Modelos de Series Temporales

1. Modelo de Media Móvil (MA - Moving Average)

El modelo MA(q) describe una serie temporal en función de los errores pasados (ruido blanco). Se expresa como:

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

- **Principio de optimización**: Los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ se estiman minimizando la suma de los cuadrados de los residuos (método de mínimos cuadrados) o mediante máxima verosimilitud.
- **Relación con modelos markovianos**: Los modelos MA no son directamente markovianos, ya que dependen de los errores pasados, que no son observables directamente. Sin embargo, pueden representarse en forma de espacio de estados, lo que los conecta con procesos markovianos.

2. Modelo Autorregresivo de Media Móvil (ARMA - Autoregressive Moving Average)

El modelo ARMA(p, q) combina componentes autorregresivos (AR) y de media móvil (MA). Se expresa como:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

- **Principio de optimización**: Los parámetros $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ y $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ se estiman mediante máxima verosimilitud o mínimos cuadrados.
- **Relación con modelos markovianos**: Los modelos ARMA pueden representarse en forma de espacio de estados, lo que los vincula con procesos markovianos. En este contexto, el estado actual depende solo del estado anterior, cumpliendo la propiedad de Markov.

3. Modelo Autorregresivo Integrado de Media Móvil (ARIMA - Autoregressive Integrated Moving Average)

El modelo ARIMA(p, d, q) extiende el ARMA para series no estacionarias, aplicando diferenciación (d veces) para lograr estacionariedad. Se expresa como:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = c + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)\epsilon_t$$

- **Principio de optimización**: Los parámetros $\phi_1, \ldots, \phi_p$, $\theta_1, \ldots, \theta_q$ y el orden de diferenciación d se estiman mediante máxima verosimilitud o métodos iterativos como el de Box-Jenkins.

- **Relación con modelos markovianos**: Al igual que los modelos ARMA, los modelos ARIMA pueden representarse en forma de espacio de estados, lo que los conecta con procesos markovianos. La diferenciación no afecta esta propiedad.

4. Relación con Modelos Markovianos

Los modelos markovianos se caracterizan por la propiedad de que el estado futuro depende solo del estado presente (propiedad de Markov). Aunque los modelos MA, ARMA y ARIMA no son estrictamente markovianos en su formulación original, pueden representarse en forma de espacio de estados, donde el estado actual resume toda la información relevante del pasado. En esta representación, cumplen la propiedad de Markov.

- **Espacio de estados**: En la representación de espacio de estados, una serie temporal se describe mediante un sistema de ecuaciones que incluyen una ecuación de estado (que evoluciona según un proceso markoviano) y una ecuación de observación. Esta representación es común en filtros como el de Kalman.

Resumen

- **MA, ARMA y ARIMA** son modelos clásicos para series temporales.
- Su optimización se basa en métodos como máxima verosimilitud o mínimos cuadrados.
- Aunque no son directamente markovianos, pueden representarse en forma de espacio de estados, lo que los vincula con procesos markovianos.

Estos modelos son ampliamente utilizados en econometría, finanzas y otras áreas para predecir y analizar series temporales.