Algoritmos Avançados

Profª. PhD. Larissa Luz Gomes
larissa.gomes@estacio.br

Aula 8 – Árvore AVL ou Balanceada

Árvores AVL ou Balanceada

- Nome com origem em seus inventores:
  - Georgii Adelson-Velsky e Yevgeniy Landis;
  - Publicaram um documento chamado: "Algoritmos para organização da informação“, em 1962;
  - As árvores AVL também são chamadas de árvores balanceadas pela altura.
- Uma árvore binária de pesquisa T é denominada AVL se:
  - Para todos nós de T, as alturas de suas duas sub-árvores diferem no máximo de uma unidade.
- Para cada inserção ou exclusão no pior caso é de O(log n) o qual ***n*** é o número de elementos da árvore.

Arvore AVL

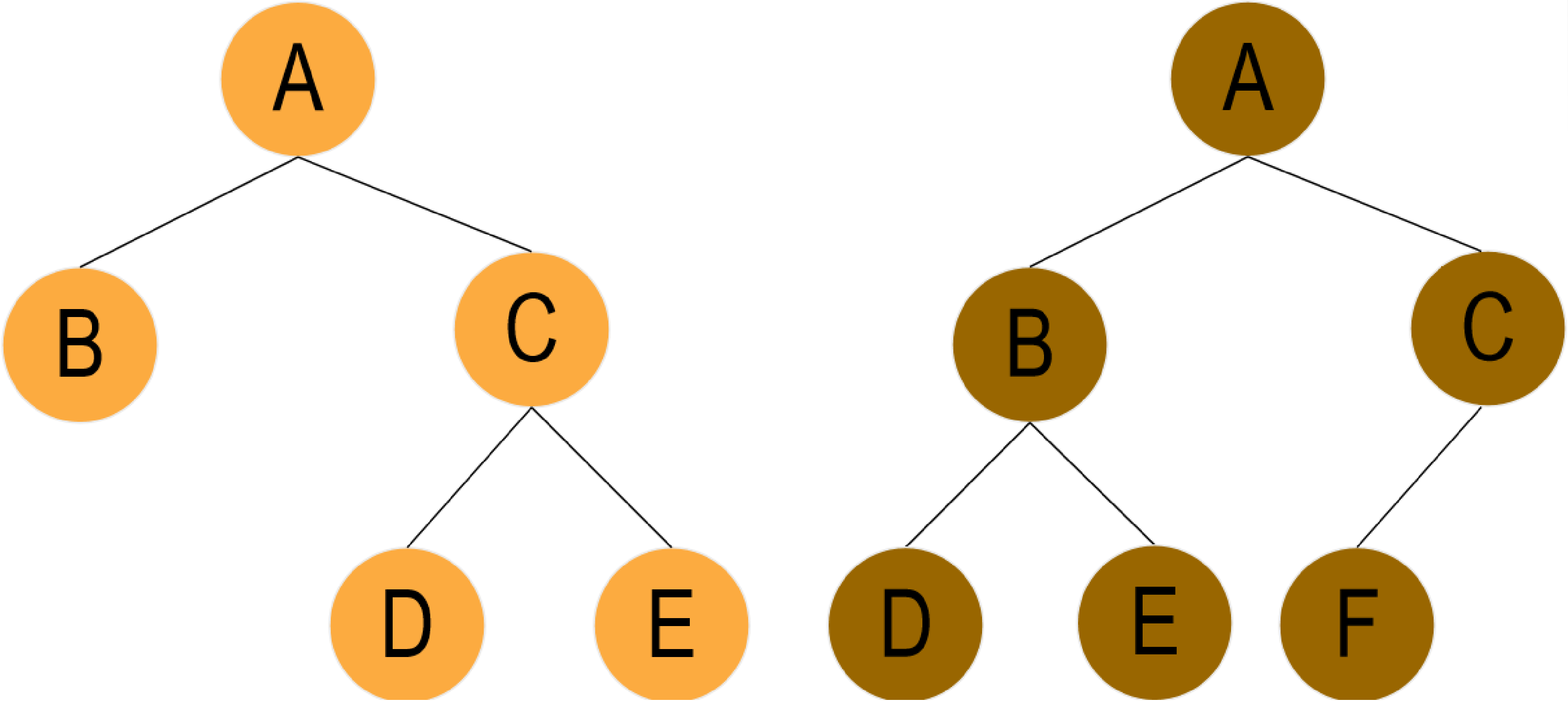
Árvores AVL ou Balanceada

- Uma árvore binária ***T*** é denominada AVL quando, para qualquer nó de ***T***, as alturas de suas duas subárvores, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade. Nesse caso, **υ** é um nó ***regulado***. Em contrapartida, um nó que não satisfaça essa condição de altura é denominado ***desregulado***, e uma árvore que contenha um nó nessas condições é também chamada ***desregulada***.

- Toda árvore completa é AVL, mas não necessariamente vale a recíproca. A figura a seguir mostra uma árvore AVL e outra não AVL (a subárvore esquerda do nó ***u*** possui altura **2**, enquanto a sua subárvore direita possui altura **0**).

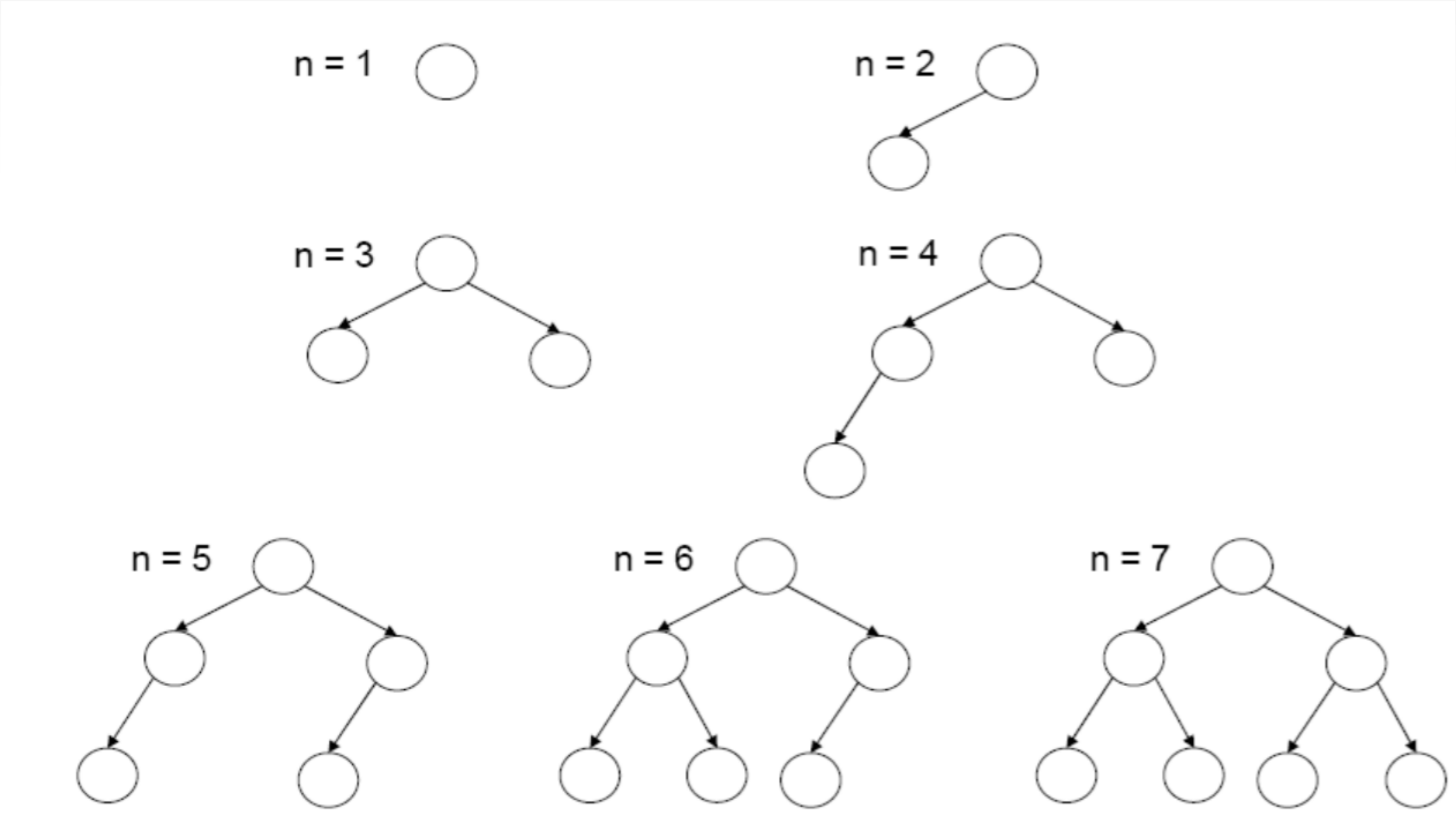
Árvores AVL ou Balanceada

- Para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



Árvores AVL ou Balanceada

Exemplos de Árvores Perfeitamente Balanceadas

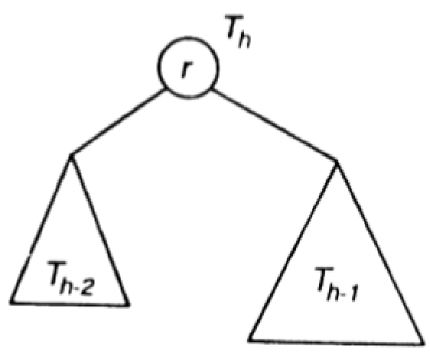


Árvores AVL ou Balanceada

- A seguir será provado que **toda árvore AVL é balanceada**.

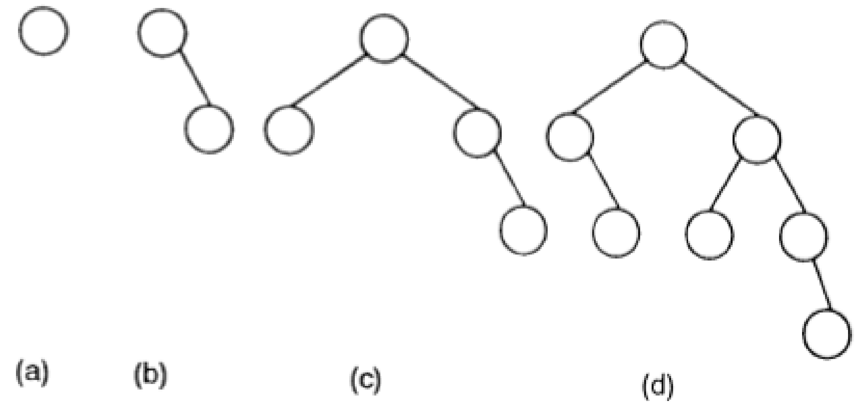
- Em uma árvore binária de altura h, a altura de urna das subárvores da raiz é $h-1$, enquanto a da outra é menor ou igual a $h-1$. Numa árvore AVL, porém, a altura dessa última subárvore se restringe a $h-1$ ou $h-2$, uma vez que, se fosse menor do que $h-2$, sua raiz estaria desregulada. Como se deseja uma árvore AVL com número mínimo de nós, deve-se considerar a segunda subárvore com altura $h-2$ e não $h-1$.

- É possível agora construir a árvore procurada de forma recursiva. Seja T_h uma árvore AVL com altura h e número mínimo de nós. Para formar T_h consideram-se, inicialmente, os casos triviais. Se $h = 0$, T_h é uma árvore vazia. Se $h = 1$, T_h consiste em um único nó. Quando $h > 1$, para formar T_h escolhe-se um nó r como raiz. Em seguida, escolhe-se $T_h - 1$ para formar a subárvore direita de r, e $T_h - 2$ para a esquerda. Veja as próximas figuras.



- Para $h > 1$, existem várias árvores AVL com a mesma altura h e o mesmo número mínimo de nós.

Árvores AVL ou Balanceada



- Seja $|T_h|$ o número de nós de T_h. Logo:

$$\begin{cases} |T_h| = 0 & para \quad h = 0 \\ |T_h| = 1 & para \quad h = 1 \\ |T_h| = 1 + |T_{h-1}| + |T_{h-2}| & para \quad h > 1 \end{cases}$$

- Para encontrar o valor de $|T_h|$ em termos de h, compara-se $|T_h|$ com F_h, o h-ésimo termo da seqüência de Fibonacci, ou seja:

$$\begin{cases} F_h = 0 & para \quad h = 0 \\ F_h = 1 & para \quad h = 1 \\ F_h = F_{h-1} + F_{h-2} & para \quad h > 1 \end{cases}$$

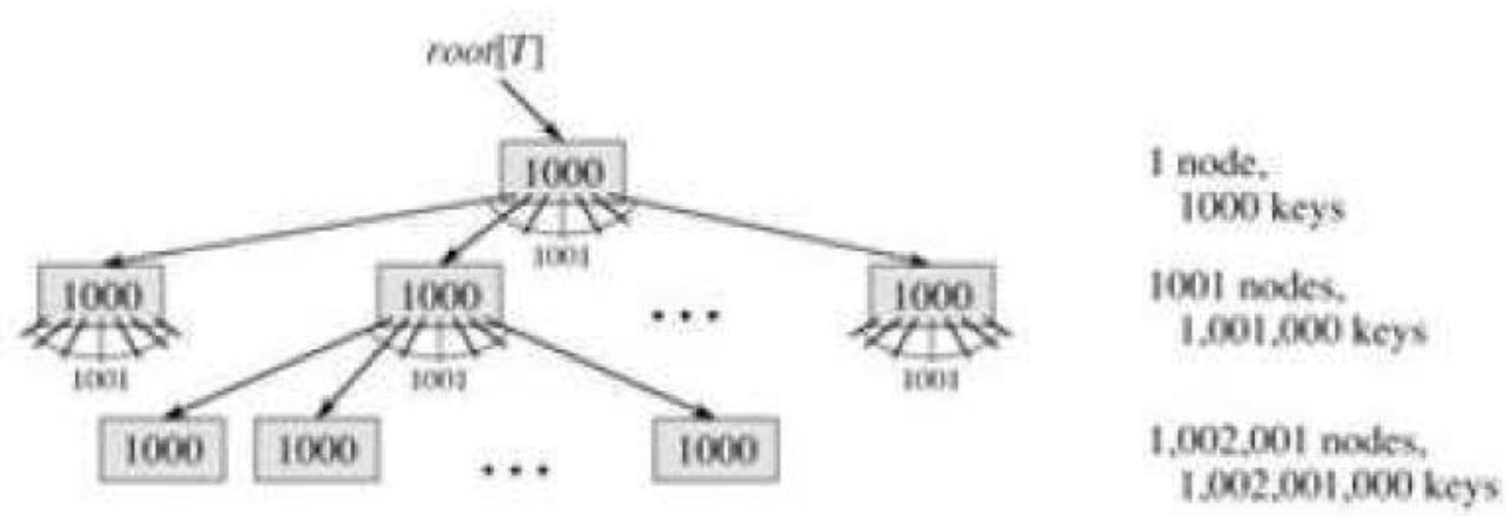
Exemplo Prático

Exemplo Prático de Árvores AVL – Armazenamento em Memória

- Atualmente o armazenamento estável é feito em discos magnéticos, e o custo de cada acesso (da ordem de mili segundos) é muito alto quando comparado ao acesso à memória RAM (ordem de nano segundos)
- Toda vez que um acesso é feito, deve-se aproveita-lo da melhor maneira possível, trazendo o máximo de informação relevante

Exemplo Prático de Árvores AVL – Armazenamento em Memória

- Na grande maioria dos sistemas, o tempo de execução de um algoritmo de árvore-B é determinado pelas leituras e escritas no disco
- Um fator de ramificação alto reduz drasticamente a altura da arvore. Tomemos o exemplo:



Poder da Árvore AVL

Definição de Árvores AVL

- Podemos ver o poder da árvore-B quando comparada a outros tipos de árvores balanceadas com altura $O(log_2(n))$. No caso da árvore-B a base do logaritmo é proporcional ao fator de ramificação
- Por exemplo, se tivermos um fator de ramificação 1000 e aproximadamente 1 milhão de registros, precisaremos de apenas $log_{1000}(10^6) \cong 3$ idas ao disco

Como reconhecer se uma árvore está balanceada?

1. Construir o algoritmo (simples) que verifique se uma árvore está balanceada ou não.
2. Se a árvore AVL por alguma operação (Inserção ou Remoção) não estiver balanceada, construir outro algoritmo para balancear esta árvore novamente.
3. Postar no SAI/SAVA (05/05/2020)