

>>> Métodos Cuantitativos (Parte II)

>>> Tema 1: Teoría de la Decisión

2024-2025

1. Toma de Decisiones: Elementos y Clasificación

2. Modelos Deterministas

3. Tablas de Decisión

4. Métodos en Ambiente de Riesgo

5. Métodos en Ambiente de Incertidumbre

>>> Introducción

Real Academia Española:

Decisión es resolución que se toma o se da en una cosa dudosa.

Una decisión es una situación en la que:

- * existen más de una opción para elegir
- * el resultado que se obtenga dependerá de la opción elegida

En este tema veremos

- * qué entendemos por un problema de toma de decisiones,
- * cómo podemos clasificarlo en base a distintos factores
- * y las distintas metodologías para elegir la mejor alternativa en la Teoría Clásica de la Decisión

>>> Elementos fundamentales de un problema de decisión

El proceso de formulación de un modelo, que represente un problema de la vida real, parte de la identificación de tres elementos fundamentales:

- * El agente que debe tomar la decisión. Es la persona o el ente que decide qué alternativa de entre las posibles es la que más le interesa. En un proceso de toma de decisiones puede haber más de un agente (tratando de obtener el mayor beneficio personal o buscando una solución que satisfaga a todos).
- * El conjunto de acciones o alternativas potenciales a tomar. Es el factor más importante, pues la exclusión de una acción puede llevar a tomar decisiones no tan buenas como se podría esperar. La representación matemática de estas acciones nos permite resolver el problema con técnicas matemáticas.
- * Las preferencias/criterios que el agente manifiesta sobre las posibles alternativas. Una vez establecidas las acciones, el agente debe establecer un orden de preferencia sobre estas, y de esta forma, y en base a estas acciones, escoger la/s que más le convenga/n. Las valoraciones de las alternativas son llamadas *objetivos* y podrían aparecer uno o más de un objetivo que valore cada acción.
- * Los resultados o consecuencias de cada acción.

>>> Elementos fundamentales de un problema de decisión

Ejemplo

Cierta empresa quiere establecer nuevas plantas en una ciudad. Analizadas las posibles opciones se han decantado por tres: A, B y C. En base al tamaño y a la situación geográfica de los locales, cada una de ellas tiene un coste y un beneficio anual estimado:

Plantas	Coste anual	Beneficio anual
A	100.000	1.000.000
B	150.000	850.000
C	250.000	1.100.000

¿en qué planta/s (no tiene porque ser una sola planta) debería invertir la empresa para obtener el mayor beneficio si su presupuesto es de 300.000 euros?

>>> Elementos fundamentales de un problema de decisión

Ejemplo

Los potenciales clientes del servicio a prestar también soportan un coste de acceso a las plantas que la propia empresa entiende que debe asumir si quiere facilitar las ventas. Los costes estimados de acceso por cliente (en euros) de un conjunto de 5 importantes barrios (cada uno de ellos con aprox. 100 clientes) son:

	Barrio 1	Barrio 2	Barrio 3	Barrio 4	Barrio 5
A	1.900	1.800	2.000	2.900	2.700
B	2.300	3.300	3.000	1.900	1.700
C	2.600	1.900	1.600	3.000	1.700

Olvidándose del presupuesto ¿Qué plantas debería abrir la empresa para minimizar el coste global (de acceso de los costes de los clientes y los propios de apertura de plantas)?

>>> Elementos fundamentales de un problema de decisión

Ejemplo

Dada la capacidad de producción de las plantas, cada una de estas sólo puede atender el servicio del siguiente número de clientes:

	A	B	C
Máx Capacidad	2 Barrios	2 Barrios	3 Barrios

¿Qué plantas debería abrir la empresa bajo condiciones de capacidad y teniendo en cuenta que hay que dar servicio a los cinco barrios?

>>> Elementos fundamentales de un problema de decisión

Ejemplo

Supongamos el caso de una empresa que quiere incrementar el volumen de recursos propios y que se plantea tres opciones: emitir acciones ordinarias mediante ampliación de capital o emitir acciones preferentes (sin derecho a voto) con un dividendo prefijado; o una combinación de ambas, decidiendo cuál debe ser el volumen de la ampliación de capital y cuál el de preferentes. La empresa se plantea encontrar la estrategia de forma que la operación tenga mínimo coste para ésta y que de esta forma se obtenga el mayor número de nuevos accionistas. Para este plan, la empresa cuenta con 1 millón de euros para los gastos de dividendos.

>>> Clasificación de los problemas de decisión

Clasificación según sus elementos La combinación de las distintas opciones entre el número de agentes y el número de objetivos de los problemas de decisión da lugar a la siguiente clasificación:

		Un Objetivo	Más de un objetivo
	Un agente	OPTIMIZACIÓN CLÁSICA	DECISIÓN MULTICRITERIO
	Varios Agentes	TEORÍA DE JUEGOS	JUEGOS MULTIOBJETIVO

>>> Clasificación de los problemas de decisión

Clasificación según su ambiente En base a qué sabemos sobre el resultado que produce una determinada elección, podemos clasificar un problema de toma de decisiones según su ambiente:

- * *Ambiente de Certeza / Determinista*: Cuando conocemos las alternativas y el resultado de elegir cada una de estas exactamente.
- * *Ambiente de Riesgo*: Aunque se conocen las alternativas, los resultados están modelados por cierta ley de probabilidad. Una vez elegida la opción se conoce los posibles resultados que podrían esperarse, pero la consecución de esos resultados depende del contexto en el que nos encontremos, depende de situaciones ajenas a nosotros y que no podemos controlar. A estas situaciones se les denomina *los estados de la naturaleza*. Lo que si que se conoce es con qué probabilidad ocurre cada uno de los estados.
- * *Ambiente de Incertidumbre*: Conocemos las alternativas, los posibles resultados y los estados de la naturaleza pero no se conoce ninguna ley de probabilidad asociada a estos estados.

>>> Clasificación de los problemas de decisión

Ejemplo

Los rendimientos esperados de las inversiones en acciones, fondos de inversión y actividades empresariales de un inversor, dependen de si hay recesión o crecimiento económico en el país. Se estima que en situación de recesión, las acciones tienen un rendimiento del 5%, los fondos de inversión del 1% y las actividades empresariales del 2%. Sin embargo, en situación de crecimiento económico, los rendimientos son del 7% para las acciones, 11% para los fondos de inversión y 15% para las actividades empresariales.

>>> Clasificación de los problemas de decisión

Si no sabemos con qué probabilidad se dan los distintos estados, estaremos en un problema en **ambiente de incertidumbre** (pues no conocemos con certeza que estado se da en la realidad).

Por otro lado, si conociéramos que la probabilidad de que el sistema esté en recesión en el momento de la inversión es del 30% y en crecimiento con el 70%, estaremos en **ambiente de riesgo**.

Finalmente, en caso en que en el momento de invertir conociéramos que la situación es de recesión, estaremos en **ambiente de certeza**. En tal caso, está claro que la alternativa más rentable es invertir en acciones, pues es la que mayor rendimiento produce.

>>> Clasificación de los problemas de decisión

Clasificación según el número de alternativas

Respecto al número de alternativas, los problemas de toma de decisiones se pueden clasificar en:

- * *Problema de tipo continuo*: Si el número de alternativas es infinito o finito y de tamaño difícilmente enumerable.
- * *Problema de tipo discreto*: Si el número de alternativas es finito y enumerable.

Ejemplo

El caso del Ejemplo 4 estaremos en un caso continuo, pues tenemos infinitas combinaciones de ampliación de capital y acciones. Sin embargo, en el Ejemplo 5 tenemos 3 alternativas, y es un caso discreto.

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Muestreo en Encuestas

Una vez diseñada una encuesta, esta debe ser repartida entre la muestra de análisis para poder obtener conclusiones sobre ésta y la muestra debe tener la siguiente distribución:

- * Al menos 200 encuestas a mujeres trabajadoras.
- * Al menos 150 encuestas a mujeres en paro.
- * Al menos 160 encuestas a hombres trabajadores.
- * Al menos 140 encuestas a hombres en paro.

Supongamos que contamos con la tasa de éxito en las llamadas telefónicas por tipología de encuestado de los últimos años, la distribución del número de encuestados por tipología y llamados por la mañana y por la tarde:

Encuestado	Mañana	Tarde
Mujeres trabajadoras	20%	10%
Mujeres en paro	25%	30%
Hombres trabajadores	15%	20%
Hombres en paro	30%	30%

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Queremos diseñar la mejor manera de realizar las encuestas para llegar a nuestros objetivos de números de encuestados, teniendo en cuenta las tasas de éxito previas y que las tarifas de llamadas son por la mañana 0.67 euros/llamada y por la tarde 1.05 euros/llamada.

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Asignación de operaciones a máquinas

Supongamos una empresa que fabrica tres tipos de productos: P_1 , P_2 y P_3 , usando tres máquinas: M_1 , M_2 y M_3 . En cada fase de la producción, el producto semi-terminado necesita procesarse por las tres máquinas durante los siguientes tiempos:

	P_1	P_2	P_3
M_1	3	2	6
M_2	4	8	2
M_3	6	3	1

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Cada unidad de producto supone un coste fijo (en euros) de producción en cada fase:

$$\text{coste}(P_1) = 6, \text{ coste}(P_2) = 3 \text{ y } \text{coste}(P_3) = 7,$$

y cada máquina tiene un coste (en euros) por minutos de uso:

$$\text{coste}(M_1) = 5, \text{ coste}(M_2) = 4 \text{ y } \text{coste}(M_3) = 3.$$

Dado que hay una limitación de uso de las máquinas de 2000, 3000 y 600 minutos, respectivamente y que el precio de venta cada unidad de los productos es de 90 euros, ¿cuántos productos de cada tipo deben elaborarse para obtener un mayor beneficio?

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Planificación de actividades

Una compañía fabrica cierto producto que necesita, para ser completamente elaborado, pasar por distintas fases de forma ordenada en la cadena de producción. Cada fase tiene un coste y una duración asociada. Salvo la fase de comienzo de fabricación (0), todas requieren haber superado una fase previa. A modo de ejemplo supongamos la siguiente información en el proceso de elaboración de un producto que supone 9 fases (incluida la 0):

Fase	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Duración	10	23	12	10	3	11	5	4	10
Previos	-	0	0	1	2 y 3	1	1	6	4 y 5

Esto es, para poder realizar la fase 1 es necesario haber realizado la 0, o para realizar la fase 4 es necesario haber realizado ya las fases 2 y 3.

¿Cuál debe ser la secuencia de elaboración del producto (en fases) para realizar la producción en el menor tiempo posible?

>>> Modelos deterministas (en ambiente de certeza)

Localización de Servicios: SPLP y p -mediana

Dado un conjunto de clientes $N = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de plantas potenciales para dar servicio a tales clientes, $M = \{1, \dots, m\}$, el objetivo de los problemas de localización (discreta) consiste en escoger las plantas óptimas para cubrir la demanda requerida por los clientes a mínimo coste. En el Problema de Localización de Plantas Simple (SPLP) se supone que existen unos costes de distribución entre cada cliente y cada posible planta: c_{ij} (coste de que el cliente i sea servido por la planta j) y unos costes de apertura de las plantas f_j (coste de abrir la planta j).

>>> Tablas de decisión

Para diseñar la tabla de decisión nos fijaremos en las siguientes características del problema:

- * Posibles acciones o alternativas: $\{a_1, \dots, a_m\}$.
- * Estados de la naturaleza: $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. Representa el conjunto de posibles escenarios a tener en cuenta para tomar una decisión.
- * Resultado o Consecuencias: Para cada alternativa a_i y cada estado θ_j , un resultado r_{ij} .
- * En ambiente de riesgo, además, a cada estado de la naturaleza θ_j , se le asociaría una probabilidad $P[\theta_j]$.

>>> Tablas de decisión

La tabla de decisión podría escribirse de la siguiente forma:

	$P[\theta_1]$	$P[\theta_2]$	\dots	$P[\theta_n]$
	θ_1	θ_2	\dots	θ_n
a_1	r_{11}	r_{12}	\dots	r_{1n}
a_2	r_{21}	r_{22}	\dots	r_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
a_m	r_{m1}	r_{m2}	\dots	r_{mn}

>>> Tablas de decisión

Ejemplo

La tabla de decisión del Ejemplo 5 sería:

	(0.30)	(0.70)
	Recesión	Crecimiento económico
Acciones	5%	7%
Fondos de inversión	1%	11%
Acciones Empr.	2%	15%

>>> Métodos en ambiente de riesgo

En problemas en ambiente de riesgo el resultado del problema no depende solo de la decisión tomada por el agente decisor, también depende de factores externos que están fuera del control del decisor (estados de la naturaleza). En este tipo de problemas además de tener información sobre cuántos y qué estados hay, debemos saber con qué probabilidad ocurre cada uno de esos estados.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Ejemplo

Un empresario quiere iniciar un nuevo negocio de venta de paraguas en cierta localidad, y quiere decidir entre invertir o no en tal negocio. Éste calcula que el beneficio dependerá de si hay lluvias fuertes, lluvias moderadas o ligeras en la localidad durante el invierno. Si las lluvias son fuertes, el empresario espera un beneficio de 7000 euros, si hay lluvias moderadas, de 2000 euros y una pérdida de 9000 euros si las lluvias son ligeras. Según el Instituto Nacional de Meteorología, la probabilidad de que haya lluvias fuertes en la localidad es de 0.4, de que haya lluvias moderadas 0.3 y de que haya lluvias ligeras 0.3.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Valor Monetario Esperado (VME)

Dado que se conocen las probabilidades con las que ocurre los estados de la naturaleza, en este método se calcula el beneficio (o pérdida) esperado para cada una de las opciones. Es decir, para cada una de las alternativas a_1, \dots, a_m , se calcularía

$$E[a_i] = P[\theta_1]r_{i1} + \dots + P[\theta_n]r_{in}$$

eligiéndose la opción a_i que proporcione el mejor valor esperado (mayor valor si tenemos beneficios o menor si son pérdidas).

	$P[\theta_1]$ θ_1	$P[\theta_2]$ θ_2	\dots \dots	$P[\theta_n]$ θ_n	$E[a_i]$
a_1	r_{11}	r_{12}	\dots	r_{1n}	$P[\theta_1]r_{11} + \dots + P[\theta_n]r_{1n}$
a_2	r_{21}	r_{22}	\dots	r_{2n}	$P[\theta_1]r_{21} + \dots + P[\theta_n]r_{2n}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
a_m	r_{m1}	r_{m2}	\dots	r_{mn}	$P[\theta_1]r_{m1} + \dots + P[\theta_n]r_{mn}$

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Ejemplo

La tabla de decisión, junto a los valores del VME de cada alternativa para el Ejemplo 8 son:

	0.4 Lluvia Fuerte	0.3 Lluvia Moderada	0.3 Lluvia Ligera	$E[a_i]$
Invertir	7000€	2000€	-9000€	700€
No Invertir	0€	0€	0€	0€

Como el mayor valor esperado es el asociado a la alternativa *Invertir*, ésta sería la opción escogida.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Mejor valor para el estado más probable

En este método, se identifica el estado de la naturaleza más probable entre todos los estados, y se escoge la alternativa que mejor resultado genere. Para ello buscamos el estado θ_j con mayor probabilidad, y dentro de su columna detectamos la opción que genere el mejor valor.

Ejemplo

Con los datos del Ejemplo 8, tendríamos:

	0.4 Lluvia Fuerte	0.3 Lluvia Moderada	0.3 Lluvia Ligera
Invertir	7000€	2000€	−9000€
No Invertir	0€	0€	0€

El estado más probable es *Lluvia Fuerte*, y la alternativa mejor es *Invertir*.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Pérdida de Oportunidad Esperada (POE)

En este método, para cada alternativa a_i y cada estado θ_j , se calcula el coste de oportunidad, s_{ij} , de la siguiente manera: fijamos un estado de la naturaleza y elegimos la opción que mejor resultado da en este estado, a continuación para cada alternativa a_i se calcula el coste de oportunidad como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa en ese estado y el resultado de la alternativa a_i , es decir,

$$s_{ij} = \max\{r_{1j}, \dots, r_{nj}\} - r_{ij}.$$

Una vez que se tiene el coste de oportunidad para todas las alternativas según los diferentes estados se aplica el criterio del VME sin olvidar que estamos hablando de pérdidas. La alternativa elegida es la que genera el menor valor.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

	$P[\theta_1]$	$P[\theta_2]$	\dots	$P[\theta_n]$	
	θ_1	θ_2	\dots	θ_n	$POE[a_i]$
a_1	s_{11}	s_{12}	\dots	s_{1n}	$P[\theta_1]s_{11} + \dots + P[\theta_n]s_{1n}$
a_2	s_{21}	s_{22}	\dots	s_{2n}	$P[\theta_1]s_{21} + \dots + P[\theta_n]s_{2n}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
a_m	s_{m1}	s_{m2}	\dots	s_{mn}	$P[\theta_1]s_{m1} + \dots + P[\theta_n]s_{mn}$

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Ejemplo

La tabla de decisión, junto al mejor resultado por alternativa para el Ejemplo 8 son:

	0.4 Lluvia Fuerte	0.3 Lluvia Moderada	0.3 Lluvia Ligera
Invertir	7000€	2000€	-9000€
No Invertir	0€	0€	0€
Mejor resultado	7000€	2000€	0€

Los costes de oportunidad para cada alternativa y cada estado de la naturaleza son:

	0.4 Lluvia Fuerte	0.3 Lluvia Moderada	0.3 Lluvia Ligera	$POE[a_i]$
Invertir	0€	0€	9000€	2700€
No Invertir	7000€	2000€	0€	3400€

Por tanto, la opción óptima sería INVERTIR con una pérdida esperada con esta acción de 2700€.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por esta información *a priori* (por saber el estado de la naturaleza que va a ocurrir)? Para responder esta pregunta primero se calcula lo que ganaría el decisor (en media) si tuviera información *a priori*, esta cantidad se denomina el **Valor Monetario Esperado de la Información Perfecta (VMEIP)** y es la media ponderada del mejor resultado de cada estado de la naturaleza (de cada columna). La diferencia entre este valor y el VME representa lo que el decisor estaría dispuesto a pagar por conocer la información del problema *a priori*.

>>> Métodos en ambiente de riesgo

Ejemplo

	0.4 Lluvia Fuerte	0.3 Lluvia Moderada	0.3 Lluvia Ligera
Invertir	7000€	2000€	−9000€
No Invertir	0€	0€	0€
Mejor	7000€	2000€	0€

La media (ponderada por las probabilidades) de estas cantidades ideales, es el VMEIP:

$$VMEIP = 7000 \times 0.4 + 2000 \times 0.3 + 0.3 \times 0 = 3400$$

Por tanto, el decisor estaría dispuesto a pagar como mucho
 $VMEIP - VME = 3400 - 700 = 2700$ euros

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

En los problemas en ambiente de incertidumbre no se conoce la probabilidad con la que ocurren los estados de la naturaleza.

Criterio de Laplace

Se calcula el valor monetario esperado para cada opción suponiendo que todos los estados de la naturaleza son igualmente probables.

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Ejemplo

Cierta empresa quiere establecer nuevas plantas en una ciudad. Analizadas las posibles opciones se han decantado por tres: A, B y C. En base al tamaño y a la situación geográfica de los locales/naves cada una de ellas tiene un coste anual. Dependiendo de la demanda prevista de sus productos se estima que cada planta tiene distintos beneficios:

Plantas	Coste anual	Beneficio		
		↑ demanda	≡ demanda	↓ demanda
A	100.000	1.500.000	1.000.000	200.000
B	150.000	1.000.000	850.000	550.000
C	250.000	1.400.000	1.100.000	900.000

¿En qué planta/s (no tiene porque ser una sola planta) debería invertir la empresa para obtener el mayor beneficio si su presupuesto es de 300.000 €?

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Según los costes de cada planta será imposible instalar a la vez las plantas A y C (coste=350.000), B y C (coste=400.000), A, B y C (coste=500.000). Las opciones restantes junto con sus beneficios según los estados de la naturaleza se detallan en la siguiente tabla.

Para resolver el problema según el criterio de Laplace suponemos que cada estado de la naturaleza (3 estados) se verifica con la misma probabilidad (1/3) y calculamos el valor monetario esperado:

Plantas	Beneficio			Laplace (VME)
	↑ demanda	≡ demanda	↓ demanda	
A	1.500.000	1.000.000	200.000	900.000
B	1.000.000	850.000	550.000	800.000
C	1.400.000	1.100.000	900.000	1.133.333
AB	2.500.000	1.850.000	750.000	1.700.000

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Criterio de Wald (criterio pesimista)

Suponiendo que en cada alternativa ocurre el estado de la naturaleza que da el peor resultado, se escoge aquella alternativa con la que se obtiene el mejor resultado.

Ejemplo

Plantas	Beneficio			Wald
	↑ demanda	≡ demanda	↓ demanda	
A	1.500.000	1.000.000	200.000	200.000
B	1.000.000	850.000	550.000	550.000
C	1.400.000	1.100.000	900.000	900.000
AB	2.500.000	1.850.000	750.000	750.000

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Criterio optimista

Suponiendo que en cada alternativa ocurre el estado de la naturaleza que da el mejor resultado, se escoge aquella alternativa con la que se obtiene el mejor resultado.

Ejemplo

Plantas	Beneficio			Optimista
	↑ demanda	≡ demanda	↓ demanda	
A	1.500.000	1.000.000	200.000	1.500.000
B	1.000.000	850.000	550.000	1.000.000
C	1.400.000	1.100.000	900.000	1.400.000
AB	2.500.000	1.850.000	750.000	2.500.000

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Criterio de Hurwicz

Este criterio combinan los dos criterios anteriores (pesimista y optimista) ponderando por un factor $0 \leq \alpha \leq 1$. Para llevarlo a cabo se calcula para cada alternativa la media ponderada entre su mejor y su peor resultado:

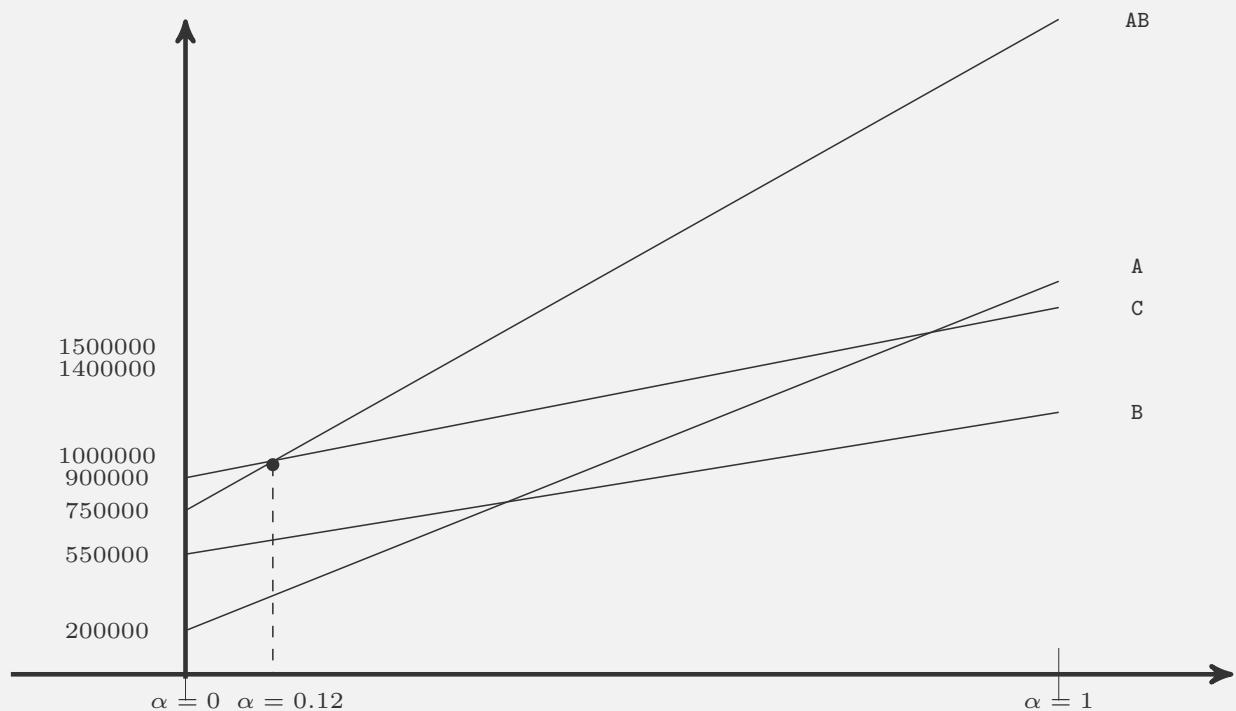
$$mejor \times \alpha + peor \times (1 - \alpha)$$

dependiendo de α se elige la alternativa que genere el mejor resultado.

Ejemplo

Plantas	Mejor	Peor	Mejor $\times \alpha$ + Peor $\times (1 - \alpha)$
A	1.500.000	200.000	1.500.000 α + 200.000 (1- α)
B	1.000.000	550.000	1.000.000 α + 550.000 (1- α)
C	1.400.000	900.000	1.400.000 α + 900.000 (1- α)
AB	2.500.000	750.000	2.500.000 α + 750.000 (1- α)

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre



[5. Métodos en Ambiente de Incertidumbre]

[39/41]

>>> Métodos en ambiente de incertidumbre

Criterio de Savage (o coste de oportunidad)

Para llevarlo a cabo fijamos un estado de la naturaleza y elegimos la opción que mejor resultado da en este estado, para cada alternativa a_i se calcula el coste de oportunidad como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa en ese estado y el resultado de la alternativa a_i , es decir,

$$s_{ij} = \max\{r_{1j}, \dots, r_{nj}\} - r_{ij}$$

Una vez tengamos la tabla de costes de oportunidad se le aplica el criterio Wald.

[5. Métodos en Ambiente de Incertidumbre]

[40/41]

Ejemplo

La tabla de P.O. es:

Plantas	Coste de oportunidad			Wald
	↑ demanda	≡ demanda	↓ demanda	
A	1.000.000	850.000	700.000	1.000.000
B	1.500.000	1.000.000	350.000	1.500.000
C	1.100.000	750.000	0	1.100.000
AB	0	0	150.000	150.000