Tema 2

Introducción a la Programación Lineal

La programación lineal es un caso especial de la programación matemática en que todas las funciones que aparecen en el modelo son lineales. Como características de los modelos de programación lineal podemos citar:

- Hay una única función objetivo y esta es una función lineal de las variables de decisión.

- Las limitación de los recursos se expresa mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

2.1. Convexidad de conjuntos. Convexidad de funciones

Algunas definiciones y propiedades importantes relacionadas con la resolución de problemas lineales y de gran utilidad para dicha resolución genérica se dan a continuación.

Definición 1. *Un conjunto del plano se dice convexo si cualquier combinación lineal de puntos del conjunto queda en el conjunto, dicho de otra manera, si al unir dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento que los une queda completamente contenido en el conjunto. Matemáticamente el conjunto F es convexo si para cualesquiera $u, v \in F$ se verifica que $w = \alpha u+(1-\alpha)v \in F$. A la cantidad $\alpha u+(1-\alpha)v$ se la denomina combinación lineal convexa de u y v. De manera genérica se define una combinación lineal convexa de n variables como $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ siendo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$*

Definición 2. *Dado un conjunto convexo, un punto de dicho conjunto se dice extremo si para cualquier segmento que lo contiene, el punto es un extremo del segmento. En ocasiones los puntos extremos se conocen como puntos esquina o vértices.*

Proposición 1. *Se puede demostrar que la región factible de cualquier problema de programación lineal es un conjunto convexo.*

Proposición 2. *Se puede demostrar que la región factible de cualquier problema de programación lineal tiene un número finito de puntos extremos.*

Proposición 3. *Se puede demostrar que la solución óptima de cualquier problema de programación lineal, si existe, se encuentra en un punto extremo. O mejor dicho, toda región factible tiene un extremo que es óptimo.*

2.2. Planteamiento de un problema de programación lineal. Concepto general de óptimo.

Definición 3. *Se define una función lineal de n variables como*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n$$

para un conjunto de coeficientes reales $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Definición 4. *Se define una desigualdad lineal para un conjunto de n variables $x_1, \ldots, x_n$ como*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i &\geq b \Leftrightarrow c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \geq b \\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i &\leq b \Leftrightarrow c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \leq b \end{aligned}$$

para constantes reales $c_1, \ldots, c_n, b \in \mathbb{R}$.

Definición 5. *Se define un problema de programación lineal como un problema que contiene los siguientes elementos:*

- *Una función lineal objetivo a maximizar o minimizar*
- *Unas restricciones lineales compuestas por ecuaciones o desigualdades lineales*
- *Unas posibles restricciones de signo*

Matemáticamente un problema de programación lineal se expresa de manera genérica como un problema en que se trata de determinar el valor de un conjunto de variables,

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que optimice (maximice o minimice) una función objetivo sujeta a unas restricciones, esto es,

$$\begin{array}{ll} Opt & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \\ s.a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \end{array}$$

o equivalentemente

$$\begin{array}{ll} Opt & z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i (\leq, =, \geq) b_1 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i (\leq, =, \geq) b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i (\leq, =, \geq) b_m \end{array}$$

donde suele considerarse que los $x_j \geq 0$ y los coeficientes a_{ij}, b_i, c_j son constantes conocidas $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ n > m)$.

Matricialmente el problema se expresa como

$$\begin{array}{ll} Opt & z = c'\mathbf{x} \\ s.a. & A\mathbf{x} (\leq, =, \geq) b \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = (x_1.x_2, \ldots, x_n)',\ b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)',\ c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$$

- A las variables del problema se les denomina variables de decisión.
- A los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo se les denomina utilidades o costes.
- A los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones se les denomina contribuciones, requerimientos o coeficientes tecnológicos.
- A los coeficientes independientes en las restricciones se les denomina recursos o disponibilidades.

Notemos que para determinar un modelo no sólo hemos de especificar una función objetivo, sino también si hay que maximizarla o minimizarla. Cuando no queremos especificar si buscamos el máximo o el mínimo, hablamos de optimizar la función objetivo. En un problema de maximizar, los óptimos de la función objetivo son sus máximos, mientras que en un problema de minimizar son sus mínimos. En estos términos podemos decir que resolver un problema de programación matemática es buscar unos valores para las variables principales que cumplan las restricciones y donde la función objetivo alcance su valor **óptimo**.

Ejemplo 5. *Supongamos una fábrica de cerveza que produce tres tipos distintos: negra, rubia y de baja graduación. Para su obtención son necesarios, además del agua y lúpulo para los que no hay limitación de disponibilidad, malta y levadura, que limitan la capacidad diaria de producción. La cantidad necesaria de cada uno de estos recursos para cada tipo de cerveza aparece en la tabla, así como el beneficio por litro de cerveza producida. Se pretende maximizar el beneficio.*

	Negra	*Rubia*	*Baja*	*Disponibilidad*
Malta	*2*	*1*	*2*	*30*
Levadura	*1*	*2*	*2*	*45*
Beneficio	*4*	*7*	*3*	

Para plantear el problema se debe determinar:

- Cuáles son las variables de decisión, que en este caso son la producción de cada tipo de cerveza por día:

  X_1: Producción en litros de N por día.
  X_2: Producción en litros de R por día.
  X_3: Producción en litros de B por día.

- Que restricciones hay que imponer sobre las variables de decisión. Tenemos en cuenta que:

  $$\text{recursos utilizados} \leq \text{recursos disponibles}$$

- Determinar la función objetivo.

El problema se plantea como

$$
\begin{array}{rl}
Max & z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
s.a. & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\
 & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

2.3. Formulación de un Problema de Programación Lineal

El proceso de formulación del modelo del sistema real bajo estudio, juega un papel importante ya que dependiendo del modelo que se construya se tendrá una u otra solución para el problema. Se plantea el siguiente esquema del proceso de formulación de un modelo lineal:

Determinar las variables de decisión y representarlas algebraicamente: Las variables de decisión son los factores sujetos a cambio cuyos valores pueden cambiar o al menos dentro de unos ciertos límites, bajo el control del decisor.

Determinar las restricciones: Las restricciones representan la disponibilidad de algún tipo de recurso. Matemáticamente tienen la siguiente expresión:

$$g_i(x) \geq b_i \text{ o } g_i(x) \leq b_i \text{ o } g_i(x) = b_i$$

con g_i función lineal de x y b_i número real.

Determinar la función objetivo La función objetivo se formula como una función matemática de las variables de decisión y viene a representar los deseos del decisor de maximizar un beneficio o minimizar un coste. La forma de la función objetivo es:

$$Max \quad Z = f(x) \text{ o } Min \quad Z = f(x)$$

Los problemas que consideremos en programación lineal tienen un único objetivo de optimización, sin embargo hay problemas de que pueden tener varios objetivos parcial o totalmente conflictivos cuya resolución se base en programación multiobjetivo. Cuando la función objetivo es no lineal, o tampoco lo es alguna de las restricciones, hay que resolver el problema con técnicas de programación no lineal.

2.3.1. Algunos problemas clásicos de Programación lineal

El problema de la dieta

El problema de la dieta consiste en determinar las cantidades de distintos nutrientes que deben ingerirse para asegurar ciertas condiciones de nutrición y minimizar el coste de compra de los nutrientes. De modo más preciso, supóngase que se conocen los contenidos nutritivos de ciertos alimentos, sus precios y la cantidad mínima diaria de nutrientes aconsejada. El problema consiste en determinar la cantidad de cada alimento que debe comprarse para que se satisfagan los mínimos aconsejados y se alcance un precio total mínimo.

Los cuatro elementos que intervienen en el problema de la dieta son:

Datos:

m : número de nutrientes

n : número de alimentos

a_{ij} : cantidad del nutriente i en una unidad del alimento j

b_i : cantidad mínima del nutriente i aconsejada

c_j : precio de una unidad del alimento j

Variables:

x_j : cantidad del alimento j que debe adquirirse.

Restricciones. Como la cantidad total de un nutriente i es la suma de las cantidades de los nutrientes en todos los alimentos y las cantidades de alimentos deben ser no negativas, se deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\geq b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ x_j &\geq 0,\ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Función a minimizar: En el problema de la dieta se está interesado en minimizar el precio de la dieta:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

donde c_j es el precio unitario del alimento j.

Ejemplo Considérese un caso con cinco nutrientes y con los mínimos aconsejados para los nutrientes digeribles (DN), proteínas digeribles (DP), calcio (Ca), y fósforo (Ph) dados en la tabla

Nutriente	Cantidad Requerida	Maíz A	Avena	Maíz B	Salvado	Linaza
DN	74.2	78.6	70.1	80.1	67.2	77
DP	14.7	6.50	9.4	8.80	13.7	30.4
Ca	0.14	0.02	0.09	0.03	0.14	0.41
Ph	0.55	0.27	0.34	0.30	1.29	0.86
Precio por Unidad		1	0.5	2	1.2	3

El problema del transporte

Supóngase que un cierto producto debe enviarse en determinadas cantidades $u_1, \ldots, u_m$ desde cada uno de m orígenes, y recibirse en cantidades $v_1, \ldots, v_n$ en cada uno de n destinos. El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que deben enviarse desde el origen i al destino j, para conseguir minimizar el coste del envío.

Los cuatro elementos principales de este problema son:

Datos:

m : número de orígenes

n : número de destinos

u_i : cantidad que debe enviarse desde el origen i

v_j : la cantidad que debe ser recibida en el destino j

c_{ij} : coste de enviar una unidad de producto desde el origen i al destino j

Variables:

x_{ij} : la cantidad que se envía desde el origen i al destino j. Se supone que las variables deben ser no negativas ($x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Restricciones: las restricciones de este problema son:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_i,\ i = 1, \ldots, m$$
$$\sum_{i1}^{m} x_{ij} = v_j,\ j = 1, \ldots, n$$

El primer conjunto de condiciones indica que la cantidad del producto que parte del origen i debe coincidir con la suma de las cantidades que parten de ese origen hasta los distintos destinos $j = 1, \ldots, n$. El segundo conjunto de condiciones asegura que el total recibido en

el destino j debe corresponder a la suma de todas las cantidades que llegan a ese destino y parten de los distintos orígenes $i = 1, \ldots, m$.
Función a optimizar: En el problema del transporte interesa normalmente minimizar los costes de envío (suma de los costes de envío por unidad de producto multiplicado por las cantidades enviadas); es decir, se debe minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Ejemplo. Una empresa de plásticos posee dos plantas de producción de bolsas que se transportan a tres fábricas diferentes de envase. Los costes de transporte por bolsa, los datos de la demanda y disponibilidad son los siguientes:

	Fábrica			
Planta	1	2	3	Disponibilidad
1	25	17	23	173
2	19	12	18	215
Demanda	92	74	86	

El problema de la planificación de la producción

Un productor fabrica una pieza, cuya demanda varía en el tiempo. El productor debe siempre atender la demanda en los distintos instantes de tiempo. En general, cualquier problema de planificación admitiría diversas posibilidades que aseguren que la demanda es convenientemente atendida. Existen dos posibilidades:

- Producción variable. El fabricante puede producir por cada unidad de tiempo el número exacto de unidades que le solicitan. Sin embargo, como una producción que varía es costosa de mantener, por los costes de horarios más largos en los meses de producción alta y los costes asociados al paro del personal y la maquinaria en los meses de producción baja; este tipo de producción no es eficiente.

- Producción constante. El fabricante que debe atender una demanda que cambia con el tiempo puede producir por encima de dicho nivel en periodos de baja demanda y almacenar la sobreproducción para los periodos de demanda mayor. Así la producción puede mantenerse constante, compensando la demanda alta con la sobreproducción de periodos pasados. Sin embargo, debido a los costes de almacenamiento, tal opción puede no ser deseable si requiere costes altos de almacenamiento durante varios meses.

Los problemas de esta naturaleza ilustran las dificultades que surgen cuando objetivos contrarios están presentes en un sistema dado. El objetivo es llevar a cabo una planificación de la producción que maximice los beneficios después de considerar los costes de las variaciones en la producción y los almacenes.

Los cuatro elementos principales que intervienen en el problema de la planificación de la producción son:

Datos:

n : número de meses a considerar

s_0 : cantidad almacenada disponible al principio del periodo considerado

d_t : número de unidades (demanda) que se solicita en el instante t

s^{max} : capacidad máxima de almacenamiento

a_t : precio de venta en el instante t

b_t : coste de producción en el instante t

c_t : coste de almacenamiento en el instante t

Variables:

x_t : número de unidades producidas en el instante t

s_t : número de unidades almacenadas en el instante t

Restricciones: Como la demanda d_t en el instante t debe coincidir con el cambio en el almacenamiento, $s_{t-1} - s_t$, más la producción x_t en el instante t, la capacidad de almacenamiento no puede excederse y la demanda d_t, almacenamiento s_t y producción x_t deben ser no negativas y por tanto

$$\begin{array}{rcl} s_{t-1} + x_t - d_t & = & s_t,\ t = 1, 2, \ldots, n \\ s_t & \leq & s^{max},\ t = 1, 2, \ldots, n \\ s_t.x_t & \geq & 0,\ t = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Función a optimizar: Una posibilidad en el problema de la planificación de la producción consiste en maximizar el ingreso después de descontar los costes de la variación de la producción y los inventarios; esto es, maximizar el beneficio

$$Z = \sum_{t=1}^{n} (a_t d_t - b_t x_t - c_t s_t)$$

Si el periodo es corto, a_t, b_t y c_t pueden considerarse constantes ($a_t = a$, $b_t = b$ y $c_t = c$). Otra posibilidad consiste en minimizar los costes de almacenamiento

$$Z = \sum_{t=1}^{n} c_t s_t$$

Ejemplo Considérese la función de demanda en la tabla

Tiempo	Demanda
1	2
2	3
3	6
4	1

supóngase que la cantidad almacenada inicialmente es $s_0 = 2$ y que no hay límite en la capacidad de almacenamiento

El problema del flujo en una red

Considérese una red de transporte (un sistema de tuberías, ferrocarriles, autopistas, comunicaciones, etc.) a través del cual desea mandarse un producto homogéneo (aceite, grano, coches, mensajes, etc.) desde ciertos puntos de la red, llamados nudos fuente, hasta otros nudos de destino, llamados sumideros. Además de estas dos clases de nudos, la red puede contener nudos intermedios, donde no se genera ni se consume el producto que está fluyendo por la red. Denótese por x_{ij} el flujo que va desde el nudo i al nudo j (positivo en la dirección $i \to j$, y negativo en la dirección contraria).

Los cuatro elementos presentes en los problemas de flujo son

Datos:

$G :$ el grafo $G = (N, A)$ que describe la red de transporte, donde N es el conjunto de nudos, y A es el conjunto de conexiones

$n :$ número de nudos en la red

$f_i :$ flujo entrante (positivo) o saliente (negativo) en el nudo i

$m_{ij} :$ capacidad máxima de flujo en la conexión entre el nudo i y el j

$c_{ij} :$ precio de mandar una unidad del bien desde el nudo i al nudo j.

Variables: Las variables involucradas en este problema son x_{ij} : el flujo que va desde el nudo i al nudo j.

Restricciones: Imponiendo la condición de conservación del flujo en todos los nudos, y las restricciones sobre la capacidad de las líneas o conexiones, se obtienen las siguientes restricciones. Las referidas a la conservación del flujo

$$\sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = f_i,\ i = 1, \ldots, n$$

y las relacionadas con la capacidad de las líneas o conexiones

$$-m_{ij} \leq x_{ij} \leq m_{ij},\ \forall i < j$$

donde $i < j$ evita la posible duplicación de restricciones.
Función minimizar: El precio total

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ji}$$

Los problemas de flujo en redes son abundantes en ingeniería. De hecho, los sistemas de abastecimiento de agua, los sistemas de redes de comunicación y otros, conducen a este tipo de problemas. Además de encontrar las soluciones de los problemas de optimización, se puede estar interesado en analizar el conjunto de soluciones, y en cómo cambia dicho conjunto cuando fallan algunos elementos en el sistema.

El problema de inversión de capitales. Modelo de Lorie-Savage

Se trata de un problema de la elección de inversiones, teniendo en cuenta la limitación de recursos financieros. El objetivo a conseguir es que el valor capital del conjunto de inversiones seleccionadas sea máximo sin rebasar las disponibilidades financieras en ninguno de los períodos

Los cuatro elementos presentes en los problemas de flujo son
Datos:

n : número de inversiones diferentes

m : número de años contemplados en el horizonte de planificación.

V_i**:** valor capital de la inversión i.

S_{ij} : salida de caja originada por la inversión i en el año j

D_j : disponibilidades financieras para el año j.

Variables: X_i variable asociada al proyecto de inversión j-ésimo, a la que se denomina nivel de significación o nivel de realización del proyecto.

Restricciones: Por la limitación de recursos se tiene que

$$\sum_i S_{ij} x_i \leq D_j, j = 1, \ldots, m$$

Además las inversiones son fraccionables y repetitivas por lo que $x_i \geq 0$. Si queremos plantear el problema suponiendo que los proyectos de inversión sean fraccionables y no repetitivos, la restricción que se debería imponer para el valor de las variables sería $0 \leq x_i \leq 1$

Función minimizar: El beneficio total

$$Z = \sum_i V_i x_i$$

Ejemplo. Un inversor dispone de 30 millones de dólares y desea invertirlos de tal manera que maximice la ganancia en el periodo de tres años. Tiene las siguientes posibilidades de inversión:

- Acciones: Disponible al inicio de cada año, durante los tres próximos años. Cada dólar invertido en Acciones, retorna 1.20 al siguiente año, a tiempo para reinvertir el dinero nuevamente. Puede invertir máximo 12 millones cada vez.
- Bonos: Disponible a principio del primer año. Cada dólar invertido le retorna 1.50 al cabo de dos años, a tiempo para reinvertirlos. Puede invertir un máximo de 20 millones en esta alternativa.
- Certificados de depósito a dos años: Disponible al principio del segundo año. Cada dólar invertido le retorna 1.60 dos años después. Puede invertir un máximo de 15 millones.
- Moneda extranjera: Disponible al inicio del tercer año. Cada dólar invertido le retorna 1.40, un año después. Puede invertir un máximo de 10 millones.

Si por las limitaciones en la cantidad invertida en las alternativas, en determinado año no se invierte todo el dinero disponible, el sobrante se deja en una cuenta de ahorros, que indica una rentabilidad del 12 % anual. El objetivo es obtener la máxima ganancia al término del tercer año.

2.4. Concepto de Solución. Tipos de Solución

Una solución de un problema es cualquier valor posible para sus variables principales. A continuación se muestran algunas definiciones relacionadas con la solución de un problema de programación lineal.

Definición 6. *Se define un punto como un vector de valores de las variables de decisión.*

Definición 7. *Se define la región factible de un problema de programación lineal como el conjunto de todos los puntos que satisfacen las restricciones del problema, tanto las lineales como las de signo. Los puntos que no se encuentran en la región factible se conocen como puntos no factibles. Un problema con región factible vacía se denomina infactible (sin solución).*

Definición 8. *Se define solución óptima del problema de programación lineal como aquel punto de la región factible que satisface la función objetivo, esto es, el que proporciona mayor valor de la función objetivo si el problema trata de maximizarla o el que proporciona el menor valor de la función objetivo si el problema trata de minimizarla. La solución óptima puede o no existir, puede o no ser única y puede o no ser finita.*

Para estudiar los problemas de programación matemática conviene clasificar como sigue sus posibles soluciones.

2.4.1. Soluciones de un problema de programación lineal

- **Soluciones factibles/infactibles**. Una **solución factible** de un problema es una solución que satisface todas sus restricciones. En caso contrario se dice que es una solución **infactible**. El **conjunto de oportunidades** de un problema es el conjunto S formado por todas sus soluciones factibles. Notemos que si un problema no tiene restricciones entonces todas las soluciones son factibles, por lo que el conjunto de oportunidades es $S = \mathbb{R}$.

- **Soluciones interiores/de frontera**. Una solución factible de un problema es una **solución de frontera** si cumple alguna de las restricciones con igualdad (y en tal caso se dice que **satura** la restricción, o que la restricción está **activa** en dicha solución). En caso contrario, es decir, si la solución cumple todas las restricciones con desigualdad estricta se dice que es una **solución interior**.

Así pues, las soluciones puede ser:

$$\text{Soluciones}\begin{cases}\text{infactibles}\\ \text{factibles} & \begin{cases}\text{interiores}\\ \text{de frontera}\end{cases}\end{cases}$$

2.5. Resolución gráfica de un problema de programación lineal

Los problemas de programación lineal con dos variables principales pueden resolverse gráficamente si son suficientemente simples. Aunque en la realidad, rara vez surgen problemas con tal número de variables de decisión, es sin embargo muy útil esta metodología de solución e interpretación, pues sirve como ayuda visual para comprender muchos de los conceptos y términos que se utilizan y formalizan posteriormente.

Las fases del proceso de solución gráfico son:

1. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas en que las variables de decisión estén representadas por los ejes. Determinar sobre los ejes escalas de medida adecuadas a sus variables asociadas.

2. Dibujar en el sistema coordenado las restricciones del problema (incluyendo las de no negatividad). Para ello notar que si una restricción es una desigualdad, define una región (indicada con una flecha) limitada por la línea recta (dos dimensiones) o plano (tres dimensiones) que se obtiene al considerar la restricción como una igualdad. Si la restricción es una igualdad, se dibuja como una línea recta (dos dimensiones) o un plano (tres dimensiones). La intersección de todas las regiones determina la región factible o espacio de soluciones (que es un conjunto convexo, es decir, que para cualquier par de puntos del conjunto el segmento de línea que los une está contenido en él). Si esta región es no vacía, ir a la fase siguiente. En otro caso, no existe solución que satisfaga (simultáneamente) todas las restricciones y el problema se dice infactible.

3. Determinar los puntos extremos (puntos que no están situados en segmentos de línea que unen otros dos puntos del conjunto convexo) del espacio de soluciones. Evaluar la función objetivo en esos puntos y aquél o aquéllos que maximicen (o minimicen) el objetivo, corresponden a las soluciones óptimas del problema.

Ejemplo 6. *Como ejemplo consideramos una vez más el problema*

$$\begin{array}{rl} Max. & z = x_1 + x_2 \\ s.a. & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

El proceso para resolverlo gráficamente es el siguiente (este proceso es solo aplicable al caso en que la función objetivo es lineal):

1. Comprobamos que la función objetivo $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ es lineal. En caso contrario no podemos aplicar el método que vamos a ver.

2. Representamos el conjunto de oportunidades, es decir, todas las restricciones incluyendo la no negatividad.

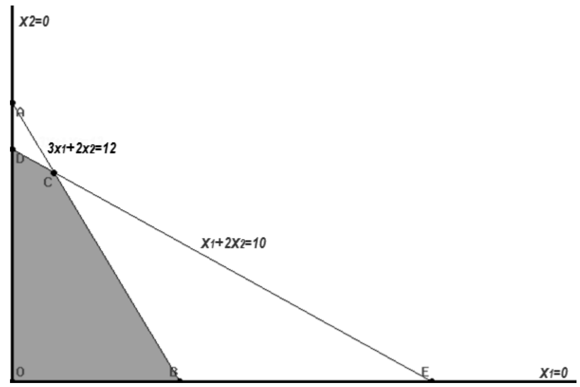


Figura 2.1: Determinación de la región factible

La región factible viene determinada por el polígono $ODCB$.

3. Calculamos los puntos extremos del espacio de soluciones.

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \Rightarrow O = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 = & 0 \\ x_1 + 2x_2 = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 5 \Rightarrow D = (0,5)$$

$$\left.\begin{array}{rl} 3x_1 + 2x_2 = & 12 \\ x_1 + 2x_2 = & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 4.5 \Rightarrow C = (1,4.5)$$

$$\left.\begin{array}{rl} 3x_1 + 2x_2 = & 12 \\ x_2 = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = 0 \Rightarrow B = (4,0)$$

4. Evaluamos la función objetivo en esos puntos extremos y aquel o aquellos que maximicen (o minimicen) el objetivo, corresponden a las soluciones óptimas del problema. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Punto extremo	(x_1, x_2)	Valor función objetivo
O	(0,0)	0
D	(0,5)	5
C	(1,4.5)	5.5
B	(4,0)	4

Ya que el punto C da el mayor valor a la función objetivo, tal punto constituye la solución óptima, notándose como $x^* =$ (1,4.5) con valor óptimo $z^* = 5.5$.

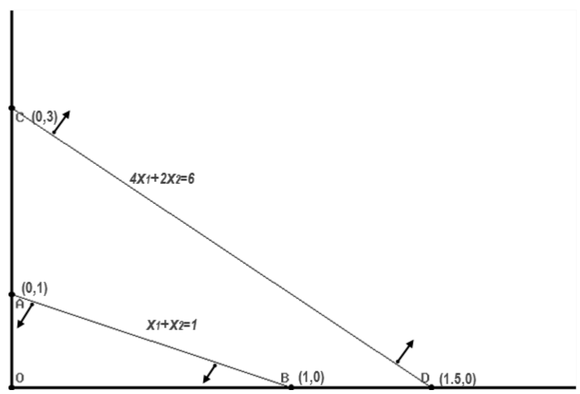
Casos especiales

A la hora de resolver un problema de programación lineal, nos podríamos encontrar con cualquiera de estas cuatro situaciones especiales que conviene conocer:

- **No Factibilidad:** Podría ocurrir que el problema propuesto no tuviese solución. Éste sería el caso en que las restricciones fuesen incompatibles, i.e., que ningún punto del plano (o, en general, del espacio real n-dimensional) puede cumplir simultáneamente todas las limitaciones a las que estamos sometidos, es decir, la región factible es un conjunto vacío.

Ejemplo 7.

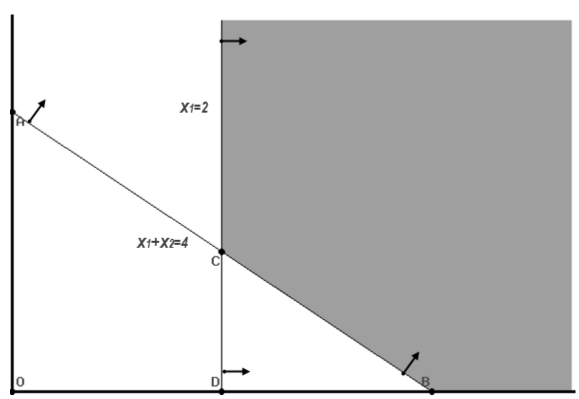
$$\begin{array}{ll} Min & z = x_1 + x_2 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



- **No Acotación:** En ocasiones, podemos encontrarnos con problemas que no tengan una solución finita; así por ejemplo, en un problema de maximización podríamos tener alguna variable que pudiese incrementarse indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones, permitiendo a la función objetivo tomar valores tan grandes como se desee. Gráficamente, tendríamos una región factible no acotada.

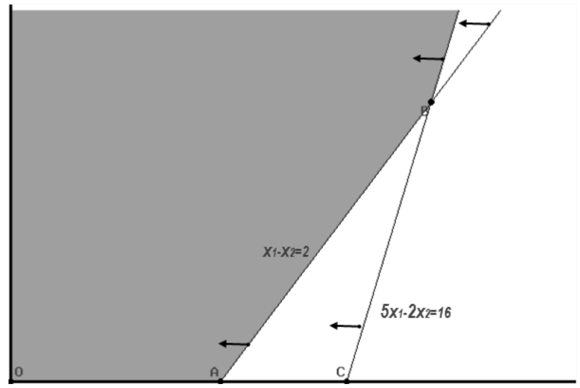
Ejemplo 8.

$$\begin{array}{ll} Max & z = 2x_1 + 5x_2 \\ s.a & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Ejemplo 9.

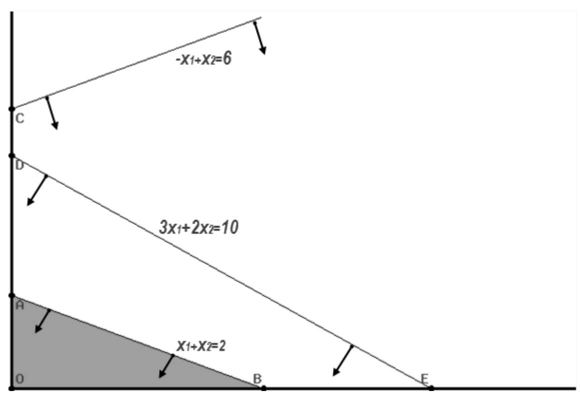
$$
\begin{array}{ll}
Min & z = -10x_1 + 4x_2 \\
s.a. & x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & 5x_1 - 2x_2 \leq 16 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



- **Redundancia:** Algunas restricciones pueden “estar de más” por no aportar nada nuevo a la “forma” de la región factible, ya que hay otras que resultan ser más restrictivas (esto suele ocurrir en problemas extensos, donde resulta difícil reconocer restricciones redundantes).

Ejemplo 10.

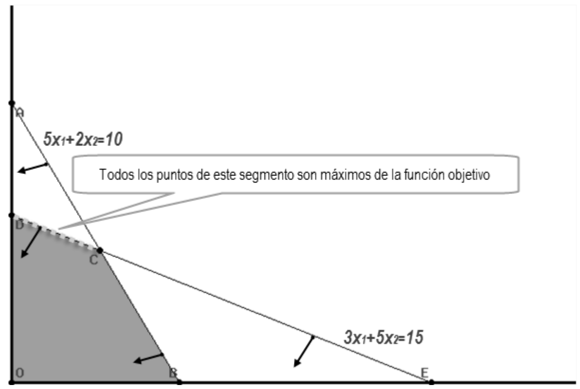
$$
\begin{array}{ll}
Max & z = 2x_1 + x_2 \\
s.a. & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



- **Soluciones Múltiples:** Un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima (e incluso infinitas). En el caso gráfico de dos variables, si dos vértices consecutivos de la región factible son solución óptima del problema, entonces todos los puntos del segmento comprendido entre ellos también serán óptimos. Esto ocurre cuando la función objetivo es paralela a alguna de las restricciones (la que se encuentra en el sentido de la maximización o minimización) el problema tiene dos óptimos que corresponden con los vértices de la región factible que define la citada restricción. Como quiera que cualquier combinación lineal convexa de los dos vértices será un punto del segmento que los une y la función objetivo es paralela al citado segmento, todos los puntos del segmento tendrán el mismo valor de la función objetivo y por tanto ésta se optimiza en todos los puntos del segmento.

Ejemplo 11.

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = 6x_1 + 10x_2 \\
s.a & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



2.6. Ejercicios

Plantear los siguientes problemas sin resolverlos:

1. La compañía minas Universal opera tres minas en West Virginia. El mineral de cada una separa antes de embarcarse en dos grados. La capacidad diaria de producción de las minas así como sus costos diarios de operación son los siguientes:

	Alto grado (Ton/día)	Bajo grado (Ton/día)	Costo (Miles de euros/día)
Mina 1	4	4	20
Mina 2	6	4	22
Mina 3	1	6	18

La compañía se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de alto grado y 65 de bajo grado para finales de la semana siguiente. Además, tiene contratos de trabajo que garantizan a los trabajadores de ambas minas el pago de cada día completo por cada día o fracción de día que la mina esté abierta. Construir un modelo para determinar el número de días que cada mina debería operar durante la siguiente semana, si Minas Universal ha de cumplir su compromiso a un costo total mínimo.

2. Un fabricante está iniciando la última semana de producción de cuatro modelos diferentes de consolas para televisores (I, II, III, IV). Cada modelo debe ensamblarse y después decorarse. Los modelos requieren 2, 1.5, 3 y 3 horas respectivamente para el ensamblado y 4, 5, 3 y 5 horas respectivamente para el decorado. Las ganancias por modelo son respectivamente, 7, 7, 6 y 9 euros. El fabricante tiene 30000 horas disponibles para ensamblar productos y 20000 para decorarlos. Construir un modelo para determinar cuantas unidades de cada modelo debe producir el fabricante durante esta semana para maximizar la ganancia si se considera que todas las unidades se pueden vender.

3. Un excursionista planea salir de campamento y hay 5 artículos que desea llevar consigo, pero entre todos sobrepasan los 60 kilos que considera que puede cargar. Para auxiliarse en la selección ha asignado un valor a cada artículo en orden ascendente de importancia:

Artículo	1	2	3	4	5
Peso	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	15

Construir un modelo para determinar que artículos deberá llevar para maximizar el valor total sin sobrepasar la restricción de peso.

4. Fary Klein ha desarrollado dos tipos de juegos de salón para adultos hechos a mano, que vende a tiendas en todo el país. Aunque la demanda de estos juegos excede la capacidad de producción, la señora Klein continúa trabajando sola y limita su trabajo semanal a 50 horas. El juego tipo I se produce en 3.5 horas y arroja una ganancia de 29 euros, mientras que juego tipo II precisa 4 horas para su producción y da una ganancia de 31 euros. ¿Cuántos juegos de cada tipo deberá producir semanalmente la señora Klein si su objetivo es maximizar la ganancia?

5. Una tienda de animales ha determinado que cada hamster debería recibir diariamente al menos 70 unidades de proteína, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Si la tienda vende los seis tipos de alimentos que se muestran en la tabla, ¿qué mezcla de alimentos satisface las necesidades a un costo mínimo para la tienda?

Alimento	Proteínas Unid/kilo	Carbohidratos Unid/kilo	Grasa Unid/kilo	Costo Unid/kilo
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

6. Una compañía manufacturera produce cuatro productos metálicos diferentes que deben maquinarse, pulirse y ensamblarse. Las necesidades específicas de tiempo (en horas) para cada producto son las siguientes:

	Maquinado	Pulido	Ensamble
Producto I	2	1	2
Producto II	3	1	1
Producto III	2	2	2
Producto IV	4	3	1

La compañía dispone semanalmente de 480 horas para el maquinado, 400 para el pulido y 400 para el ensamble. Las ganancias unitarias por producto son 6, 4, 6 y 8 euros respectivamente. La compañía tiene un contrato con un distribuidor en el que se compromete a entregar 50 unidades de producto I y 100 unidades de cualquier combinación de los productos I, II y III, según sea la producción, pero solo un máximo de 25 unidades de producto IV. ¿Cuántas unidades de cada producto deberá fabricar semanalmente la compañía, a fin de cumplir con todas las condiciones del contrato y maximizar la ganancia total?

7. Motors Recreativos fabrica carritos de golf y vehículos para nieve en sus tres plantas. La planta A produce diariamente 40 carritos de golf y 35 para nieve. La planta B produce diariamente 65 carritos de golf y ninguno para la nieve. La planta C produce diariamente 53 vehículos para nieve y ninguno para golf. Los costos diarios de operación de las plantas A, B y C son, respectivamente, 210000, 190000 y 182000 euros. ¿Cuántos días deberá operar cada planta durante el mes de septiembre (30 días), a fin de lograr una producción de 1500 carritos de golf y 1100 vehículos para nieve a un costo mínimo?

Resuelve gráficamente los problemas siguientes:

8.

a) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a.} & -x+y \leq 2 \\ & x+2y \leq 6 \\ & 2x+y \leq 6 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+3y \\ \text{s.a.} & x+y \leq 6 \\ & -x+2y \leq 8 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} \text{Min.} & -x-y \\ \text{s.a.} & x-y \geq 10 \\ & -x+y \geq 1 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

9. Las restricciones pesqueras impuestas por la CEE obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de rape; además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 10 euros/kg y el precio del rape es de 15 euros/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

10.

a) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a.} & x+y \leq 4 \\ & x \geq 1 \\ & y \leq 2 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a.} & x+2y \geq 0 \\ & x-y \geq 0 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & 3x+4y \\ \text{s.a.} & x+2y \leq 2 \\ & 4x-3y \leq 12 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{rl} \text{Max.} & x+y \\ \text{s.a.} & 3x+2y \geq 6 \\ & 2x+4y \leq 8 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$