>>> Métodos Cuantitativos (Parte II)
>>> Tema 3.1: Teoría de Juegos Competitivos

2024-2025

>>> Introducción a la Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos trata problemas de decisión:

* en los que **varios agentes** toman decisiones (**jugadores**).
* la decisión tomada por cada uno de estos agentes afecta al resto (**interdependencia estratégica**).
* existen ciertas regulaciones sobre las acciones de los agentes (**reglas del juego**).
* cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de resultados.

Juego: cualquier situación gobernada por reglas con un resultado bien definido caracterizado por una interdependencia estratégica.
Existen dos ramas de la Teoría de juegos:

* **Cooperativos**: Los agentes disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.
* **No Cooperativos**: Los agentes no disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.

>>> Teoría de Juegos

¿Por qué estudiamos los juegos? ¿Para ganar al póker?
Imaginemos:

* Varias empresas compitiendo en el mismo sector.
* Existen normas que regulan esta competencia.
* Las estrategias de una empresa pueden ser el establecimiento de precios, cantidades, inversiones en publicidad, en qué mercado operar, que tipo de contratos ofrecer, etc...
* El resultado que obtiene una empresa cualquiera no sólo depende de la estrategia que escoge, sino también de las estrategias de sus competidores.

>>> Elementos de un juego

* **Jugadores:** los individuos que toman las decisiones tratando de maximizar su utilidad.
* **Acción:** Cada una de de las opciones que el jugador tiene disponible para alcanzar el objetivo buscado.
* **Información:** El conocimiento, en un determinado momento, de los valores de las distintas variables, los distintos valores que el jugador cree que son posibles.
* **Estrategia:** es un conjunto de acciones a tomar en cada momento del juego dada la información disponible.
* **Recompensa o pago:** es la utilidad que reciben los jugadores al completar el juego, la evaluación posterior a la realización de la acción sobre si el objetivo buscado fue alcanzado.

>>> Tipos de juegos

Criterios de clasificación de los juegos

* Por el número de jugadores: **bipersonales o N-personales**
* Por el número de estrategias de los jugadores: **finitos o infinitos**
* Por su evolución en el tiempo: **estáticos o dinámicos**
* Por la relación de intercambio de información entre jugadores: **Cooperativos o no cooperativos**
* Por la variación de riqueza del conjunto de jugadores: **Suma no constante o de suma constante**
* Por la cantidad de información de que disponen los jugadores: **con información completa o incompleta**
* Por la cantidad de información que adquieren durante el juego (en juegos dinámicos o repetidos: **de información perfecta o imperfecta**

>>> El dilema del prisionero (Tucker, 1950)

Dos sospechosos son detenidos en cercanías del lugar de un crimen y la policía aplica técnicas de interrogatorio por separado. Cada uno de ellos tiene la posibilidad de elegir entre delatar a su compañero, o de no hacerlo.
Si ninguno de ellos delata a su compañero, entonces ambos pasarán dos años en prisión acusados de cargar un arma sin autorización. Si ambos se delatan mutuamente, los dos irán a prisión por 5 años cada uno, pero si sólo uno confiesa y acusa a su compañero al implicado irá a prisión 10 años y el delator irá a prisión sólo un año por colaborar con la policía.

		B: No Delatar	B: Delatar
A	No Delatar	A es condenado 2 años. B es condenado 2 años.	A es condenado 10 años B es condenado 1 año.
A	Delatar	A es condenado 1 año B es condenado 10 años.	A es condenado 5 años B es condenado 5 años.

>>> El dilema del prisionero (Tucker, 1950)

* **Jugadores:** Sospechosos A y B
* **Acciones:** Delatar, No delatar
* **Pagos:** Años de cárcel (en la tabla)
* **Información:** Conocen su recompensa pero no saben qué va a hacer el otro
* **Estrategias:** Un ejemplo de estrategia sería: el jugador A delata y el jugador B no delata (Delata, No Delata)

>>> Representaciones de un Juego

Jugadores: $N = \{1, \dots, n\}$; $i \in N$ con un conjunto de acciones S_i.

* **Forma Estratégica:** Función de pagos $\pi_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ para cada jugador: *la recompensa que recibe el jugador i-ésimo si los jugadores escogen un perfil de estrategias* $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ es $\pi_i(s_1, \dots, s_n)$.
* **Forma Matricial:** Si hay dos jugadores y los conjuntos de acciones son finitos $S_1 = \{s_{11}, \dots, s_{1m}\}$ y $S_2 = \{s_{21}, \dots, s_{2k}\}$, la forma estratégica se pueden representar como:

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1k}, b_{1k}) \\ \vdots & \ddots & & \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mk}, b_{mk}) \end{pmatrix}.$$

  donde $a_{ij} = \pi_1(s_{1i}, s_{2j})$ y $b_{ij} = \pi_2(s_{1i}, s_{2j})$.
* **Forma Extensiva:** Representación como un árbol de decisión, que parte de uno de los jugadores y van abriendose ramas en base a sus posibles decisiones y las del resto de los jugadores. Cada hoja terminal tiene asociados los pagos de todos los jugadores.

>>> Representaciones de un Juego: Dilema del Prisionero

$$N = \{A, B\},\ S_A = \{D, ND\},\ S_B = \{D, ND\}.$$

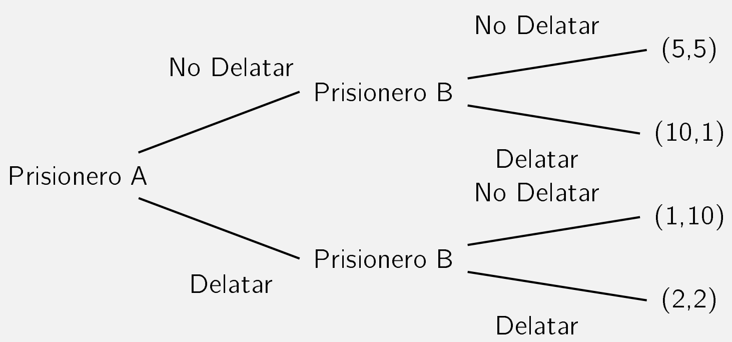
* **Forma Estratégica:**

  $\pi_A(D, D) = 5, \pi_A(D, ND) = 1, \pi_A(ND, D) = 10, \pi_A(ND, ND) = 2.$

  $\pi_B(D, D) = 5, \pi_B(D, ND) = 10, \pi_B(ND, D) = 1, \pi_B(ND, ND) = 2.$
* **Forma Matricial:** :

$$\begin{pmatrix} (5, 5) & (1, 10) \\ (10, 1) & (2, 2) \end{pmatrix}$$

* **Forma Extensiva:**



>>> Equilibrios Puros

Un perfil de estrategias $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ diremos que es un **equilibrio puro** de Nash si:

$$\pi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \geq \pi_i(s_1, \ldots, \bar{s}_i, \ldots, s_n), \forall i = 1, \ldots, n, \bar{s}_i \in S_i$$

Ningún jugador está interesado en cambiar de estrategia unilateralmente).

Ejemplo. Dilema del Prisionero:

	Delatar	No Delatar
Delatar	(5,5)	(1,10)
No Delatar	(10,1)	(2,2)

El equilibrio de Nash es (Delatar, Delatar) obteniendo cada uno de ellos un pago de 5 años de cárcel. Observemos que si él jugador A está en su equilibrio, no le interesa cambiar a ND puesto que tendría más años de carcel. Y lo mismo le ocurre al jugador B.

>>> Ejemplos

Dos empresas, A y B venden productos rivales y tienen que decidir si emprenden o no una campaña publicitaria. La decisión que tome cada una afectará a la de la otra. La matriz de ganancias es:

	Publ	NoPubl
Publ	(10,5)	(5,0)
NoPubl	(6,8)	(20,2)

Cada jugador se juega 1€. Cada jugador debe escoger Cara ó Cruz. Si ambos jugadores eligen Cara o ambos eligen Cruz, el jugador 1 gana la apuesta. En caso contrario, el jugador 2 gana la apuesta.

Un matrimonio desea salir una noche juntos; él quiere ir al sushi y ella al indio; hay un conflicto pues, sobre todo, desean ir juntos, así que plantean las utilidades para ellos de las posibles combinaciones formando la siguiente matriz de pagos:

		M	
		Sushi	Indio
H	Sushi	(2,1)	(0,0)
	Indio	(0,0)	(1,2)

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (4,-4) & (3,-3) \\ (7,-7) & (2,-2) & (5,-5) \end{pmatrix}$$

>>> Equilibrios Mixtos

Una **estrategia mixta** para los jugadores de un juego con un número finito de estrategias consiste en una distribución de probabilidad de estas estrategias, estos es, para cada jugador i, un conjunto de probabilidades $(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ (n_i es el número de estrategias del jugador i) de forma que:

$$x_{ij} = P[s_{ij}]$$

donde s_{ij} es la estrategia j-ésima del jugador i. Estos conjuntos de probabilidades, como tales, deberán verificar:

* $x_{ij} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n_i$.
* $\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1$.

Obsérvese que las estrategias puras no son más que un caso particular de las estrategias mixtas, el caso degenerado (probabilidad 1 para una de las estrategias y 0 para el resto).

>>> Equilibrios Mixtos

Sea un juego con 2 jugadores donde el jugador 1 dispone de J estrategias $(s_{11}, ..., s_{1J})$ y el jugador 2 de K estrategias $(s_{21}, ..., s_{2K})$. Si el jugador 1 cree que el jugador 2 utilizará sus estrategias $(s_{21}, ...s_{2K})$ con probabilidades $x_2 = (x_{21}, ..., x_{2K})$, el **pago esperado** del jugador 1 por utilizar la estrategia mixta $x_1 = (x_{11}, ..., x_{1J})$ es:

$$\mathbb{E}_1[x_1, x_2] = \sum_{j=1}^{J} x_{1j} \sum_{k=1}^{K} x_{2k} \pi_1(s_{1j}, s_{2k})$$

Un conjunto de estrategias mixtas $x^* \in [0,1]^n$ serán unas estrategias mixtas en **equilibro de Nash** si:

$$\mathbb{E}_i[x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*] \geq \mathbb{E}_i[x_1^*, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n^*], \forall i = 1, \ldots, n, \bar{x}_i \in [0,1]$$

>>> Estrategias Estrictamente Dominadas

Una estrategia s del jugador i es **estrictamente dominada** por s' si $\pi(s_1, \ldots, s', \ldots, s_n) > \pi(s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$, para todo $s_j \in S_j$ $(i \neq j)$.

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (3,-3) & (5,-5) \\ (2,-2) & (2,-2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (3,-3) & (5,-5) \end{pmatrix}$$

>>> Estrategias Estrictamente Dominadas

Si todas las estrategias menos una se eliminaran en algún paso, el juego se dice **resoluble por eliminación iterada de estrategias dominadas**.
No siempre es posible obtener la solución mediante la eliminación de estrategias dominadas, pero es un buen procedimiento para **reducir las dimensiones del problema**.
Si la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias excepto un par, este es el único equilibrio en el juego. Si un par de estrategias forman un equilibrio, sobreviven a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

>>> Estrategias Maximin

La estrategia maximin del jugador i es aquella que maximiza su mínima ganancia, esto es:

$$\max_{s \in S_i} \min_{s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n} \pi_i(s_1,\dots,s_{i-1},s,s_{i+1},\dots,s_n)$$

En juegos finitos bipersonales donde la matriz de pagos está representada de esta manera:

$$\begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \cdots & (a_{1k},b_{1k}) \\ \vdots & \ddots & & \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \cdots & (a_{mk},b_{mk}) \end{pmatrix}$$

La estrategia maximin del jugador 1 es:

$$\max_{i \in S_1} \min_{j \in S_2} a_{ij}.$$

La estrategia maximin del jugador 2 es:

$$\max_{j \in S_2} \min_{i \in S_1} b_{ij}.$$

>>> Estrategias Maximin

Para la siguiente matriz de pagos:

	Izquierda	Derecha
Arriba	(1,2)	(0,-2)
Abajo	(-2,3)	(2,1)

Para el jugador 1:

			Mínima ganancia por estrategia
Arriba	1	0	0
Abajo	-2	2	-2

Para el jugador 2:

	Izquierda	Derecha
	2	-2
	3	1
Mínima ganancia por estrategia	2	-2

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

En los juegos bipersonales de suma constante C se verifica:

$$\pi_1(s_1, s_2) + \pi_2(s_1, s_2) = C$$

para toda estrategia $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$. Si $C = 0$, el juego se dice de **suma nula**:

$$\pi_1(s_1, s_2) = -\pi_2(s_1, s_2) \Rightarrow a_{ij} = -b_{ij} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz que representa las ganancias del Jugador 1, y/o las pérdidas del Jugador 2.

En juegos de suma nula cada jugador debe pensar lo peor del otro por lo que la forma de buscar estrategias en equilibrio será el criterio maximin.

> En juegos bipersonales de suma nula, si $\max_{i \in S_1} \min_{j \in S_2} a_{ij} = \min_{j \in S_2} \max_{j \in S_1} a_{ij} = \nu$, entonces hay un equilibrio de Nash puro y ν es el **valor del juego**

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Busquemos la solución para la siguiente matriz de pagos de un juego bipersonal de suman nula:

	A	B	C
A	2	-1	0
B	3	4	5
C	2	5	5

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Si no existe punto de equilibrio puro consideraremos estrategias mixtas:

$$X = \{x \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \quad Y = \{y \in [0,1]^m : \sum_{j=1}^{m} y_j = 1\}$$

Las estrategias mixtas maximin (en pagos esperados) de ambos jugadores es:

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} \quad \text{y} \quad \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$$

> Si $\max_{x\in X} \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = \nu$, entonces hay un equilibrio mixto de Nash y ν es el valor del juego.

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Cómo obtener las estrategias mixtas maximin del Jugador 1.

	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

Pago esperado de J1 si J2 elige opción 1:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i$$

Pago esperado de J1 si J2 elige opción 2:

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i \quad \ldots$$

Pago esperado de J1 si J2 elige opción m:

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{im}x_i$$

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

El jugador 2 elegirá la opción que minimice los pagos esperados del jugador 1:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{im}x_i\right)$$

y el jugador 1 quiere maximizar el valor del juego.
El problema de programación lineal que se plantea es:

$$\begin{aligned}
&\max v\\
\texttt{s.a.}\quad & v \le \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \forall j = 1,\dots,m,\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\\
&0 \le x_i \le 1, i = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Cómo obtener las estrategias mixtas minimax del Jugador 2.

	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

Pago esperado de J2 si J1 elige opción 1:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}y_j$$

Pago esperado de J2 si J1 elige opción 2:

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_m = \sum_{j=1}^{m} a_{2j}y_j$$

...

Pago esperado de J2 si J1 elige opción n:

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m = \sum_{j=1}^{m} a_{nj}y_j$$

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

El jugador 1 elegirá la opción que maximice los pagos esperados del jugador 2:

$$\max\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{m} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{m} a_{nj}y_j\right)$$

y el jugador 2 quiere minimizar el valor del juego. El problema de programación lineal que se plantea es:

$$\begin{aligned} &\min w \\ \text{s.a.} \quad & w \geq \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j, \forall i = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \\ & 0 \leq y_j \leq 1, j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Como se puede observar ambos problemas son duales:

Estrategias Mixtas Maximin del Jugador 1

$$\begin{aligned} &\max v \\ \text{s.a.} \quad & v \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \forall j = 1, \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Estrategias Mixtas Minimax del Jugador 2

$$\begin{aligned} &\min w \\ \text{s.a.} \quad & w \geq \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j, \forall i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \\ & 0 \leq y_j \leq 1, j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Dualidad de la programación lineal sabemos que $\max v = \min w$ y, por tanto, siempre existen equilibrios de Nash mixtos en juegos bipersonales de suma nula.

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

Dado el siguiente juego de suma nula:

		J2		
		a	b	c
J1	A	-4	5	8
	B	9	-5	5
	C	-5	1	3

Analizar si existen equilibrios de Nash puros del juego, y en caso contrario encontrar las estrategias mixtas en equilibro para los jugadores, así como el valor del juego.

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

PASO 1 Buscar estrategias puras.

		J2			
		a	b	c	MIN
J1	A	-4	5	8	-4
	B	9	-5	5	**-5**
	C	-5	1	3	**-5**
	MAX	9	**5**	8	

como Maximin$J1 = -4 \neq 5 =$ Minimax$J2$, NO hay estrategias de Nash puras

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

PASO 2 Reducir el problema descartando estrategias estrictamente dominadas. Para el primer jugador, los beneficios de escoger *C* son siempre peores que los de *A*:

		J2		
		a	*b*	*c*
	A	-4	5	8
J1	*B*	9	-5	5

Las pérdidas para el segundo jugador en *c* son más altas que en *b*:

		J2	
		a	*b*
	A	-4	5
J1	*B*	9	-5

>>> Juegos Bipersonales de Suma Nula

PASO 3 Plantear el problema de programación lineal que nos permite calcular las estrategias óptimas. Para el primer jugador sería:

$$\begin{aligned} &\max v \\ \text{s.a.}\quad & v \leq -4x_1 + 9x_2 \\ & v \leq 5x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_2 = 1 - x_1$:

$$\begin{aligned} &\max v \\ \text{s.a.}\quad & v \leq -13x_1 + 9 \\ & v \leq 10x_1 - 5 \\ & 0 \leq x_1 \leq 1 \\ & v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El máximo v se obtiene en la intersección de las dos rectas $v = -13x_1 + 9$ y $v = 10x_1 + 5$, donde

$$x_1 = \frac{14}{23} = 0.608695,$$

$$v = 10\frac{14}{23} - 5 = 1.08695.$$

El valor del juego es $v = 1.08695$ y las estrategias mixtas para el primer jugador son $x_1 = 0.608695$ y $x_2 = 1 - x_1 = 0.391304$.
El equilibrio se obtiene cuando J1 juega un 60.86% de las veces la estrategia *A* y un 39.14% de las veces la estrategia *B*, obteniendo en tal caso J1 un beneficio medio de 1.08695.

Las estrategias mixtas para el segundo jugador se calcularían de forma similar:

$$\begin{aligned} &\min w \\ \texttt{s.a.}\quad & w \geq -4y_1 + 5y_2 \\ & w \geq 9y_1 - 5y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ & w \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como el valor del juego ya sabemos que es $v = w = 1.0895$, buscamos la solución que verifica esto:

$$\begin{aligned} & 1.0895 \geq -4y_1 + 5y_2 \\ & 1.0895 \geq 9y_1 - 5y_2 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y_2 = 1 - y_1$:

$$\begin{aligned} &1.0895 \geq -9y_1 + 5 \\ &1.0895 \geq 14y_1 - 5 \\ &0 \leq y_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Esto es,

$$y_1 \geq \frac{5 - 1.0895}{9} = 0.434782 \text{ y } y_1 \leq \frac{1.0895 + 5}{14} = 0.434782$$

Por tanto $y_1 = 0.434782$ y $y_2 = 1 - y_1 = 0.565217$.
Luego la la estrategia mixta de Nash para el segundo jugador supone jugar el 43.48% de las veces *a* y el 56.52% de las veces *b*, suponiendo una pérdida media de 1.08695.