

## GII-ADE-M. Relación de problemas. Tema 1. 20/09/2024

1. Considerar el siguiente fragmento de programa para 2 procesos P1 y P2: Los dos procesos pueden ejecutarse a cualquier velocidad. ¿Cuáles son los posibles valores resultantes para la variable x? Suponer que x debe ser cargada en un registro para incrementarse y que cada proceso usa un registro diferente para realizar el incremento.

```
{ variables compartidas }
var x : integer := 0 ;
Process P1;
  var i: integer;
begin
  for i:= 1 to 2 do begin
    x:= x + 1;
  end
end
```

```
Process P2;
  var j: integer;
begin
  for i:= 1 to 2 do begin
    x:= x + 1;
  end
end
```

2. ¿Cómo se podría hacer la copia del fichero f en otro g, de forma concurrente, utilizando la instrucción concurrente *cobegin-coend*? Para ello, suponer que:
  - Los archivos son una secuencia de ítems de un tipo arbitrario T, y se encuentran ya abiertos para lectura (f) y escritura (g). Para leer un ítem de f se usa la llamada a función leer(f) y para saber si se han leído todos los ítems de f, se puede usar la llamada fin(f) que devuelve verdadero si ha habido al menos un intento de leer cuando ya no quedan datos. Para escribir un dato x en g se puede usar la llamada a procedimiento escribir(g,x).
  - El orden de los ítems escritos en g debe coincidir con el de f
  - Dos accesos a dos archivos distintos pueden solaparse en el tiempo
3. Construir, utilizando las instrucciones concurrentes *cobegin-coend* y *fork-join*, programas concurrentes que se correspondan con los grafos de precedencia que se muestran a continuación:

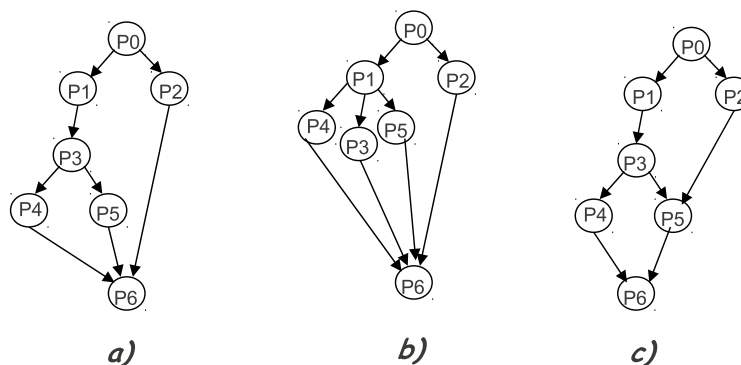


Figura 1: Grafos de sincronización con forks y joins.

4. Dados los siguientes fragmentos de programas concurrentes, obtener sus grafos de precedencia asociados:

```
begin
  P0 ;
  cobegin
    P1 ;
    P2 ;
    cobegin
      P3 ; P4 ; P5 ; P6 ;
    coend
    P7 ;
  coend
P8;
end
```

```
begin
  P0 ;
  cobegin
    begin
      cobegin
        P1; P2;
      coend
      P5;
    end;
    begin
      cobegin
        P3; P4;
      coend;
      P6;
    end;
  coend;
  P7;
end;
```

5. Suponer un sistema de tiempo real que dispone de un captador de impulsos conectado a un contador de energía eléctrica. La función del sistema consiste en contar el número de impulsos producidos en 1 hora (cada Kwh consumido se cuenta como un impulso) e imprimir este número en un dispositivo de salida. Para ello se dispone de un programa concurrente con 2 procesos: un proceso acumulador (lleva la cuenta de los impulsos recibidos) y un proceso escritor (escribe en la impresora). En la variable común a los 2 procesos *n* se lleva la cuenta de los impulsos. El proceso acumulador puede invocar un procedimiento *Espera\_impulso* para esperar a que llegue un impulso, y el proceso escritor puede llamar a *Espera\_fin\_hora* para esperar a que termine una hora. El código de los procesos de este programa podría ser el siguiente:

```
{ variable compartida: }
var n : integer; { contabiliza impulsos }
begin
  while true do begin
    Espera_impulso();
    < n := n+1 > ; { (1) }
  end
end
process Escritor ;
begin
  while true do begin
    Espera_fin_hora();
    write( n ) ; { (2) }
    < n := 0 > ; { (3) }
  end
end
```

En el programa se usan sentencias de acceso a la variable *n* encerradas entre los símbolos *<* y *>*. Esto significa que cada una de esas sentencias se ejecuta en exclusión mutua entre los dos

procesos, es decir, esas sentencias se ejecutan de principio a fin sin entremezclarse entre ellas. Supongamos que en un instante dado el acumulador está esperando un impulso, el escritor está esperando el fin de una hora, y la variable  $n$  vale  $k$ . Después se produce de forma simultánea un nuevo impulso y el fin del periodo de una hora.

Obtener las posibles secuencias de entrelazamiento de las instrucciones (1),(2), y (3) a partir de dicho instante, e indicar cuales de ellas son correctas y cuales incorrectas (las incorrectas son aquellas en las cuales el impulso no se contabiliza).

6. Supongamos un programa concurrente en el cual hay, en memoria compartida dos vectores  $a$  y  $b$  de enteros y con tamaño par, declarados como sigue:

```
var a,b : array[1..2*n] of integer ; { n es una constante predefinida }
```

Queremos escribir un programa para obtener en  $b$  una copia ordenada del contenido de  $a$  (nos da igual el estado en que queda  $a$  después de obtener  $b$ ). Para ello disponemos de la función `Sort` que ordena un tramo de  $a$  (entre las entradas  $s$  y  $t$ , ambas incluidas). También disponemos la función `Copiar`, que copia un tramo de  $a$  (desde  $s$  hasta  $t$ ) en  $b$  (a partir de  $o$ ).

```
procedure Sort( s,t : integer );
  var i, j : integer ;
  begin
    for i := s to t do
      for j:= s+1 to t do
        if a[i] < a[j] then
          swap( a[i], b[j] ) ;
        end
      end
    end
  end
procedure Copiar( o,s,t : integer );
  var d : integer ;
  begin
    for d := 0 to t-s do
      b[o+d] := a[s+d] ;
    end
  end
```

El programa para ordenar se puede implementar de dos formas:

- Ordenar todo el vector  $a$ , de forma secuencial con la función `Sort`, y después copiar cada entrada de  $a$  en  $b$ , con la función `Copiar`
- Ordenar las dos mitades de  $a$  de forma concurrente, y después mezclar dichas dos mitades en un segundo vector  $b$  (para mezclar usamos un procedimiento `Merge`).

A continuación vemos el código de ambas versiones:

```
procedure Secuencial() ;
  var i : integer ;
  begin
    Sort( 1, 2*n ); { ordena a }
    Copiar( 1, 2*n ); { copia a en b }
  end
procedure Concurrente() ;
  begin
    cobegin
      Sort( 1, n );
      Sort( n+1, 2*n );
    coend
    Merge( 1, n+1, 2*n );
  end
```

El código de Merge se encarga de ir leyendo las dos mitades de a, en cada paso, seleccionar el menor elemento de los dos siguientes por leer (uno en cada mitad), y escribir dicho menor elemento en la siguiente mitad del vector mezclado b. El código es el siguiente:

```

procedure Merge( inferior, medio, superior: integer ) ;
  { siguiente posicion a escribir en b }
  var escribir : integer := 1 ;
  { siguiente pos. a leer en primera mitad de a }
  var leer1 : integer := inferior ;
  { siguiente pos. a leer en segunda mitad de a }
  var leer2 : integer := medio ;
begin
  { mientras no haya terminado con alguna mitad }
  while leer1 < medio and leer2 <= superior do begin
    if a[leer1] < a[leer2] then begin { minimo en la primera mitad }
      b[escribir] := a[leer1] ;
      leer1 := leer1 + 1 ;
    end else begin { minimo en la segunda mitad }
      b[escribir] := a[leer2] ;
      leer2 := leer2 + 1 ;
    end
    escribir := escribir+1 ;
  end
  { se ha terminado de copiar una de las mitades,
  copiar lo que quede de la otra }
  if leer2 > superior then
    { copiar primera } Copiar( escribir, leer1, medio-1 );
  else Copiar( escribir, leer2, superior ); { copiar segunda }
end

```

Llamaremos  $T_s(k)$  al tiempo que tarda el procedimiento Sort cuando actúa sobre un segmento del vector con k entradas. Suponemos que el tiempo que (en media) tarda cada iteración del bucle interno que hay en Sort es la unidad (por definición). Es evidente que ese bucle tiene  $\frac{k(k-1)}{2}$  iteraciones, luego:

$$T_s(k) = \frac{k(k-1)}{2} = 1/2k^2 - 1/2k$$

El tiempo que tarda la versión secuencial sobre 2n elementos (llamaremos S a dicho tiempo) será evidentemente  $T_s(2n)$ , luego:

$$S = T_s(n) = 1/2(2n)^2 - 1/2(2n) = 2n^2 - n$$

con estas definiciones, calcula el tiempo que tardará la versión paralela, en dos casos:

(a) Las dos instancias concurrentes de Sort se ejecutan en el mismo procesador (llamamos P1 al tiempo que tarda).

(b) Cada instancia de Sort se ejecuta en un procesador distinto (lo llamamos P2)

Escribe una comparación cualitativa de los tres tiempos (S,P1 y P2). Para esto, hay que suponer que cuando el procedimiento Merge actúa sobre un vector con p entradas, tarda p unidades de tiempo en ello, lo cual es razonable teniendo en cuenta que en esas circunstancias Merge copia p valores desde a hacia b. Si llamamos a este tiempo  $T_m(p)$ , podemos escribir  $T_m(p) = p$

7. Supongamos que tenemos un programa con tres matrices (a,b y c) de valores flotantes declaradas como variables globales. La multiplicación secuencial de a y b (almacenando el resultado en c) se puede hacer mediante un procedimiento MultiplicacionSec declarado como aparece aquí:

```
var a, b, c : array[1..3,1..3] of real ;
procedure MultiplicacionSec()
  var i,j,k : integer ;
  begin
    for i := 1 to 3 do
      for j := 1 to 3 do begin
        c[i,j] := 0 ;
        for k := 1 to 3 do
          c[i,j] := c[i,j] + a[i,k]*b[k,j] ;
        end
      end
    end
  end
```

Escribir un programa con el mismo fin, pero que use 3 procesos concurrentes. Suponer que los elementos de las matrices a y b se pueden leer simultáneamente, así como que elementos distintos de c pueden escribirse simultáneamente.

8. Un trozo de programa ejecuta nueve rutinas o actividades (P1, P2, . . . , P9), repetidas veces, de forma concurrente con cobegin coend (ver trozo de código), pero que requieren sincronizarse según determinado grafo (ver la figura):

```
while true do
  cobegin
    P1 ; P2 ; P3 ;
    P4 ; P5 ; P6 ;
    P7 ; P8 ; P9 ;
  coend
```

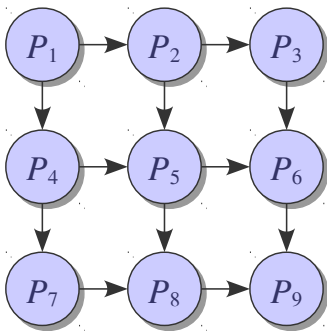


Figura 2: Grafo de sincronización de actividades.

Supón que queremos realizar la sincronización indicada en el grafo, usando para ello llamadas desde cada rutina a dos procedimientos (EsperarPor y Acabar). Se dan los siguientes hechos:

- El procedimiento `EsperarPor(i)` es llamado por una rutina cualquiera (la número k) para esperar a que termine la rutina número i, usando espera ocupada. Por tanto, se usa por la rutina k al inicio para esperar la terminación de las otras rutinas que corresponda según el grafo.
- El procedimiento `Acabar(i)` es llamado por la rutina número i, al final de la misma, para indicar que dicha rutina ya ha finalizado.

- Ambos procedimientos pueden acceder a variables globales en memoria compartida.
- Las rutinas se sincronizan única y exclusivamente mediante llamadas a estos procedimientos, siendo la implementación de los mismos completamente transparente para las rutinas.

Escribe una implementación de `EsperarPor` y `Acabar` (junto con la declaración e inicialización de las variables compartidas necesarias) que cumpla con los requisitos dados.

9. En el problema 8 los procesos  $P_1, P_2, \dots, P_9$  se ponen en marcha usando `cobegin/coend`. Escribe un programa equivalente, que ponga en marcha todos los procesos, pero que use declaración estática de procesos, usando un vector de procesos  $P$ , con índices desde 1 hasta 9, ambos incluidos. El proceso  $P[n]$  contiene una secuencia de instrucciones desconocida, que llamamos  $S_n$ , y además debe incluir las llamadas necesarias a `Acabar` y `EsperarPor` (con la misma implementación que antes) para lograr la sincronización adecuada. Se incluye aquí una plantilla:

```
Process P[ n : 1..9 ]
begin
  ..... { esperar (si es necesario) a los procesos que corresponda }
  Sn ; { sentencias específicas de este proceso (desconocidas) }
  ..... { senalar que hemos terminado }
end
```

10. Para los siguientes fragmentos de código, obtener la *poscondición* adecuada para convertirlo en un *triple* demostrable con la Lógica de Programas:

- $\{i < 10\} i = 2 * i + 1 \{ \}$
- $\{i > 0\} i = i - 1; \{ \}$
- $\{i > j\} i = i + 1; j = j + 1 \{ \}$
- $\{falso\} a = a + 7; \{ \}$
- $\{verdad\} i = 3; j = 2 * i \{ \}$
- $\{verdad\} c = a + b; c = c/2 \{ \}$

11. ¿Cuáles de los siguientes triples no son demostrables con la Lógica de Programas?

- $\{i > 0\} i = i - 1; \{i \geq 0\}$
- $\{x \geq 7\} x = x + 3; \{x \geq 9\}$
- $\{i < 9\} i = 2 * i + 1; \{i \leq 20\}$
- $\{a > 0\} a = a - 7; \{a > -6\}$

12. Si el triple  $\{P\} C \{Q\}$  es demostrable, indicar por qué los siguientes triples también lo son (o no se pueden demostrar y por qué):

- $\{P\} C \{Q \vee P\}$
- $\{P \wedge D\} C \{Q\}$
- $\{P \vee D\} C \{Q\}$
- $\{P\} C \{Q \vee D\}$
- $\{P\} C \{Q \wedge P\}$

13. Si el triple  $\{P\} C \{Q\}$  es demostrable, ¿cuál de los siguientes triples no se puede demostrar?

- (a)  $\{P \wedge D\} C \{Q\}$
- (b)  $\{P \vee D\} C \{Q\}$
- (c)  $\{P\} C \{Q \vee D\}$
- (d)  $\{P\} C \{Q \vee P\}$

14. Dado el programa `int x = 5, y = 2; cobegin < x = x + y >; < y = x * y > coend;`, obtener:

- (a) Valores finales de x e y
- (b) Valores finales de x e y si quitamos los símbolos  $< >$  de instrucción atómica.

15. Comprobar si la demostración del triple  $\{x \geq 2\} < x = x - 2 >; \{x \geq 0\}$  interfiere con los teoremas siguientes:

- (a)  $\{x \geq 0\} < x = x + 3 > \{x \geq 3\}$
- (b)  $\{x \geq 0\} < x = x + 3 > \{x \geq 0\}$
- (c)  $\{x \geq 7\} < x = x + 3 > \{x \geq 10\}$
- (d)  $\{y \geq 0\} < y = y + 3 > \{y \geq 3\}$
- (e)  $\{x \text{ es impar}\} < y = x + 1 > \{y \text{ es par}\}$

16. Dado el siguiente triple:

```

      {x==0}
      cobegin
<x=x+a> || <x=x+b> || <x=x+c>
      coend
      {x==a+b+c}

```

Demostrarlo utilizando la lógica de asertos para cada una de las tres instrucciones atómicas y después que se llega a la poscondición final  $x==a+b+c$  utilizando para ello la regla de la *composición concurrente* de instrucciones atómicas.

17. El siguiente triple:

$$\begin{aligned}
 & \{x == 0 \wedge y == 0 \wedge z == 0\} \\
 & < x = z + a > \parallel < y = x + b > \\
 & \{x == a\} \wedge \{y == b \vee y == a + b\} \wedge \{z == 0\}
 \end{aligned}$$

- (a) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que  $a==0$
- (b) El triple anterior es demostrable para cualquier valor de las variables a o b
- (c) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que  $b == 0 \vee a == 0$
- (d) Es indemostrable salvo que se cumpla siempre que  $a == 0 \wedge b == 0$

18. Suponer que  $\{suma > 1\} suma = suma + 4 \{suma > 5\}$  es demostrable, entonces: ¿cuál de los siguientes triples es también demostrable? (indicar por qué)

- (a)  $\{suma > 2\} suma = suma + 4 \{suma > 5\}$
- (b)  $\{suma \geq 1\} suma = suma + 4 \{suma > 5\}$
- (c)  $\{suma > 0\} suma = suma + 4 \{suma > 5\}$
- (d)  $\{suma > 1\} suma = suma + 4 \{suma > 6\}$

19. Suponer que  $\{x < y\} C_1 \{u < v\}$  es demostrable, entonces: ¿cuál/cuáles de los siguientes triples es/son también demostrable? (indicar por qué)

- (a)  $\{x \leq y\} C_1 \{u < v\}$
- (b)  $\{x \leq y - 2\} C_1 \{u < v\}$
- (c)  $\{x \leq y\} C_1 \{u \leq v\}$
- (d)  $\{x < y\} C_1 \{u < v - 2\}$

20. Seleccionar el valor correcto de las 2 variables (x e y) después de ejecutarse el siguiente programa concurrente:

```
int x=5, y =2;
cobegin <x= x+y>; <y= x*y>; <x= x-y>; coend;
```

- (a)  $x==7$  e  $y==14$
- (b)  $x==5$  e  $x==10$
- (c)  $x== -7$  e  $y==14$
- (d)  $x== -3$  e  $y==10$

21. El siguiente código concurrente no puede ser demostrado directamente con la LP. Elegir la respuesta que explica correctamente la razón de que ocurra esto.

```
{x==0} cobegin <x=x+a>; <x=x+a> coend; {x==2*a}
(a es un valor entero positivo)
```

- (a) Porque la poscondición que se propone  $\{x==2*a\}$  es falsa
- (b) Porque falta incluir la posibilidad de que el valor final de x sea también  $\{x==a\}$
- (c) Porque al aplicar directamente la regla de inferencia de la *composición concurrente* utilizo unas condiciones (pre y post- condiciones) demasiado débiles
- (d) Porque tengo que incluir en los asertos el valor del contador de programa de cada procesador

22. Estudiar cuáles son los valores finales de las variables  $x$  e  $y$  en el siguiente programa secuencial. Insertar los asertos adecuados entre llaves, antes y después de cada sentencia, para poder obtener una traza de demostración del programa, que incluya en su último aserto los valores finales de las variables.

- (a)  $int\ x = C1$
- (b)  $int\ y = C2$
- (c)  $x = x + y;$
- (d)  $y = x * y;$
- (e)  $x = x - y;$



23. Demostrar que el siguiente triple es cierto:

$$\begin{array}{c} \{x == 0\} \\ cobegin \\ < x = x + 1 > || < x = x + 2 > || < x = x + 4 > \\ coend \\ \{x == 7\} \end{array}$$

24. Dada la siguiente construcción de composición concurrente P:

$$\begin{array}{c} cobegin \\ < x = x - 1 >; < x = x + 1 >; || < y = y + 1 >; < y = y - 1 >; \\ coend; \end{array}$$

demostrar que se cumple la invariancia de  $\{x==y\}$ , es decir, que  $\{x==y\} P \{x==y\}$ ; es un triple cierto.

25. Usando la regla de la conjunción, demostrar que  $\{i > 2\} i := 2 * i \{i > 4\}$

26. Se dan los siguientes triples de Hoare:

$$\begin{array}{c} \{j > 1\} i = i + 2; j = j + 3; \{j > 4\} \\ \{i > 2\} i = i + 2; j = j + 3; \{i > 4\} \end{array}$$

Demostrar que estos triples implican que  $\{j > 1, i > 2\} i = i + 2; j = j + 3; \{j > 4, i > 4\}$ . ¿Qué regla se debe utilizar para la demostración?

27. Sean A y B los valores iniciales de a y b respectivamente. Escribir un fragmento de código que tenga  $\{a=A+B, b=A-B\}$  como poscondición y demostrar que el código es correcto.

28. Demostrar que la siguiente sentencia tiene la poscondición  $\{x \geq 0, x^2 = a^2\}$ .  
 $if\ a > 0\ then\ x := a\ else\ x := -a$

$$\{V\} if\ a > 0\ then\ x := a\ else\ x := -a\ \{x \geq 0, x^2 = a^2\}$$

29. El siguiente fragmento de código tiene  $\{P\} \equiv \{sum = j * (j-1)/2\}$  como precondition y poscondición. Demostrar que es verdadero:  $\{P\} sum := sum + j; j := j + 1; \{P\}$

30. Demostrar que  $\{i * j + 2 * j + 3 * i = 0\} j = j + 3; i = i + 2 \{i * j = 6\}$

31. ¿Por qué en la regla del **while B do**, la condición B debe ser verdadera al comienzo del bucle?

32. Considerar una función con dos argumentos que se usa en un programa. Explicar por qué el uso de alias puede ser un problema en este caso.

33. Demostrar la corrección parcial del siguiente fragmento de programa:

$$\begin{array}{c} sum := 0; \quad j := 1; \\ while(j \neq c) do \\ \quad begin \\ \quad \quad sum := sum + j \quad ; \quad j := j + 1; \\ \quad \quad end \\ \{sum = c * (c - 1) / 2\} \end{array}$$

34. Demostrar la corrección del siguiente triple:  $\{a[i] \geq 0\} a[i] = a[i] + a[j] \{a[i] \geq a[j]\}$

35. Verificar el siguiente segmento de programa:  $\{n \geq 0\}$

```

    i := 1;
    while i ≤ n do
        begin
            a[i] := b[i];
            i := i + 1;
        end
    { $\bigwedge_{i=1}^n (a[i] = b[i])$ }

```

Con el invariante:  $\{\bigwedge_{j=1}^{i-1} a[j] = b[j]\}$

36. El siguiente fragmento de programa calcula  $\sum_{i=1}^n i!$ . Demostrar que es correcto con el invariante :  
 $sum = \sum_{j=1}^{i-1} j! \wedge f = i!$

```

    i := 1; sum := 0; f := 1;
    while i ≠ n + 1 do
        begin
            sum := sum + f;
            i := i + 1;
            f := f * i;
        end

```

37. Hallar la precondition  $\{P\}$  que hace que el siguiente triple sea correcto:  $\{P\} a[i] := 2 * b \{j \leq i, k < i, a[i] + a[j - 1] + a[k] > b\}$

38. Demostrar que para  $n > 0$  el siguiente fragmento de programa termina.

```

    i := 1; f := 1;
    while i ≠ n do
        begin
            i := i + 1;
            f := f * i;
        end

```

39. Hallar la precondition de la terna:  $\{P\} a[i] := b \{a[j] = 2 * a[i]\}$

40. Para cada uno de los siguientes fragmentos de código, obtener la poscondición apropiada:

- (a)  $\{i < 10\} i := 2 * i + 1$
- (b)  $\{i > 0\} i := i - 1$
- (c)  $\{i > j\} i := i + 1; j := j + 1$
- (d)  $\{V\} i := 3; j := 2 * i$

41. Para cada uno de los siguientes fragmentos de código, obtener las precondiciones apropiadas.

(a)  $i := 3 * k \{i > 6\}$

(b)  $a := b * c \{a = 1\}$

(c)  $b := c - 2; a := a/b;$

42. Verificar el siguiente código. Indicar todas las reglas usadas.

$$\{y > 0\} \text{ } xa := x + y; \text{ } xb := x - y$$

43. Verificar el siguiente código, indicando todas las reglas usadas.

$$\{V\} \text{ if } x < 0 \text{ then } x := -x \{x \geq 0\}$$

44. Verificar el siguiente segmento de programa, suponiendo el invariante:  $\bigwedge_{k=1}^i \max \geq a[k]$ ,

$$\begin{aligned} & \max := a[1] \quad ; \quad i := 1; \\ & \text{while } (i \neq n + 1) \text{ do} \\ & \quad \text{begin} \\ & \quad \quad \text{if } (a[i] \geq \max) \text{ then } \max = a[i]; \\ & \quad \quad i := i + 1 \\ & \quad \text{end} \\ & \quad \bigwedge_{i=1}^n (\max \geq a[i]) \end{aligned}$$

45. Demostrar la corrección parcial del siguiente código:

$$\begin{aligned} & \max := a[1]; i := 1; \\ & \text{while}(i < n) \text{ do} \\ & \quad \text{begin} \\ & \quad \quad i := i + 1; \\ & \quad \quad \text{if}(a[i] \geq \max) \text{ then } \max := a[i]; \\ & \quad \text{end} \\ & \quad \bigwedge_{i=1}^n (\max \geq a[i]), \bigvee_{j=1}^n \max = a[j] \} \end{aligned}$$

46. Demostrar la corrección parcial del siguiente código, suponiendo el invariante:

$$\bigwedge_{k=0, j=n-k}^{i, n-i} a[k] = b[j],$$

$$\begin{aligned} & i := 0; j := n; \\ & \text{while } (i < n) \text{ do} \\ & \quad \text{begin} \\ & \quad \quad i := i + 1; \\ & \quad \quad j := j - 1; \\ & \quad \quad a[i] := b[j] \\ & \quad \text{end} \\ & \quad \bigwedge_{i=0}^n (a[i] == b[n - i]) \} \end{aligned}$$

47. Demostrar la corrección parcial del siguiente código suponiendo el invariante:

$$\bigwedge_{k=0}^{i-1} a[k] = s, s = \sum_{k=0}^{i-1} A[k]$$

```

      i := 0;
      s := 0;
  while (i ≤ n) do
    begin
      s := s + a[i];
      a[i] := s;
      i := i + 1;
    end

```

$$\{\bigwedge_{i=0}^n a[i] = \sum_{k=0}^n A[k]\}$$

48. Dados  $n \geq 0, i \leq n$ , demostrar que el siguiente segmento de programa evalúa  $\frac{n!}{(i!(n-i)!)}$  dado el invariante  $\{i > k \vee a\text{fact} = i!\} \wedge \{n - i > k \vee b\text{fact} = (n - i)!\}$ :

```

      k := 0; fact := 1;
  while (k ≠ n) do
    begin
      k := k + 1; fact := fact * k;
      if (k ≤ i)
        then afact := fact;
      if (k ≤ n - i)
        then bfact := fact
    end
  bcof =  $\frac{fact}{(afact * bfact)}$ 

```

49. Demostrar la terminación del fragmento de programa dado en el problema 44 ¿Qué condición se debe imponer para realizar la demostración?