ECONOMETRÍA. GADE

Prácticas

Tema 3

Ejercicios resueltos

1. Para los datos del ejercicio de la curva de Philips se pide:

   a) Estimar la varianza de las perturbaciones y la matriz de varianzas covarianzas de los estimadores:

   $$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 18,32 \\ 18,32 & 58,65 \end{pmatrix}; X'y = \begin{pmatrix} 184,6 \\ 281,08 \end{pmatrix}$$

   $$y'y = 3821,58$$

   $$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 22,629 \\ -2,276 \end{pmatrix}$$

   Resolución:
   Anteriormente se ha calculado el coeficiente de determinación, se sabe que $SCE = 129,98$ y $SCT = 413,86$ por lo que se puede despejar el valor de $SCR = 413,86 - 129,98 = 283,88$.
   Puesto que $n = 10$ y $k = 2$, se obtiene:

   $$\hat{\sigma}^2 = \frac{283,88}{8} = 35,485$$

   Y entonces se calcula la matriz de varianzas-covarianzas como:

   $$v\hat{a}r(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = 35,485 \begin{pmatrix} 10 & 18,32 \\ 18,32 & 58,65 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8,29 & -2,59 \\ -2,59 & 1,414 \end{pmatrix}$$

   b) Contrastar la significación individual para la constante y la variable explicativa.
   Resolución:
   Para estimar la significación individual de la constante se plantea las siguientes hipótesis:

   $$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = 0 \\ H_1 &: \beta_1 \neq 0 \end{aligned}$$

   Siendo el estadístico experimental:

   $$t_{exp} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{v\hat{a}r(\hat{\beta}_1)}} = \frac{22,63}{\sqrt{8,29}} = 7,85$$

Puesto que $t_{exp} > t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0{,}975} = 2{,}303$, se rechaza la H_0 y, por tanto se dice que la constante es significativa. Para estimar la significación individual de la variable inflación (X) se plantea las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 = 0 \\ H_1 &: \beta_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Siendo el estadístico experimental:

$$t_{exp} = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{v\hat{a}r(\hat{\beta}_2)}} = \frac{-2,27}{\sqrt{1,414}} = -1,913$$

Puesto que $|t_{exp}| < t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} = t_8(0{,}975) = 2{,}303$, no se puede rechazar la H_0 y, por tanto se dice que la variable inflación no es significativa.

c) Obtener la tabla ANOVA y contrastar la significación global del modelo.
Resolución:
A partir de los datos del apartado anterior se puede elaborar la tabla ANOVA:

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Medias
Explicada	$SCE = 129,98$	$2-1$	$129,98$
Residuos	$SCR = 283,88$	$10-2$	$35,485$
Total	$SCT = 413,86$	$10-1$	

A partir de la tabla se obtiene el estadístico experimental:

$$F_{exp} = \frac{129,98/(2-1)}{(283,88)/(10-2)} = 3,66 < F_{1,8,0,95} = 5,32$$

No se puede rechazar la H_0, por lo que el modelo globalmente no es válido.
Tengáse en cuenta que, en este caso, puesto que el modelo sólo cuenta con una variable explicativa, la hipótesis nula del contraste de significación global coincide con la hipótesis nula del contraste de significación individual de dicha variable, es decir:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0.$$

d) Obtener el intervalo de confianza para los estimadores y para la varianza de la perturbación en el ejemplo de la Curva de Philips.
Resolución:
En el caso del intervalo de confianza para los estimadores, se obtiene: Para $n = 10$, $k = 2$ y $\alpha = 0,1$ se obtiene:

$$\beta_1 \in (22,63 \pm 1,860 \cdot \sqrt{8,29}) = (17,27; 27,98)$$

$$\beta_2 \in (-2,276 \pm 1,860 \cdot \sqrt{1,414}) = (-4{,}4877; -0{,}06424)$$

Para $n = 10$, $k = 2$ y $\alpha = 0,05$ se obtiene:

$$\beta_1 \in (22,63 \pm 2,306 \cdot \sqrt{8,29}) = (15,99; 29,27)$$

$$\beta_2 \in (-2,276 \pm 2,306 \cdot \sqrt{1,414}) = (-5,018; 0,4663)$$

Para $n = 10$, $k = 2$ y $\alpha = 0,01$ se obtiene:

$$\beta_1 \in (22,63 \pm 3,355 \cdot \sqrt{8,29}) = (12,97; 32,289)$$

$$\beta_2 \in (-2,276 \pm 3,355 \cdot \sqrt{1,414}) = (-6,2654; 1,7134)$$

En el caso del intervalo de confianza para la varianza de la perturbación, se obtiene al 90, 95 y 99 % respectivamente:

$$\frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(15,507)}; \frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(2,733)} = (18,30; 103,87)$$

$$\frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(17,535)}; \frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(2,180)} = (16,189; 130,22)$$

$$\frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(21,995)}; \frac{(10-2)35,485}{\chi^2_8(1,344)} = (12,906; 211,22)$$

2. Se incluyen en la curva de Philips las variables Renta nacional disponible neta a precios de mercado por habitante (X_2) y renta nacional disponible neta (X_3), obteniendo la siguiente estimación:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{y} = & 120,97 & -0,77X_1 & -0,0172X_2 & +0,0002567X_3 \\ & (15,54) & (0,300) & (0,0016) & (3,82 \cdot 10^{-5}) \end{array}$$

Se pide:

a) Contrastar la significación individual de cada variable.
RESOLUCIÓN:
Para estimar la significación individual de cada variable se plantea las siguientes hipótesis:

$$\begin{array}{ccc} H_0 & : & \beta_i = 0 \\ H_1 & : & \beta_i \neq 0 \end{array}$$

Siendo el estadístico experimental:

$$t_{exp} = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{v\hat{a}r(\hat{\beta}_i)}}$$

Por tanto, para β_1:

$$t_{exp} = \frac{120,97}{15,54} = 7,78$$

Para β_2:

$$t_{exp} = \frac{-0,77}{0,30} = -2,564$$

Para β_3:

$$t_{exp} = \frac{-0,0172}{0,0016} = -10,759$$

Para β_4:

$$t_{exp} = \frac{0,00025}{3,82 \cdot 10^{-5}} = 6,71$$

Puesto que en todos los casos $t_{exp} > t_{n-k,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6;0,975} = 2,4469$, se rechaza la H_0 y, por tanto se puede decir que todas las variables son significativas.

b) Sabiendo que R^2 es igual a 0,9735 contrastar la significación global del modelo.
RESOLUCIÓN:
A partir del coeficiente de determinación, se puede realizar el contraste de significación global a partir de la siguiente expresión:

$$F_{exp} = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} = \frac{\frac{0,9735}{4-1}}{\frac{1-0,9735}{10-4}} = 73,49$$

Puesto que $F_{exp} > F_{4-1,10-4}(1-0,05) = 4,75$, se rechaza la hipótesis nula y por tanto se puede decir que el modelo es globalmente significativo.

Nota: Ejercicio resuelto en "Econometría básica para la economía y la empresa", Ed. Fleming.

3. La empresa Miranda quiere saber si la inversión en publicidad expresada en miles de euros (Y) está relacionada con el número de nuevos productos (X_1) y el número de comerciales (X_2), y para ello recoge la siguiente información de los ultimos seis años:

Y	X_1	X_2
51	20	8
36	20	10
32	15	6
56	25	10
45	20	12
48	30	10

Sabiendo que:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 17,25 \\ 1,05 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Estimar el modelo.
RESOLUCIÓN:
A partir de los datos anteriores, se crea la siguiente tabla:

Y	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	$X_1 \cdot X_2$	$X_1 \cdot Y$	$X_2 \cdot Y$	Y^2
51	20	8	400	64	160	1020	408	2601
36	20	10	400	100	200	720	360	1296
32	15	6	225	36	90	480	192	1024
56	25	10	625	100	250	1400	560	3136
45	20	12	400	144	240	900	540	2025
48	30	10	900	100	300	1440	480	2304
268	130	56	2950	544	1240	5960	2540	12386

A partir de dicha tabla se obtiene:

$$X'X = \begin{pmatrix} 6 & 130 & 56 \\ 130 & 2950 & 1240 \\ 56 & 1240 & 544 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 268 \\ 5960 \\ 2540 \end{pmatrix}$$

Y aplicando la expresión de MCO, se obtiene:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 17,25 \\ 1,05 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

b) Obtener un intervalo de predicción para el valor medio de inversión en publicidad suponiendo que el proximo año se saquen 35 nuevos productos y la empresa tenga 10 comerciales.
RESOLUCIÓN:
En primer lugar, se realiza la predicción puntual:

$$p_0 = x_0^t \cdot \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 35 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17,25 \\ 1,05 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 59$$

A continuación se calcula:

$$x_0^t (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 35 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5,25 & -0,1 & -0,3125 \\ -0,1 & 0,01 & -0,0125 \\ -0,3125 & -0,0125 & 0,0625 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1,375 & 0,125 & -0,125 \end{pmatrix}$$

$$x_0^t (X'X)^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} -1,375 & 0,125 & -0,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} = 1,75$$

Se calcula la SCR como:

$$SCR = 12386 - \begin{pmatrix} 17,25 & 1,05 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 268 \\ 5960 \\ 2540 \end{pmatrix} = 12386 - 12151 = 235$$

Por tanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n-k} = \frac{235}{6-3} = 78,33$$

Finalmente, el intervalo sería:

$$59 \pm 3,182\sqrt{78,33}\sqrt{1,75} = (21,74; 96,25)$$

Nota: Ejercicio resuelto en [1].

4. Se tiene información sobre ocho empresas aseguradoras sobre el volumen de polizas (Y), el gasto en publicidad en televisión (X_1) y el gasto en publicidad en internet (X_2) todo expresado en decenas de miles de euros, tal que:

$$X'X = \begin{pmatrix} 8 & 139 & 183 \\ 139 & 2533 & 3285 \\ 183 & 3285 & 4303 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 319 \\ 5894 \\ 7636 \end{pmatrix}$$

$$y`y = 13907$$

Se pide:

a) Contrastar si es posible que el efecto del gasto en publicidad en televisión sea tres veces el efecto del gasto en publicidad en internet.
RESOLUCIÓN:
Si se plantea el modelo como $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$, la hipótesis a contrastar se define como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_2 - 3 \cdot \beta_3 = 0 \\ H_1 &: \beta_2 - 3 \cdot \beta_3 \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces se define la siguiente matriz de restricciones:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y la siguiente matriz de resultados $r = 0$.
A continuación se obtiene:

$$F_{exp} = \left(R\widehat{\beta} - r\right)^t \cdot \frac{\left[R\left(X^tX\right)^{-1}R^t\right]^{-1}}{q \cdot \widehat{\sigma}^2} \cdot \left(R\widehat{\beta} - r\right)$$

Se observa que es necesario estimar previamente el modelo aplicando la expresión de MCO:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 8 & 139 & 183 \\ 139 & 2533 & 3285 \\ 183 & 3285 & 4303 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 319 \\ 5894 \\ 7636 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19,93 \\ 2 \\ 1,09 \end{pmatrix}$$

A continuación, se realizan los siguientes calculos:

$$R\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19,93 \\ 2 \\ 1,09 \end{pmatrix} = -1,27$$

$$R(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,113 & 0,162 & -0,171 \end{pmatrix}$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{pmatrix} 1,113 & 0,162 & -0,171 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0,6772$$

Por último, se calcula $\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n-k}$:

$$SCR = 13907 - \begin{pmatrix} -19,93 & 2 & 1,09 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 319 \\ 5894 \\ 7636 \end{pmatrix} = 112,41$$

Y por tanto:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{112,41}{8-3} = 22,48$$

A partir de todos estos calculos, se obtiene el siguiente estadístico experimental:

$$F_{exp} = (-1,27)\frac{(0,6772)^{-1}}{1 \cdot 22,48}(-1,27) = 0,10617$$

Dado que $F_{exp} < F_{1,8-3}(1-0,05) = 6,60$ no se puede rechazar la hipótesis nula y por tanto, se puede decir que el efecto del gasto en publicidad en televisión puede ser el triple que el efecto de gasto en publicidad en internet.

b) Suponiendo que la hipótesis anterior es cierta, obtener los estimadores minimos cuadrados restringidos.

Resolución:

Se aplica la formula de MCO restringidos tal que:

$$\widehat{\beta}_R = \begin{pmatrix} -19,93 \\ 2 \\ 1,09 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,113 \\ 0,162 \\ -0,171 \end{pmatrix} \cdot (0,677)^{-1} \cdot (-1,2714)$$

$$= \begin{pmatrix} -17,85 \\ 2,3088 \\ 0,7696 \end{pmatrix}$$

Nota: Ejercicio resuelto en [1].

Referencias

[1] García, C.B., Sánchez, J.M. y Salmerón, R. (2017) Econometría básica para la economía y la empresa. Ed. Fleming.

[2] García, J., Jiménez, J.F. y Cerrillo, J.R. Econometría práctica. Edo. Libreria Universitaria de Almería.

[3] Johnston, J. (1984) Métodos de econometría. Ed. Vicens Vives.

[4] Pena, B., Estavillo, J., Galindo, E., Leceta, M. y Zamora, M. (1999). Cien ejercicios de econometría. Ed. Pirámide.

[5] Sánchez, C., López, M.M. y García, T. (2015) Econometría. Ed. Fleming.

[6] Matilla García, m., Pérez Pascual, Pedro y Sanz Carnero, B. (2013) Econometría y predicción. Mc Graw Hill.