Tema 3

Algoritmo Simplex. Dualidad. Análisis de Sensibilidad. Programación Entera.

En los temas anteriores se ha visto la formulación de modelos de programación lineal y su resolución gráfica cuando tenemos dos variables de decisión. En este tema vamos a desarrollar el método Simplex que se utiliza para resolver cualquier problema de programación lineal. También se verá unos de los conceptos más importantes de la programación lineal: la dualidad. Finalmente se estudiará el efecto de cambios en la estructura del modelo sobre la solución óptima, es por tanto de gran importancia y recibe el nombre de análisis de sensibilidad.

3.1. Fundamentos del Simplex. Método del Simplex en forma tabular

El problema fundamental de la programación lineal consiste en determinar una solución para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas que optimice una determinada función objetivo. Tales sistemas se resuelven por el método de Gauss. Para tal resolución es necesario manejar algunos conceptos.

Podemos establecer que la forma general de un problema de programación general es la siguiente:

Determinar el valor de un conjunto de variables, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que optimice (maximice o minimice) una función objetivo sujeta a unas restricciones, esto es,

$$
\begin{array}{ll}
Opt & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\
s.a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n(\leq, =, \geq)b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n(\leq, =, \geq)b_2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n(\leq, =, \geq)b_m
\end{array}
$$

o matricialmente el problema se expresa como

$$
\begin{array}{ll}
Opt & z = c'\mathbf{x} \\
s.a. & A\mathbf{x}(\leq, =, \geq)b \\
 & \mathbf{x} \geq 0
\end{array}
$$

siendo

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; x = (x_1.x_2, \ldots, x_n)', \; b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)', \; c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'
$$

Hay dos formas especialmente importantes de presentar un problema lineal:

- **Forma estándar de un problema lineal**. Se llama así a la presentación de un problema en la que:

  1. El objetivo es de la forma maximización o minimización.
  2. Todas las restricciones son de igualdad.
  3. Todas las variables son no negativas.
  4. Las constantes a la derecha de las restricciones son no negativas.

  Por lo tanto, un problema de maximizar en forma estándar tiene la estructura siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
Opt & z = c'\mathbf{x} \\
s.a. & A\mathbf{x} = b \\
 & \mathbf{x} \geq 0
\end{array}
$$

  donde $c_{n\times 1}$, $\mathbf{x}_{n\times 1}$, $b_{m\times 1}$, $A_{m\times n}$ con $n > m$. Se denota A_j la j-ésima columna de A.

- **Forma canónica de un problema lineal**. Se llama así a la presentación de un problema en la que:

  1. El objetivo es de la forma maximización.
  2. Todas las restricciones son del tipo $\leq$.
  3. Todas las variables son no negativas.

  Por lo tanto, un problema de maximizar en forma canónica tiene la estructura siguiente:

$$\begin{array}{ll} Max & z = c'\mathbf{x} \\ s.a. & A\mathbf{x} \leq b \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

  donde $c_{n\times1}$, $\mathbf{x}_{n\times1}$, $b_{m\times1}$, $A_{m\times n}$ con $n > m$.

El *método simplex se aplica a programas lineales en forma estándar*. La mayoría de los problemas no son inicialmente modelizados en esta forma, sino que tienen muchas restricciones de desigualdad. Por ello es necesario dar la forma canónica de un problema lineal. Para ello se utilizarán las transformaciones vistas en el tema 1.

El método simplex es un algoritmo, es decir, un procedimiento sistemático que se repite una y otra vez hasta obtener un resultado deseado. Cada vez que se lleva a cabo el procedimiento sistemático se realiza una iteración. En el procedimiento gráfico se localizaban los puntos extremos de la región factible, coincidiendo la solución óptima en uno de esto puntos. Nuestro objetivo ahora es determinar algebraicamente estos puntos extremos.

El primer paso será pasar el problema a forma estándar, de esta forma, el conjunto de restricciones se convierte en un sistema de ecuaciones simultáneas. En estas condiciones, existe un equivalente a los puntos extremos que utilizábamos en el procedimiento gráfico, las soluciones básicas. De forma equivalente que en el método gráfico, la solución óptima del problema será una de estas soluciones básicas. Pasamos a la definición del concepto de solución básica.

La forma estándar de un problema de programación lineal incluye m ecuaciones lineales simultáneas con n incógnitas o variables ($m < n$). Se dividen las n variables en dos series:

1. $n - m$ variables a las cuales les asignamos el valor 0.

2. las restantes m variables, cuyos valores se determinan resolviendo las ecuaciones resultantes.

Si las m ecuaciones producen una solución única, entonces las m variables asociadas se llaman **variables básicas** y las $n - m$ variables restantes se conocen como variables no básicas. Las variables básicas son el equivalente a los puntos extremos en la resolución gráfica de un problema de programación lineal.

Si todas las variables toman valores no negativos, entonces la **solución es factible**. De lo contrario es no factible.

Ejemplo 12. *Consideramos el siguiente problema en forma estándar:*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 \\ s.a & x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

En este caso $m = 2$ y $n = 5$. Se tiene entonces:

1. $n - m = 3$ variables no básicas a las que les asignamos el valor 0.
2. $m = 2$ variables básicas, que se le asigna el valor obtenido de resolver el sistema de ecuaciones formado por las restricciones.

Las posibles combinaciones de variables no básicas que podemos tomar son:

$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_2x_5$	$x_1x_3x_4$	$x_1x_3x_5$
$x_1x_4x_5$	$x_2x_3x_4$	$x_2x_3x_5$	$x_2x_4x_5$	$x_3x_4x_5$

Para algunos de estos casos, se va a comprobar si estas combinaciones de variables producen una solución básica factible.

Caso 1: Solución básica factible:

- Variables no básicas: $x_2, x_4, x_5 \to$ se les asigna el valor 0.
- Ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

- Solución: Única con $x_1 = 0$ y $x_3 = 2$
- Situación: Solución básica factible debido a que las variables básicas x_1 y x_3 son ≥ 0

Caso 2: Solución básica no factible:

- Variables no básicas: $x_3, x_4, x_5 \rightarrow$ se les asigna el valor 0.
- Ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

- Solución: Única con $x_1 = -6$ y $x_2 = 14$
- Situación: Solución básica no factible debido a que $x_1 < 0$.

Caso 3: Infinidad de soluciones:

- Variables no básicas: $x_1, x_2, x_5 \rightarrow$ se les asigna el valor 0.
- Ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

- Solución: No hay solución única.
- Situación: Infinidad de soluciones.

Caso 4: Solución inexistente:

- Variables no básicas: $x_1, x_3, x_4 \rightarrow$ se les asigna el valor 0.
- Ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_5 &= 8 \\ 2x_2 + 6x_5 &= 4 \end{aligned}$$

- Solución: No existe.
- Situación: Solución inexistente.

En resumen, el problema fundamental de la programación lineal consiste en determinar una solución para un sistema de ecuaciones lineales simultáneas que optimice una determinada función objetivo. Tales sistemas se resuelven por el método de Gauss. Para tal resolución es necesario manejar algunos conceptos como los de base y solución básica.

Planteemos lo anterior en términos matriciales. Sea el sistema de ecuaciones (simultáneas)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

cuya matriz de coeficientes, A, es de rango m (rango máximo), se define una base como el conjunto de vectores columna de cualquier submatriz B de rango m y por tanto no singular. Al vector x_B de variables asociadas a la submatriz B se le llama vector de variables básicas y a la solución del sistema $Bx_B = b$ dada por $x_B = B^{-1}b$ se denomina solución básica. Realmente la solución básica es el vector x que tiene por valores de las variables ceros salvo para las variables de x_B. Cuando una o más variables básicas son cero se denomina a la solución básica solución degenerada. A partir de la definición anterior se puede observar que un sistema de ecuaciones simultáneas puede tener muchas soluciones básicas distintas.

3.1.1. Variables artificiales.

En la fase inicial del método Simplex se necesita disponer de una solución básica factible de manera rápida. Normalmente la introducción de las variables de holgura suele facilitar dicha base, sin embargo hay ocasiones en que no es fácil encontrar esta primera solución.

Ejemplo 13. *Consideremos el siguiente conjunto de restricciones*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 14 \end{aligned}$$

Al añadir las variables de holgura tenemos:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - s_2 &= 14 \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = x_2 = 0$, es $s_1 = 8$ y $s_2 = -14$, que no constituye una solución básica factible inicial, ya que todas las variables de un programa lineal en forma estándar deben ser no negativas.

Para remediarlo se añaden a las restricciones del problema en forma estándar unas variables artificiales $t_i \geq 0$ a aquellas restricciones que teniendo originalmente desigualdad $\geq$ se les añadió restando una variable de exceso más una variable artificial:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \geq b_p &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j - s_p + t_p = b_p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{qj}x_j = b_q &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{qj}x_j + t_q = b_q \end{aligned}$$

donde s_p es la variable de exceso y t_p la artificial. Estas variables no representan nada económicamente son meros artificios matemáticos. Generalmente la primera solución básica del problema transformado no suele ser factible. Se puede demostrar que cualquier solución básica factible del problema transformado en el que las variables artificiales tomen el valor cero es una solución básica factible del sistema original. Será deseable llevar a cero lo antes posible a las variables artificiales para que no aparezcan en la base. Una forma de hacer esto consiste en asignarles en la función objetivo a tales variables un coeficiente M que se considera un valor muy grande con signo negativo. Por contra las variables de holgura o exceso suelen tener coeficientes nulos en la función objetivo.

Ejemplo 14.

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ s.a. & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ & x_1 + x_3 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

En primer lugar se transforma en un problema de maximizar y después se añaden variables de holgura y artificiales:

$$\begin{array}{ll} Max & z' = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 - Mt_1 - Mt_2 \\ s.a. & 3x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 8 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 - s_2 + t_1 = 16 \\ & x_1 + x_3 + t_2 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, t_1, t_2 \geq 0 \end{array}$$

con s_1 y s_2 variables de holgura y t_1, t_2 variables artificiales. Las variables básicas iniciales son s_1, t_1 y t_2.

3.1.2. Principios del método Simplex

El método Simplex busca la solución del problema lineal partiendo de una solución básica factible inicial y pasando a otra solución básica factible adyacente que mejore (o al menos no empeore) el valor de la función objetivo. Los pasos generales son:

Paso 0. Iniciar la búsqueda de una solución básica factible inicial (punto extremo).

Paso 1. Determinar si el paso a una solución básica factible adyacente puede mejorar el valor de la función objetivo. Si es así ir al paso siguiente, en caso contrario se ha alcanzado la solución óptima.

Paso 2. Determinar la solución básica factible adyacente con mayor mejora en el valor de la función objetivo. Volver al paso 1 y repetir el proceso hasta alcanzar una solución óptima o bien que se llegue a un problema infactible o no acotado.

La búsqueda de la solución adyacente se hace extrayendo de la base un vector (una variable) y poniendo en su lugar otro, esto es, sacando una variable e incluyendo otra.

Determinación de la variable que entra en la base y regla de parada

Se define el coste reducido o relativo asociado a una columna de la matriz de restricciones A_j como la cantidad que mide el efecto sobre el valor de la función objetivo debido a la introducción de una nueva variable no básica en la base. La medida de dicho coste reducido es el elemento $z_j - c_j$ y entrará en la base aquella variable cuyo coste reducido sea mayor ($z_j - c_j$ más pequeño y negativo) en un problema de máximo, con

$$z_j = c_B^T y_j$$

A partir de los costes reducidos se puede obtener el criterio de optimalidad. La variable de entrada en la base será aquella con el $z_j - c_j$ más negativo. En caso de igualdad de varios valores se puede escoger cualquiera de ellos.

Determinación de la variable que deja la base

Dada la solución básica factible $x_B = B^{-1}b$, si el vector columna A_j de fuera de la base tiene $y_{ij} > 0$ para algún i, entonces puede entrar en la base en lugar del vector B_k que verifique que

$$\frac{x_{bk}}{y_{kj}} = min\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} : y_{ij} > 0\right\}.$$

3.1.3. Método Simplex tabular

La aplicación del método Simplex utilizando cálculo matricial resulta incómoda por lo que se suele utilizar un método tabular que permite la iteración del método simplex mediante el uso de operaciones elementales de fila (Gauss).

Existen diversas formulaciones, de la que nosotros escogeremos la siguiente:

		c_1	$\cdots$	c_n	
	VB	x_1	$\cdots$	x_n	x_B
c_{B1}	x_{B1}	y_{11}	$\cdots$	y_{1n}	x_{B1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_{Bm}	x_{Bm}	y_{m1}	$\cdots$	y_{mn}	x_{Bm}
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$\cdots$	$z_n - c_n$	z

donde

- En la columna con VB se muestra cuáles son las variables básicas.
- En la primera columna aparecen los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo.
- En la segunda fila se muestran todas las variables del problema (incluidas las de holgura, artificiales...).

- En la primera fila se muestran los coeficientes de todas las variables en la función objetivo.

- En el interior de la tabla aparecen los valores y_{ij}.

- En la última columna (de la derecha) se muestran los valores de las variables básicas.

- En la última fila se incluyen los costes reducidos.

- El último valor de la tabla es el valor de la función objetivo en cada iteración.

Cada iteración del método Simplex tiene asociada una tabla como la anterior. Tras una tabla inicial en la que las variables básicas tienen como vectores básicos la base canónica se determina la variable que ha de entrar en la base en función de los costes reducidos $z_j - c_j$ y la variable que ha de salir de la base la que verifique que $\frac{x_{bk}}{y_{kj}} = min \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\}$ para los y_{ij} de la variable que entra en la base. Finalmente se construye la nueva tabla del Simplex con las nuevas variables básicas buscando la base canónica en los vectores básicos mediante operaciones elementales de fila (Gauss).

Algoritmo:

Paso 0. Construir la tabla inicial.

Paso 1. Si hay algún valor $z_j - c_j < 0$ (**POSIBILIDAD DE MEJORA**), ir al paso 3. Si todo $z_j - c_j \geq 0$, ir al paso 2.

Paso 2. Si todo $z_j - c_j \geq 0$ y no hay variables artificiales en la base con valor positivo, la actual solución es óptima (OPTIMALIDAD). Por el contrario, si hay alguna variable artificial en la base con valor positivo, el problema es infactible (**INFACTIBILIDAD**). Parar

Paso 3. Si para algún $z_j - c_j < 0$ es su vector asociado $y_j \leq 0$, el problema es no acotado (**NO ACOTACIÓN**). En otro caso, la mejora es posible, ir a paso 4.

Paso 4. (**SELECCIÓN DE LAS VARIABLES DE ENTRADA Y DE SALIDA**). Seleccionar como variable de entrada aquella con el valor más negativo de $z_j - c_j$ y designarla como x_k, columna pivote. Seleccionar como variable de salida, la que haga mínimo el cociente x_{B_i}/y_{ik} (para $y_{ik} > 0$) para cada fila. La notamos por r y esta será la fila pivote. El elemento y_{rk} será el elemento pivote.

Paso 5. (**CÁLCULO DE LA NUEVA TABLA**). Construir la nueva tabla de valores, en la que se habrá sustituido la variable básica de salida por la nueva variable básica de entrada. Sustituir también los coeficientes en la primera columna. A continuación se divide por el elemento pivote, los elementos de la fila pivote, con lo que el pivote pasa a valer uno, y haciendo ceros en todos los elementos de la columna pivote (incluyendo la fila objetivo) por aplicación del método de Gauss. Se repite el test de optimalidad. La iteración de este proceso llevará a la solución del programa o a la conclusión de que el programa no tiene solución.

Tipos de soluciones

Según esto, las posibilidades de que el símplex termine son:

1. *Una variable no básica x_j puede entrar pero ninguna puede salir.* El problema es no acotado.

2. *Ninguna variable puede entrar.*

   Esto significa que la función objetivo empeora (o se mantiene constante) nos movamos hacia donde nos movamos, luego estamos en una solución óptima. A su vez, pueden darse los casos siguientes:

a) *Todas las variables no básicas cumplen* $z_j - c_j \neq 0$.
La solución es única (solución de vértice).

b) *Hay alguna variable no básica* x_j *con* $z_j - c_j = 0$.
Esto significa que si hiciéramos entrar a esta variable pasaríamos a otras soluciones con el mismo valor de la función objetivo, es decir, otras soluciones óptimas. A su vez hay dos posibilidades:

1) *Alguna variable básica* x_i *puede salir.*
Estamos en una solución de arista.

2) *Ninguna variable básica puede salir.*
Estamos en una solución de arista infinita.

Ejemplo 15. *Resolver aplicando el método simplex el siguiente problema:*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

En primer lugar se transforma el problema a forma estándar:

$$\begin{array}{ll} Max & z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Paso 0. Se construye la tabla inicial.

		3	2	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
0	s_1	2	3	1	0	12
0	s_2	$\boxed{2}$	1	0	1	8
	$z_j - c_j$	-3	-2	0	0	0

Paso 1. Como hay valores $z_j - c_j < 0$ (-3 y -2 de la última fila), se va al paso 3 para decidir quien sale y quien entra en la base.

Paso 3. No hay vectores asociados y_j con los $z_j - c_j$ negativos ($y_1 = (2, 2)$, $y_2 = (3, 1)$), con todos sus elementos menores o iguales que cero, por lo que es posible una mejora de la solución actual.

Paso 4. El $z_j - c_j$ más negativo es $z_1 - c_1 = -3$, así que x_1 es la variable de entrada con $k = 1$ la columna pivote. Calculamos los cocientes $\frac{x_{B_i}}{y_{il}}$:

$$\frac{x_{B1}}{y_{11}} = \frac{12}{2} = 6, \qquad \frac{x_{B2}}{y_{21}} = \frac{8}{2} = 4$$

y el mínimo corresponde a la segunda fila, así que $r = 2$ es la fila pivote con x_4 la variable de salida de la base. El elemento $y_{21} = 2$ es el pivote (marcado en la tabla con un recuadro).

Paso 5. Construimos la nueva tabla en la que la variable x_1 sustituye a s_2 en la columna VB y lo mismo para sus respectivos coeficientes. La fila 2 de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila 2 de la tabla precedente por el pivote $y_{21} = 2$. La columna 1 de la tabla está formada por el elemento $\hat{y}_{11} = 0$ (para ello se realiza la operación $F_1 - 2F_2$, con F_2 la fila pivote) y $\hat{y}_{21} = 1$.

		3	2	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
0	s_1	0	$\boxed{2}$	1	-1	4
3	x_1	1	1/2	0	1/2	4
	$z_j - c_j$	0	-1/2	0	3/2	12

Volvemos a paso 1.

Paso 1. En este caso, como $z_2 - c_2 = -1/2$ es negativo, vamos a paso 3.

Paso 3. Hay elementos positivos en la columna asociada (2, 1/2), por lo que hay posibilidad de mejora. Ir a paso 4.

Paso 4. El $z_j - c_j$ más negativo (y único) es el asociado a x_2 que será la variable de entrada. Se calculan los cocientes de los elementos de esa columna entre los de la columna x_B, y se elige el mínimo:

$$Min\left\{\frac{4}{2}; \frac{4}{1/2}\right\} = Min\{2; 8\} = 2$$

por lo que la variable de salida es s_1. El elemento pivote es $y_{12} = 2$.

Paso 5. Se construye la nueva tabla en la que la variable x_2 sustituye a s_1 en la columna VB y lo mismo para sus respectivos coeficientes. La fila 1 de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila 1 de la tabla precedente por el pivote $y_{12} = 2$. La columna 1 de la tabla está formada por el elemento $\hat{y}_{21} = 0$ (para ello se realiza la operación $F_2 - F_1/2$, con F_1 la fila pivote) y $\hat{y}_{12} = 1$.

		3	2	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
2	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
3	x_1	1	0	-1/4	3/4	3
	$z_j - c_j$	0	0	1/4	5/4	13

Como todos los valores $z_j - c_j$ son positivos la tabla nos da la solución óptima con:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0$$

con valor de la función objetivo $z^* = 13$.

Si este problema se hubiera resuelto de forma gráfica, podría comprobarse que en las iteraciones del algoritmo el movimiento ha sido de valor extremo a valor extremo adyacente de la función objetivo.

3.2. Método de la M-grande y método de las dos fases

3.2.1. Método de la M-grande

Este método es la aplicación del método simplex a problemas con variables artificiales. Para la resolución de problemas a mano, se puede utilizar como coeficientes de las variables artificiales $-M$ en las distintas iteraciones del algoritmo. Sin embargo, cuando se emplee un programa informático, basta con introducir como coeficiente un número negativo muy grande en comparación con los coeficientes de las variables de decisión de la función objetivo.

Ejemplo 16. *Consideremos el siguiente conjunto de restricciones*

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.a. & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se pasa a forma estándar el problema introduciendo variables de holgura y una artificial:

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 - Mt_1 \\ s.a. & 4x_1 + x_2 + s_1 = 12 \\ & x_1 + x_2 - s_2 + t_1 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, t_1 \geq 0 \end{array}$$

		1	2	0	0	-M	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	x_B
0	s_1	4	1	1	0	0	12
-M	t_1	1	$\boxed{1}$	0	-1	1	2
	$z_j - c_j$	-1-M	-2-M	0	M	0	-2M

		1	2	0	0	-M	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	x_B
0	s_1	3	0	1	$\boxed{1}$	-1	10
2	x_2	1	1	0	-1	1	2
	$z_j - c_j$	1	0	0	-2	2+M	4

		1	2	0	0	-M	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	x_B
0	s_2	3	0	1	1	-1	10
2	x_2	4	1	1	0	0	12
	$z_j - c_j$	7	0	2	0	M	24

La solución óptima es $x_1^* = 0, \quad x_2^* = 12, \quad s_1^* = 0 \quad s_2^* = 10 \quad t_1^* = 0$ con $z^* = 24$.

Observando las restricciones del problema, notemos que al ser $s_1 = 0$, la primera restricción no tiene holgura, es decir, se verifica como igualdad en la solución óptima, mientras que como $s_2 = 10$, la segunda restricción tiene un superávit o sobrante en la solución óptima de 10 unidades.

3.2.2. Método de las dos fases

Este método surge como alternativa a la resolución con el método simplex de programas con variables artificiales. En el método de la M-grande, se utiliza un coeficiente M para la variable artificial en la función objetivo. Si el M se toma demasiado grande, puede tender a dominar los valores de $z_j - c_j$ y producir errores de redondeo que se verán reflejados en la solución final. Si por el contrario, el M se toma pequeño, podría no surtir su efecto de sacar las variables artificiales de la base, obteniendo alguna un valor positivo en la solución final, siendo así el problema infactible cuando realmente podría no serlo.

Este método resuelve el problema en dos fases, tal y como su nombre indica:

- **Fase 1**: Se intenta determinar una solución básica factible a partir de la maximización de la función objetivo artificial (con signo negativo de las variables artificiales). Si el valor de este objetivo artificial es cero, tendremos una solución inicial para el problema original y pasamos a la fase 2. En otro caso el problema es infactible.

- **Fase 2**: Se aplica el método simplex al problema original (si no hay variables artificiales en la base final de la fase 1), utilizando la solución básica factible obtenida antes, como solución de partida. Si por el contrario al final de la fase 1 hay variables artificiales en la base (con valor cero), la función objetivo que se utiliza es la original del problema más esas variables artificiales, a las que se les asigna un coeficiente nulo. En ambos casos, al inicio de la fase 2 se prescinde de las columnas correspondientes a las variables artificiales que no estuvieran en la base al final de la fase anterior.

Algoritmo:

Inicialización

Paso 0. Poner el problema en la forma estándar de maximización añadiendo variables artificiales.

Fase 1

Paso 1. Modificar el objetivo considerando la maximización de la función objetivo artificial z^0, de la siguiente forma: cambiar coeficientes de la función objetivo del paso 0 poniéndoles -1 a las variables artificiales y 0 al resto.

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido. El proceso termina cuando la función objetivo artificial $z^0 = 0$ o todo $z_j - c_j \geq 0$, y si no hay variables artificiales en la base con valor positivo ir al paso 3. En otro caso, el problema es infactible y parar.

Fase 2

Paso 3. Considerar la función objetivo original poniendo el coeficiente 0 a todas aquellas variables artificiales que aparezcan en la base al final de la fase 1 y prescindiendo de las columnas asociadas variables artificiales en el cuadro final de la fase 1.

Paso 4. La tabla inicial de la fase 2 es la final de la fase 1, salvo que se haya prescindido de las columnas de las variables artificiales que no figuraban en la función objetivo construida en el paso 3, y que además hay que calcular de nuevo.

Paso 5. Si la función objetivo construida en el paso 3 no tiene variables artificiales, aplicar el método del simplex. En otro caso, ir a l paso 6.

Paso 6. Aplicar el método del simplex con la siguiente modificación en la regla de la variable de salida: Si x_k es la columna pivote (variable de entrada), considerar los valores y_{ik} de las variables artificiales (de la base) y si alguno de estos es negativo, tomar como variable de salida alguna de las variables artificiales con $y_{ik} < 0$ (con esto se evita que las posibles variables artificiales de la base tomen valores positivos durante la fase 2). En otro caso utilizar la regla de la variable de salida del método del simplex.

Ejemplo 17. *Apliquemos el método de las dos fases al siguiente problema:*

$$\begin{array}{ll} Min & z = x_1 + x_2 + 4x_3 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20 \\ & 3x_1 + x_3 = 14 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Inicialización

Paso 0. Poner el problema en la forma estándar de maximización añadiendo variables de holgura y artificiales.

$$\begin{array}{ll} Max & z' = -x_1 - x_2 - 4x_3 + 0s_1 - Mt_1 - Mt_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 - x_3 - s_1 + t_1 = 20 \\ & 3x_1 + x_3 + t_2 = 14 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, t_1, t_2 \geq 0 \end{array}$$

Fase 1

Paso 1. La función objetivo artificial es

$$z^0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0s_1 - t_1 - t_2$$

Paso 2. Aplicar el método simplex al programa construido.

		0	0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	t_2	x_B
-1	t_1	1	2	-1	-1	1	0	20
-1	t_2	$\boxed{3}$	0	1	0	0	1	14
	$z_j - c_j$	-4	-2	0	1	0	0	-34

		0	0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	t_2	x_B
-1	t_1	0	$\boxed{2}$	-4/3	-1	1	-1/3	46/3
0	x_1	1	0	1/3	0	0	1/3	14/3
	$z_j - c_j$	0	-2	4/3	1	0	4/3	-46/3

		0	0	0	0	-1	-1	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	t_1	t_2	x_B
0	x_2	0	1	-2/3	-1/2	1/2	-1/6	23/3
0	x_1	1	0	1/3	0	0	1/3	14/3
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	1	1	0

Hemos obtenido que $z^0 = 0$ por lo que termina el proceso. Como no hay variables artificiales en la base con valor positivo, vamos al paso 3.

Fase 2

Paso 3. La función objetivo en esta fase es:

$$Max \quad z' = -x_1 - x_2 - 4x_3 + 0s_1$$

Paso 4. Se prescinde de las variables artificiales por no estar en la base, así como de sus columnas. Se forma la tabla inicial de la fase 2 en la que no aparecen las columnas de t_1 y t_2 y están cambiados los coeficientes c_B y c_j. Se calcula por tanto de nuevo los valores $z_j - c_j$ y z.

		-1	-1	-4	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	x_B
-1	x_2	0	1	-2/3	-1/2	23/3
-1	x_1	1	0	1/3	0	14/3
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/2	-37/3

Paso 5. Como todo $z_j - c_j \geq 0$, la solución óptima es:

$$x_1^* = 14/3 \qquad x_2^* = 23/3 \qquad x_3^* = s_1^* = 0$$

y el valor del objetivo es

$$z = -z' = 37/3$$

3.3. Formulación del problema Dual. Relaciones Primal-Dual

Uno de los conceptos más importantes en programación lineal es el de **dualidad**. Este concepto establece que cada programa lineal tiene un programa lineal asociado denominado su **dual**.

Vamos a estudiar la relación entre un programa lineal y su dual, y la utilización de este último para ver que es posible en determinados casos obtener importante información económica sobre el programa lineal.

La idea fundamental de la dualidad en programación lineal es que cada programa lleva asociado un programa dual, de forma que la resolución del programa lineal original, permite obtener una solución para su dual.

3.3.1. Problema primal-dual simétrico

Un programa de programación lineal simétrica (de maximización) es aquél en que:

1. El objetivo es de la forma de maximización.
2. Todas las restricciones son desigualdades del tipo $\leq$.
3. Las variables son no negativas.

Cualquier problema de forma lineal se puede expresar de forma simétrica.

Ejemplo 18. *Expresar en forma simétrica el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 - 3x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 7 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Para ello, vamos a multiplicar la segunda restricción por -1 cambiando de ésta manera el sentido de la desigualdad:

$$4x_1 - 2x_2 \geq 7 \quad \Rightarrow \quad -4x_1 + 2x_2 \leq -7$$

Descomponemos la tercera restricción en dos, una de $\leq$ y otra de $\geq$. Esta última habrá que multiplicarla por -1 para cambiar el sentido de la desigualdad.

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -9 \end{array} \right.$$

Se establece la **relación primal-dual** en forma simétrica como sigue:

$$\begin{aligned} Max \quad & z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ s.a. \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector $n \times 1$, $\mathbf{x}$ es un vector $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector $n \times 1$. Se considera ahora el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} Min \quad & w = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ s.a. \quad & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{y}$ es un vector $m \times 1$.

Cada uno de estos problemas es el dual del otro. Al problema (3.3) se le denomina **problema primal** y a (3.2) se le denomina **problema dual**.

Ejemplo 19. *Dado el siguiente problema de programación lineal, que llamamos primal, obtener su problema dual*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 18 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 24 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

su problema dual es

$$\begin{array}{ll} Min & w = 18y_1 + 24y_2 \\ s.a. & 2y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & y_1 + 4y_2 \geq -1 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

A las variables x_1, x_2, x_3, x_4 se les denomina variables primales de decisión y a y_1, y_2 variables duales de decisión.

Se tienen las siguientes relaciones estructurales entre ambos problemas:

1. El objetivo de un problema es de maximización y el del otro de minimización.
2. El el problema de maximización, todas las restricciones son desigualdades del tipo $\leq$ y en el de minimización del tipo $\geq$.
3. Todas las variables primales y duales son no negativas.
4. Los elementos a la derecha de las restricciones son los coeficientes de la función objetivo en el otro.
5. Cada variable en un problema da lugar a una restricción en el otro y viceversa.
6. La matriz de los coeficientes de las restricciones en un problema es la traspuesta de la matriz de coeficientes en el otro.

Relaciones en dualidad

1. El dual del problema dual es el primal.
2. **Dualidad débil.**

   El valor de la función objetivo z del problema de maximización es siempre menor o igual que el valor de la función objetivo w del problema de minimización, si ambos son factibles.

3. Si el primal es factible pero no acotado, el dual es infactible.

4. Si el dual es factible pero no acotado, el primal es infactible.

5. Si el primal es infactible, el dual puede ser no acotado o infactible, y viceversa, si el dual es infactible el primal puede ser no acotado o infactible.

6. Si existen soluciones factibles para los problemas primal y dual que dan igual valor a los respectivos objetivos, tales soluciones son óptimas.

7. Los valores óptimos z^* y w^* de los problemas primal y dual son iguales.

8. **Condiciones de holgura complementaria.**

   Con estas condiciones se permite la determinación de la solución dual óptima a partir de la solución primal óptima y viceversa.

   Sean x^* e y^* soluciones factibles para los problemas primal y dual, respectivamente. La interpretación de este resultado es de gran interés. Sean s $(m \times 1)$ y v $(n \times 1)$ vectores de variables de holgura de los problemas primal y dual respectivamente. Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} s_i y_i^* = 0 \qquad & \text{para } i = 1, \ldots, m \\ v_j x_j^* = 0 \qquad & \text{para } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

   por lo que estas condiciones se pueden interpretar para que exista una solución óptima como

   a) Si una variable primal es positiva ($x^* > 0$) la correspondiente restricción dual es una igualdad, es decir, la restricción dual es una igualdad en el óptimo con $v_j = 0$.

   b) Si una restricción primal es una desigualdad en el óptimo ($s_i > 0$), la correspondiente variable dual es cero en el óptimo ($y_i^* = 0$).

   c) Si una variable dual es positiva ($y_i^* > 0$), la correspondiente restricción primal es una igualdad ($s_i = 0$).

   d) Si una restricción dual es una desigualdad ($v_j > 0$) la correspondiente variable primal es cero en el óptimo ($x_j^* = 0$).

Ejemplo 20. *Calculemos la solución óptima de un problema dual a partir de la solución óptima del primal. Consideremos el problema primal al que se le ha añadido variables de holgura* $s = (s_1, s_2)$.

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 12 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 18 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1 s_2 \geq 0 \end{array}$$

su problema dual añadiendo las variables de holgura $v = (v_1, v_2, v_3)$ es

$$\begin{array}{ll} Min & w = 12y_1 + 18y_2 + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ s.a. & y_1 + 4y_2 - v_1 = 4 \\ & y_1 + y_2 - v_2 = 2 \\ & y_1 + 2y_2 - v_3 = 1 \\ & y_1, y_2, v_1, v_2, v_3 \geq 0 \end{array}$$

Las condiciones de holgura complementaria en el óptimo x^*, y^*, para cada respectivo problema, son

$$\begin{array}{ll} s_i y_i^* = 0 & \text{para } i = 1, 2 \\ v_j x_j^* = 0 & \text{para } j = 1, 2, 3 \end{array}$$

La solución óptima del problema primal es

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 10, \quad x_3^* = 0 \text{ con } z^* = 28$$

Aplicando las condiciones de holgura complementaria tenemos,

$$\begin{array}{l} x_1^* = 2 > 0 \text{ implica que } v_1 = 0 \\ x_2^* = 10 > 0 \text{ implica que } v_2 = 0 \end{array}$$

por lo tanto

$$\begin{array}{l} y_1^* + 4y_2^* = 4 \\ y_1^* + y_2^* = 2 \end{array}$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$$y_1^* = 4/3, \quad y_2^* = 2/3 \text{ con } w^* = 28$$

Lectura de la solución dual en la tabla óptima del problema primal

Se ha visto como se puede calcular la solución óptima del problema dual a partir de la solución óptima del problema primal, utilizando las condiciones de holgura complementaria. Veamos ahora una forma más sencilla y directa de obtener la solución dual óptima a partir de la tabla óptima del simplex del problema primal. Para ello consideramos los siguiente:

> Si el problema de programación lineal [3.3] tiene una solución óptima correspondiente a una base B, entonces $y^* = c_B^T B^{-1}$ es una solución óptima para el problema dual [3.2].
> Dada la tabla óptima del simplex del problema primal, si $z_j - c_j$ es el valor asociado a una variable primal básica original en la j-ésima restricción primal, entonces el valor óptimo de la j-ésima variable dual es decisión es $|z_j - c_j|$.

Ejemplo 21. *Sea el problema de programación lineal*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18 \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Pasamos al forma estándar

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 12 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 18 \\ & \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq 0 \end{array}$$

Aplicamos el método simplex al programa construido.

		4	2	1	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	1	1	1	1	0	12
0	s_2	$\boxed{4}$	1	2	0	1	18
	$z_j - c_j$	-4	-2	-1	1	0	0

		4	2	1	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	0	$\boxed{3/4}$	1/2	1	-1/4	15/2
4	x_1	1	1/4	1/2	0	1/4	9/2
	$z_j - c_j$	0	-1	1	0	1	18

		4	2	1	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
2	x_2	0	1	2/3	4/3	-1/3	10
4	x_1	1	0	1/3	-1/3	1/3	2
	$z_j - c_j$	0	0	5/3	4/3	2/3	28

SOLUCIÓN ÓPTIMA:

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 10, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 28$$

El problema dual tendrá dos variables y_1 e y_2 ya que el problema primal tiene dos restricciones. La solución del problema dual tiene valor $z^* = w^* = 28$.

La variable básica original s_1 estaba en la primera restricción:

$$y_1 = |z_4 - c_4| = \left|\frac{4}{3}\right|$$

La variable básica original s_2 estaba en la segunda restricción:

$$y_2 = |z_5 - c_5| = \left|\frac{2}{3}\right|$$

Luego la solución óptima del problema dual es:

$$y_1^* = \frac{4}{3}, \quad y_2^* = \frac{2}{3}, \quad w^* = 28$$

3.3.2. Problema primal-dual general

Un problema de programación lineal en **forma general** es aquel que:

1. El objetivo es de la forma de maximización o minimización.
2. Las restricciones son desigualdades $\leq$ o igualdades si el problema es de maximización y desigualdades $\geq$ o igualdades si es de minimización.
3. Las variables pueden estar o no restringidas.

Las relaciones primal-dual para la forma general es:

a) El objetivo de un problema es de la forma de maximización y el del otro de minimización.

b) En el problema de maximización todas las restricciones son desigualdades del tipo $\leq$ o igualdades. En el de minimización son $\geq$ o igualdades.

c) Los elementos de la derecha de las restricciones en un problema son los coeficientes de la función objetivo en el otro.

d) Cada variable en un problema da lugar a una restricción en el otro, y viceversa.

e) La matriz de coeficientes de las restricciones en un problema es la traspuesta de la matriz de los coeficientes en el otro.

f) Si una variable en un problema es no restringida, su restricción asociada en el otro es una igualdad y viceversa.

La siguiente tabla muestra de forma resumida como obtener el problema dual a partir del primal:

PROBLEMA PRIMAL	PROBLEMA DUAL
Maximización	Minimización
Coeficientes de la función objetivo	Términos independientes de las restricciones
Coeficientes de la í-ésima restricción	Coeficientes de la í-ésima variable
Términos independientes de las restricciones	Coeficientes de la función objetivo
La i-ésima restricción tiene un signo $\leq$	La i-ésima variable dual es no negativa
La i-ésima restricción tiene un signo $=$	La i-ésima variable dual no está restringida en signo
La i-ésima variable no está restringida en signo	La i-ésima restricción es una igualdad
La i-ésima variable es no negativa	La i-ésima restricción es una desigualdad del tipo $\geq$
La i-ésima variable es no positiva	La i-ésima restricción es una desigualdad del tipo $\leq$
Número de variables	Número de restricciones

Ejemplo 22. *Determinemos el dual del problema*

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 = 8 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \textit{ no restringida} \end{aligned}$$

Se expresa el problema en la forma general de maximización poniendo la primera restricción en $\leq$:

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.a. \quad & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 = 8 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ no restringida} \end{aligned}$$

El problema dual será:

$$\begin{array}{ll} Min & w = 0y_1 + 8y_2 + 4y_3 \\ s.a. & -y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 2 \\ & y_1 + y_2 + 2y_3 = 3 \\ & y_1,\, y_3 \geq 0, \quad y_2 \text{ no restringida} \end{array}$$

La segunda restricción dual es una igualdad ya que la segunda variable primal no está restringida. La segunda variable dual no está restringida ya que la segunda restricción primal es una igualdad.

Ejemplo 23. *Determinemos el dual del problema*

$$\begin{array}{ll} Min & z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0, \quad x_3 \textit{ no restringida} \end{array}$$

En primer lugar ponemos el problema en forma general y luego se obtiene el dual:

$$\begin{array}{ll} Min & z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & -x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq -10 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ no restringida} \end{array} \quad \boxed{\text{Dual}} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} Max & w = 2y_1 + 6y_2 - 10y_3 \\ s.a. & 2y_1 + y_2 - y_3 \leq 2 \\ & y_1 - 2y_2 - 3y_3 \leq 3 \\ & -y_1 + 3y_2 - 4y_3 = -1 \\ & y_1,\, y_3 \geq 0, \quad y_2 \text{ no restringida} \end{array}$$

Método del simplex dual

Se ha visto que dado un problema de programación lineal, que llamamos primal, podemos determinar su dual. Ya que resolver un problema equivale a resolver el otro, se seleccionará aquel con apariencia más sencilla. Por otra parte, cada iteración de un problema va asociado con una iteración del otro, por lo que al resolver uno se está obteniendo simultáneamente la solución del otro. Estudiaremos el algoritmo del simplex dual que aprovecha la ventaja descrita anteriormente. Tiene una aplicación restringida, ya que solo se puede aplicar a problemas con primal infactible y dual factible (es decir, uno o más x_{Bi} son negativos y todo $z_j - c_j \geq 0$), pero es importante en el análisis de sensibilidad y programación entera.

La tabla que utiliza el simplex dual es la misma que la del primal. El algoritmo, manteniendo la optimalidad o factibilidad dual ($z_j - c_j \geq 0$), trata de alcanzar la optimalidad primal ($x_{Bi} \geq 0$), en cuyo caso la solución es primal y dual factible.

ALGORITMO

Paso 1. Dada x_B solución básica factible, si $x_B \geq 0$, la solución es óptima y parar. En otro caso, es decir, si uno o varios $x_{Bi} < 0$, ir a paso 2.

Paso 2. (**SELECCIÓN DE LA VARIABLE DE SALIDA**) Seleccionar como variable de salida aquella variable básica con el x_{Bi} más negativo, y notar la fila asociada (fila pivote) por r y la variable x_r.

Paso 3. (**SELECCIÓN DE LA VARIABLE DE ENTRADA**) Determinar para aquellas columnas no básicas con elemento $y_{rj} < 0$, el cociente

$$\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$$

seleccionando como variable de entrada aquella que tenga mayor cociente. La columna pivote se nota por k y la variable asociada por x_k. El elemento y_{rk} es el elemento pivote.

Si $y_{rj} \geq 0$ para todo j (todos los elementos de la fila pivote son no negativos) el problema no tiene solución (el dual es no acotado y el primal es infactible)

Paso 4. Establecer una nueva tabla mediante el mismo procedimiento que con el simplex primal. Volver a paso 1.

Ejemplo 24. *Apliquemos el algoritmo del simplex dual al problema*

$$\begin{aligned} Min \quad & z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

En primer lugar se pasa a la forma de maximización y se añaden las variables de holgura

$$\begin{aligned} Max \quad & z = -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + s_1 = -8 \\ & -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + s_2 = -7 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Construimos la tabla inicial del simplex

		-2	-1	-4	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	$\boxed{-2}$	1	-3	1	0	-8
0	s_2	-1	-3	-2	0	1	-7
	$z_j - c_j$	2	1	4	0	0	0

Se puede aplicar el método del simplex dual ya que es primal infactible ($x_{B1} = -8, x_{B2} = -7$) y dual factible ($z_j - c_j \geq 0$)).

El x_{Bi} más negativo corresponde a la primera fila, así que esta es la fila pivote ($r = 1$), por lo que s_1 sale de la base. Para determinar la variable de entrada, se calculan los cocientes $\dfrac{z_j - c_j}{y_{1j}}$ para las columnas con $y_{1j} < 0$, y se elige aquella con mayor cociente:

$$\frac{z_1 - c_1}{y_{11}} = \frac{2}{-2} = -1; \quad \frac{z_3 - c_3}{y_{13}} = \frac{4}{-3} = \frac{-4}{3} = -1{,}33$$

En este caso, la columna pivote es la primera, $k = 1$, y el elemento pivote es $y_{11} = -2$.

Se construye la nueva tabla del simplex dual:

		-2	-1	-4	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
-2	x_1	1	-1/2	3/2	-1/2	0	4
0	s_2	0	$\boxed{-7/2}$	-1/2	-1/2	1	-3
	$z_j - c_j$	0	2	1	1	0	-8

Sigue habiendo un x_{Bi} negativo, por lo que volvemos al inicio del algoritmo. El x_{Bi} más negativo corresponde a la segunda fila, así que esta es la fila pivote ($r = 2$), por lo que s_2 sale de la base. Para determinar la variable de entrada, se calculan los cocientes $\dfrac{z_j - c_j}{y_{2j}}$ para las columnas con $y_{2j} < 0$, y se elige aquella con mayor cociente:

$$\frac{z_2 - c_2}{y_{12}} = \frac{2}{-7/2} = -\frac{4}{3}; \quad \frac{z_3 - c_3}{y_{13}} = \frac{1}{-1/2} = -2; \quad \frac{z_4 - c_4}{y_{14}} = \frac{1}{-1/2} = -2$$

En este caso, la columna pivote es la segunda, $k = 2$, y el elemento pivote es $y_{22} = -7/2$. La tabla resultante es

		-2	-1	-4	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
-2	x_1	1	0	23/14	22/14	1/7	31/7
-1	x_2	0	1	1/7	1/7	-2/7	6/7
	$z_j - c_j$	0	0	5/7	5/7	4/7	-68/7

La nueva solución dual básica factible es $x_B = (31/7, 6/7) \geq 0$, luego es óptima. Por tanto la solución es:

$$x_1^* = \frac{31}{7}, \quad x_2^* = \frac{6}{7}, \quad x_3^* = s_1^* = s_2^* = 0, \quad z^* = -z'^* = 68/7$$

3.3.3. Interpretación económica del problema Dual

Veamos la interpretación económica de los valores óptimos de las variables duales, cuya utilidad práctica es en muchas ocasiones de tanta importancia como lo es la solución óptima. La solución óptima de un problema de programación lineal da respuesta por ejemplo, a la asignación óptima de un conjunto de recursos en un momento determinado. Las variables duales pueden dar información útil sobre la posible expansión y crecimiento del beneficio.

Si suponemos $x_B \neq 0$ e introducimos pequeños cambios ($\triangle b$) en el vector de recursos b, la base continuará siendo óptima.

Si se resuelve nuevamente el problema lineal con $b + \triangle b$ en vez de b, la variación en el valor óptimo del objetivo es $y^{*T} \triangle b$.

Se puede afirmar que:

> La variable dual y_i^* indica la contribución por unidad del recurso i-ésimo b_i a la variación en el valor óptimo z^* actual del objetivo.
> Los valores óptimos de las variables duales se denominan **precios sombra** y se utilizan para ver si puede resultar ventajoso introducir determinadas cantidades de recursos adicionales.

Ejemplo 25. *Sea el problema*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

donde x_1, x_2, x_3 representan las producciones de cervezas N, R y B respectivamente.

La solución óptima de este problema es:

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 20, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 160$$

Los valores óptimos del problema dual son:

$$y_1^* = 1/3, \quad y_2^* = 10/3, \quad w^* = 160$$

El precio sombra del recurso malta (b_1) es $y_1^* = 1/3$ y representa el incremento del valor $z^* = 160$ por unidad incrementada en la disponibilidad de malta. Análogamente, $y_2^* = 10/3$, es el precio sombra del recurso levadura (b_2).

Si por ejemplo $b = (30, 45)$ se incrementa en $\triangle b = (\triangle b_1, \triangle b_2) = (10, 15)$ unidades, el valor del objetivo se incrementa en

$$\triangle z^* = y^{*T} \triangle b = (1/3, 10/3)(10, 15)^T = 160/3$$

y así el nuevo valor óptimo del objetivo es

$$z^* = 160 + 160/3 = 213{,}33$$

3.4. Definición del análisis de sensibilidad

En esta sección se examinará la variación posible de los diversos parámetros que intervienen en el modelo de programación lineal de forma que no haya cambios en las variables de la base de la solución óptima. Se trata de dotar al modelo de programación lineal de una cierta flexibilidad y no analizarlo, como se viene haciendo hasta ahora, desde una perspectiva estática, ya que estos pueden estar sujetos a errores o fluctuaciones. Por ello su conocimiento no siempre es preciso y pueden cambiar con el tiempo, ya que muchos dependen de parámetros no controlables. Es de gran importancia analizar el efecto de cambios en la estructura del modelo sobre la solución óptima. Esto recibe el nombre de **análisis de sensibilidad**.

Considérese el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} Max \quad & z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ s.a. \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

y supóngase que se ha obtenido una solución óptima $\mathbf{x}^*$ para él y además se dispone de la tabla final del simplex. En estas condiciones se analizarán las siguientes cuestiones:

1. Variación en los coeficientes de la función objetivo, c_i.
2. Variación en los coeficientes del lado derecho de las restricciones, b_i.
3. Variación en los coeficientes de las restricciones, a_{ij}.
4. Incorporación de una nueva restricción.
5. Incorporación de una nueva variable de decisión.

3.5. Cambios discretos. Incorporación de restricciones. Incorporación de nuevas variables

3.5.1. Cambios discretos

Cambio en un coeficiente de coste no básico

Cuando el c_j corresponde a una variable no básica su modificación sólo afectará al cálculo de $z_j - c_j$. La solución seguirá siendo óptima para todos aquellos valores de c_j que cumplan que $z_j - c_j \geq 0$.

Cuando no se verifique esta condición, la base actual dejará de ser óptima y habría que aplicar el método simplex hasta alcanzar nuevamente la optimalidad.

Ejemplo 26. *Sea el problema*

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

donde x_1, x_2, x_3 representan las producciones de cervezas N, R y B respectivamente.

La tabla óptima asociada al problema es:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	160

La solución óptima de este problema es:

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 20, \quad x_3^* = 0, \quad z^* = 160$$

Esta tabla seguirá siendo óptima siempre que los valores $z_j - c_j$ sean positivos. Aplicando esto, podemos determinar el recorrido de c_3 para que esto siga siendo cierto:

$$\hat{z}_3 - \hat{c}_3 = (4,7)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \hat{c}_3 = 22/3 - \hat{c}_3 \geq 0$$

De aquí se obtiene que siempre que $\hat{c}_3 \leq 22/3$, no será rentable la producción de cerveza B.

Supongamos ahora que el beneficio de B pasa a ser de 8 unidades por litro. En este caso la solución dejará de ser óptima, ya que $z_3 - c_3$ sería negativo, por lo que x_3 deberá entrar en la base y x_1 abandonarla. Para ello se utiliza la última tabla del simplex.

		4	7	8	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	$\boxed{2/3}$	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	-2/3	1/3	10/3	160

		4	7	8	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
8	x_3	3/2	0	1	1	-1/2	15/2
7	x_2	-1	1	0	-1	1	15
	$z_j - c_j$	1	0	0	1	3	165

La solución óptima de este problema es:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 15, \quad x_3^* = 15/2, \quad z^* = 165$$

Cambio en un coeficiente de coste básico

Cuando el coeficiente que se cambia corresponde a una variable básica, se debe analizar la repercusión en los $z_j - c_j$ de las variables no básicas, debiendo estas mantener los $z_j - c_j$ correspondientes ≥ 0 para que la solución continúe siendo óptima, si bien el valor de la función objetivo será distinto.

Ejemplo 27. *Siguiendo el problema anterior, vemos que si deseamos determinar el efecto debido al cambio producido al variar el beneficio por unidad de cerveza R, parece intuitivo que si c_2 aumenta o disminuye por encima o por debajo de unos ciertos niveles, puede cambiar la actual solución óptima. Si por ejemplo R pasa a ser muy poco rentable, en la nueva solución podría no figurar la producción de la cerveza R.*

Determinamos el recorrido de c_2, teniendo en cuenta que conllevará cambios en los $z_j - c_j$ correspondientes a variables no básicas.

Supongamos que el nuevo valor de c_2 es $\hat{c}_2$, para que la solución siga siendo óptima se tiene que verificar que:

$$\hat{z}_3 - c_3 = (4, \hat{c}_2)\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\hat{c}_2 \geq 0 \Longleftrightarrow \hat{c}_2 \geq 1/2$$
$$\hat{z}_4 - c_4 = (4, \hat{c}_2)\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - 0 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\hat{c}_2 \geq 0 \Longleftrightarrow \hat{c}_2 \leq 8$$
$$\hat{z}_5 - c_5 = (4, \hat{c}_2)\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\hat{c}_2 \geq 0 \Longleftrightarrow \hat{c}_2 \geq 2$$

Por tanto, la tabla será óptima si $c_2 \in [2, 8]$.

Al cambiar un coeficiente básico, también cambia el valor de la función objetivo, aunque puede no cambiar la solución óptima. Si por ejemplo, c_2 pasa a valer 4, la solución óptima es la misma, pero el nuevo valor del objetivo z es

$$\hat{z} = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 20 = 100$$

Supongamos que c_2 pasa a valer 9. Entonces tenemos:

$$\hat{z}_3 - c_3 = (4, 9) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 3 = \frac{8}{3} + \frac{18}{3} - 3 = \frac{17}{3} \geq 0$$
$$\hat{z}_4 - c_4 = (4, 9) \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} - 0 = \frac{8}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{1}{3} \leq 0$$
$$\hat{z}_5 - c_5 = (4, 9) \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{4}{3} + \frac{18}{3} = \frac{14}{3} \geq 0$$

Como $\hat{z}_4 - c_4 \leq 0$, se tiene que aplicar de nuevo el método simplex hasta alcanzar la optimalidad. Se parte de la siguiente tabla:

		4	9	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	$\boxed{2/3}$	-1/3	5
9	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	17/3	-1/3	14/3	200

		4	9	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	3/2	0	1	1	-1/2	15/2
9	x_2	1/2	1	1	0	1/2	45/2
	$z_j - c_j$	1/2	0	6	0	9/2	202,5

La solución óptima de este problema es:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 45/2, \quad x_3^* = 0, \quad s_1^* = 15/2, \quad z^* = 202,5$$

Cambio en un recurso

En cualquier iteración del método simplex, hemos notado mediante y_{ik} al elemento interior de la tabla que va asociado a la fila i y la columna k. Inicialmente tales elementos se corresponden con los coeficientes a_{ik} de cada restricción, incluidos los de las variables de holgura y/o artificiales.

Para llevar a cabo el análisis de sensibilidad de los recursos b_i es necesario utilizar la matriz de recursos B^{-1} que es la inversa de la actual matriz básica. Tal matriz es aquella cuyos elementos son las columnas de la tabla inicial de las variables básicas actuales. Para determinar B^{-1} vamos a utilizar las tablas del simplex.

Tal matriz inversa se obtiene a partir de las columnas correspondientes al conjunto de variables básicas iniciales en el cuadro correspondiente a la iteración actual. Una vez conocida la matriz B^{-1} podemos analizar el cambio que se produce sobre la solución óptima cuando hay una variación en la disponibilidad de un recurso b_i.

En la tabla del simplex, la columna de la derecha corresponde a los valores x_B de las variables básicas que se obtuvieron en cada iteración y que se corresponden con los valores b_i de los recursos en la tabla inicial. Una variación en un b_i lleva consigo un cambio sobre el vector x_B y sobre el valor z del objetivo. Sin embargo, los valores $z_j - c_j$ permanecen iguales.

Si llamamos $\hat{b}$ al nuevo vector de recursos, B^{-1} a la inversa de la actual matriz básica y $\hat{x}_B$ al nuevo vector correspondiente al lado derecho de la tabla actual se tiene que:

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b}$$

$$\hat{z} = C_B^T \hat{x}_B^T$$

Si $\hat{x}_B \geq 0$, la tabla permanece óptima.

Ejemplo 28. *Siguiendo el ejemplo anterior,*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

y suponemos que la disponibilidad de malta aumenta en 9 unidades.

Partimos de la tabla inicial:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	2	1	2	1	0	30
0	s_2	1	2	2	0	1	45
	$z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0	0

La tabla óptima asociada al problema es:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	160

Como la disponibilidad de malta aumenta en 9 unidades, el vector de recursos b que actualmente es $(30, 45)$ pasa a ser $(39, 45)$.

La matriz B^{-1} teniendo en cuenta que las variables básicas iniciales son s_1 y s_2 será:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = C_B^T \hat{x}_B^T = (4, 7) \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix} = 163$$

La solución sigue siendo óptima, aunque cambian los valores óptimos de las variables y por supuesto de la función objetivo, que pasan a ser:

$$x_1^* = 11; \qquad x_2^* = 17; \qquad s_1 = s_2 = 0 \qquad z^* = 163$$

Calculemos el recorrido de variabilidad de los b_j:

b_1 : Sea $\hat{b} = (b_1, 45)$ el nuevo vector de disponibilidades:

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 45 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}b_1 - 15 \geq 0 & \Rightarrow b_1 \geq \dfrac{45}{2} \\ \dfrac{-1}{3}b_1 + 30 \geq 0 & \Rightarrow b_1 \leq 90 \end{cases}$$

Si $b_1 \in \left[\dfrac{45}{2}, 90\right]$ entonces la solución permanece óptima.

b_2 : Sea $\hat{b} = (30, b_2)$ el nuevo vector de disponibilidades:

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 20 - \dfrac{b_2}{3} \geq 0 & \Rightarrow b_2 \leq 60 \\ -10 + \dfrac{2}{3}b_2 \geq 0 & \Rightarrow b_2 \geq 15 \end{cases}$$

Si $b_2 \in [15, 60]$ entonces la solución permanece óptima.

(b_1, b_2) : Sea $\hat{b} = (b_1, b_2)$ el nuevo vector de disponibilidades:

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}b_1 - \dfrac{b_2}{3} \geq 0 \\ \\ \dfrac{-1}{3}b_1 + \dfrac{2}{3}b_2 \geq 0 \end{cases}$$

Para cualquier b_1 y b_2 que verifiquen estas condiciones la solución permanecerá óptima.

Cambio en un coeficiente tecnológico

Los elementos y_{ik} de la tabla del simplex, se corresponden inicialmente con los coeficientes a_{ik} de las restricciones, incluidas las variables de holgura y/o artificiales. Un cambio en un a_{ik}, que recibe el nombre de coeficiente tecnológico, tendrá posiblemente un efecto sobre los y_{ik} resultantes.

Solo veremos el análisis cuando el cambio se produzca para un coeficiente a_{ik} no básico. Este cambio afectará a su vector asociado y_k y al valor de $z_j - c_j$. Si llamamos $\hat{a}_k$ al nuevo vector tecnológico bajo la variable no básica x_k e $\hat{y}_k$ al nuevo vector asociado a x_k, se tiene:

$$\hat{y}_k = B^{-1}\hat{a}_k$$

$$\hat{z}_k - \hat{c}_k = c_B^T\hat{y}_k - c_k$$

Si en la tabla final el nuevo valor $\hat{z}_k - \hat{c}_k$ es negativo, el problema deja de ser óptimo y hay que aplicar el método simplex para alcanzar nuevamente la optimalidad.

Ejemplo 29. *Siguiendo el ejemplo anterior,*

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Partimos de la tabla inicial:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
0	s_1	$a_{11} = 2$	$a_{12} = 1$	$a_{13} = 2$	1	0	30
0	s_2	$a_{21} = 1$	$a_{22} = 2$	$a_{23} = 2$	0	1	45
	$z_j - c_j$	-4	-7	-3	0	0	0

La tabla óptima asociada al problema es:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	160

Supongamos que en nuestro problema hubiera que cambiar el coeficiente $a_{23} = 2$ a $\hat{a}_{23} = 0$

$$\hat{y}_k = B^{-1}\hat{a}_k = \hat{y}_3 = B^{-1}\hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$z_j - c_j = (4,7) \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} - 3 = -\frac{7}{3}$$

Por lo tanto se tiene la siguiente tabla en la que hay que volver a aplicar el algoritmo del simplex.

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	$\boxed{4/3}$	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	-2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	-7/3	1/3	10/3	160

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
3	x_3	3/4	0	1	1/2	-1/4	15/4
7	x_2	1/2	1	0	0	1/2	45/2
	$z_j - c_j$	7/4	0	0	3/2	11/4	675/4

Siendo esta la nueva solución óptima.

3.5.2. Incorporación de restricciones

A veces es necesario considerar una nueva restricción. El efecto de añadirla a un problema lineal es un proceso sencillo. Para evaluar su efecto basta verificar si la solución óptima x^*, satisface la nueva restricción. Si es así, se considera que no hay efecto y x^* permanece como solución óptima. Sin embargo, si x^* no la verifica, hay que evaluar el efecto que existe sobre la solución. Tal evaluación pasa inicialmente por la incorporación de la nueva restricción a la tabla final, considerando además la nueva variable de holgura. Ahora bien, no es posible introducir directamente los coeficientes de las restricciones en la tabla ya que previamente hay que pasar a cero los coeficientes de las variables básicas que aparecen en la restricción, lo que es posible mediante las operaciones matriciales de fila que consisten en multiplicar cualquier fila de la matriz por un número y sumársela a otra fila.

Ejemplo 30. *Siguiendo el ejemplo anterior, supongamos que se introduce en el plan de producción una restricción relativa a la posibilidad de añadir lúpulo al proceso de producción de forma que la fabricación de un litro de cerveza N requiere 3 kilos, R requiere 1 y B requiere 1 y su disponibilidad total es 35.*

La nueva restricción es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 35$$

La solución óptima $x^* = (5, 20, 0)$ satisface esta restricción y así esta solución y por tanto la última tabla permanece óptima.

Supongamos ahora que la disponibilidad de lúpulo es 30, es decir la restricción es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

La solución óptima $x^* = (5, 20, 0)$ no satisface esta restricción y por tanto la última tabla no es óptima. Para determinar la solución óptima, se añade una nueva variable de holgura, que notamos por s_3, con coeficiente 0 en la función objetivo. La restricción es por tanto:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 30$$

La siguiente tabla surge de modificar la tabla óptima del problema sin la nueva restricción, con la nueva restricción.

		4	7	3	0	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	0	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	0	20
0	s_3	3	1	1	0	0	1	30
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	0	160

Es necesario pasar a cero lo coeficientes de las variables básicas, x_1 y x_2. Para ello multiplicamos la primera por -3, la segunda por -1 y se las sumamos a la tercer obteniendo la siguiente tabla:

		4	7	3	0	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	0	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	0	20
0	s_3	0	0	-5/3	$\boxed{-5/3}$	1/3	1	-5
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	0	160

Esta tabla no es factible y hay que aplicar el método simplex dual para alcanzar de nuevo la factibilidad. Se saca de la base s_3 y se introduce s_1 llegando a la solución óptima

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 21, \quad x_3^* = 0, \quad s_1^* = 3 \quad z^* = 159.$$

3.5.3. Incorporación de nuevas variables

Una vez resuelto un problema, puede ser interesante conocer el efecto que se puede producir como consecuencia de la introducción de una nueva variable de decisión. Esta puede ser una variable que no afecte a la optimalidad, en cuyo caso será una variable no básica, o bien puede afectarla y esta nueva variable deberá entrar en la base.

El efecto producido por una nueva variable se puede analizar a partir de lo visto en el apartado *incorporación de restricciones*, teniendo en cuenta que a cada variable primal le corresponde una restricción dual (y viceversa). Si se quiere resolver a partir del problema primal, se tendrá en cuenta el siguiente proceso:

Paso 1. Si el problema tiene $k-1$ variables de decisión, sea x_k la nueva variable. Se modifica la función objetivo y las restricciones.

Paso 2. Construir la k-ésima restricción dual y comprobar si la verifica la solución dual óptima. Si es así, la variable x_k no afecta a la tabla óptima. En otro caso, ir al siguiente paso.

Paso 3. Añadir una nueva columna a la tabla primal óptima cuyos elementos son $\hat{y}_k$ y $\hat{z}_k - \hat{c}_k$ donde

$$\hat{y}_k = B^{-1}\hat{a}_k$$

$$\hat{z}_k - \hat{c}_k = c_b^T \hat{y}_k - c_k$$

Paso 4. Aplicar el método simplex para determinar la nueva solución óptima.

Otra alternativa es incluir la columna correspondiente a la nueva variable en la tabla final. Este cambio afectará a su vector asociado y_k y al valor de $z_j - c_j$. Para ello, se tiene que multipicar la nueva columna por la matriz B^{-1} y calcular el $z_j - c_j$ asociado. Si en la tabla final el nuevo valor $\hat{z}_k - \hat{c}_k$ es negativo, el problema deja de ser óptimo y hay que aplicar el método simplex para alcanzar nuevamente la optimalidad.

Ejemplo 31. *Siguiendo con el problema anterior, suponemos que se pretende fabricar una cerveza sin alcohol (S), que requiere 1 unidad de malta y 1 de levadura por litro producido con un beneficio de 5 unidades monetarias. Se quiere comprobar si este nuevo producto puede ser económicamente rentable.*

Sea x_4 la nueva variable primal de decisión, s_1 y s_2 las variables de holgura. El nuevo problema primal es:

$$\begin{array}{llll} Max & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 & Max & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 0s_1 + 0s_2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30 & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + s_1 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45 & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + s_2 = 45 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\, x_4 \geq 0 & & x_1,\ x_2,\ x_3\, x_4,\ s_1,\ s_2 \geq 0 \end{array}$$

La cuarta restricción dual es por tanto:

$$y_1 + y_2 \geq 5$$

La tabla óptima asociada al problema es:

		4	7	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	160

De aquí se puede leer que la solución dual óptima es $y^* = (1/3, 10/3)$. Esta solución no verifica la cuarta restricción dual, por lo que añadimos en esta tabla óptima una nueva columna con los elementos:

$$\hat{y}_k = B^{-1}\hat{a}_k = \hat{y}_4 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z}_k - \hat{c}_k = \hat{z}_4 - \hat{c}_4 = c_b^T \hat{y}_4 - c_4 = (4, 7) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 5 = -4/3$$

La tabla queda como:

		4	7	3	5	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	x_B
4	x_1	1	0	2/3	$\boxed{1/3}$	2/3	-1/3	5
7	x_2	0	1	2/3	1/3	-1/3	2/3	20
	$z_j - c_j$	0	0	13/3	-4/3	1/3	10/3	160

Como $\hat{z}_4 - \hat{c}_4 < 0$, la tabla no es óptima, por lo que se aplica el método del simplex:

		4	7	3	5	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	x_B
5	x_4	3	0	2	1	2	-1	15
7	x_2	-1	1	0	0	-1	1	15
	$z_j - c_j$	4	0	7	0	3	2	180

que nos lleva a la solución óptima

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 15, \quad x_3^* = 0, \quad x_4^* = 15 \quad z^* = 180.$$

Es decir, que el beneficio máximo se obtiene produciendo las cervezas R y S.

3.6. Programación entera

En muchos problemas de optimización, los valores sólo tienen sentido si son enteros, por ejemplo, cuando se trata de asignar personas o máquinas a una cierta actividad. Si esta es la única diferencia con los problemas de programación lineal, diremos que se trata de un problema de programación entera y se denota por **PE**. Aunque la expresión correcta es programación lineal entera, por lo general, se omite el adjetivo lineal, salvo cuando se hacen comparaciones con problemas no lineales enteros.

En consecuencia, el modelo matemático del problema de programación entera es el mismo que el de programación lineal, con la única restricción añadida de que las variables deben tomar valores enteros. Si este último requisito no se exige a todas las variables del problema se dice que es un problema de programación entera mixta, y se denota por **PEM**.

Un caso particular importante dentro de la programación entera se plantea cuando se requiere un cierto número de decisiones con dos resultados posibles y mutuamente excluyentes. Por ejemplo, cuando se plantea hacer una inversión o no hacerla, o cuando se trata de decidir si una instalación se debe localizar en un determinado lugar o no. En ese caso, las decisiones posibles se pueden representar por medio de una variable con dos valores posibles, por ejemplo, cero y uno, de modo que la variable de decisión x_i toma los valores cero si la decisión i-ésima es no y uno si esta decisión es si, o viceversa. Los problemas que contengan sólo variables de este tipo, llamadas variables binarias, se denominan problemas de programación entera binaria, se denotan por **PEB**.

Los primeros intentos para resolver un problema de programación lineal entera surgieron de la metodología utilizada en la resolución de problemas de programación lineal. El primer algoritmo finito fue dado por R. Gomory y se denominó Método de los planos de corte. Los avances teóricos en la resolución de programación lineal entera han sido importantes, si bien no se ha visto correspondido en la eficacia del cómputo. Esto es debido a los errores de redondeo cometidos en las sucesivas iteraciones y acumulados en el cómputo que realizan los ordenadores.

Un problema de programación entera es un problema de programación lineal en el cual algunas de las variables, o todas, tienen que ser números enteros no negativos. Se define un problema de programación entera lineal matricialmente como

$$\begin{array}{ll} Opt & z = c'\mathbf{x} \\ s.a. & A\mathbf{x}(\leq,=,\geq)b \\ & \mathbf{x} \geq 0, x_j \in \mathbb{N} \end{array}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = (x_1.x_2,\ldots,x_n)', b = (b_1,b_2,\ldots,b_m)', c = (c_1,c_2,\ldots,c_n)'$$

En un problema de programación entera la función objetivo y las restricciones podrían no ser lineales, sin embargo en este tema sólo abordaremos métodos de resolución para el caso en que ambos elementos son lineales.

Cuando se nos presente la resolución de un problema de programación entera, lo resolvemos como un problema de programación lineal. Si sus soluciones son enteras, ésta es la solución para el problema de programación lineal entera.

En cualquier problema se verifica que la solución óptima

$$z_{opt}(PL) \geq z_{opt}(PLE)$$

3.6.1. Resolución de problemas de programación entera

El primer método que surge para la resolución de este tipo de problemas consiste en resolver el problema lineal que surge al prescindir de la condición de que las variables toman valores enteros, que se conoce como **problema relajado**, y posteriormente aproximar las soluciones mediante números enteros. Este método puede llevar a soluciones infactibles. Sin embargo el análisis del problema relajado nos lleva a algunas propiedades interesantes de gran utilidad para los métodos a aplicar con posterioridad.

Teorema 4. *Si el problema relajado de un problema entero es infactible, también lo será el problema entero propiamente dicho. De hecho la región factible del problema entero está contenida en del problema relajado, ya que aquella contiene sólo los puntos enteros de ésta.*

Teorema 5. *Para un problema entero de maximización el valor del óptimo del problema relajado es siempre una cota superior del valor óptimo del problema entero:* $z^*_{PE} \leq z^*_{PR}$. *Para problemas de minimización el valor del óptimo del problema relajado es siempre una cota inferior del valor óptimo del problema entero:* $z^*_{PR} \leq z^*_{PE}$.

Teorema 6. *Si el problema relajado de un problema entero es no acotado, el problema entero propiamente dicho será no acotado o infactible.*

Un segundo método que se podría utilizar para problemas cuya región factible es finita siempre que ésta sea cerrada o acotada (contiene los enteros de la región factible del problema relajado) consistiría en probar con todos los puntos de la región factible y tomar aquel que optimice la función objetivo. Este método es intratable con un número de variables no demasiado grande.

Como ya se ha indicado ninguno de los dos métodos anteriores es satisfactorio en tanto en cuanto puede dar soluciones infactibles o ser intratable por su magnitud. Existen fundamentalmente dos métodos de resolución de problemas de programación entera: el algoritmo de ramificación y acotación (Branch and Bound) y el método de los planos de corte de Gomory. Ambos métodos son algoritmos que van añadiendo restricciones al problema relajado inicial con la intención de acotar la solución.

3.6.2. Método de ramificación y acotación.

En la práctica, la mayoría de los problemas de programación entera se resuelven mediante el uso de la técnica de ramificar y acotar.

Los métodos de ramificar y acotar encuentran la solución óptima para un problema de programación entera mediante la enumeración eficiente de los puntos en la región factible.

Antes de explicar cómo funciona la ramificación y el acotamiento, es necesario hacer la siguiente observación: si se resuelve un problema de programación entera mediante la relajación de un problema de programación lineal y se obtiene una solución en la cual todas las variables son números enteros, entonces la solución óptima de la relajación de programación lineal será también la solución óptima de programación entera.

Para darse cuenta de la validez de esta observación, considérese el siguiente problema de programación entera:

$$\begin{array}{ll} Max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ s.a. & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1,\, x_2, \geq 0; \qquad x_1, x_2 \text{ entero} \end{array}$$

La solución óptima, considerándolo un problema de programación lineal para esta programación entera, es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad z = 12$$

Esta solución da valores enteros a cada variable. La observación anterior implica que también es la solución óptima para el problema de programación entera.

Obsérvese que la región factible para la programación entera es un subconjunto de todos los puntos en la región factible de la relajación por programación lineal.

Así, el valor óptimo de z para la programación entera no puede ser mayor que el valor óptimo de z para la relajación de programación lineal, es decir,

$$z_{opt}(PL) \geq z_{opt}(PLE)$$

Esto significa que el valor óptimo de z para la programación entera debe ser $z \leq 12$. Pero el punto

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad z = 12$$

es factible para la programación entera y tiene $z = 12$. Por tanto, debe ser óptimo para la programación entera.

En forma resumida, los pasos del algoritmo Ramificar y Acotar, para un problema de maximización, son:

Algoritmo:

Paso 0. (Inicialización). Consiste en resolver el problema relajado asociado. Si la solución óptima es entera, dicha solución es la del problema entero. En caso contrario determinar una cota inferior para el valor óptimo del objetivo bien tomando $-\infty$ o, si es posible el valor de la función objetivo en algún punto factible del problema entero.

Paso 1. (Ramificación). Mediante una regla de ramificación, seleccionar un subconjunto (o subproblema) de soluciones factibles que quede sin sondear (inicialmente la del problema relajado) y una componente no entera de la solución del subproblema en cuestión. Hacer una partición en el subconjunto elegido en dos subconjuntos más pequeños, obtenidos al añadir restricciones que excluyan los valores fraccionarios de la componente elegida.

Paso 2. (Acotación). Para cada nuevo subconjunto, determinar una cota superior para el valor del objetivo del problema entero.

Paso 3. (Sondeo). Analizar los subconjuntos que puedan contener la solución óptima y considerar como terminales aquellos que:

1. El subconjunto es infactible
2. La cota superior es menor que la cota inferior
3. La cota superior se alcanza en un punto factible para el problema entero y la cota superior es mayor que la inferior. En este caso hacemos la cota inferior igual a la superior y volvemos al paso 3 para sondear otros subconjuntos.

Paso 4. (Convergencia). Si todos los subconjuntos son terminales, parar y la solución viene dada por el óptimo del paso anterior. En otro caso ir al paso 1.

En el algoritmo hay dos puntos a tener en cuenta:

- La selección de la variable entera sobre la que ramificar. Hay varias recomendaciones: seleccionar la variable de menor índice con valor no entero, o bien seleccionar la variable con mayor valor no entero o establecer una jerarquía de variables siguiendo criterios económicos.

- La elección de un subconjunto no sondeado para la ramificación. En este caso hay dos posibilidades: la regla de la mejor cota y la regla de la cota más reciente. La primera consiste en tomar el subconjunto con mayor valor de la función objetivo (para problemas de maximización), es decir, la mayor cota superior. La segunda selecciona el subconjunto surgido más recientemente y que no haya sido sondeado.

Ejemplo 32. *Considere el siguiente problema de programación lineal entera:*

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & x_1,\, x_2, \geq 0; \qquad x_1, x_2 \ y \ enteras \end{aligned}$$

El espacio de soluciones de PL asociado, SP0, se define por cancelación de las restricciones enteras. La solución óptima SP0 da

$$x_1 = 3,75, \quad x_2 = 1,25, \quad z = 23,75$$

El procedimiento ramificar y acotar se basa en tratar sólo con el problema PL. Como la solución óptima no satisface la necesidad de valores enteros, el algoritmo de ramificar y acotar exige modificar el espacio de soluciones PL de forma que nos permita identificar, finalmente la solución óptima del problema de programación lineal entera. Primero, seleccionamos una de las variables cuyo valor corriente en la solución óptima SP0 infringe el requisito de valor entero. Seleccionando $x_1 = 3,75$ arbitrariamente, observamos que la región $(3 < x_1 < 4)$ del espacio de soluciones SP0 no puede, por definición, incluir ninguna solución factible del problema de programación lineal entera. Entonces, podemos modificar el espacio de soluciones de PL eliminando esta región no prometedora, lo que, en realidad, equivale a reemplazar el espacio original SP0 por dos subproblemas de programación lineal, los SP1 y SP2, definidos de la manera siguiente:

1. Espacio SP1 = espacio SP0 + $(x_1 \leq 3)$

2. Espacio SP2 = espacio SP0 + $(x_1 \geq 4)$

Los dos espacios contienen los mismos puntos enteros factibles del modelo programación lineal entera. Esto significa que, desde el punto de vista del problema original de programación lineal entera, tratar con SP1 y SP2 es igual que tratar con el subproblema original SP0. La diferencia principal es que la selección de las nuevas restricciones de acotamiento ($x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$) mejorarán la oportunidad de forzar a los puntos extremos óptimos de SP1 y SP2 hacia la satisfacción del requisito de valor entero. Además, el hecho de que las restricciones de acotamiento estén en la vecindad inmediata del óptimo continuo del SP0 incrementará las posibilidades de producir buenas soluciones enteras.

Las nuevas restricciones ($x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$) son mutuamente excluyentes; SP1 y SP2 deben tratarse como dos problemas de programación lineal separados. Esto da lugar al método de ramificar y acotar. En efecto, ramificar significa subdividir un espacio de soluciones en subespacios mutuamente excluyentes. Las ramas asociadas se definen por las restricciones ($x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$), donde x_1 se denomina variable de ramificación. La solución óptima de la programación lineal entera debe encontrarse en el SP1 o en el SP2. Sin embargo, en ausencia del espacio gráfico de soluciones, no se sabe dónde puede encontrarse la solución óptima, por lo que la única opción es investigar ambos problemas. Se hace esto trabajando con un problema SP1 o SP2. Escojamos arbitrariamente al SP1, asociado $x_1 \leq 3$.

Ejemplo 33. *En efecto, debemos resolver el siguiente problema:*

$$\begin{array}{ll} Max & z = 5x_1 + 4x_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1,\, x_2, \geq 0 \end{array}$$

Como se indicó antes, el SP1 es el mismo que el SP0 con la restricción adicional de acotamiento superior $x_1 \leq 3$. Así, podemos aplicar el método símplex para resolver el problema. Esto da la nueva solución óptima:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad z = 23$$

Como esta solución satisface el requisito de valor entero, se dice que SP1 está agotado, lo que significa que el SP1 no puede producir ninguna solución mejor de la programación lineal entera y no necesita investigarse más a fondo. Determinar una solución factible entera en una etapa temprana de los cálculos es crucial para incrementar la eficiencia del algoritmo ramificar y acotar. Tal solución fija una cota inferior al valor objetivo óptimo del problema programación lineal entera, que, a su vez, se puede utilizar para descartar automáticamente cualesquiera subproblemas no explorados (como el SP2) que no dan una mejor solución entera. En términos de nuestro ejemplo, el SP1 produce la cota inferior $z = 23$. Esto significa que cualquier solución entera mejorada debe tener un valor de z mayor que 23. Sin embargo, como la solución óptima del problema SP0 (original) tiene

$z = 23,75$ y como todos los coeficientes de la función objetivo son enteros, se infiere que ningún subproblema que proceda del SP0 puede producir un valor de z mejor que 23. En consecuencia, sin ulterior investigación, podemos descartar al SP2. En este caso se dice que el SP2 está agotado porque no puede dar una mejor solución entera.

Del análisis anterior vemos que un subproblema está agotado si se satisface una de las siguientes condiciones:

i) El subproblema da una solución factible entera del problema programación lineal entera.

ii) El subproblema no puede dar una mejor solución que la mejor cota inferior disponible (valor de z) del problema programación lineal entera. (Un caso especial de esta condición es que el subproblema no tendrá ninguna solución factible.)

Si la función objetivo ha de minimizarse, el procedimiento es el mismo, excepto que se emplean cotas superiores. Así, el valor de la primera solución entera se vuelve una cota superior para el problema y se eliminan los SPi cuando sus valores z de primera aproximación son mayores que la cota superior actual.

Consideraciones para los cálculos

Siempre se realizan las bifurcaciones a partir de aquel programa que parece estar más cerca del valor óptimo. Cuando existen varios candidatos para continuar las bifurcaciones, se selecciona aquel que tenga el mayor valor z si se va a maximizar la función objetivo, o aquel que tenga el menor valor z si se va a minimizar la función objetivo.

Las restricciones adicionales se agregan una a una. Si una primera aproximación incluye a más de una variable no entera, las nuevas restricciones se imponen a aquella variable que está más lejos de ser un entero; esto es, aquella variable cuya parte fraccionaria está más cerca de 0.5. En caso de empate, se selecciona arbitrariamente una de las variables.

Finalmente, es posible que un programa entero o un programa lineal tengan más de una solución óptima.

Ejemplo 34.

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \ \textit{y enteras} \end{array}$$

Comenzamos por resolver el problema lineal relajado (PR) mediante el método simplex, cuya solución óptima es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8{,}2, \quad x_3 = 8{,}8 \quad z_{PR} = 42{,}2$$

Esta solución tiene componentes que no son enteras, por lo tanto no es solución óptima para el PE y el proceso debe continuar. Se establece como cota inferior para el valor objetivo $z_1 = -\infty$.

Comenzamos a ramificar, comenzando de forma arbitraria por x_2. Esto nos lleva a añadir dos nuevas restricciones

$$x_2 \leq 8 \text{ y } x_2 \geq 9$$

formándose de esta manera dos subproblemas del PR, PL1 que surge del PR más las restricción $x_2 \leq 8$ y PL2 que surge del PR más las restricción $x_2 \geq 9$. Tales problemas con sus respectivas restricciones son:

PL2

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$x_1 = 0{,}05,\ x_2 = 8,\ x_3 = 8{,}58$$

$$z = 41{,}37$$

PL3

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \geq 9 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Infactible

Sondeamos estos subconjuntos para ver si puede continuar la ramificación o bien son terminales. El problema PL3 es infactible, por lo que ya es terminal. Para el subproblema PL2 se tiene: no es infactible, $z = 41{,}37 > -\infty$ y la solución óptima no se alcanza en un punto con valores enteros. Por tanto no es terminal, y hay que volver a ramificar. Vamos a ramificar sobre la primera componente, añadiendo las restricciones $x_1 \leq 0$ y $x_1 \geq 0$ formándose de esta manera dos subproblemas del PL2, PL4 que surge del PL2 más las restricción $x_1 \leq 0$ y PL5 que surge del PL2 más las restricción $x_1 \geq 0$. Tales problemas con sus respectivas restricciones son:

PL4

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$x_1 = 0,\, x_2 = 8,\, x_3 = 8{,}67$$

$$z = 41{,}33$$

PL5

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$x_1 = 1,\, x_2 = 4{,}4,\, x_3 = 4{,}6$$

$$z = 26{,}4$$

Estos problemas no son terminales ya que no son infactibles, su valor óptimo respectivo no son valores enteros y en ambos casos el valor de z es mayor que $-\infty$. Nuevamente se ramifica. Tomando la regla de la mejor cota, se ramifica sobre el problema PL4, y sobre la variable x_3 (no hay otra elección), añadiendo las restricciones $x_3 \leq 8$ y $x_3 \geq 9$ formándose de esta manera dos subproblemas del PL4, PL6 que surge del PL4 más las restricción $x_3 \leq 8$ y PL7 que surge del PL4 más las restricción $x_3 \geq 9$. Tales problemas con sus respectivas restricciones son:

PL6

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_3 \leq 8 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$x_1 = 0,\, x_2 = 7{,}67,\, x_3 = 8$$

$$z = 39$$

PL7

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_3 \geq 9 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

Infactible

El problema PL7 es infactible y por lo tanto terminal. El subproblema PL6 no es terminal, ya que no verifica ninguna de las condiciones anteriores. Se elige otro subproblema para ramificar entre PL5 y PL6, eligiendo PL6 por la regla de la mejor cota (tiene valor más alto su cota superior). Elegimos para ramificar la variable x_2, añadiendo las restricciones $x_2 \leq 7$ y $x_2 \geq 8$ formándose de esta manera dos subproblemas del PL6, PL8 que surge del PL6 más las restricción $x_2 \leq 7$ y PL9 que surge del PL6 más las restricción $x_2 \geq 8$. Tales problemas con sus respectivas restricciones son:

PL8

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_3 \leq 8 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$x_1 = 0,\; x_2 = 7,\; x_3 = 8$$

$$z = 37$$

PL9

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ & x_2 \leq 8 \\ & x_2 \geq 8 \Rightarrow x_2 = 8 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_3 \leq 8 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Infactible

Ambos problemas son terminales, el PL9 por ser infactible y PL8 ya que $z = 37$ se alcanza en el punto $x = (0, 7, 8)$ que es factible para el PE y además se verifica la condición de que $z = 37 > -\infty$. Se sondean los problemas que se habían dejado sin ramificar, en este caso únicamente PL5, para el que se había obtenido un $z = 26{,}4 < 37$, por lo tanto PL5 es terminal.

Como todos los subproblemas han sido sondeados, se da la convergencia y el algoritmo para, siendo la solución óptima del PE

$$x^* = (0, 7, 8) \text{ con } z = 37$$

Nota:

Cuando se trata de un problema de programación entera mixta, el algoritmo de ramificación y acotación es aplicable, salvo que en este caso no se ramifica sobre variables que son reales. En todo caso la solución obtenida será óptima para el programa mixto, ya que las variables reales aparecen en el problema lineal relajado y en todos los subproblemas subsecuentes.

3.6.3. Programación 0-1

Un tipo de problema de programación entera de gran interés práctico es aquel en el que las variables de decisión sólo pueden tomar valores 0 o 1. Para este tipo de problemas el método de ramificación y acotación es válido pero se puede aplicar de manera más eficiente.

Para la aplicación del algoritmo es necesario de los coeficientes de las variables de la función objetivo estén ordenadas y sean positivos ($0 \leq c_1 \leq, \ldots, c_n$). En caso de que el problema no verifique este requerimiento, se puede efectuar un cambio de variable que lo permita, que es el siguiente:

$$y_i = \begin{cases} x_j & c_j > 0 \\ 1 - x_j & c_j < 0 \end{cases}$$

tras ordenar las variables originales de manera creciente de sus coeficientes en valor absoluto.

Ejemplo 35.

$$\begin{array}{ll} Max & z = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \\ s.a & x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 4 \\ & 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

Ordenamos los sumandos de la función objetivo de manera que los coeficientes queden en orden creciente de magnitud (ignorando su signo):

$$z = x_4 - 2x_3 - 3x_2 + 4x_1$$

Se hace el cambio de variable

$$x_4 = y_1, \quad x_3 = 1 - y_2, \quad x_2 = 1 - y_3, \quad x_1 = y_4$$

Se hacen las sustituciones en la función objetivo y en las restricciones:

$$\begin{array}{ll} Max & z = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 - 5 \\ s.a & -3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 \leq 1 \\ & y_1 - y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 2 \\ & -y_2 - y_3 + 2y_4 \leq 1 \\ & y_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

El algoritmo de ramificación y acotamiento para los problemas $0-1$ (con coeficientes de la función objetivo ordenados de manera creciente) se describe del siguiente modo:

Algoritmo:

Paso 0. (Inicialización). Probar si $\mathbf{x} = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)'$ es factible para el problema entero. En caso afirmativo ya se tiene la solución óptima. En caso contrario determinar una cota inferior z_l para el valor óptimo del objetivo tomando el valor de la función objetivo en el vector cero ($\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)'$) y una cota superior z_s tomando el valor de la función objetivo en el vector $\mathbf{x}_s = (0, 1, \ldots, 1)'$. Si este último vector es factible, parar y ésta será la solución óptima, en otro caso hacer $k = 1$ e ir al paso siguiente.

Paso 1. (Ramificación). Mediante una regla de ramificación, seleccionar un subconjunto (o subproblema) de soluciones factibles que quede sin sondear (inicialmente la del problema 0-1) y hacer una partición en el subconjunto elegido en dos subconjuntos más pequeños, obtenidos al añadir las restricciones $x_k = 0$ y $x_k = 1$.

Paso 2. (Acotación). Para cada nuevo subconjunto hacer $\mathbf{x}_s$ a la compleción que tiene su $k+1$ primera componente 0 y el resto 1. A partir de $\mathbf{x}_s$, determinar una cota superior z_s para el valor del objetivo sobre ese subconjunto.

Paso 3. (Sondeo). Analizar cada subconjunto comenzando por aquel que tenga mayor cota superior y considerar como terminales aquellos que:

1. Hay al menos una restricción que no la verifica ninguna compleción del subconjunto.
2. $z_s \leq z_l$
3. x_s es factible. En este caso hacemos la cota inferior igual a la superior $z_l = z_s$ y volvemos al paso 3 para sondear otros subconjuntos.

Paso 4. (Convergencia). Si todos los subconjuntos son terminales, parar y la solución viene dada por el óptimo del paso anterior. En otro caso hacer $k = k+1$ e ir al paso 1.

Ejemplo 36. *Consideremos el siguiente problema*

$$\begin{array}{rl} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_j \in \{0, 1\} \forall j \end{array}$$

En primer lugar se considera el problema relajado, pero en este caso, en vez de prescindir de las condiciones de que las variables sean enteras, se prescinde de todas las restricciones del problema, excepto de las correspondientes a que las variables sean 0 o 1, de forma que el conjunto factible para este problema es

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a & x_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

El problema es fácil de resolver ya que al ser todos los coeficientes no negativos el máximo valor del objetivo se obtiene para el punto $x = (1,1,1)$, con un valor $z = 10$. Si tal punto es factible para el problema entero, es decir, satisface las restricciones del problema original, tal punto será la solución óptima. En este caso no se verifican ninguna de las restricciones, por lo que hay que aplicar el algoritmo. Se comienza determinando una cota inferior para el objetivo, en este caso la cota será $z = 0$ que es la que se obtiene con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

Se comienza a ramificar, comenzando arbitrariamente por x_1 y pasamos a determinar una cota superior del valor del objetivo para los subproblemas obtenidos en la ramificación, que en nuestro ejemplo son:

PR1	PR2
$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \\ & x_1 = 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \\ & x_1 = 1 \end{array}$

Calculamos una cota superior para cada subproblema, considerando el valor que toma la variable sobre la que se ha ramificado en la nueva restricción que se ha añadido y para el resto de variables le asignamos el valor 1. De esta forma, tenemos:

$$PR1 \Rightarrow x = (0,1,1) \Rightarrow z = 4x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{ cota superior } = 8$$

$$PR2 \Rightarrow x = (1,1,1) \Rightarrow z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{ cota superior } = 10$$

A continuación se comprueba si los problemas son terminales (Paso 3).

1. Para ello vemos sin son infactibles. Empezamos con PR1, en el que tenemos $x_1 = 0$ y las posibles soluciones son:

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	1

Si se toma únicamente $x_1 = 0$, la llamaremos solución parcial, ya que quedan sin precisar los valores de las variables x_2 y x_3. Cuando se especifiquen valores para estas variables, decimos que se tiene una *compleción* de la solución parcial, y si además ésta es factible, se dice *compleción factible*.

Tratamos ahora de ver si hay compleciones factibles para la solución parcial $x_1 = 0$ en PR1. Para ello se comprueban si se verifican las restricciones con cada compleción. PR1 no es infactible, ya que existen compleciones de la solución parcial $x = (0, -, -)$ que satisfacen las restricciones.

Para PR2 las posibles soluciones son:

x_1	x_2	x_3
1	0	0
1	1	0
1	0	1
1	1	1

PR2 es infactible, ya que no existen compleciones de la solución parcial $x = (1, -, -)$ que verifiquen las restricciones, por lo tanto el subproblema PR2 es terminal. Comprobamos las siguientes condiciones para PR1.

2. $z_s = 8 > z_l = 0$

3. Debemos comprobar si el punto $x = (0, 1, 1)$ utilizado para calcular la cota superior para PR1 es factible. En este caso no lo es, ya que no verifica la segunda restricción.

Por lo tanto podemos concluir que PR1 no es terminal. Pasamos a ramificar este problema sobre la variable x_2 (se elige arbitrariamente).

PR3

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \\ & x_1 = 0,\, x_2 = 0 \end{array}$$

PR4

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ s.a. & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \\ & x_1 = 0,\, x_2 = 1 \end{array}$$

Calculamos una cota superior para cada subproblema, considerando el valor que toman las variables sobre las que se han ramificado en la nueva restricción que se ha añadido y para el resto de variables le asignamos el valor 1. De esta forma, tenemos:

$$PR3 \Rightarrow x = (0, 0, 1) \Rightarrow z = 4x_3 \Rightarrow \text{ cota superior } = 4$$

$$PR4 \Rightarrow x = (0, 1, 1) \Rightarrow z = 4x_2 + 4x_3 \Rightarrow \text{ cota superior } = 8$$

A continuación se comprueba si los problemas son terminales (Paso 3).

1. Para ello vemos sin son infactibles. Empezamos con PR3, en el que tenemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Las posibles soluciones son:

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1

   PR3 no es infactible, ya que las compleciones de la solución parcial $x = (0, 0, -)$ satisfacen las restricciones.

   Para PR4 las posibles soluciones son:

x_1	x_2	x_3
0	1	0
0	1	1

   PR4 es infactible, ya que no existen compleciones de la solución parcial $x = (0, 1, -)$ que verifiquen las restricciones, por lo tanto el subproblema PR4 es terminal. Comprobamos las siguientes condiciones para PR3.

2. $z_s = 4 > z_l = 0$

3. Debemos comprobar si el punto $x = (0, 0, 1)$ utilizado para calcular la cota superior para PR1 es factible. En este caso no lo es, ya que no verifica la segunda restricción. Tal punto es factible para F y será una posible solución del PE y $z_l = 4$ es la nueva cota inferior.

Como ya todos los subproblemas han quedado sondeados y son terminales, la solución óptima es la correspondiente a PR3, es decir

$$x^* = (0, 0, 1) \quad z^* = 4$$

Ejemplo 37. *Apliquemos el algoritmo al siguiente problema:*

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.a & -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ & -x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ & x_j \in \{0, 1\} \forall j \end{array}$$

Paso 0. Comprobamos que $x = (1, 1, 1, 1)$ es infactible (no verifica la segunda restricción). Se determina la cota inferior para el valor objetivo, dada por $z_l = z((0, 0, 0, 0)) = 0$ y una cota superior dada por el valor de la función objetivo en $x_s = (0, 1, 1, 1)$, y así $z_s = z((0, 1, 1, 1)) = 2 + 3 + 4 = 9$. Como x_s es infactible, hacemos $k = 1$ y vamos al paso 1.

Paso 1. Ramificación sobre x_1, obteniendo los subproblemas PR1 con $x_1 = 0$ y PR2 con $x_1 = 1$. Ambos no son terminales y ramificamos inicialmente sobre PR2 por tener mayor cota superior, obteniendo los subproblemas PR3 con $x_2 = 0$ y PR4 con $x_2 = 1$. El subproblema PR4 es terminal ya que el punto $(1, 1, 0, 1)$ es factible, y así la cota inferior se actualiza y pasa a ser $z_l = 7$. Se sondea el subproblema PR3 que es terminal ya que $z_s = 5 < z_l = 7$.

Finalmente se vuelve a PR1 para ramificar sobre él. Sin embargo, como hemos actualizado la cota inferior, lo sondeamos nuevamente y vemos que ya es terminal ya que $z_s = 7 \leq z_l = 7$.

Por tanto la solución óptima es $x^* = (1, 1, 0, 1)$ con $z^* = 7$.

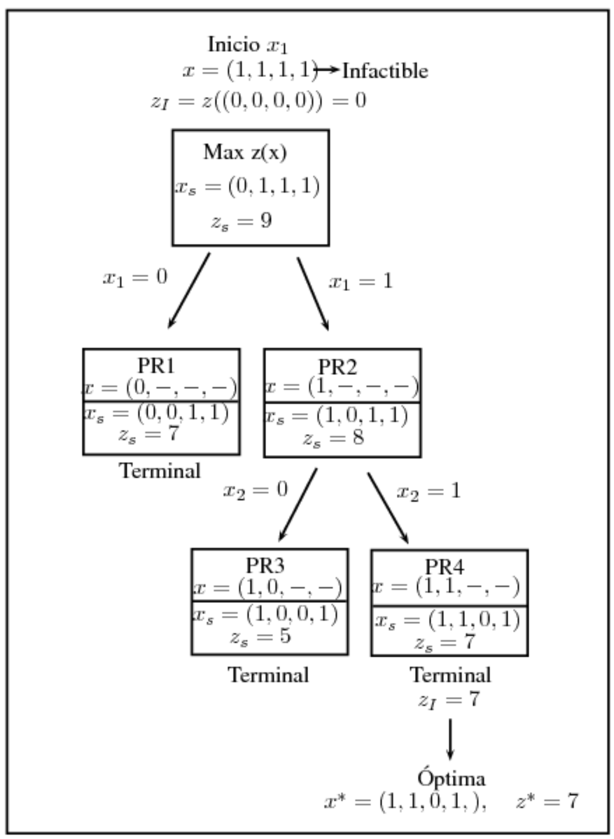

Figura 3.1: Soluciones múltiples

3.7. Ejercicios

1. Expresa los problemas siguientes en forma estándar y canónica:

$$
a)\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y=2 \\ & x+2y \leq 6 \\ & 2x+y \geq 6 \\ & x \geq 0, y \leq 0 \end{array}
\qquad
b)\begin{array}{rl} \text{Max.} & 2x+3y+z \\ \text{s.a.} & 4x+3y+z \leq 20 \\ & x+y \leq 20 \\ & x \geq 0, y \leq 0 \end{array}
\qquad
c)\begin{array}{rl} \text{Min.} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y \leq 2 \end{array}
$$

2. Resuelve mediante el método símplex el siguiente problema.

$$
\begin{array}{rl} \text{Max.} & -x+y \\ \text{s.a.} & -2x+y \leq 4 \\ & x+y \leq 1 \\ & y \geq 0 \end{array}
$$

3. Resuelve el problema siguiente. Indica las soluciones óptimas y el valor de la función objetivo en cada una de ellas.

$$
\begin{array}{rl} \text{Opt.} & x-2y+3z \\ \text{s.a.} & x+2y+z \leq 4 \\ & 2x+y-z \leq 2 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}
$$

4. Resolver:

$$
a)\ \begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+2y+z \\ \text{s.a.} & 2x-3y+2z \leq 3 \\ & -x+y+z \leq 5 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}
\qquad
b)\ \begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+y+4z \\ \text{s.a.} & 6x+3y+5z \leq 25 \\ & 3x+4y+5z \leq 20 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}
$$

5. Cierto fabricante produce sillas y mesas para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción, la sección de montaje y la sección de pintura. La producción de una silla requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos horas en la de pintura. Por su parte, la fabricación de una mesa precisa de tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

   La sección de montaje solo puede estar nueve horas diarias en funcionamiento, mientras que la de pintura solo ocho horas. El beneficio que se obtiene produciendo mesas es el doble que produciendo sillas.

   ¿Cuál debe ser la producción diaria de mesas y sillas que maximice el beneficio?

6. Un agricultor posee una parcela de 640 m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de que forma repartirá la superficie de la parcela entre las tres variedades para conseguir el máximo beneficio sabiendo que:

   - Cada naranjo precisa como mínimo de 16 m^2, cada peral de 4 m^2 y cada manzano 8 m^2.
   - Dispone de un total de 900 horas de trabajo por año (150 jornales), precisando cada naranjo de 30 horas por año, cada peral de 5 horas por año y cada manzano de 10 horas por año.
   - Los beneficios unitarios son de 50, 25, 20 unidades monetarias por cada naranjo, peral y manzano respectivamente

7. La empresa A se dedica al montaje de motocicletas de 500, 250, 125 y 50 c.c. Posee una planta que está estructurada en cuatro departamentos: fabricación de los chasis, pintura, montaje y el departamento de calidad.

   Las horas de mano de obra que necesita cada uno de los modelos de motocicletas en los diferentes departamentos son las siguientes:

	Chasis	Pintura	Montaje	Control calidad
500 c.c.	8	6	8	4
250 c.c.	6	3	8	2
125 c.c.	4	2	6	2
50	2	1	4	2

   La distribución de los trabajadores es la siguiente: para la fabricación de chasis se dispone de 25 trabajadores, en el departamento de pintura de 18, el de montaje de 30 y el de control de calidad de 10. Todos los trabajadores realizan una jornada laboral de 8 horas.

   Si el margen de beneficio de cada uno de los modelos es de 200000, 140000, 80000 y de 40000 pesetas respectivamente, ¿cuál ha de ser la combinación óptima de motocicletas a producir para que el beneficio sea máximo?

8. Resolver los siguientes problemas utilizando el método de la M-grande:

   a) $$\begin{array}{ll} \text{Max.} & 3x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq -2 \\ & x_1 - 5x_2 \geq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{ll} \text{Max.} & 4{,}5x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{ll} \text{Min.} & x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

9. Resolver utilizando el método de las dos fases:

a) Min. $20x_1 + 25x_2$
s.a. $2x_1 + 3x_2 \geq 18$
$x_1 + 3x_2 \geq 12$
$4x_1 + 3x_2 \geq 24$
$x_1, x_2 \geq 0$

b) Max. $4x_1 + 3x_2$
s.a. $3x_1 + 4x_2 \leq 12$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$4x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

c) Max. $x_1 - 2x_2 + 3x_3$
s.a. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

d) Max. $x_1 + x_2 + 10x_3$
s.a. $x_2 + 4x_3 = 2$
$-2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

e) Max. $x_1 + 2x_2$
s.a. $x_1 + x_2 = 4$
$2x_1 - 3x_2 = 3$
$3x_1 - x_2 = 8$
$x_1, x_2 \geq 0$

10. Dados los siguientes problemas primales, encontrar sus problemas duales asociados:

a) Max. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \leq 2400$
$x_1 + 2x_2 \leq 1600$
$x_1, x_2 \geq 0$

b) Max. $4{,}5x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3$
s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
$x_1 - x_2 \leq 6$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

c) Min. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \geq 2400$
$x_1 + 2x_2 \leq 1600$
$x_1, x_2 \geq 0$

d) Max. $4{,}5x_1 + 3x_2 + 1{,}5x_3$
s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4$
$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8$
$x_1 - x_2 \leq 6$
$x_1, x_3 \geq 0$, x_2 sin restricciones

e) Min. $6x_1 + 4x_2$
s.a. $x_1 \leq 700$
$3x_1 + x_2 \geq 2400$
$x_1 + 2x_2 = 1600$
$x_1 \geq 0$, x_2 sin restricciones

11. Dados los siguientes problemas de programación lineal

a) Max. $4x_1 + 2x_2 + 3x_3$
s.a. $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) Max. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
s.a. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 12$
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$
$2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

c) Max. $2x_1 + x_2 + 3x_3$
s.a. $2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10$
$2x_1 + x_3 \leq 7$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Encontrar la solución dual utilizando el principio de holgura complementaria.

12. Utilizar el algoritmo dual del simplex para resolver los siguientes problemas:

$a)$ Min. $x_1 + 2x_2$
s.a. $x_1 + x_2 \geq 4$
$2x_1 + x_2 \geq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

$b)$ Min. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
s.a. $2x_1 + x_4 \geq 250$
$3x_2 \geq 1000$
$3x_2 + 10x_3 + 6x_4 \geq 750$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$c)$ Max. $-4x_1 - 6x_2$
s.a. $3x_1 + x_2 \geq 2400$
$x_1 + 2x_2 \geq 1600$
$x_1, x_2 \geq 0$

$d)$ Min. $6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4$
s.a. $6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \geq -5$
$-x_2 + 6x_3 \leq -7$
$-4x_1 + 2x_3 \geq 3$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

13. Obtener la solución del los problemas duales asociados a partir de la tabla final del simplex:

$a)$ Max. $x_1 + x_2$
s.a. $x_1 + x_2 \leq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

$b)$ Max. $600x_1 + 300x_2$
s.a. $2x_1 + 1{,}5x_2 \leq 1200$
$x_1 + 0{,}25x_2 \leq 375$
$x_1, x_2 \geq 0$

14. Dado el siguiente problema y su tabla final del Simplex,

Max. $x_1 + 2x_2$
s.a. $x_1 + x_2 \leq 4$
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

		1	2	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
2	x_2	1	1	1	0	4
0	s_2	1	0	-1	1	2
	$z_j - c_j$	1	0	2	0	8

Realizar el análisis de sensibilidad:

$a)$ Respecto a los coeficientes de las variables no básicas.

$b)$ Respecto a los coeficientes de las variables básicas.

$c)$ Respecto a los recursos.

$d)$ Respecto a los coeficientes tecnológicos no básicos.

$e)$ Incluyendo la restricción $4x_1 + x_2 \leq 5$.

$f)$ Incluyendo la restricción $x_1 + 4x_2 \leq 3$.

15. Dado el siguiente problema y su tabla final del Simplex,

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & 20x_1 + 30x_2 + 16x_3 \\ \text{s.a.} & 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

		20	30	16	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
30	x_2	3	1	0	2/3	-1/3	2/3
16	x_3	-4	0	1	-1	1	1
	$z_j - c_j$	6	0	0	4	6	36

Realizar el análisis de sensibilidad:

a) Respecto a los coeficientes de las variables no básicas.

b) Respecto a los coeficientes de las variables básicas.

c) Respecto a los recursos.

d) Respecto al coeficiente tecnológico a_{11}.

16. Dado el siguiente problema y su tabla final del Simplex,

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

		1	0	3	0	0	
	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_B
1	x_1	1	2	7	1	0	4
0	s_2	0	1	-6	-1	1	1
	$z_j - c_j$	0	2	4	1	0	4

Realizar el análisis de sensibilidad:

a) Respecto a los coeficientes de las variables no básicas.

b) Respecto a los coeficientes de las variables básicas.

c) Respecto al recurso b_1.

d) Respecto al coeficiente tecnológico a_{22}.

e) Incorporando la nueva restricción $3x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 14$.

f) Incorporando la nueva restricción $3x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 7$.

g) Incorporando la nueva variable x_4, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & x_1 + 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 0{,}5x_4 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

17. Dado el siguiente problema y su tabla final del Simplex,

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 600x_1 + 300x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 1{,}5x_2 \leq 1200 \\ & x_1 + 0{,}25x_2 \leq 375 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

		600	300	0	0	
	VB	x_1	x_2	s_1	s_2	x_B
300	x_2	0	1	1	-2	450
600	x_1	1	0	-1/4	3/2	262.5
	$z_j - c_j$	0	0	150	300	292500

a) Analizar el problema incorporando la nueva variable x_3, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 600x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 \leq 1200 \\ & x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 \leq 375 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Analizar el problema incorporando la nueva variable x_3, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 600x_1 + 300x_2 + 200x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 \leq 1200 \\ & x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}15x_3 \leq 375 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

18. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 5x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

19. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 5x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

20. Un excursionista debe determinar que objetos debe llevar consigo en la mochila para realizar una excursión de un día. Cada uno de los objetos tiene asociado un peso y una utilidad personal para el excursionista. Los objetos que puede llevar, así como su peso y utilidad son los que se recogen en la tabla siguiente:

Objeto	Peso	Utilidad
Linterna	40	40
Saco	50	80
Cocina	30	10
Manta	10	10
Comida	10	4
Ropa	40	20
Varios	30	60

Sabiendo que el peso máximo que puede llevar en la mochila es de 100. Determinar que objetos debe llevar nuestro excursionista en la mochila para que la utilidad de los objetos sea máxima.