Temario Métodos Cuantitativos

Ismael Sallami Moreno

ism350zsallami@correo.ugr.es

https://ismael-sallami.github.io/

https://elblogdeismael.github.io/

Universidad de Granada

2025

Índice general

Capítulo 1

Algoritmo Simplex. Dualidad. Análisis de Sensibilidad. Programación Entera.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 9

Resolver utilizando el método de las dos fases:

a) Min. $20x_1 + 25x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $4x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

c) Max. $x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned} Max. \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 - Mt_1 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 6 \\ & x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1

Paso 1. La función artificial es:

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0s_1 - t_1$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido:

		0	0	0	0	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	XB
-1	t_1	1	1	1	0	1	6
0	s_1	0	0	1	1	0	2
	$z_j - c_j$	-1	-1	-1	0	0	-6

Ahora debemos de coger la más negativa, pero al ser todos con valor -1, da igual cual cojamos, cogemos la primera, es decir, la de x_1.

$$F_p = F_1$$
$$F2N = F2(\text{Ya tiene un 0})$$

		0	0	0	0	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	XB
0	x_1	1	1	1	0	1	6
0	s_1	0	0	1	1	0	2
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	1	0

En este punto no podemos continuar ya que todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, por lo que debemos de pasar a la fase 2.

Fase 2

Ahora debemos de eliminar las variables artificiales y continuar con el problema original.

		1	-2	3	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	XB
1	x_1	1	1	1	0	6
0	s_1	0	0	1	1	2
	$z_j - c_j$	0	3	-2	0	6

Cogemos la fila más negativa, en este caso la de x_3, con valor -2.

$$F_p = F_2$$
$$F1N = F1 - F_p$$

		1	-2	3	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	XB
1	x_1	1	1	0	-1	4
3	x_3	0	0	1	1	2
	$z_j - c_j$	0	3	0	2	10

Como todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

d) Max. $x_1 + x_2 + 10x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_2 + 4x_3 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasamos a forma estándar:

$$\begin{aligned} Max. \quad & x_1 + x_2 + 10x_3 - t_1 - t_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_2 + 4x_3 + t_1 = 2 \\ & -2x_1 + x_2 - 6x_3 + t_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase 1

Paso 1. La función artificial es:

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - t_1 - t_2$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido:

		0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	XB
-1	t_1	0	1	4	1	0	2
-1	t_2	-2	1	-6	0	1	2
	$z_j - c_j$	2	-2	2	0	0	-4

Cogemos la columna más negativa, en este caso la de x_2.

$$F_p = F_1$$
$$F2N = F_2 - F_p$$

		0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	XB
0	x_2	0	1	4	1	0	2
-1	t_2	-2	0	-10	-1	1	0
	$z_j - c_j$	2	0	10	2	0	0

En este punto no podemos continuar ya que todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, por lo que debemos de pasar a la fase 2, pero debemos de tener en cuenta que tenemos en la base la variable t_2 que es artificial, por lo que debemos de eliminarla. *Vemos que en la 2 Fase, debemos de sacar x_2, pero vamos a sacar t_2 para que no nos de problemas. Previamente asignamos el coeficiente 0 a la variable t_2.*

Fase 2

		1	1	10	
	VB	x_1	x_2	x_3	XB
1	x_2	0	1	4	2
10	t_2	-2	0	-10	0
	$z_j - c_j$	-1	0	-6	2

$$F2/10 = F_p$$
$$F1N = F1 - 4F_p$$

		1	1	10	
	VB	x_1	x_2	x_3	XB
1	x_2	-0.8	1	0	2
10	x_3	0.2	0	1	0
	$z_j - c_j$	0.2	0	0	2

Como todos los valores de la fila $z_j - c_j$ son positivos, hemos llegado a la solución óptima.

e) Max. $x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ & 3x_1 - x_2 = 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 10

Dado los siguientes problemas primales, encontrar sus problemas duales asociados:

a) Max. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \leq 2400$
$x_1 + 2x_2 \leq 1600$
$x_1, x_2 \geq 0$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} Min \quad w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\ s.a. \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Max. $\quad 4{,}5x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3$
s.a. $\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
$x_1 - x_2 \leq 6$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} Min \quad w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\ s.a. \quad y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4{,}5 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 3 \\ -y_1 + y_2 \geq 1{,}5 \\ y_1, y_3 \geq 0 \quad y_2 \rightarrow \text{libre} \end{aligned}$$

c) Min. $\quad 6x_1 + 4x_2$
s.a. $\quad x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \geq 2400$
$x_1 + 2x_2 \leq 1600$
$x_1, x_2 \geq 0$

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} Max \quad w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\ s.a. \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ y_2 \geq 0, y_1, y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

d) Max. $4{,}5x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3$
s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$
$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$
$x_1 - x_2 \leq 6$
$x_1, x_3 \geq 0, \quad x_2$ sin restricciones

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} Min \quad w = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\ s.a. \quad y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4,5 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 3 \\ -y_1 + y_2 \geq 1,5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

e) Min. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \geq 2400$
$x_1 + 2x_2 = 1600$
$x_1 \geq 0, \quad x_2$ sin restricciones

Debemos de calcular las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 700 \\ 2400 \\ 1600 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

De manera que nos queda:

$$\begin{aligned} Max \quad w = 700y_1 + 2400y_2 + 1600y_3 \\ s.a. \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_2 + 2y_3 = 4 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0 \quad y_3 \rightarrow \text{libre} \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Ismael Sallami Moreno, **Estudiante del Doble Grado en Ingeniería Informática + ADE**, Universidad de Granada, 2025.