>>> Métodos Cuantitativos (Parte II)

>>> Tema 3.2: Teoría de Juegos Cooperativos

2024-2025

1. Juegos Cooperativos

2. Caracterización de un juego n-personal: la Función Caracterísitica

3. Una caracterización de las soluciones: Imputaciones

4. Un concepto de solución de juego: el Valor de Shapley

>>> Juegos Cooperativos

* En muchos casos de competencia hay más de dos competidores, y además la posibilidad de cooperar entre ellos.
* En estos juegos la solución pasa por analizar las posibles **coaliciones** que pueden plantearse.
* La solución del juego será **el pago** que recibirá cada uno de los jugadores.

Elementos importantes de los juegos cooperativos:

* La función característica
* Las imputaciones
* El valor de Shapley

>>> La función característica

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores.
La **función característica** ν de un juego indica para cada subconjunto $S \subseteq N$ la cantidad $\nu(S)$ que los miembros de S pueden estar seguros de recibir si actúan unidos formando una coalición (sin ayuda de los jugadores fuera de la coalición).
Para que una función sea función característica de un juego ha de cumplir la propiedad de la **superaditividad**:
Para todo par de conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ (que no tengan jugadores en común), ha de cumplirse:

$$\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B).$$

(si dos coaliciones con intersección vacía se unen, el beneficio o ganancia de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen. Es decir, que interesa aliarse entre jugadores!!)

>>> Ejemplo 1

Supóngase que un farmacéutico inventa un fármaco nuevo pero no puede fabricarlo él solo. Puede vender su fórmula a la empresa 2 o a la 3. La empresa afortunada compartirá 1 millón de euros con el inventor.
Si el jugador 1 es el inventor, el 2 la empresa 2 y el 3 la empresa 3, la función característica del juego es:

$$\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{2,3\}) = 0.$$

$$\nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{1,2,3\}) = 1000000.$$

>>> Ejemplo 2

Supóngase que el jugador 1 es el propietario de un terreno que valora en 100000€. El jugador 2 es una promotora que puede urbanizar el terreno dándole un valor de 200000€ y el jugador 3 otra promotora que puede urbanizar dando un valor de 300000€. La función característica del juego sería

$$\nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{2,3\}) = 0.$$

$$\nu(\{1\}) = 100000$$

$$\nu(\{1,2\}) = 200000$$

$$\nu(\{1,3\}) = \nu(\{1,2,3\}) = 300000$$

>>> Ejemplo 3

Supongamos que tres tipos de aviones usan un aeropuerto. El avión de tipo 1 necesita 100 metros de pista, el tipo 2 150 m. y el tipo 3 400 metros. Supongamos que el coste de mantenimiento de la pista es proporcional a la longitud de ésta. Como a ese aeropuerto llegan aviones de tipo 3 la longitud de la pista ha de ser de 400 metros. Supongamos por simplificar que al aeropuerto llegan por día uno de cada uno de esos aviones. El objetivo es decidir qué parte del coste de mantenimiento corresponde a cada avión. Esta situación puede representarse como un juego con la siguiente función característica, donde se anota como ganancia negativa el coste para que se cumpla la propiedad de la superaditividad,

$$\nu(\{1\}) = -100,\ \nu(\{2\}) = -150\ \nu(\{3\}) = -400$$

$$\nu(\{1,2\}) = -150,\ \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) = \nu(\{1,2,3\}) = -400$$

>>> Caracterización de las soluciones: Imputaciones

Un vector de pagos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es una **imputación** si verifica:

$$\nu(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ (Eficiencia)}$$

y

$$x_i \geq \nu(\{i\}), \forall i \in N \text{ (Individualidad racional)}$$

>>> Ejemplos

Así para el ejemplo del inventor, una imputación ha de cumplir

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Para el ejemplo del terreno, sería:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300000$$

$$x_1 \geq 100000, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

y para el ejemplo del aeropuerto, sería:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -400$$

$$x_1 \geq -100, x_2 \geq -150, x_3 \geq -400$$

>>> Solución a un juego cooperativo: El valor de Shapley

Para cualquier función característica, la función de asignación de pagos $(x_1, \ldots, x_n)$ debe cumplir:

* *Axioma 1.* (***Simetría***): los pagos para dos jugadores que realicen aportaciones equivalentes a la coalición deben ser iguales.
* *Axioma 2.* (***Eficiencia***).
* *Axioma 3.* (***Tratamiento del jugador pasivo***): si un jugador no aporta beneficio adicional a la coalición no debe recibir ningún pago adicional.
* *Axioma 4.* (***Aditividad***): la función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición aleatoria del juego.

>>> El valor de Shapley

Dado cualquier juego n-personal con función característica ν existe un único vector de pagos, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisface ciertas condiciones de estabilidad (axiomas J. Cooperativos), **el valor de Shapley**, donde el pago del i-ésimo jugador viene dado por la expresión:

$$x_i = \sum_{S \mid i \notin S} p_n(S) \left(\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)\right)$$

siendo $p_n(S) = \dfrac{s!(n-s-1)!}{n!}$ donde s = núm. jugadores en S.

* El valor Shapley puede interpretarse como *la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar.*

  (el pago del jugador i debe ser la cantidad esperada con la que contribuiría el jugador).

* $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)$: la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a S, mientras que el factor $p_n(S)$: probabilidad de que a i le toque a incorporarse precisamente a S.

>>> Ejemplos

* **Juego del Inventor:**

S	$\nu(S)$	$p_3(S)$	$p_3(S)\left(\nu(S \cup \{1\}) - \nu(S)\right)$	$p_3(S)\left(\nu(S \cup \{2\}) - \nu(S)\right)$	$p_3(S)\left(\nu(S \cup \{3\}) - \nu(S)\right)$
$\emptyset$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
$\{1\}$	0	$\frac{1}{6}$		166666.66	166666.66
$\{2\}$	0	$\frac{1}{6}$	166666.66		0
$\{3\}$	0	$\frac{1}{6}$	166666.66	0	
$\{1,2\}$	1000000	$\frac{1}{3}$			0
$\{1,3\}$	1000000	$\frac{1}{3}$		0	
$\{2,3\}$	0	$\frac{1}{3}$	333333.33		
$\{1,2,3\}$	1000000				
			666666.66	166666.66	166666.66
			66.66%	16.66%	16.66%

* **Juego del Terreno:** $\left(\frac{1300000}{6}, \frac{100000}{6}, \frac{400000}{6}\right)$

* **Juego de Aviones:** $\left(\frac{-200}{6}, \frac{-350}{6}, \frac{-1850}{6}\right)$