ECONOMETRÍA. GADE

Prácticas

Tema 2

Ejercicios resueltos

1. A partir de los siguientes datos se pide representar matricialmente el modelo con todas las observaciones:

Año	Tasa de Desempleo	Inflación	Renta nacional disponible neta per capita (miles de euros)
2006	8,5	3,52	18,61
2007	8,2	2,78	19,403
2008	11,3	4,09	19,492
2009	17,9	-0,28	18,719
2010	19,9	1,8	18,706
2011	21,4	3,2	18,229
2012	24,8	2,44	17,822
2013	26,1	1,42	17,691
2014	24,4	-0,15	18,029
2015	22,1	-0,5	18,828

Resolución:
Inicialmente se puede plantear como:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

donde Y es la tasa de desempleo, X_2 la inflación, X_3 la renta nacional disponible neta a precios de mercado por habitante (miles de euros) y u la perturbación aleatoria. Matricialmente se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} 8,5 \\ 8,2 \\ 11,3 \\ 17,9 \\ 19,9 \\ 21,4 \\ 24,8 \\ 26,1 \\ 24,4 \\ 22,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3,52 & 18,61 \\ 1 & 2,78 & 19,403 \\ 1 & 4,09 & 19,492 \\ 1 & -0,28 & 18,719 \\ 1 & 1,8 & 18,706 \\ 1 & 3,2 & 18,229 \\ 1 & 2,44 & 17,822 \\ 1 & 1,42 & 17,691 \\ 1 & -0,15 & 18,029 \\ 1 & -0,5 & 18,828 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix}$$

Tambien se puede expresar matricialmente de forma abreviada de la siguiente forma:

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{u}$$

Ejercicio adaptado de [1].

2. Detalla el orden de las matrices y vectores del ejercicio anterior:
   El orden de Y es 10×1, el orden de la matrix X es 10×3, el orden del vector $\vec{\beta}$ es 3×1 y, por último, el orden del vector $\vec{u}$ es 10×1.

3. Razone si las siguientes matrices verifican la condición de rango completo por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 6 & 13 \\ 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

   El rango (orden del mayor determinante no nulo) de las matrices A y C es 2 por lo que es menor que $k = 3$ (número de columnas), por lo que en estos casos no se cumple la condición de rango completo por columnas. En el caso de la matriz B, el rango es igual a 3 que coincide con k por lo que en este caso si se cumple la condición.

4. Dado un modelo con 5 observaciones construye la matriz de varianzas-covarianzas de las perturbaciones aleatorias y detalla que valores tomaría en caso de que se verificasen las hipótesis básicas sobre la perturbación aleatoria.
   Resolución:

$$var - cov(u_i, u_j) = E(\vec{u}\vec{u}') = E\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & E(u_1u_3) & E(u_1u_4) & E(u_1u_5) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & E(u_2u_3) & E(u_2u_4) & E(u_2u_5) \\ E(u_3u_1) & E(u_3u_2) & E(u_3u_3) & E(u_3u_4) & E(u_3u_5) \\ E(u_4u_1) & E(u_4u_2) & E(u_4u_3) & E(u_4u_4) & E(u_4u_5) \\ E(u_5u_1) & E(u_5u_2) & E(u_5u_3) & E(u_5u_4) & E(u_5u_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_{(5\times5)}$$

   Si se cumplen las hipótesis básicas la diagonal tomaría un valor constante σ^2 y los valores de fuera de la diagonal tomarían el valor 0. beginenumerate

5. Dada las siguientes matrices se pide obtener $X'X$ y $X'y$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Se puede obtener las matrices $X'X$ y $X'y$ de la siguiente forma:

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 58 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 20 \\ 69 \end{pmatrix}.$$

6. Calcule a partir de las siguientes matrices, el determinante del producto $X'X$ y comente si el resultado podría provocar algún problema en la estimación:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:
Al calcular $X'X$ se obtiene:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 29 \\ 24 & 130 & 154 \\ 29 & 154 & 183 \end{pmatrix}$$

El determinante es cero, por lo que no se podrá calcular la inversa de la matrix $X'X$ y, por tanto, no se podrá realizar la estimación.

b)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Al calcular $X'X$ se obtiene:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 30 \\ 24 & 130 & 161 \\ 30 & 161 & 200 \end{pmatrix}$$

El determinante es igual a 35, por lo que se podrá calcular la inversa de la matriz $X'X$ y, por tanto, se podrá realizar la estimación.

c)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 6 & 13 \\ 1 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Al calcular $X'X$ se obtiene:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 53 \\ 24 & 130 & 284 \\ 53 & 284 & 621 \end{pmatrix}$$

El determinante es cero, por lo que no se podrá calcular la inversa de la matrix $X'X$.

7. A partir de los siguientes datos se pide:

Año	Tasa de Desempleo (Y)	Inflación (X)
2006	8,5	3,52
2007	8,2	2,78
2008	11,3	4,09
2009	17,9	-0,28
2010	19,9	1,8
2011	21,4	3,2
2012	24,8	2,44
2013	26,1	1,42
2014	24,4	-0,15
2015	22,1	-0,5

a) Estimar la recta que explique la tasa de desempleo en función de la inflación. Resolución:
Realizando los siguientes sumatorios $\sum_{i=1}^{10} x_t = 18,32$, $\sum_{i=1}^{10} x_t^2 = 58,65$, $\sum_{i=1}^{10} y_t = 184,6$ y $\sum_{i=1}^{10} x_t y_t = 281,08$, se obtiene:

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 18,32 \\ 18,32 & 58,65 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 184,6 \\ 281,08 \end{pmatrix}$$

Y aplicando la expresión del estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) se obtiene:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 22,629 \\ -2,276 \end{pmatrix}$$

b) Obtener los residuos y comprobar que su suma es cero.
RESOLUCIÓN:
Sustituyendo en la recta de regresión el valor real de la variable X, se obtiene el valor estimado de y, y realizando la diferencia entre el valor real y el valor estimado se obtienen los residuos:

$\hat{y}_t = 22,629 - 2,276 \cdot X_t$	$e = y - \hat{y}$
$\hat{y}_1 = 22,629 - 2,276 \cdot (3,52) = 14,617$	-6,12
$\hat{y}_2 = 22,629 - 2,276 \cdot (2,78) = 16,3$	-8,10
$\hat{y}_3 = 22,629 - 2,276 \cdot (4,09) = 13,32$	-2,02
$\hat{y}_4 = 22,629 - 2,276 \cdot (-0,28) = 23,26$	-5,37
$\hat{y}_5 = 22,629 - 2,276 \cdot (1,8) = 18,53$	1,37
$\hat{y}_6 = 22,629 - 2,276 \cdot (3,2) = 15,346$	6,05
$\hat{y}_8 = 22,629 - 2,276 \cdot (2,44) = 17,07$	7,72
$\hat{y}_8 = 22,629 - 2,276 \cdot (1,42) = 19,39$	6,70
$\hat{y}_9 = 22,629 - 2,276 \cdot (-0,15) = 22,97$	1,43
$\hat{y}_{10} = 22,629 - 2,276 \cdot (-0,5) = 23,76$	-1,66

c) Obtener el coeficiente de determinación.
RESOLUCIÓN:
Se obtiene el sumatorio $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 3821,58$ que nos permite obtener la suma de los cuadrados totales (SCT):

$$SCT = 3821,58 - 10 \cdot 18,46^2 = 413,86$$

Igualmente, se obtiene la suma de los cuadrados explicados:

$$SCE = \begin{pmatrix} 22,629 & -2,276 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 184,6 \\ 281,08 \end{pmatrix} - 10 \cdot 18,46^2 = 129,98$$

Y por tanto, se obtiene:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{129,98}{413,86} = 0,3140$$

d) Obtener el coeficiente de determinación corregido.
RESOLUCIÓN:

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - 0,3140) \cdot \frac{10-1}{10-2} = 0,2283.$$

Ejercicio seleccionado de [1].

8. Se tiene información para el periodo 1996-2015 de las ventas del grupo Inditex (V_t), el número de tiendas (T_t), número de países (P_t), número de marcas (M_t), número de empleados (E_t) y una variable ficticia que toma el valor 1 para los años en los que se oferta comercio electrónico (D_1). A partir de la que se han obtenido las siguientes estimaciones en la que la variable explicada son las ventas y cuya $SCT = 732{,}784{,}211$.
MODELO 1: $\hat{V}t = -616,54 + 2,76T_t$; $R^2 = 0,9889$
MODELO 2: $\hat{V}t = -66,37 + 3,05T_t - 26,28P_t$; $R^2 = 0,99$
MODELO 3: $\hat{V}t = 845,49 + 2,82T_t + 19,72P_t - 424,26M_t$; $R^2 = 0,9905$
MODELO 4: $\hat{V}t = 232,66 - 0,19T_t - 40,54P_t + 0,1647E_t$; $R^2 = 0,9967$
MODELO 5: $\hat{V}t = -324,81 + 0,12E_t + 1087,1D_{1t}$; $R^2 = 0,9963$

Se pide:

a) Obtener el coeficiente de determinación corregido para cada modelo y comparar.
RESOLUCIÓN:
A partir de la formula del coeficiente de determinación corregido se obtiene:
Modelo 1: $\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,9883) \cdot \frac{20-1}{20-2} = 0,9883$
Modelo 2: $\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,99) \cdot \frac{20-1}{20-3} = 0,9889$
Modelo 3: $\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,9905) \cdot \frac{20-1}{20-4} = 0,9887$
Modelo 4: $\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,9967) \cdot \frac{20-1}{20-4} = 0,9960$
Modelo 5: $\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0,9963) \cdot \frac{20-1}{20-3} = 0,9959$
Por tanto, a la vista de los coeficientes de determinación corregidos el mejor modelo sería el cuarto seguido del quinto.

b) Obtener el criterio de información de Akaike para cada modelo y comparar.
RESOLUCIÓN:
Teniendo en cuenta que $R^2 = \frac{SCE}{SCT}$, y dado que se conoce el valor del R^2 de cada modelo y la SCT, se puede obtener la SCE. Posteriormente, dado que se cumple que $SCT = SCE + SCR$, se puede obtener la suma de los cuadrados de los residuos aplicando $SCR = SCT - SCE$:
Modelo 1: $SCR = 8062143,195$
Modelo 2: $SCR = 7265849,34$
Modelo 3: $SCR = 6960596,88$
Modelo 4: $SCR = 2411720,88$
Modelo 5: $SCR = 2645740,91$
Y, aplicando la formula criterio de información de Akaike se obtiene la siguiente tabla:

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
k	2	3	4	4	3
AIC	318.90	318.82	319.96	298.76	298.61

Ejercicio seleccionado de [1].

Referencias

[1] García, C.B., Sánchez, J.M. y Salmerón, R. (2017) Econometría básica para la economía y la empresa. Ed. Fleming.

[2] García, J., Jiménez, J.F. y Cerrillo, J.R. Econometría práctica. Edo. Libreria Universitaria de Almería.

[3] Johnston, J. (1984) Métodos de econometría. Ed. Vicens Vives.

[4] Pena, B., Estavillo, J., Galindo, E., Leceta, M. y Zamora, M. (1999). Cien ejercicios de econometría. Ed. Pirámide.

[5] Sánchez, C., López, M.M. y García, T. (2015) Econometría. Ed. Fleming.

[6] Matilla García, m., Pérez Pascual, Pedro y Sanz Carnero, B. (2013) Econometría y predicción. Mc Graw Hill.