

The background is a light gray with various abstract geometric elements. In the top left, there is a white quarter-circle and a blue semi-circle. A red line graph with three white circular markers starts from the bottom left, goes up to the first marker, down to the second, and then up to the third. There are several blue and red rectangles of different sizes scattered throughout. A blue speech bubble with three horizontal lines is located near the top right. A red arrow points downwards on the left side. The text is centered in the upper half of the image.

Temario Métodos Cuantitativos

Ismael Sallami Moreno

`ism350zsallami@correo.ugr.es`

`https://ismael-sallami.github.io/`

`https://elblogdeismael.github.io/`

Universidad de Granada

2025

Índice general

1. Algoritmo Simplex. Dualidad. Análisis de Sensibilidad. Programación Entera.	5
1.1. Ejercicios	5

Capítulo 1

Algoritmo Simplex. Dualidad. Análisis de Sensibilidad. Programación Entera.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1

Expresa los problemas siguientes en forma estándar y canónica:

a) Max. $x + y$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & -x + y = 2 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & 2x + y \geq 6 \\ & x \geq 0, y \leq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $2x + 3y + z$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 4x + 3y + z \leq 20 \\ & x + y \leq 20 \\ & x \geq 0, y \leq 0 \end{aligned}$$

c) Min. $x + y$

$$\text{s.a.} \quad -x + y \leq 2$$

Ejercicio 2

Resuelve mediante el método simplex el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & -x + y \\ \text{s.a.} \quad & -2x + y \leq 4 \\ & x + y \leq 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Resuelve el problema siguiente. Indica las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

$$\begin{aligned}\text{Opt. } & x - 2y + 3z \\ \text{s.a. } & x + 2y + z \leq 4 \\ & 2x + y - z \leq 2 \\ & x, y, z \geq 0\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Resuelve:

a) Max. $3x + 2y + z$

$$\begin{aligned}\text{s.a. } & 2x - 3y + 2z \leq 3 \\ & -x + y + z \leq 5 \\ & x, y, z \geq 0\end{aligned}$$

b) Max. $3x + y + 4z$

$$\begin{aligned}\text{s.a. } & 6x + 3y + 5z \leq 25 \\ & 3x + 4y + 5z \leq 20 \\ & x, y, z \geq 0\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Cierto fabricante produce sillas y mesas para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción, la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

La sección de montaje solo puede estar nueve horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura solo ocho horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es el doble que produciendo sillas.

¿Cuál debe ser la producción diaria de mesas y sillas que maximice el beneficio?

Ejercicio 6

Un agricultor posee una parcela de 640 m² para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de qué forma repartirá la superficie de la parcela entre las tres variedades para conseguir el máximo beneficio sabiendo que:

- Cada naranjo precisa como mínimo de 16 m², cada peral de 4 m² y cada manzano 8 m².
- Dispone de un total de 900 horas de trabajo por año (150 jornales), precisando cada naranjo de 30 horas por año, cada peral de 5 horas por año y cada manzano de 10 horas por año.

- Los beneficios unitarios son de 50, 25, 20 unidades monetarias por cada naranjo, peral y manzano respectivamente.

Ejercicio 7

La empresa A se dedica al montaje de motocicletas de 500, 250, 125 y 50 c.c. Posee una planta que está estructurada en cuatro departamentos: fabricación de los chasis, pintura, montaje y el departamento de calidad.

Las horas de mano de obra que necesita cada uno de los modelos de motocicletas en los diferentes departamentos son las siguientes:

	Chasis	Pintura	Montaje	Control calidad
500 c.c.	8	6	8	4
250 c.c.	6	3	8	2
125 c.c.	4	2	6	2
50 c.c.	2	1	4	2

La distribución de los trabajadores es la siguiente: para la fabricación de chasis se dispone de 25 trabajadores, en el departamento de pintura de 18, el de montaje de 30 y el de control de calidad de 10. Todos los trabajadores realizan una jornada laboral de 8 horas.

Si el margen de beneficio de cada uno de los modelos es de 200000, 140000, 80000 y de 40000 pesetas respectivamente, ¿cuál ha de ser la combinación óptima de motocicletas a producir para que el beneficio sea máximo?

Ejercicio 8

Resolver los siguientes problemas utilizando el método de la M-grande:

a) Max. $3x_1 + 6x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 5x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $4,5x_1 + 3x_2 + 1,5x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Min. $x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 9

Resolver utilizando el método de las dos fases:

a) Min. $20x_1 + 25x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & 20x_1 + 25x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - Mt_1 - Mt_2 - Mt_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - s_1 + t_1 = 18 \\ & x_1 + 3x_2 - s_2 + t_2 = 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_3 + t_3 = 24 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1

Paso 1. La función artificial es:

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - t_1 - t_2 - t_3$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido:

		0	0	0	0	0	0	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t_1	t_2	t_3	XB
-1	t_1	2	3	-1	0	0	1	0	0	18
-1	t_2	1	3	0	-1	0	0	1	0	12
-1	t_3	4	3	0	0	-1	0	0	1	24
	$z_j - c_j$	-7	-9	1	1	1	-1	-1	-1	-44

Debemos de continuar realizando lo mismo que lo explicado en teoría...

b) Max. $4x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned}
\text{Max.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - Mt_1 \\
\text{s.a.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 12 \\
& x_1 + x_2 - s_2 + t_1 = 4 \\
& 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 8 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, t_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Operamos de manera similar...

c) Max. $x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned}
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_3 \leq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned}
\text{Max.} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 - Mt_1 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 6 \\
& x_3 + s_1 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, t_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Fase 1

Paso 1. La función artificial es:

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0s_1 - t_1$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido:

		0	0	0	0	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	XB
-1	t_1	1	1	1	0	1	6
0	s_1	0	0	1	1	0	2
	$z_j - c_j$	-1	-1	-1	0	0	-6

Ahora debemos de coger la más negativa, pero al ser todos con valor -1, da igual cual cojamos, cogemos la primera, es decir, la de x_1 .

$$\begin{aligned}
F_p &= F_1 \\
F_{2N} &= F_2(\text{Ya tiene un } 0)
\end{aligned}$$

		0	0	0	0	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	XB
0	x_1	1	1	1	0	1	6
0	s_1	0	0	1	1	0	2
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	1	0

En este punto no podemos continuar ya que todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, por lo que debemos de pasar a la fase 2.

Fase 2

Ahora debemos de eliminar las variables artificiales y continuar con el problema original.

		1	-2	3	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	XB
1	x_1	1	1	1	0	6
0	s_1	0	0	1	1	2
	$z_j - c_j$	0	3	-2	0	6

Cogemos la fila más negativa, en este caso la de x_3 , con valor -2.

$$F_p = F_2$$

$$F1N = F1 - F_p$$

		1	-2	3	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	XB
1	x_1	1	1	0	-1	4
3	x_3	0	0	1	1	2
	$z_j - c_j$	0	3	0	2	10

Como todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

d) Max. $x_1 + x_2 + 10x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_2 + 4x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Max. } & x_1 + x_2 + 10x_3 - Mt_1 - Mt_2 \\ \text{s.a. } & x_2 + 4x_3 + t_1 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 + t_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1

Paso 1. La función artificial es:

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - t_1 - t_2$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido:

		0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	XB
-1	t_1	0	1	4	1	0	2
-1	t_2	-2	1	-6	0	1	2
	$z_j - c_j$	2	-2	2	0	0	-4

Cogemos la columna más negativa, en este caso la de x_2 .

$$F_p = F_1$$

$$F2N = F_2 - F_p$$

		0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	XB
0	x_2	0	1	4	1	0	2
-1	t_2	-2	0	-10	-1	1	0
	$z_j - c_j$	2	0	10	2	0	0

En este punto no podemos continuar ya que todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, por lo que debemos de pasar a la fase 2, pero debemos de tener en cuenta que tenemos en la base la variable t_2 que es artificial, por lo que debemos de eliminarla. *Vemos que en la 2ª Fase, debemos de sacar x_2 , pero vamos a sacar t_2 para que no nos de problemas. Previamente asignamos el coeficiente 0 a la variable t_2 .*

Fase 2

		1	1	10	
	VB	x_1	x_2	x_3	XB
1	x_2	0	1	4	2
0	t_2	-2	0	-10	0
	$z_j - c_j$	-1	0	-6	2

$$F2/10 = F_p$$

$$F1N = F1 - 4F_p$$

		1	1	10	
	VB	x_1	x_2	x_3	XB
1	x_2	-0.8	1	0	2
10	x_3	0.2	0	1	0
	$z_j - c_j$	0.2	0	0	2

Como todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

e) Max. $x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ & 3x_1 - x_2 = 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 10

Dado los siguientes problemas primales, encontrar sus problemas duales asociados:

a) Max. $6x_1 + 4x_2$
 s.a. $x_1 \leq 700$
 $3x_1 + x_2 \leq 2400$
 $x_1 + 2x_2 \leq 1600$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\ \text{s.a. } & y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 6 \\ & y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $4,5x_1 + 3x_2 + 1,5x_3$
 s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$
 $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
 $x_1 - x_2 \leq 6$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\
 \text{s.a.} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4,5 \\
 & 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 3 \\
 & -y_1 + y_2 \geq 1,5 \\
 & y_1, y_3 \geq 0 \quad y_2 \rightarrow \text{libre}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Min.} \quad & 6x_1 + 4x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 \leq 700 \\
 & 3x_1 + x_2 \geq 2400 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 1600 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\
 \text{s.a.} \quad & y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6 \\
 & y_2 + 2y_3 \leq 4 \\
 & y_2 \geq 0, y_1, y_3 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) Max.} \quad & 4,5x_1 + 3x_2 + 1,5x_3 \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8 \\
 & x_1 - x_2 \leq 6 \\
 & x_1, x_3 \geq 0, \quad x_2 \text{ sin restricciones}
 \end{aligned}$$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\
 \text{s.a.} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4,5 \\
 & 2y_1 - y_2 - y_3 = 3 \\
 & -y_1 + y_2 \geq 1,5 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

e) Min. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
 $3x_1 + x_2 \geq 2400$
 $x_1 + 2x_2 = 1600$
 $x_1 \geq 0, \quad x_2$ sin restricciones

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad w &= 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\ \text{s.a.} \quad y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq 6 \\ y_2 + 2y_3 &= 4 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \quad y_3 &\rightarrow \text{libre} \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Ismael Sallami Moreno, **Estudiante del Doble Grado en Ingeniería Informática + ADE**, Universidad de Granada, 2025.