# Econometría

## Tema 3: El Modelo Lineal (II)

2024-2025

# El Modelo Lineal (II)

# 1.1. Valor Esperado y Varianza de los EMCO

El estimador EMCO de $\overrightarrow{\beta}$ del modelo $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$ es:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right)$$

# 1.1. Valor Esperado y Varianza de los EMCO

El estimador EMCO de $\overrightarrow{\beta}$ del modelo $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$ es:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right)$$

Sustituyendo $\overrightarrow{y}$ por $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\widehat{\beta}} &= \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right) = \left(X^t X\right)^{-1} X^t \left(X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}\right) \\ &= \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

# 1.1. Valor Esperado y Varianza de los EMCO

El estimador EMCO de $\overrightarrow{\beta}$ del modelo $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$ es:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \left(X^t X\right)^{-1}\left(X^t \overrightarrow{y}\right)$$

Sustituyendo $\overrightarrow{y}$ por $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\widehat{\beta}} &= \left(X^t X\right)^{-1}\left(X^t \overrightarrow{y}\right) = \left(X^t X\right)^{-1} X^t \left(X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}\right) \\ &= \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}.$$

## 1.1. Valor Esperado y Varianza de los EMCO

El estimador EMCO de $\overrightarrow{\beta}$ del modelo $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$ es:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right)$$

Sustituyendo $\overrightarrow{y}$ por $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\widehat{\beta}} &= \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right) = \left(X^t X\right)^{-1} X^t \left(X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}\right) \\ &= \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}.$$

$$E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right] = E\left[\overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{u}\right)\right] = \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t E[\overrightarrow{u}] = \overrightarrow{\beta}$$

ya que $E[\overrightarrow{u}] = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{\widehat{\beta}}$ es un estimador **insesgado** de $\overrightarrow{\beta}$.

# 1.1. Valor Esperado y Varianza de los EMCO

$$
\begin{aligned}
\text{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right) &= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right]\right) \cdot \left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right]\right)^t\right] = \\
&= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}\right)^t\right] = \\
&= E\left[\left(X^tX\right)^{-1}\left(X^t\overrightarrow{u}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u}^tX\right)\left(X^tX\right)^{-1}\right] = \\
&= \left(X^tX\right)^{-1} X^t \cdot E\left[\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}^t\right] \cdot X \left(X^tX\right)^{-1} = \\
&= \sigma^2 \cdot \left(X^tX\right)^{-1} X^tX \left(X^tX\right)^{-1} = \sigma^2 \cdot \left(X^tX\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

# 1.2. TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

[Gauss–Markov] Los estimadores mínimos cuadrados ordinarios de $\overrightarrow{\beta}$ son BLUE (ELIO en español):

- óptimos, (Best)
- lineales, (Linear) y
- insesgados (Umbiased)

Según el Teorema de Gauss-Markov podemos decir que entre todos los estimadores lineales e insesgados de $\overrightarrow{\beta}$, el EMCO es el que presenta menor matriz de varianzas-covarianzas.

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (I)

- $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ **es lineal con respecto al vector** $\overrightarrow{y}$.
  Definiendo la matriz de dimensión $k \times n$ como $W = \left(X^t X\right)^{-1} X^t$ es fácil comprobar que $\overrightarrow{\beta}$ es un estimador lineal con respecto a las observaciones $\overrightarrow{y}$, ya que

$$\overrightarrow{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right) = W \overrightarrow{y}$$

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (I)

- $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ **es lineal con respecto al vector** $\overrightarrow{y}$.
  Definiendo la matriz de dimensión $k \times n$ como $W = \left(X^t X\right)^{-1} X^t$ es fácil comprobar que $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ es un estimador lineal con respecto a las observaciones $\overrightarrow{y}$, ya que

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \left(X^t X\right)^{-1} \left(X^t \overrightarrow{y}\right) = W \overrightarrow{y}$$

- $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ **es un estimador insesgado de** $\overrightarrow{\beta}$.
  Si $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ es un estimador insesgado de $\overrightarrow{\beta}$ entonces es porque se verifica que $E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right] = \overrightarrow{\beta}$ (ya lo sabemos).

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (II)

- $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ **es un estimador óptimo de** $\overrightarrow{\beta}$.

  Consideremos otro estimador lineal e insesgado, alternativo a $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$: $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}$.

  - Como $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}$ es lineal en $\overrightarrow{y}$ entonces se verifica que existe $C_{k\times n}$ tal que $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} = C\overrightarrow{y}$.
  - Al verificarse que $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}$ es un estimador insesgado de $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ entonces $E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right] = \overrightarrow{\beta}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right] &= E\left[C\overrightarrow{y}\right] = E\left[C\left(X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}\right)\right] = E\left[CX\overrightarrow{\beta}\right] + \\
&+ E\left[C\overrightarrow{u}\right] = CE\left[X\overrightarrow{\beta}\right] + CE\left[\overrightarrow{u}\right] = CX\overrightarrow{\beta}
\end{aligned}
$$

  Así que para que $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}$ sea insesgado se debe verificar: $CX = I_k$.

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (III)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) &= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right) \cdot \left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right)^t\right] = \\
&= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right)^t\right] = E\left[C\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}^t C^t\right] = \\
&= CE\left[\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}^t\right] C^t = C\sigma^2 I_n C^t = \sigma^2 CC^t
\end{aligned}$$

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (III)

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) &= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right)\cdot\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right)^t\right] = \\
&= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right)^t\right] = E\left[C\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}^t C^t\right] = \\
&= CE\left[\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}^t\right]C^t = C\sigma^2 I_n C^t = \sigma^2 CC^t
\end{aligned}$$

Tenemos que $\overrightarrow{\widehat{\beta}} = W\overrightarrow{y}$ y que $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} = C\overrightarrow{y}$.
Si denotamos por $D = C - W$:

$$DX = (C - W)\,X = CX - WX = CX - \left(X^t X\right)^{-1} X^t X = I_k - I_k = 0_k$$

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (III)

$$\begin{aligned}
\text{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) &= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right)\cdot\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right]\right)^t\right] = \\
&= E\left[\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} - \overrightarrow{\beta}\right)^t\right] = E\left[C\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}^tC^t\right] = \\
&= CE\left[\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}^t\right]C^t = C\sigma^2 I_n C^t = \sigma^2 CC^t
\end{aligned}$$

Tenemos que $\overrightarrow{\widehat{\beta}} = W\overrightarrow{y}$ y que $\overrightarrow{\widehat{\beta}^*} = C\overrightarrow{y}$.
Si denotamos por $D = C - W$:

$$DX = (C - W)X = CX - WX = CX - \left(X^tX\right)^{-1}X^tX = I_k - I_k = 0_k$$

$$\Rightarrow \text{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) = \sigma^2 CC^t = \sigma^2 (W + D)(W + D)^t == \sigma^2\left(WW^t + WD^t + DW^t + DD^t\right)$$

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (IV)

$$
\begin{aligned}
WW^t &= \left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = \left(X^tX\right)^{-1}, \\
WD^t &= \left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)D^t = 0_{k\times k}, \\
DW^t &= D\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = 0_{k\times k},
\end{aligned}
$$

# 1.2. Teorema de Gauss–Markov: Demo (IV)

$$
\begin{aligned}
WW^t &= \left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = \left(X^tX\right)^{-1},\\
WD^t &= \left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)D^t = 0_{k\times k},\\
DW^t &= D\left(\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)^t = 0_{k\times k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) &= \sigma^2\left(WW^t + WD^t + DW^t + DD^t\right) =\\
&= \sigma^2 WW^t + \sigma^2 DD^t = \sigma^2\left(X^tX\right)^{-1} + \sigma^2 DD^t =\\
&= \operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right) + \sigma^2 DD^t
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) - \operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right) = \sigma^2 DD^t \succ 0 \Rightarrow \operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}^*}\right) \succ \operatorname{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right).
$$

# 1.3. Estimación de $\sigma_u^2$

El vector de residuos es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e} &= \overrightarrow{y} - \overrightarrow{\widehat{y}} = \overrightarrow{y} - X\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{y} - X\left(\left(X^tX\right)^{-1}\left(X^t\overrightarrow{y}\right)\right) = \\ &= \left(I_n - X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)\overrightarrow{y} = M_X\overrightarrow{y}\end{aligned}$$

donde $M_X = I_n - X\left(X^tX\right)^{-1}X^t$ es la matriz complemento del proyector ortogonal.
La matriz $M_X$ verifica:

- $M_X^t = M_X$ (simetrica)
- $M_X^2 = M_X$ (idempotente)
- $traza(M_X) = n - k$.
- $M_XX = \left(I_n - X\left(X^tX\right)^{-1}X^t\right)X = X - X = 0_{n\times k}$.

# 1.3. Estimación de $\sigma_u^2$

Como $\overrightarrow{y} = X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{e} = M_X\overrightarrow{y} = M_X\left(X\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{u}\right) = M_X X\overrightarrow{\beta} + M_X\overrightarrow{u} = M_X\overrightarrow{u}$$

Tomando valores esperados se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}\right] &= E\left[\left(M_X\overrightarrow{u}\right)^t M_X\overrightarrow{u}\right] && = E\left[\overrightarrow{u}^t M_X\overrightarrow{u}\right] \\ &= E\left[traza\left(\overrightarrow{u}^t M_X\overrightarrow{u}\right)\right] && = traza\left(M_X E\left[\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^t\right]\right) \\ &= traza\left(M_X\sigma^2 I_n\right) && = \sigma^2 traza\left(M_X\right) = \sigma^2\left(n-k\right) \end{aligned}$$

(**Nota:** $\overrightarrow{u}^t M_X\overrightarrow{u}$ es un escalar.)

## 1.3. ESTIMACIÓN DE $\sigma_u^2$

Como $\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{u}$:

$$\vec{e} = M_X \vec{y} = M_X \left( X\vec{\beta} + \vec{u} \right) = M_X X \vec{\beta} + M_X \vec{u} = M_X \vec{u}$$

Tomando valores esperados se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[\vec{e}^{\,t}\vec{e}\right] &= E\left[\left(M_X\vec{u}\right)^t M_X\vec{u}\right] && = E\left[\vec{u}^{\,t} M_X \vec{u}\right] \\ &= E\left[traza\left(\vec{u}^{\,t} M_X \vec{u}\right)\right] && = traza\left(M_X E\left[\vec{u}\,\vec{u}^{\,t}\right]\right) \\ &= traza\left(M_X \sigma^2 I_n\right) && = \sigma^2 traza\left(M_X\right) = \sigma^2\left(n-k\right) \end{aligned}$$

(**Nota:** $\vec{u}^{\,t} M_X \vec{u}$ es un escalar.)

Como $E\left[\dfrac{\vec{e}^{\,t}\vec{e}}{n-k}\right] = \sigma^2$, se concluye que un estimador insesgado de la varianza de las perturbaciones, $\sigma_u^2$, será:

$$\widehat{\sigma}_u^2 = \frac{\vec{e}^{\,t}\vec{e}}{n-k} = \frac{SCR}{n-k}$$

# 1.4. Estimación de la varianza de los EMCO

La varianza del EMCO $\overrightarrow{\beta}$ era:

$$\mathrm{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right) = \sigma^2 \cdot \left(X^t X\right)^{-1},$$

Como dicha expresión depende de la varianza de la perturbación, **no se puede determinar**. Teniendo en cuenta que el estimador insesgado de la varianza del término de perturbación es

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\overrightarrow{e}^t \overrightarrow{e}}{n-k} = \frac{SCR}{n-k},$$

se obtiene que la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas de $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$ es:

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right) = \frac{SCR}{n-k} \cdot \left(X^t X\right)^{-1}.$$

# 2.Supuesto de normalidad e inferencia

- Suponíamos que $\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$.

# 2. Supuesto de normalidad e inferencia

- Suponíamos que $\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$.
- Como $\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}$, y por T. Gauss-Markov:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right], \mathrm{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right)\right) = \mathcal{N}\left(\overrightarrow{\beta}, \sigma^2 \cdot \left(X^t X\right)^{-1}\right)$$

o equivalentemente:

$$\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}\right) \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 \cdot \left(X^t X\right)^{-1}\right)$$

# 2.Supuesto de normalidad e inferencia

- Suponíamos que $\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$.
- Como $\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{\beta} + (X^tX)^{-1} X^t\overrightarrow{u}$, y por T. Gauss-Markov:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right], \mathrm{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right)\right) = \mathcal{N}\left(\overrightarrow{\beta}, \sigma^2 \cdot (X^tX)^{-1}\right)$$

o equivalentemente:

$$\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}\right) \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 \cdot (X^tX)^{-1}\right)$$

- Como se verifica que:

$$\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e} = \overrightarrow{u}^t M_X \overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$$
$M_X$es simétrica, idempotente y $\rho(M_X) = n - k$

Concluimos que $\frac{1}{\sigma^2}\overrightarrow{u}^t M_X \overrightarrow{u} \sim \chi^2_{n-k}$.

## 2. SUPUESTO DE NORMALIDAD E INFERENCIA

- Suponíamos que $\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$.
- Como $\overrightarrow{\widehat{\beta}} = \overrightarrow{\beta} + \left(X^t X\right)^{-1} X^t \overrightarrow{u}$, y por T. Gauss-Markov:

$$\overrightarrow{\widehat{\beta}} \sim \mathcal{N}\left(E\left[\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right], \mathrm{var}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right)\right) = \mathcal{N}\left(\overrightarrow{\beta}, \sigma^2 \cdot \left(X^t X\right)^{-1}\right)$$

o equivalentemente:

$$\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}\right) \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 \cdot \left(X^t X\right)^{-1}\right)$$

- Como se verifica que:

$$\overrightarrow{e}^t \overrightarrow{e} = \overrightarrow{u}^t M_X \overrightarrow{u}$$
$$\overrightarrow{u} \sim \mathcal{N}\left(\overrightarrow{0}, \sigma^2 I_n\right)$$
$M_X$es simétrica, idempotente y $\rho(M_X) = n - k$

Concluimos que $\frac{1}{\sigma^2} \overrightarrow{u}^t M_X \overrightarrow{u} \sim \chi^2_{n-k}. \Rightarrow \frac{(n-k)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$

# 2.1. Intervalos de confianza

- IC para $\beta_i$:

$$\widehat{\beta}_i \pm t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\widehat{\text{var}}[\widehat{\beta}_i]}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

siendo $\widehat{\text{var}}[\widehat{\beta}_i]$ el elemento $(i,i)$ de la matriz de varianzas-covarianzas estimada del estimador $\overrightarrow{\widehat{\beta}}$, es decir, el elemento $(i,i)$ de $\widehat{\text{var}}\left(\overrightarrow{\widehat{\beta}}\right)$.

- IC para $\sigma^2$

$$\left[\frac{(n-k)\cdot\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-k)\cdot\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-k,\frac{\alpha}{2}}}\right],$$

donde $\chi^2_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}}$ y $\chi^2_{n-k,\frac{\alpha}{2}}$ son los cuantiles de una distribución chi-cuadrado con $n-k$ grados de libertad tal que $P[\chi \leq \chi^2_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \frac{\alpha}{2}$ y $P[\chi \leq \chi^2_{n-k,\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}$.

# 2.2. Contraste de hipótesis

Suponiendo $m$ restricciones lineales independientes entre sí:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1k}\beta_k & = & r_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2k}\beta_k & = & r_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mk}\beta_k & = & r_m \end{array}$$

La hipótesis nula a contrastar será:

$$H_0 : R\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{r}$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}_{m\times k}, \qquad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

# 2.2. Contraste de hipótesis

El estadístico de contraste asociado a la hipótesis $H_0 : R\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{r}$ es

$$\begin{aligned} F_{exp} &= \frac{\dfrac{\left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)^t \cdot \left[R\left(X^tX\right)^{-1}R^t\right]^{-1} \cdot \left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)}{m}}{\frac{\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}}{n-k}} \\ &= \left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)^t \cdot \frac{\left[R\left(X^tX\right)^{-1}R^t\right]^{-1}}{m\widehat{\sigma}^2} \cdot \left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right) \quad \sim F_{m,n-k}. \end{aligned}$$

# 2.2. Contraste de hipótesis. Test general

La hipótesis nula se rechazará si el valor del estadístico cae en la región de rechazo.

Es decir, si $F_{exp} > F_{m,n-k,1-\alpha}$ entonces se rechaza la hipótesis $H_0 : R\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{r}$.

# 2.2.1. Casos particulares (I): Significación individual

Si $m = 1$ y $r_i = 0 \; \forall i$.

- Hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_1 : \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

- Estadístico de contraste:

$$t_{exp} = \left| \frac{\widehat{\beta}_i}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\widehat{\beta}_i]}} \right|$$

- Conclusión: Se rechaza $H_0$ si $t_{exp} > t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}}$.

# 2.2.1.Casos particulares (II): Única restricción lineal

$m = 1$ y $r_i \neq 0\ \forall i$.

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0 : \beta_i = r_i \\ H_1 : \beta_i \neq r_i \end{cases}$
- Estadístico de contraste:

$$t_{exp} = \left| \frac{\widehat{\beta}_i - r_i}{\sqrt{\widehat{\text{var}}[\widehat{\beta}_i]}} \right|$$

- Conclusión: Se rechaza $H_0$ si $t_{exp} > t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}}$.

# 2.2.1. Casos Particulares (III): Significación global

Si $m = k - 1$ y $r_i = 0$ $i = 2, 3, \ldots, k$.

- Hipótesis: $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \exists \beta_i \neq 0 \text{ con } i = 2, 3, \ldots, k \end{cases}$
- Estadístico de contraste:

$$F_{exp} = \left( R \overrightarrow{\widehat{\beta}} \right)^t \cdot \frac{\left[ R \left( X^t X \right)^{-1} R^t \right]^{-1}}{(k-1) \cdot \widehat{\sigma}^2} \cdot \left( R \overrightarrow{\widehat{\beta}} \right)$$

- Conclusión: Se rechaza $H_0$ si $F_{exp} > F_{k-1, n-k, 1-\alpha}$.

## 2.2.1. Contraste de Significación Global

Teníamos:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \exists \beta_i \neq 0 \text{ con } i = 2, 3, \ldots, k \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} H_0 : R\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{r} \\ H_1 : \text{No se verifica } H_0 \end{cases}$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}_{(k-1)\times k} \qquad \overrightarrow{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}_{k\times 1} \qquad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(k-1)\times 1}$$

## 2.2.1. Contraste de Significación Global

Realizando la partición de las matrices:

$$X^t X = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t \\ X_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t & X_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \mathbf{1}^t X_2 \\ & \\ X_2^t \mathbf{1} & X_2^t X_2 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\widehat{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2 \end{bmatrix}$$

# 2.2.1. Contraste de Significación Global

Realizando la partición de las matrices:

$$X^tX = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t \\ X_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t & X_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \mathbf{1}^t X_2 \\ & \\ X_2^t \mathbf{1} & X_2^t X_2 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\widehat{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\dfrac{\left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)^t \cdot \left[R\left(X^tX\right)^{-1}R^t\right]^{-1} \cdot \left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)}{m}}{\dfrac{\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}}{n-k}}$$

## 2.2.1. Contraste de Significación Global

Realizando la partición de las matrices:

$$X^tX = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t \\ X_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^t & X_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \mathbf{1}^t X_2 \\ & \\ X_2^t \mathbf{1} & X_2^t X_2 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\widehat{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\dfrac{\left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)^t \cdot \left[R\left(X^tX\right)^{-1}R^t\right]^{-1} \cdot \left(R\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{r}\right)}{m}}{\dfrac{\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}}{n-k}}$$

$$\frac{\dfrac{\overrightarrow{\widehat{\beta}}_2^t \cdot \left[X_2^tX_2 - X_2^t\mathbf{1}\frac{1}{n}\mathbf{1}^tX_2\right]^{-1} \cdot \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2}{k-1}}{\dfrac{\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}}{n-k}} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{\widehat{\beta}}_2^t X_2^t A X_2 \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2}{k-1}}{\dfrac{\overrightarrow{e}^t\overrightarrow{e}}{n-k}} \sim F_{k-1,n-k}$$

donde $A = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^t$.

# 2.2.1.ANOVA

Considerando que se verifica

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{y}^t A \overrightarrow{y} & = & \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2^t X_2^t A X_2 \overrightarrow{\widehat{\beta}}_2 & + & \overrightarrow{e}^t \overrightarrow{e} \\ (SCT) & = & (SCE) & + & (SCR) \end{array}$$

El estadístico experimental se puede escribir como:

$$F_{exp} = \frac{\frac{1}{k-1} SCE}{\frac{1}{n-k} SCR}$$

# 2.2.1.ANOVA

ANOVA El **Análisis de la Varianza** es el contraste que estudia la significación global del modelo donde:

- Hipótesis $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \exists \beta_i \neq 0 \text{ con } i = 2, 3, \ldots, k \end{cases}$
- Estadístico de contraste

$$F_{exp} = \frac{\frac{1}{k-1} SCE}{\frac{1}{n-k} SCR}$$

- Conclusión Se rechaza $H_0$ si $F_{exp} > F_{k-1,n-k,1-\alpha}$.

# Tabla ANOVA

| Fuente de variación | Suma de Cuadrados | Grados de Libertad | Medias |
|---|---|---|---|
| Explicada | $SCE = \overrightarrow{\widehat{\beta}}^t X^t \overrightarrow{y} - n\overline{Y}^2$ | $k-1$ | $\frac{SCE}{k-1}$ |
| Residuos | $SCR = \overrightarrow{y}^t \overrightarrow{y} - \overrightarrow{\widehat{\beta}}^t X^t \overrightarrow{y}$ | $n-k$ | $\frac{SCR}{n-k}$ |
| Total | $SCT = \overrightarrow{y}^t \overrightarrow{y} - n\overline{Y}^2$ | $n-1$ | |

Como

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

$$F_{exp} = \frac{\frac{1}{k-1}}{\frac{1}{n-k}} \frac{SCE}{SCT(1-R^2)} = \frac{\frac{1}{k-1}}{\frac{1}{n-k}} \frac{R^2}{(1-R^2)} = \frac{n-k}{k-1} \frac{R^2}{(1-R^2)}$$

# Cota $R^2$

Se rechaza $H_0$ cuando $F_{exp} > F_{k-1,n-k,1-\alpha}$, esto es si

$$\frac{n-k}{k-1}\frac{R^2}{(1-R^2)} > F_{k-1,n-k,1-\alpha} \Rightarrow R^2 > \frac{(k-1)\cdot F_{k-1,n-k,1-\alpha}}{(n-k)+(k-1)\cdot F_{k-1,n-k,1-\alpha}}.$$

# 3.Predicción Puntual

Una vez estimado y validado el modelo $Y = \overrightarrow{\widehat{\beta}} X + u_t$:

- Si tenemos nuevos datos $\overrightarrow{x}_0^t = \begin{pmatrix} 1 & X_{20} & X_{30} & \dots & X_{k0} \end{pmatrix}$,
- Suponiendo que tenemos **permanencia estructural en la especificación del modelo** (el proceso de generación de los datos para la nueva observación $\overrightarrow{x}_0$ es el mismo que ha generado la información muestral)
- Podemos tomar como **predictor para el valor medio y para el valor individual de la variable endógena**

$$\overrightarrow{x}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \overrightarrow{\widehat{\beta}} = \widehat{\mathbf{y}}_{\mathbf{0}} = \widehat{\mathbf{E}[\mathbf{y_0} | \overrightarrow{x}_{\mathbf{0}}]}$$

(el predictor mínimo cuadrático $\widehat{y}_0$ es lineal, insesgado y óptimo)

## Nota 1

*Adviértase que, aunque se obtiene el mismo predictor para el valor individual $y_0$ como para $\widehat{E[y_0 | \overrightarrow{x}_0]}$, los errores de predicción obtenidos con ambas variables no coinciden entre sí, y por consiguiente las varianzas asociadas a dichos errores también serán distintas.*

# 3. Predicción Puntual para el Valor Individual

Considerando el valor individual $y_0 = \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta} + u_0$ se tiene que el error de predicción corresponde:

$$e_0 = y_0 - \widehat{y}_0 = \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta} + u_0 - \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\widehat{\beta}} = u_0 - \overrightarrow{x}_0^t (\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}) \sim \mathcal{N}(E[e_0], \mathrm{var}[e_0])$$

$$E[e_0] = E[u_0 - \overrightarrow{x}_0^t (\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})] = \overrightarrow{x}_0^t (E[\overrightarrow{\widehat{\beta}}] - \overrightarrow{\beta}) = 0.$$

# 3.Predicción Puntual para el Valor Individual

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}[e_0] &= \mathrm{var}[u_0 - \overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})] = \mathrm{var}(u_0) + \mathrm{var}(\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})) - 2\mathrm{cov}(u_0 \overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta} \\
&= \mathrm{var}(u_0) + \mathrm{var}(\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})) - 2\mathrm{cov}(u_0 \overrightarrow{x}_0^t(X^tX)^{-1}X^t\overrightarrow{u})) =^{1} = \\
&= \mathrm{var}(u_0) + \mathrm{var}(\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})) = \sigma^2 + E[\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})^t\overrightarrow{x}_0] = \\
&= \sigma^2 + \overrightarrow{x}_0^t E[(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})^t]\overrightarrow{x}_0 = \sigma^2 + \overrightarrow{x}_0^t\sigma^2(X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0 = \\
&=
\end{aligned}
$$

$$e_0 \sim N(0, \sigma^2(1 + \overrightarrow{x}_0^t(X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0))$$

[1] $\mathrm{cov}(u_0 \overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})) = 0$ al no existir correlación entre $u_0$ y $\overrightarrow{u}$.

[1] $\mathrm{cov}(u_0 \overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})) = 0$ al no existir correlación entre $u_0$ y $\overrightarrow{u}$.

# 3. Predicción Puntual para el Valor Esperado

$E[y_0|\overrightarrow{x}_0]$ tiene como residuo:

$$e_0^* = E[y_0|\overrightarrow{x}_0] - \widehat{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} = \overrightarrow{x}_0^t\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{x}_0^t\overrightarrow{\widehat{\beta}} = -\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta}) \sim \mathcal{N}(E[e_0^*], \mathrm{var}[e_0^*])$$

$$E[e_0^*] = E[-\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})] = \overrightarrow{x}_0^t(E[\overrightarrow{\widehat{\beta}}] - \overrightarrow{\beta}) = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[e_0^*] = \mathrm{var}[-\overrightarrow{x}_0^t(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})] = \overrightarrow{x}_0^t\mathrm{var}(\overrightarrow{\widehat{\beta}} - \overrightarrow{\beta})\overrightarrow{x}_0 = \\ = \overrightarrow{x}_0^t\mathrm{var}(\overrightarrow{\widehat{\beta}})\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{x}_0^t\sigma^2(X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0 = \\ = \sigma^2\overrightarrow{x}_0^t(X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0.\end{aligned}$$

$$e_0^* = E[y_0|\overrightarrow{x}_0] - \widehat{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} \sim N(0, \sigma^2\overrightarrow{x}_0^t(X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0)$$

# 3.Predicción por intervalo

En las distirbuciones de $e_0$ y $e_0^*$, $\sigma^2$ es desconocida. Teniendo en cuenta que

$$\frac{(n-k)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k},$$

$$\frac{\frac{\widehat{y}_0 - \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta}}{\sqrt{\sigma^2(1+\overrightarrow{x}_0^t (X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0)}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-k)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}}{n-k}}} = \frac{\widehat{y}_0 - \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta}}{\widehat{\sigma}\sqrt{1+\overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1}\overrightarrow{x}_0}} \sim t_{n-k}$$

$$\frac{\frac{\widehat{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} - \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta}}{\sqrt{\sigma^2(\overrightarrow{x}_0^t (X^tX)^{-1}\overrightarrow{x}_0)}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-k)\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}}{n-k}}} = \frac{\widehat{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} - \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\beta}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1}\overrightarrow{x}_0}} \sim t_{n-k}$$

# 3. Predicción por intervalo

- Intervalo de confianza para el valor individual $y_0$.

$$\begin{aligned} IC_{y_0} &= \widehat{y}_0 \pm t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}\sqrt{1 + \overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1} \overrightarrow{x}_0} \\ &= \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\widehat{\beta}} \pm t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}\sqrt{1 + \overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1} \overrightarrow{x}_0} \end{aligned}$$

- Intervalo de confianza para $E[y_0|\overrightarrow{x}_0]$.

$$\begin{aligned} IC_{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} &= \widehat{E[y_0|\overrightarrow{x}_0]} \pm t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}\sqrt{\overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1} \overrightarrow{x}_0} \\ &= \overrightarrow{x}_0^t \overrightarrow{\widehat{\beta}} \pm t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \widehat{\sigma}\sqrt{\overrightarrow{x}_0^t \left(X^tX\right)^{-1} \overrightarrow{x}_0} \end{aligned}$$

# Distribuciones $\chi^2$ y $t$-Student

- La distribución $\chi^2$ de Pearson con $n$ grados de libertad, $\chi^2_n$, se construye como la suma de los cuadrados de $n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad X_i \sim N(0,1), \ \forall i.$$

- La distribución $t$-Student con $n$ grados de libertad, $t_n$, se construye como el cociente entre una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$ y la raíz cuadrada de una $\chi^2$-cuadrado de $n$ grados de libertad dividida entre sus grados de libertad, siendo ambas distribuciones independientes:

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}, \quad X \sim N(0,1), \ Y \sim \chi^2_n.$$

**Propiedades:**

- $\chi^2$ NO es simétrica, $t$-Student SÍ es simétrica.
- Para $n > 30$, la distribución $t$-Student se puede aproximar a una distribución Normal.

# Distribución $F$-Snedecor

- La distribución $F$ de Snedecor con $n$ y $m$ grados de libertad, que denotaremos por $F_{n,m}$, se construye a partir del cociente de dos variables aleatorias independientes y distribuidas según chi-cuadrados con $n$ y $m$ grados de libertad, respectivamente, divididas entre sus correspondientes grados de libertad. Por tanto, la distribución $F$ de Snedecor responde a la siguiente estructura:

$$F_{n,m} = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}, X \sim \chi^2_n, \; Y \sim \chi^2_m.$$

**Propiedades:**

- La distribución $F_{n,m}$ NO es simétrica.
- $F_{m,n,1-\alpha} = \frac{1}{F_{n,m,\alpha}}$.
- $t_n^2 = F_{1,n}$.

# Notación Matricial

Se define la matriz $A$ como

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Propiedades:**

- La matriz $A$ es simétrica e idempotente.
- $A(1, \dots, 1)^t = \overrightarrow{0}$ y $A\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}$.
- $A\overrightarrow{y}$ es:

$$A\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} Y_1 - \overline{Y} \\ Y_2 - \overline{Y} \\ \vdots \\ Y_n - \overline{Y} \end{pmatrix}$$