו בחרו $\left\lceil \frac{17}{4} \right\rceil = 5$ ילדים שונים. מש"ל.

ו. *פיטר פן רוצה לקנות משחקים בכמות הזהה לכמות הילדים, הוא צריך לדעת כמה משחקים לקנות מכל סוג מבין סוגי המשחקים הבאים: חץ וקשת, נדנדה, כדור, עפיפון. לצורך כך הוא מאפשר לכל ילד לבחור פריט משחק אחד אותו הוא רוצה. כמה אפשרויות יש לסל הקניות של פיטר פן?*

סל הקניות של פיטר פן מוגדר על ידי כמות המשחקים מכל סוג וידוע כי סך הכל ישנם 20 משחקים. אנו צריכים לחלק את 20 המשחקים ל-4 קבוצות כלומר בעיה זו שקולה לסידור 3 קווים מפרידים מבין 23 מקומות, בדומה לדוגמה הבאה:

_ _ _ | _ _ _ _ _ | _ _ _ _ _ _ | _ _ _ _ _ _

שלושת הקווים המפרידים יגדירו לנו את 4 הקבוצות אליהן נחלק את 20 המשחקים.
לכן סך הכל מספר האפשרויות לסל הקניות של פיטר פן יהיה $\binom{23}{3}$.

16

(5)

טעות חישוב בסעיף ד

6. *הקונגרס הלאומי של דרום אפריקה מורכב מ 400 חברים המחולקים בין 3 מפלגות מובחנות. בכמה דרכים ניתן לקבוע את גדלי המפלגות כך ש:*

א. *לאף אחת מהמפלגות אין רוב.*

נסמן ב A את קבוצת הסידורים כך שאין מפלגה עם רוב.
כעת, למדנו כי ניתן לחשב זאת בכך שנחסיר מסך כל אפשרויות הסידורים את האפשרויות בהן למפלגה יש רוב.
נגדיר: C – קבוצת כל הסידורים האפשריים.
B – קבוצת הסידורים בהן למפלגה אחת יש רוב.

<u>תחילה נחשב את $|C|$:</u>

אנו צריכים לחלק את 400 חברי המפלגות ל3 מפלגות מובחנות.
כלומר בעיה זו שקולה לסידור 2 קווים מפרידים מבין 402 מקומות, בדומה לסעיף הקודם, ולכן נסיק כי $|C| = \binom{402}{2}$.

<u>כעת נחשב את $|B|$:</u>

ראשית, לא ייתכן מצב בו שתי מפלגות מחזיקות ברוב החברים (לפחות 201 חברים), מכיוון שמדובר ברוב מוחלט. אז על מנת לספור את מספר הסידורים בהן למפלגה יש רוב, קודם נבחר את המפלגה שבה יהיה הרוב, יש לכך 3 אפשרויות.
לאחר שבחרנו את המפלגה שבה יש לפחות 201 חברים, נותר לנו לסדר את 199 החברים הנותרים ב-3 המפלגות, בדומה לחישוב הקודם, יש לכך $\binom{3+199-1}{2} = \binom{201}{2}$ אפשרויות.
לכן על פי עיקרון המכפלה, נקבל כי $|B| = 3 \cdot \binom{201}{2}$.

<u>כעת נחשב את $|A|$:</u>

על פי הטענה שבה התחלנו, $|A| = |C| - |B|$.
ולכן $|A| = \binom{402}{2} - 3 \cdot \binom{201}{2} = \mathbf{20,301}$.

ב. *לאף אחת מהן אין רוב של* $\frac{2}{3}$.

נסמן ב A את קב' הסידורים כך שאין מפלגה עם רוב של $\frac{2}{3}$.
כעת, בדומה לסעיף הקודם, נחשב זאת בכך שנחסיר מסך כל אפשרויות הסידורים את האפשרויות בהן למפלגה יש רוב של $\frac{2}{3}$.
נגדיר: C – קבוצת כל הסידורים האפשריים.
B – קבוצת הסידורים בהן למפלגה אחת יש רוב.
בסעיף הקודם חישבנו את $|C|$ וקיבלנו כי $|C| = \binom{402}{2}$.
<u>כעת נחשב את $|B|$:</u>
נשים לב כי לא ייתכן מצב בו שתי מפלגות מחזיקות ברוב של $\frac{2}{3}$ (לפחות 267 חברים).
אז על מנת לספור את מספר הסידורים בהן למפלגה יש רוב של $\frac{2}{3}$, קודם נבחר את המפלגה שבה יהיה הרוב של $\frac{2}{3}$, יש לכך 3 אפשרויות.
לאחר שבחרנו את המפלגה שבה יש לפחות 267 חברים, נותר לנו לסדר את 133 החברים הנותרים ב-3 המפלגות, בדומה לחישוב הקודם, יש לכך $\binom{3+133-1}{2} = \binom{135}{2}$ אפשרויות.
לכן על פי עיקרון המכפלה, נקבל כי $|B| = 3 \cdot \binom{135}{2}$.
<u>כעת נחשב את $|A|$:</u>
על פי הטענה שבה התחלנו, $|A| = |C| - |B|$.
ולכן $|A| = \binom{402}{2} - 3 \cdot \binom{135}{2} = \mathbf{53,466}$.

(6)