

>>> Métodos Cuantitativos (Parte II)

>>> Tema 2: Decisión Multicriterio

2024-2025

1. Introducción a la Toma de Decisiones Multicriterio

2. Métodos de Superación: PROMETHEE

2.1 Distancia entre alternativas por criterio

2.2 Funciones de preferencias

2.3 Índice de preferencia multicriterio

2.4 Flujos de superación

2.5 Elección de alternativas

>>> Introducción

Ejemplo

Supongamos que debemos decidir qué vivienda comprar entre cuatro posibles alternativas situadas en cuatro ubicaciones diferentes: Hayling Island (HI), Southampton (SH), Southsea (SS) y Gunwharf Quays (GQ). Para ello se tendrán en cuenta tres criterios (atributos): la distancia de la vivienda al trabajo (en km.), el precio (en euros) y el número de dormitorios. La información que se tiene de cada casa para cada criterio se presenta en la siguiente tabla:

	Dist. Trabajo	Precio	Dormitorios
Hayling Island (HI)	10	250000	3
Southampton (SH)	25	270000	4
Southsea (SS)	4	320000	2
Gunwharf Quays (GQ)	2	350000	2

>>> Introducción

- * Alternativas: a_1, \dots, a_n .
- * Criterios o atributos: b_1, \dots, b_k
- * Resultados: $R(a_i, b_j) = s_{ij}$.

	b_1	b_2	\dots	b_k
a_1	s_{11}	s_{12}	\dots	s_{1k}
a_2	s_{21}	s_{22}	\dots	s_{2k}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
a_n	s_{n1}	s_{n2}	\dots	s_{nk}

Cuando comparamos dos alternativas a_i y a_j , podrían ocurrir una de las siguientes opciones:

- * a_i se prefiera a a_j ($a_i \succ a_j$).
- * a_i y a_j sean indiferentes ($a_i \simeq a_j$).
- * a_i sea al menos tan buena como lo es a_j ($a_i \succeq a_j$).

>>> Métodos de superación: PROMETHEE

Los métodos de superación ordenan las alternativas en función de sus resultados en cada criterio y cuentan cuántas veces se prefiere a cada una de ellas.

La idea principal de los métodos PROMETHEE es construir un índice de preferencia de las alternativas para cada criterio.

Para ello se siguen los siguientes pasos:

Paso 1 Calcular la distancia entre alternativas para cada criterio.

Paso 2 Calcular las funciones de preferencia para cada criterio.

Paso 3 Calcular el índice de preferencia multicriterio.

Paso 4 Calcular los flujos de superación positivos, negativos y netos.

Paso 5 Elección de la/s mejor/es alternativa/s: PROMETHEE (I y II).

>>> Paso 1. Distancia entre alternativas por criterio

Tabla de distancias para cada par de alternativas en cada uno de los tres criterios: distancia al trabajo, precio y número de dormitorios. Al lado de cada una de las diferencias calculadas aparece entre paréntesis la alternativa que sería escogida.

Diferencias	Dist. Trabajo (Minimizar)	Precio (Minimizar)	Dormitorios (Maximizar)
HI-SH	-15 (HI)	-20000 (HI)	-1 (SH)
HI-SS	6 (SS)	-70000 (HI)	1 (HI)
HI-GQ	8 (GQ)	-100000 (HI)	1 (HI)
SH-SS	21 (SS)	-50000 (SH)	2 (SH)
SH-GQ	23 (GQ)	-80000 (SH)	2 (SH)
SS-GQ	2 (GQ)	-30000 (SS)	0 (\simeq)

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Las distancias calculadas para cada criterio no se pueden comparar ni resumir conjuntamente puesto que cada distancia, cada criterio, está definida en distintas unidades.

Además deberíamos decidir cuándo una diferencia es lo suficientemente significativa para poder decantarnos por una de las alternativas.

Las funciones de preferencia dependen de uno de estos parámetros o de los dos:

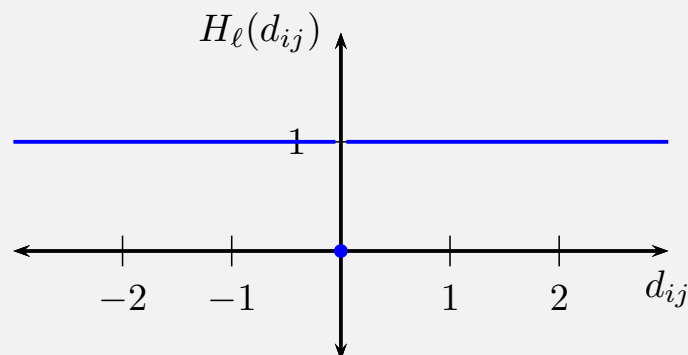
- * q es el umbral de indiferencia, valor máximo de la diferencia entre dos alternativas para los que ésta se considera insignificante.
- * p es el umbral de preferencia estricta, valor mínimo de la diferencia entre dos alternativas para los que se considera preferencia absoluta.

Las funciones de preferencia solo nos marcan si las alternativas son indiferentes o, por el contrario, se prefiere a alguna de ellas pero no dicen a qué alternativa se prefiere.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo I: Criterio Usual

$$H_{\ell}(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_{ij} = 0 \\ 1 & \text{si } d_{ij} \neq 0 \end{cases}$$

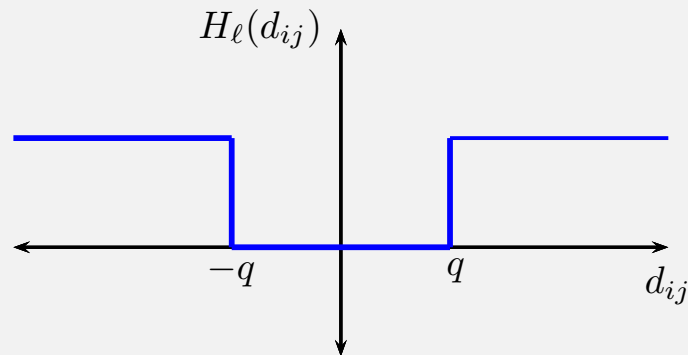


En este caso se considera que si la distancia entre dos alternativas es nula entonces las dos alternativas son indiferentes, en caso contrario, se prefiere claramente a la que proporcione mejor resultado.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo II: Criterio en forma de U

$$H_{\ell}(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{ij}| \leq q \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > q \end{cases}$$

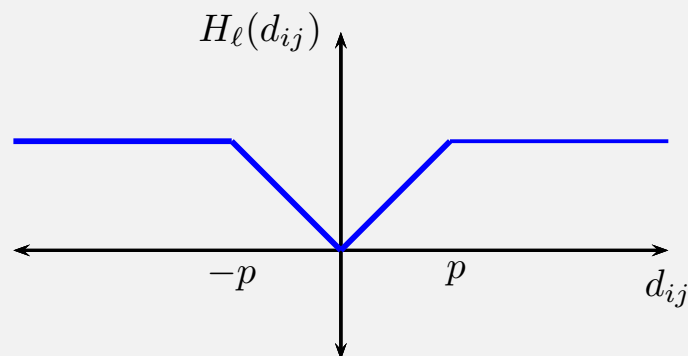


Para diferencias mayores que q las alternativas dejarán de ser indiferentes.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo III: Criterio en forma de V

$$H_{\ell}(d_{ij}) = \begin{cases} \frac{|d_{ij}|}{p} & \text{si } |d_{ij}| \leq p \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > p \end{cases}$$

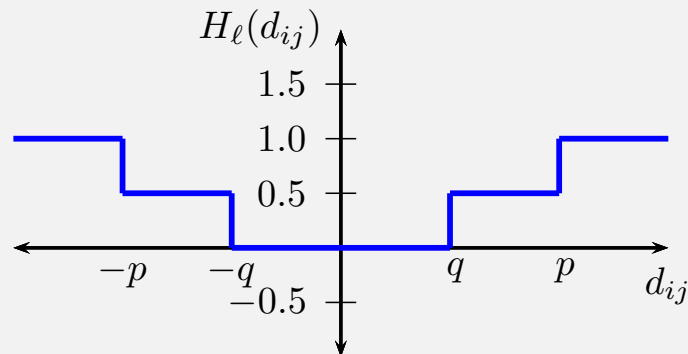


Si la diferencia es 0 las alternativas son indiferentes, pero a medida que aumentan las diferencias la preferencia también se incrementa. La preferencia es estricta cuando las diferencias sean mayor que p .

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo IV: Criterio de Nivel

$$H_{\ell}(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{ij}| \leq q \\ 0.5 & \text{si } q < |d_{ij}| \leq p \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > p \end{cases}$$

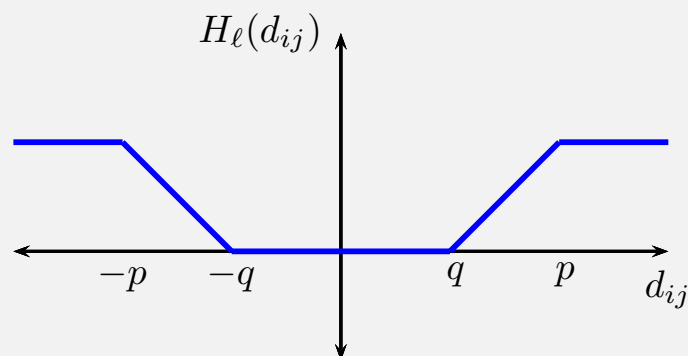


Si la distancia es menor que q , se consideran indiferentes. Si la distancia es mayor que p , entonces la preferencia es clara. Para valores de la distancia intermedios se asigna el valor 0.5.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo V: Criterio de Preferencia Lineal

$$H_{\ell}(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{ij}| \leq q \\ \frac{|d_{ij}| - q}{p - q} & \text{si } q < |d_{ij}| \leq p \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > p \end{cases}$$

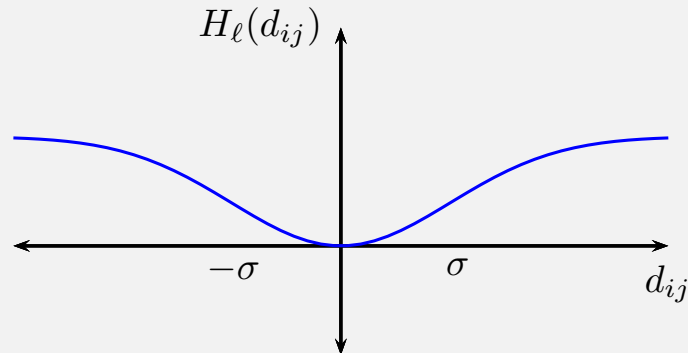


Para las distancias menores que q las alternativas son indiferentes. Para distancias mayores que p hay una alternativa con preferencia estricta. Para valores de la distancia intermedios, cuanto más cerca esté la distancia de p más clara es la preferencia por una de las alternativas.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Tipo VI: Criterio Gaussiano

$$H_{\ell}(d_{ij}) = 1 - e^{-\frac{d_{ij}^2}{2\sigma^2}} \quad \text{si } |d_{ij}| > 0$$



A medida que aumenta la distancia crece la preferencia pero, en este caso, el crecimiento sigue una función gaussiana.

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Con nuestro ejemplo Para el criterio "distancia al trabajo" se utilizará una función de preferencia tipo III con $p = 20$:

$$H_1(d_{ij}) = \begin{cases} \frac{|d_{ij}|}{20} & \text{si } |d_{ij}| \leq 20 \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > 20 \end{cases}$$

Para la pareja HI-SH es

$$H_1(-15) = \frac{15}{20} = 0.75 \quad \text{ya que } |-15| \leq 20.$$

Para la pareja HI-SS es $H_1(6) = \frac{6}{20} = 0.3$ ya que $|6| \leq 20$.

$H(d)$	Dist Trabajo	Precio	Dormitorios
HI - SH	0.75 (HI)		
HI - SS	0.3 (SS)		
HI - GQ	0.4 (GQ)		
SH - SS	1 (SS)		
SH - GQ	1 (GQ)		
SS - GQ	0.1 (GQ)		

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Para el criterio "precio" se utilizará una función de preferencia tipo V con $q = 30000$ y $p = 70000$:

$$H_2(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{ij}| \leq 30000 \\ \frac{|d_{ij}| - 30000}{70000 - 30000} & \text{si } 30000 < |d_{ij}| \leq 70000 \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > 70000 \end{cases}$$

Para la pareja HI-SH es $H_2(20000) = 0$ ya que $|20000| \leq 30000$.
Para la pareja HI-SS es

$$H_2(70000) = \frac{|70000| - 30000}{70000 - 30000} = 1 \text{ ya que } 30000 < |70000| \leq 70000.$$

$H(d)$	Dist Trabajo	Precio	Dormitorios
HI - SH	0.75 (HI)	0 (\simeq)	
HI - SS	0.3 (SS)	1 (HI)	
HI - GQ	0.4 (GQ)	1 (HI)	
SH - SS	1 (SS)	0.5 (SH)	
SH - GQ	1 (GQ)	1 (SH)	
SS - GQ	0.1 (GQ)	0 (\simeq)	

>>> Paso 2. Funciones de preferencias

Para el criterio "número de dormitorios" se utilizará una función de preferencia tipo II con $q = 1$:

$$H_3(d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{ij}| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |d_{ij}| > 1 \end{cases}$$

Para la pareja HI-SH es $H_3(-1) = 0$ ya que $|-1| \leq 1$.

Para la pareja HI-SS es $H_3(1) = 0$ ya que $|1| \leq 1$.

$H(d)$	Dist Trabajo	Precio	Dormitorios
HI - SH	0.75 (HI)	0 (\simeq)	0 (\simeq)
HI - SS	0.3 (SS)	1 (HI)	0 (\simeq)
HI - GQ	0.4 (GQ)	1 (HI)	0 (\simeq)
SH - SS	1 (SS)	0.5 (SH)	1 (SH)
SH - GQ	1 (GQ)	1 (SH)	1 (SH)
SS - GQ	0.1 (GQ)	0 (\simeq)	0 (\simeq)

>>> Paso 3. Índice de preferencia multicriterio

Índice de preferencia multicriterio:

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k \sum_{a_i \succ a_j} \omega_{\ell} H_{\ell}(d_{ij})$$

donde $\omega_1, \dots, \omega_k$ son los pesos (normalizados) establecidos por el decisor para cada criterio. Como indica la segunda sumatoria se tendrán en cuenta solo las funciones de preferencias $H_{\ell}(d_{ij})$ en donde a_i sea preferida a a_j .

En nuestro ejemplo, los pesos de cada criterio van a ser $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$.

c_{ij}	HI	SH	SS	GQ
HI	-	$\frac{1}{3}0.75$	$\frac{1}{3}1$	$\frac{1}{3}1$
SH	0	-	$\frac{1}{3}0.5 + \frac{1}{3}1$	$\frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}1$
SS	$\frac{1}{3}0.3$	$\frac{1}{3}1$	-	0
GQ	$\frac{1}{3}0.4$	$\frac{1}{3}1$	$\frac{1}{3}0.1$	-

>>> Paso 3. Índice de preferencia multicriterio

Partiendo de esta tabla:

$H(d)$	Dist Trabajo	Precio	Dormitorios
HI - SH	0.75 (HI)	0 (\simeq)	0 (\simeq)
HI - SS	0.3 (SS)	1 (HI)	0 (\simeq)
HI - GQ	0.4 (GQ)	1 (HI)	0 (\simeq)
SH - SS	1 (SS)	0.5 (SH)	1 (SH)
SH - GQ	1 (GQ)	1 (SH)	1 (SH)
SS - GQ	0.1 (GQ)	0 (\simeq)	0 (\simeq)

El índice de preferencia de la pareja HI-SH en la celda (1,2): HI es preferida sobre SH en el criterio "distancia al trabajo" y en los otros dos criterios es indiferente, por tanto a la hora de calcular su índice de preferencia solo se tendrían en cuenta el resultado de la función de preferencia para este criterio, que es 0.75:

$$c_{12} = \frac{1}{3}0.75 = 0.25$$

El índice de preferencia de la pareja HI-SH en la celda (2,1): SH no es preferida sobre HI, por tanto: $c_{21} = 0$.

>>> Paso 4. Flujos de superación positivos, negativos y netos

c_{ij} mide la preferencia ("el número de veces que se prefiere") de la alternativa a_i sobre la a_j .

Se definen los flujos de superación:

* *Flujo de Superación Positivo:*

$\Phi^+(a_i) = (\sum_{j=1}^n c_{ij}) / (n - 1)$. El flujo de superación positivo es la suma de los índices donde la alternativa a_i es la preferida, valora hasta que punto la alternativa a_i supera al resto de alternativas.

* *Flujo de Superación Negativo:*

$\Phi^-(a_i) = (\sum_{j=1}^n c_{ji}) / (n - 1)$. El flujo de superación negativo es la suma de los índices donde la alternativa a_i NO es la preferida, valora hasta que punto la alternativa a_i es superada por las demás alternativas.

* *Flujo de Superación Neto:* $\Phi(a_i) = \Phi^+(a_i) - \Phi^-(a_i)$. Es la diferencia entre los flujos de superación positivos y negativos.

>>> Paso 4. Flujos de superación positivos, negativos y netos

c_{ij}	HI	SH	SS	GQ	Φ^+	Φ
HI	-	0.25	0.33	0.33	$\frac{0.92}{3}=0.31$	$0.31-0.08=0.23$
SH	0	-	0.50	0.67	$\frac{1.17}{3}=0.39$	$0.39-0.31=0.08$
SS	0.1	0.33	-	0	$\frac{0.43}{3}=0.14$	$0.14-0.29=-0.14$
GQ	0.13	0.33	0.03	-	$\frac{0.50}{3}=0.17$	$0.17-0.33=-0.17$
Φ^-	$\frac{0.23}{3}=0.08$	$\frac{0.92}{3}=0.31$	$\frac{0.87}{3}=0.29$	$\frac{1}{3}=0.33$		

>>> Paso 5. Elección de alternativas: PROMETHEE I Y II

PROMETHEE I: Según este método, a_i es preferida sobre a_j ($a_i \succ a_j$) si alguna de estas relaciones es cierta:

- * $\Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j)$ y $\Phi^-(a_i) < \Phi^-(a_j)$, ó
- * $\Phi^+(a_i) > \Phi^+(a_j)$ y $\Phi^-(a_i) = \Phi^-(a_j)$, ó
- * $\Phi^+(a_i) = \Phi^+(a_j)$ y $\Phi^-(a_i) < \Phi^-(a_j)$

En cualquier otro caso las alternativas a_i y a_j serían indiferentes.

>>> Paso 5. Elección de alternativas: PROMETHEE I Y II

Comparemos dos a dos las alternativas de nuestro problema de decisión:

- * HI y SH: $\Phi^+(SH) = 0.39 > \Phi^+(HI) = 0.31$
 $\Phi^-(SH) = 0.31 \not< \Phi^-(HI) = 0.08$
 \Rightarrow HI y SH son indiferentes

- * HI y SS: $\Phi^+(HI) = 0.31 > \Phi^+(SS) = 0.14$
 $\Phi^-(HI) = 0.08 < \Phi^-(SS) = 0.29$
 \Rightarrow HI es preferida sobre SS

- * HI y GQ: $\Phi^+(HI) = 0.31 > \Phi^+(GQ) = 0.17$
 $\Phi^-(HI) = 0.08 < \Phi^-(GQ) = 0.33$
 \Rightarrow HI es preferida sobre GQ

- * SH y SS: $\Phi^+(SH) = 0.39 > \Phi^+(SS) = 0.14$
 $\Phi^-(SH) = 0.31 \not< \Phi^-(SS) = 0.29$
 \Rightarrow SH y SS son indiferentes

>>> Paso 5. Elección de alternativas: PROMETHEE I Y II

* SH y GQ: $\Phi^+(SH) = 0.39 > \Phi^+(GQ) = 0.17$
 $\Phi^-(SH) = 0.31 < \Phi^-(GQ) = 0.33 \Rightarrow$ SH es
preferida sobre GQ

* SS y GQ: $\Phi^+(GQ) = 0.17 > \Phi^+(SS) = 0.14$
 $\Phi^-(GQ) = 0.33 \not< \Phi^-(SS) = 0.29 \Rightarrow$ SS y GQ
son indiferentes

Resumiendo estas relaciones, el orden de preferencia de las alternativas sería:

$$HI \succ SS$$

$$HI \succ GQ$$

$$SH \succ GQ$$

HI es preferida a SS y GQ mientras que es indiferente a SH. SH es preferida a GQ.

>>> Paso 5. Elección de alternativas: PROMETHEE I Y II

PROMETHEE II:

Según este método la alternativa a_i es preferida a a_j ($a_i \succ a_j$) si

$$\Phi(a_i) > \Phi(a_j).$$

En el caso en que los flujos netos sean iguales, las alternativas son indiferentes.

En nuestro ejemplo, según los flujos netos de las diferentes alternativas, el orden de preferencia sería:

$$HI \succ SH \succ SS \succ GQ$$

La alternativa preferida es HI.