Métodos Cuantitativos.
PARTE 1

Eva Mª Ramos Ábalos
ramosa@ugr.es

9 de noviembre de 2018

Tema 1

Introducción

Cuando una persona se enfrenta por vez primera con el término Investigación Operativa, no suele ser conocedora de las características específicas de esta ciencia ni de su objeto de estudio. Además, la Investigación Operativa puede tener componentes muy diversos dependiendo de su área de aplicación concreta: Administración de Empresas, Ingeniería u otras. El objeto de estudio de la Investigación Operativa (IO) es la toma científica de decisiones mediante el empleo de técnicas cuantitativas. Es importante tener esta definición clara y, de esta forma, nos daremos cuenta de la amplitud de campo de la Investigación Operativa.

Con demasiada frecuencia se ha hecho demasiado hincapié en los modelos de Programación Lineal dentro de la Investigación Operativa, lo cual ha dificultado la distinción entre ambos términos. Lo cierto es que la Programación Lineal es sólo una parte de la Investigación Operativa aunque, sin duda, una de las más importantes.

Suele ser difícil hacer una referencia histórica de la Investigación Operativa. Principalmente, porque no es sencillo establecer sus orígenes. Como se ha comentado anteriormente, muchas son las áreas que componen la IO, y hasta que apareció un elemento aglutinador en los años 40 del siglo XX, cada área tuvo su propia referencia histórica, haciendo muy difícil establecer la fecha exacta del nacimiento de la IO. No obstante, procuraremos dar unas pinceladas al respecto.

Las diferentes ciencias han de ser comprendidas con profundidad antes de poder ser analizadas desde un punto de vista histórico. Quizás no sea fácil establecer los orígenes de la Investigación Operativa, porque no se tuvo conciencia de la misma hasta mucho más tarde de que algunas de sus ramas nacieran y se desarrollaran. No obstante, es necesario relacionar el alumbramiento de la Investigación Operativa, por lo menos nominalmente, con el transcurso de la II Guerra Mundial. Por esta razón, hemos de pensar en los orígenes de la ciencia operacional como en los de una técnica de naturaleza militar.

La necesidad de planificación y organización aparece ya en el antiguo Egipto hacia el año 4000 a. C. y se va desarrollando a través de toda la Antigüedad hasta el advenimiento del Imperio Romano. En Israel y China también aparecen tímidos escarceos de organización y dirección hacia el año 1000 a. C. Nabucodonosor establece algunas ideas sobre control de la producción hacia el año 600 a. C. En Grecia, se desarrollan en el 350 a. C. los primeros métodos de organización del trabajo y del tiempo. Alrededor del año 30 a. C., Julio César establece diversas ideas de planificación, control y unidad de mando, que luego pone en práctica en todo el Imperio Romano.

Todos los estudios y planteamientos organizacionales de la Antigüedad tienen su proyección, que no su continuación, a lo largo de toda la Edad Media, en donde se aprovechan sin posteriores desarrollos. Durante el siglo XV, en la Italia renacentista se vuelven a plantear de nuevo las cuestiones organizativas y aparecen diversos estudios sobre costes y sobre control de existencias. No es fácil establecer otros hitos acerca de la organización hasta el siglo XVIII, cuando Pierre de Montmort inicia sus primeras ideas directivas que luego dan lugar a la teoría de juegos.

Con los inicios de la I Revolución Industrial, el sentido y la forma de estudio de la Ciencia de la Gestión adquieren su ser más pleno. Por otra parte, el desarrollo de las matemáticas durante los siglos XVIII y XIX permite disponer de las herramientas necesarias para la futura construcción de la Investigación de Operaciones. De esta forma, en 1767, Gaspard Monge descubre la manera geométrica de resolver un programa lineal. Posteriormente, Adam Smith establece el principio de especialización en los trabajos, y Robert Owen, ya en el siglo XIX, realiza un estudio sobre tareas en un proceso productivo, y advierte de la necesidad de adiestramiento en las mismas por parte de los operarios. Una aportación fundamental la realiza Babbage, en 1832, construyendo lo que se podría llamar el primer computador digital, que vendría a ser el antecesor de los modernos ordenadores. A finales del siglo XIX, Joseph Wharton hace de la dirección estratégica e industrial un saber universitario. No obstante, el auge de las revoluciones industriales del XIX permiten establecer un caldo de cultivo adecuado para el estudio de la ciencia operacional. Así, Frederick W. Taylor y Henry L. Gantt, ante la necesidad de planificación de la producción, establecen el método científico de dirección y las gráficas de programación productiva (de Gantt), respectivamente. A partir de este momento aparece la aportación nuclear del siglo XX a la Investigación de Operaciones, sabiendo que es en esta centuria cuando se produce su nacimiento real.

1.1. Desarrollo de la Investigación Operativa

La IO utiliza resultados de muchas áreas científicas, aunque su base fundamental se encuentra en la matemática, la economía y especialmente el cálculo de probabilidades y estadística. Desde el punto de vista matemático se conviene en establecer sus orígenes en diferentes trabajos sobre modelos lineales debidos a Jordan, Minkowski, Farkas,...al final del siglo XIX. En probabilidades y estadística se encuentran sus orígenes en los trabajos de Erlang sobre fenómenos de espera en los años veinte del siglo XX. En Economía se deben a Quesnay y Walras, que plantearon los primeros problemas de programación lineal, que fueron posteriormente perfeccionados por otros autores como Von Neumann, Kantorovich y Dantzig.

El término Investigación Operativa se acuño durante la Segunda Guerra Mundial, cuando en el ejército Británico primero y el Norteamericano después, se formaron grupos de trabajo interdisciplinares dirigidos por científicos de excelencia con la intención de resolver importantes problemas tácticos y estratégicos: despliegue de radares, navegación en zigzag.... Al terminar la guerra, muchos de estos científicos pasaron a la industria, administración, universidades, etc, y continuaron aplicando los modelos que habían utilizado y otros nuevos, hasta alcanzar un enorme desarrollo fuera ya del ámbito militar.

En definitiva, la investigación operativa es un enfoque científico de la toma de decisión.

1.2. Modelización

La característica fundamental de la IO es el proceso de modelización de un problema, ya que la ejecución de su análisis se lleva a cabo sobre el modelo de la realidad y no sobre ella misma. Un modelo es una representación simplificada de una parte de la realidad. Su utilización está motivada porque la realidad es difícil de copiar de una manera exacta, debido a su complejidad, y además, parte de esta complejidad es irrelevante al problema específico objeto de estudio. La representación y simplicidad son difíciles de conjugar en la práctica y por ello debe buscarse un cierto grado de equilibrio, para evitar, por ejemplo, que un modelo pueda ser tan simple que no sea adecuado para representar un determinado problema, ni tan complicado que impida destacar las relaciones básicas del sistema.

El proceso de modelización comienza una vez que se han formulado, identificado y determinado los límites del problema. Se continua con la construcción de un modelo para el. Los modelos matemáticos, son los que utiliza la IO. La fase de construcción del modelo comprende los siguientes apartados:

1. Determinación de las componentes del modelo: variables de decisión, resultados y parámetros.

2. Determinación de la estructura: expresiones matemáticas que relacionan a las variables.

3. Determinación del principio de elección: optimización, satisfacción...

4. Generación de alternativas, predicción y medición de resultados.

5. Elección de un escenario: descripción de las suposiciones bajo las que se examinan las situaciones de decisión.

Una vez formulado el modelo matemático, se lleva a cabo la búsqueda de la solución, es decir, del conjunto de valores específicos para las variables de decisión.

Otra fase importante es la validación del modelo, que nos llevará a aceptarlo para su utilización o a rechazarlo para reiniciar el proceso de modelización.

Por último está la fase de implantación o puesta en práctica de la solución, obteniéndose los posibles beneficios del estudio.

1.2.1. Estructura de los modelos empleados en la Investigación Operativa

A modo de primera aproximación podemos decir que el objetivo de esta asignatura es resolver (ciertas clases de) problemas en los que se busca la mejor decisión posible entre un conjunto de alternativas. Antes de precisar debidamente esta idea, veamos un ejemplo que nos permita ilustrar los conceptos que vamos a introducir:

Ejemplo 1. *Una empresa desea planificar su producción diaria de dos artículos A y B. La empresa puede disponer de un máximo de 12 horas diarias de mano de obra. Cada unidad de A requiere 3 horas, mientras que cada unidad de B requiere 2. Por otro lado, la producción requiere un input I del que la empresa puede disponer como máximo de 10 unidades diarias. Cada unidad de A requiere una unidad de I, mientras que cada unidad de B requiere 2 unidades de I. ¿Cuál es la máxima producción diaria que puede conseguir la empresa?, ¿qué cantidad debe producir para ello de cada artículo?*

El primer paso para abordar un problema como éste es modelizarlo, es decir, expresarlo en términos matemáticos precisos. Para ello, llamamos x_1 a la cantidad diaria producida de A y x_2 a la cantidad diaria producida de B. El problema es encontrar los mejores valores posibles para x_1 y x_2.

Ahora observamos que una producción diaria (x_1, x_2) requiere $3x_1 + 2x_2$ horas diarias de mano de obra, así como una cantidad $x_1 + 2x_2$ del input I. Por lo tanto, sólo nos valdrían las soluciones (x_1, x_2) que satisfagan $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ y $x_1 + 2x_2 \leq 10$. Hay otra condición implícita en el enunciado que es fundamental explicitar: la producción no puede ser negativa, luego $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Hay infinitas producciones posibles (x_1, x_2) que satisfacen todos estos requisitos. El problema es encontrar la mejor, es decir, la que hace que la producción total $x_1 + x_2$ sea máxima. La formulación matemática del problema es la siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Max.} & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Se lee: Maximizar (la función) $x_1 + x_2$ sujeta a (las restricciones) $3x_1 + 2x_2 \leq 12$, etc.

Cualquier problema formulado en los términos anteriores recibe el nombre de problema, programa o modelo de programación matemática. Más precisamente, para determinar un modelo de programación matemática hemos de especificar tres conjuntos básicos de elementos:

- Las **variables principales o de decisión** del modelo, que son las variables para las que queremos encontrar el mejor valor posible.

  En el problema anterior, las variables principales son x_1 y x_2. Cuando trabajemos en general las variables principales serán $x_1, \ldots, x_n$, es decir, salvo que convengamos otra cosa en un momento dado, la letra n representará siempre el número de variables principales de un modelo. En casos concretos, en lugar de x_1, x_2, x_3 podremos escribir también x, y, z, o usar las letras que consideremos más apropiadas por cuestiones de claridad.

- Las **restricciones**, que son las condiciones que hemos de imponer a las variables para que una solución sea admisible como tal.

  El problema anterior tiene cuatro restricciones:

  $$3x_1 + 2x_2 \leq 12, \quad x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

  En general, consideraremos tres tipos de restricciones: restricciones de menor o igual: $g(\bar{x}) \leq b$, restricciones de mayor o igual: $g(\bar{x}) \geq b$ y restricciones de igualdad: $g(\bar{x}) = b$, donde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. Cuando trabajemos en general, las restricciones serán de la forma $g_i(\bar{x}) \leq b_i$ (o bien $\geq$. o bien $=$), para $i = 1, \ldots, m$, es decir, las funciones que determinan las restricciones se llamarán siempre g_i, los términos independientes se llamarán siempre b_i y el número de restricciones será siempre m, salvo por la siguiente excepción: las restricciones $xi \geq 0$ se llaman **condiciones de no negatividad**, y en algunos contextos conviene tratarlas separadamente, de modo que el problema anterior puede decirse que hay dos restricciones ($m = 2$) más las condiciones de no negatividad.

- La **función objetivo**, que es la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que queremos maximizar o minimizar.

  En el problema anterior la función objetivo es $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Notemos que para determinar un modelo no sólo hemos de especificar una función objetivo, sino también si hay que maximizarla o minimizarla. Cuando no queremos especificar si buscamos el máximo o el mínimo, hablamos de optimizar la función objetivo. En un problema de maximizar, los óptimos de la función objetivo son sus máximos, mientras que en un problema de minimizar son sus mínimos.

En estos términos podemos decir que resolver un problema de programación matemática es buscar unos valores para las variables principales que cumplan las restricciones y donde la función objetivo alcance su valor óptimo. El planteamiento general es

$$\begin{array}{rl} \text{Opt.} & f(\bar{x}) \\ \text{s.a.} & g(\bar{x}) \leq \bar{b}, \end{array}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función objetivo, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función vectorial cuyas m funciones coordenadas $g_1, \ldots, g_m$ determinan las m restricciones y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ es el vector de t términos independientes de las restricciones. Por simplicidad hemos supuesto que todas las restricciones son de $\leq$, si bien pronto veremos que esto no supone ninguna pérdida de generalidad.

1.2.2. Clases de problemas

Para resolver un problema de programación matemática hay que aplicar técnicas diferentes según sus características, por ello es muy importante ser capaz de reconocer si un problema dado reúne las características necesarias para que le podamos aplicar unas técnicas determinadas. De momento distinguiremos tres tipos de problemas, aunque más adelante introduciremos un cuarto tipo (los de programación lineal entera):

- **Programación No Lineal**. Todos los problemas que vamos a estudiar se engloban dentro de la programación no lineal. En otras palabras, todos los problemas se pueden resolver mediante las técnicas correspondientes a la programación no lineal (excepto los de programación entera, que introduciremos más adelante), si bien para algunos de ellos existen técnicas más adecuadas.

- **Programación Lineal**. Un problema es de programación lineal si tanto su función objetivo como sus restricciones son lineales.

  Para entender esto hemos de tener claro lo que es una función lineal: Una **función lineal** es una función de la forma $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, donde $c_1, \ldots, c_n$ son números reales, es decir, una función de la forma "número $\times$ variable + número $\times$ variable + $\ldots$

  No hay que confundir las funciones lineales con los polinomios, que forman una clase más amplia de funciones: Un polinomio es una función determinada por una expresión en la que las únicas operaciones entre las variables son sumas, productos, productos por números reales y potencias con exponentes naturales.

  Todas las funciones lineales son polinomios, pero el recíproco es falso. Por ejemplo, $2x - 5y$ es una función lineal (y también un polinomio), mientras que $xy + 3z$ es un polinomio, pero no es una función lineal, pues hay dos variables multiplicadas.

- **Programación Clásica**. Un problema es de programación clásica si no tiene restricciones o bien tiene únicamente restricciones de igualdad.

  Ejemplo 2. *Consideremos, por ejemplo, el problema:*

$$\begin{aligned} Max. \quad & z = x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

  Tenemos que:

  - Es de programación no lineal (todos los problemas que estamos considerando lo son).
  - Es de programación lineal (tanto la función objetivo como las restricciones son lineales).
  - No es de programación clásica (tiene restricciones de desigualdad).

  Ejemplo 3. *Por otra parte, el problema:*

$$\begin{aligned} Max. \quad & z = x + y \\ s.a. \quad & x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

  - Es de programación no lineal (todos los problemas que estamos considerando lo son).
  - No es de programación lineal (la restricción no lo es).
  - Es de programación clásica (la restricción es de igualdad).

1.2.3. Clases de variables

Conviene clasificar las variables de un problema en los tres tipos siguientes:

- **Variables no negativas**. Una variable no negativa es una variable x sometida a una restricción de la forma $x \geq 0$. Las restricciones de esta forma se llaman condiciones de **no negatividad**.

- **Variables no positivas**. Una **variable no positiva** es una variable x sometida a una restricción de la forma $x \leq 0$.

  Las restricciones de la forma $x \leq 0$ o $x \geq 0$ se llaman **condiciones de signo**.

- **Variables libres**. Una variable libre es una variable no sometida a ninguna condición de signo.

  Ejemplo 4. *Por ejemplo, en el problema*

$$\begin{array}{rl} Max. & f = x + 3y - z^2 \\ s.a. & x + y - z \leq 4 \\ & x \leq 0, y \geq 0 \end{array}$$

  la variable x es no positiva, la variable y es no negativa y la variable z es libre.

Más en general, diremos que una variable x está **acotada superiormente** si satisface una desigualdad de la forma $x \leq c$, donde c es un número real, es decir, si no puede tomar valores mayores que una cota (superior) dada c. Se dice que x está **acotada inferiormente** si satisface una desigualdad de la forma $c \leq x$, es decir, si no puede tomar valores menores que una cota (inferior) c. Las restricciones de la forma $x \geq c$ o $x \leq c$ se llaman condiciones de acotación.

1.2.4. Transformaciones de problemas

A veces es conveniente transformar un problema en otro equivalente en el sentido de que a partir de la solución óptima de uno puede calcularse fácilmente la solución óptima del otro.

- **Cambio del objetivo**. Un problema con objetivo $Max.f(\bar{x})$ es equivalente al problema que tiene las mismas restricciones pero su objetivo es $Min. - f(\bar{x})$. Del mismo modo podemos transformar un problema de minimizar en otro de maximizar.

  Por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & z = x + y + 2 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 50 \end{array}$$

  puede transformarse en

$$\begin{array}{rl} \text{Min.} & -z = -x - y - 2 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 \leq 50 \end{array}$$

  La única precaución es que si estudiamos el segundo problema y obtenemos que un óptimo viene dado por $(x, y) = (5,\ 5)$, entonces el valor óptimo de la función objetivo (en el problema original) no es $-5 - 5 - 2 = -12$, sino 12.

- **Eliminación de una constante en la función objetivo**. Si la función objetivo es de la forma $f(\bar{x}) + k$ y eliminamos la constante k, el problema que obtenemos tiene los mismos óptimos.

  Por ejemplo, el problema anterior equivale a

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 \leq 50 \end{aligned}$$

  Como en el caso anterior, si obtenemos que un óptimo (de este problema) viene dado por $(x, y) = (5, 5)$, entonces el valor óptimo de la función objetivo (del problema original) no es $5 + 5 = 10$, sino $5 + 5 + 2 = 12$.

- **Cambio de una desigualdad.** Una restricción de $\leq$ se transforma en una de $\geq$ multiplicando sus dos miembros por -1, y viceversa.

  Por ejemplo, la restricción $x^2 + y^2 \leq 50$ puede transformarse en $-x^2 - y^2 \geq -50$.

- **Igualdad por desigualdades**. Una restricción de igualdad puede sustituirse por las dos restricciones que resultan de cambiar el $=$ por un $\leq$ y un $\geq$. Por ejemplo, el problema

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

  es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 \leq 9 \\ & x^2 + y^2 \geq 9 \end{aligned}$$

- **Desigualdades por igualdades**. También es posible transformar desigualdades en igualdades introduciendo las llamadas **variables de holgura**. Es costumbre hacer la transformación de tal modo que las variables de holgura sean siempre no negativas. Así, para transformar una restricción de $\leq$ en una igualdad se le suma una variable de holgura, mientras que si es de $\geq$ se le resta una variable de holgura.

  Por ejemplo, el problema

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 \leq 50 \\ & 3x + 3y \geq -1 \end{aligned}$$

equivale a

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = x + y \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 + s = 50 \\ & 3x + 3y - t = -1 \\ & x, y, s, t \geq 0 \end{aligned}$$

donde s y t son variables de holgura.

Observemos que al introducir una variable de holgura s no eliminamos completamente la desigualdad, pues ésta permanece en la condición de signo $s \geq 0$. Por este motivo nunca hemos de introducir variables de holgura en las condiciones de signo, ya que con ello lo único que hacemos es complicar el problema sin ganar nada.

- **Condiciones de signo**. Una variable sometida a una condición $x \leq 0$ puede convertirse en una variable no negativa mediante el cambio $x = -x_1$, de modo que $x \leq 0$ se sustituye por $x_1 \geq 0$.

  Una variable libre x se puede sustituir por variables no negativas mediante el cambio $x = x_1 - x_2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

  Por ejemplo, para convertir en no negativas las variables del problema

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & f = x + 3y - z^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y - z \leq 4 \\ & x \leq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

  hacemos $x = -x_1, z = z_1 - z_2$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & f = -x_1 + 3y - (z_1 - z_2)^2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + y - z_1 + z_2 \leq 4 \\ & x_1, y, z_1, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.3. Optimización en Investigación Operativa

Los aspectos fundamentales de la IO son la *optimización* y la *incertidumbre*. La *optimización* consiste en la determinación de una alternativa de decisión, siendo esta mejor que cualquier otra en algún sentido (maximización de beneficios, minimización de costes...). Un planteamiento más reciente y menos exigente es la *satisfacción*, en el que se buscan alternativas que alcancen un cierto nivel de aspiración o meta. La incertidumbre se refiere a la variación aleatoria descrita por distribuciones de probabilidad, que permite conocer y predecir niveles correspondientes a cada alternativa de decisión, no con seguridad, pero si con cierta probabilidad. Teniendo en cuenta estos aspectos, se tienen dos categorías de modelos matemáticos en IO:

1. Optimización, que comprende la programación matemática lineal, entera, no lineal, dinámica y el análisis determinista de decisiones.

2. Teoría de Probabilidad que abarca el análisis estocástico de decisiones, programación estocástica, teoría de inventarios, fenómenos de espera y simulación.