Digitale Signalverarbeitung, WS 2018/19

Namen, Matrikelnummern, Gruppennummer

2. Übung

Komplexe Zahlen, Fourier-Analyse, LTI Systeme und Abtastung

1. Aufgabe

In dieser Aufgabe sollen Berechnungnen mit komplexen Zahlen durchgeführt werden. Die Ergebnisse und ein Signal sollen mit Matlab dargestellt werden.

a) Hier sollen die komplexen Zahlen c5 bis c13 berechnet werden. Gegeben ist:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -3 + j5 \\
c_2 &= \sqrt{2}e^(-j\frac{3\pi}{4}) \\
&= |c_2|cos(-\frac{3\pi}{4}) + j|c_2|sin(-\frac{3\pi}{4}) \\
&= \sqrt{2} * \frac{-1}{\sqrt{2}} + j\sqrt{2} * \frac{-1}{\sqrt{2}} \\
&= -1 - j \\
c_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \\
c_4 &= 3 + j0
\end{aligned}$$

Berechnung:

c_2 wird von der Form $\sqrt{2}e^(-j\frac{3\pi}{4})$ zu $-1 - j$ umbewandelt.

$$\begin{aligned}
c_5 &= c_1 + c_2 \\
&= -3 - 1 + j5 - j \\
&= -4 + j4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= c_1 - c_2 \\
&= -3 + j5 - (-1 - j) \\
&= -3 + 1 + j5 + j \\
&= -2 + j6
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von c_7 muss c_1 umgewandelt werden.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= |c_1|e^{j\varphi} \\
&= \sqrt{(-3)^2 + 5^2} e^{arctan(-\frac{5}{3})j} \\
&= \sqrt{34} e^{j121^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_7 &= c_1 * c_2 \\
&= \sqrt{34}\sqrt{2}e^{-j135^\circ}e^{j121^\circ} \\
&= 8.25e^{j121^\circ - j135^\circ} \\
&= 8.25e^{-j14^\circ} \\
&= 8.25e^{j346^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_8 &= |c_2| \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

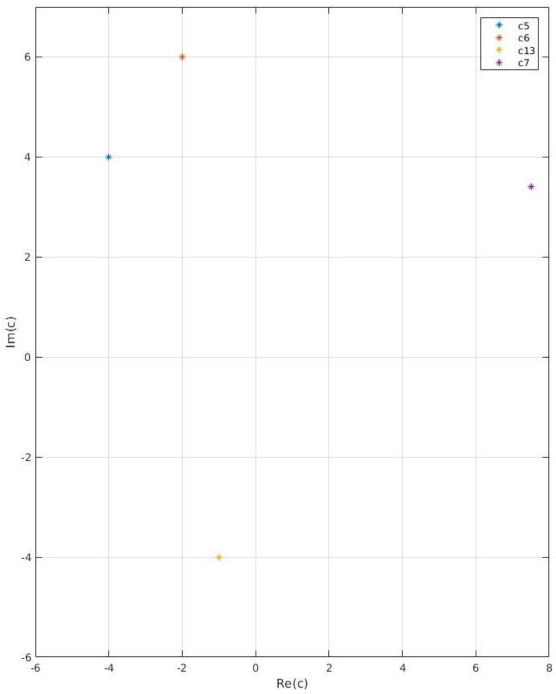
$$
\begin{aligned}
c_9 &= |c_1|^2 \\
&= \sqrt{34}^2 \\
&= 34
\end{aligned}
$$

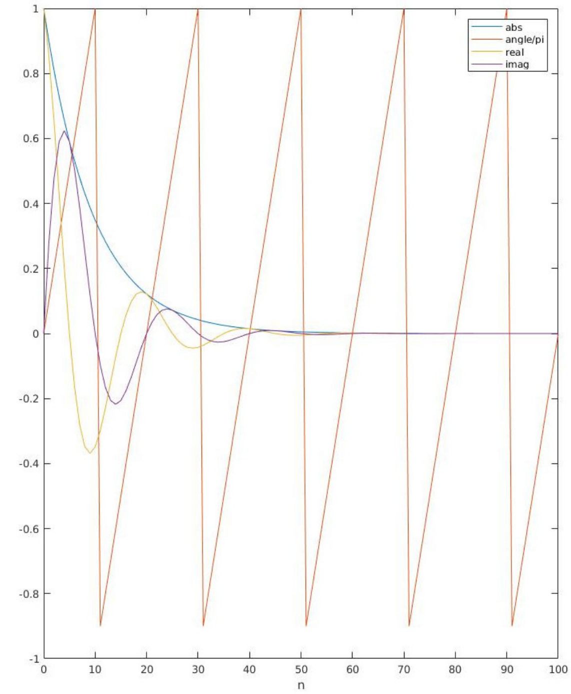
$$
\begin{aligned}
c_{10} &= |c_3| \\
&= \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{1} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= arg(c_3) \\
&= arctan(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}) \\
&= arctan(1) \\
&= 45^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= arg(c_4) \\
&= arctan(\frac{0}{3}) \\
&= 0^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{13} &= \frac{-3 + j4}{-1 - j} \\
&= \frac{-3 * (-1) + 5(-1)}{(-1)^2 + (-1)^2} + j\frac{5 * (-1) - (-3)(-1)}{(-1)^2 + (-1)^2} \\
&= \frac{3 - 5}{2} + j\frac{-5 - 3}{2} \\
&= -1 - 4j
\end{aligned}
$$





b,c)

d) Fünf Winkel sollen in [°] bzw. [rad] konvertiert werden.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 25° \\
&= \frac{25\pi}{180} \\
&= \frac{5\pi}{36}\text{rad} \\
&= 0.436\text{rad}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= 45° \\
&= \frac{45\pi}{180} \\
&= \frac{\pi}{4}\text{rad}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= -90° \\
&= \frac{(360-90)pi}{180} \\
&= \frac{270pi}{180} \\
&= \frac{3\pi}{2}\text{rad}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_4 &= \frac{\pi}{4} \\
&= \text{siehe } \alpha_2 \\
&= 45°
\end{aligned}
$$

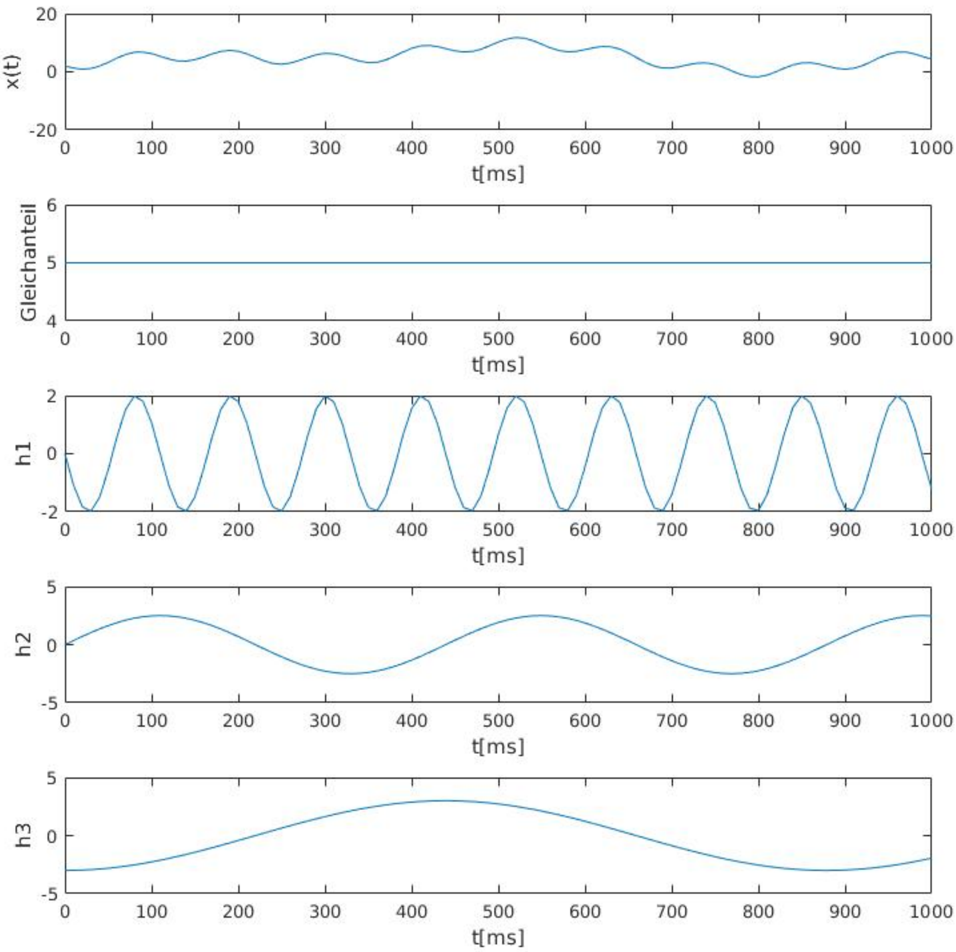
$$
\begin{aligned}
\alpha_5 &= \frac{7\pi}{3} \\
&= \frac{\frac{7\pi}{3}180}{\pi} \\
&= \frac{7 * 180}{3} \\
&= 440° \\
&= 60°
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe

Anmerkung: In dieser Aufgabe ist ein Signal und seine harmonischen Anteile mit plot dargestellt werden. Ausserdem ist sind die Fourier-Koeffizienten zu bestimmen.

a) Darstellung des gegebenen Signals $x(t) = 5 + 2sin(16\pi f_0 t) - 2.5sin(4\pi f_0 t) - 3cos(2\pi f_0 t)$ mit den harmonischen Anteilen und dem Gleichanteil.

$f_0 = 2\text{kHz}$
Gleichanteil $= 5$
$h_1 = 2sin(16\pi f_0 t)$
$h_2 = -2.5sin(4\pi f_0 t)$
$h_3 = -3cos(2\pi f_0 t)$



b) Die Fourier-Koeffizienten können mit hilfe der harmonischen Antiele bestimmt werden.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(2\pi k f_0 t) + b_k sin(2\pi k f_0 t)]$$

Der Gleichanteil ist in der Fourier-Reihe $\frac{a_0}{2}$.

$$5 = \frac{a_0}{2}$$
$$a_0 = 10$$

In $x(t)$ ist nur ein cosinus Anteil enthalten. Also ist nur ein $a_k \neq 0$. Die cosinus Anteile in der Fourier-Reihe haben die Form $a_k cos(2\pi k f_0 t)$.

$$h_3 = -3cos(2\pi f_0 t)$$

Also ist bei h_3 $k = 1$ wegen der 2π und $a_1 = -3$.

Jetzt bleiben noch die beiden sinus Anteile von $x(t)$.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2sin(16\pi f_0 t) \\ &= 2sin(8 * 2\pi f_0 t) \\ h_2 &= -2.5sin(4\pi f_0 t) \\ &= -2.5sin(2 * 2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Bei h_1 ist leicht zu sehen das $k = 8$ ist.
Also: $b_8 = 2$
Mit h_2 kann b_2 bestimmt werden.
Also: $b_2 = -2.5$

$$\begin{aligned} a_0 &= 10 \\ a_1 &= -3 \\ b_2 &= -2.5 \\ b_8 &= 2 \end{aligned}$$

c) Anmerkung: In dieser Aufgabe sollen die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k des Signals $x(t)$ berechnet werden.

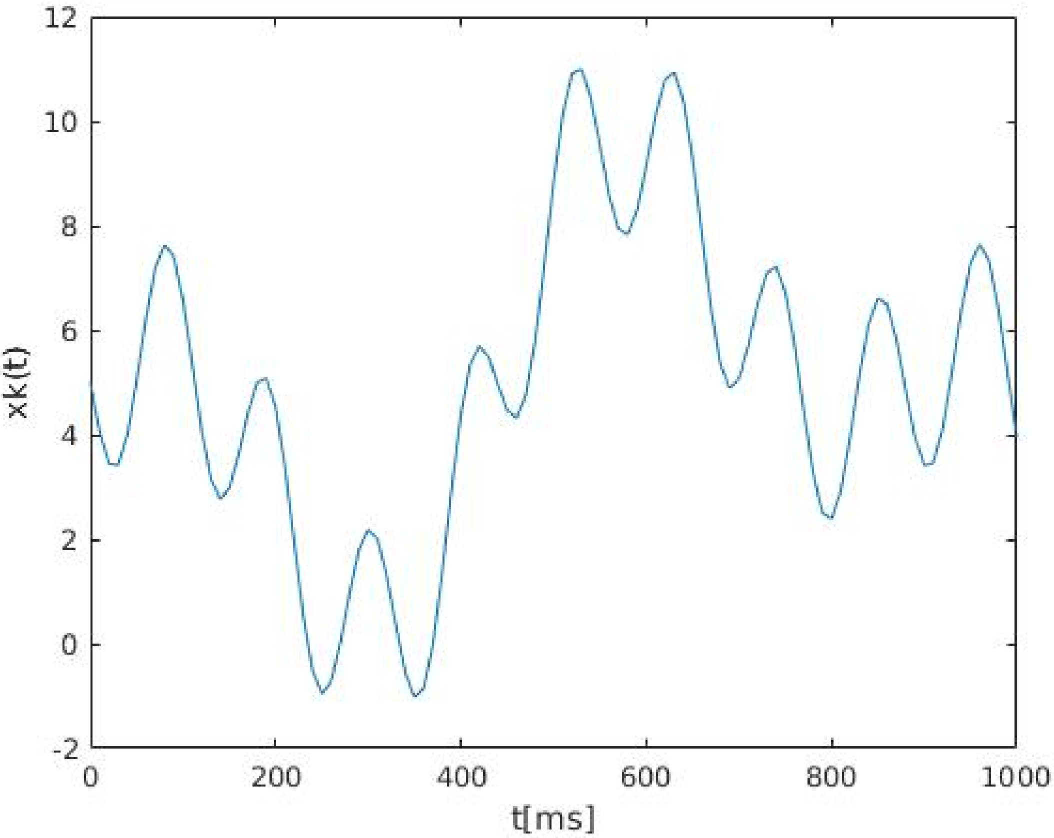
$c_0 = \frac{a_0}{2}$
$c_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k j)$
$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + b_k j)$

$$c_0 = \frac{10}{2} = 5$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(-3) = -1.5 \\ c_2 &= \frac{1}{2}(2.5j) = 1.25j \\ c_8 &= \frac{1}{2}(-2j) = -j \\ c_{-1} &= \frac{1}{2}(-3) = -1.5 \\ c_{-2} &= \frac{1}{2}(-2.5j) = -1.25j \\ c_{-8} &= \frac{1}{2}(2j) = j \end{aligned}$$

Die komplexe Fourier-Reihe: $x_k(t) = j \cdot e^{-j16\pi f_0 t} - 1.25j \cdot e^{-j4\pi f_0 t} + 1.5j \cdot e^{-j2\pi f_0 t} + 5 - 1.5j \cdot e^{j2\pi f_0 t} + 1.25e^{j4\pi f_0 t} - j \cdot e^{-j16\pi f_0 t}$ Die Signale sind nicht gleich weil nur die reelle Anteil dargestellt wird.

d) In dieser Aufgabe ist ein Signal und seine harmonischen Anteile mittels plot darzustellen.



3. Aufgabe

a) LTI bedeuted linear und zeitinvariant. Ein System ist dann ein LTI-System wenn es die Eigenschaften der linearität und zeitinvarianz aufweist. Um zu überprüfen ob ein System linear und zeitinvariant ist müssen folgende eigenschaften gelten:

Linearität:
Es ist egal ob zuerst die beiden Signale addiert werden und dann das System durchlaufel oder beide Signale das System zuerst durchlaufen und dann addiert werden.

$$f(\alpha x_1(t) + \alpha x_2(t)) = f(\alpha x_1(t)) + f(\alpha x_2(t))$$

Zeitinvarianz:
Bei zeitinvarianten System muss ein zeitliches Verschieben des Eingangsignal $(y(t))$ zu dem gleichen zeitlichen Verschub (T) beim Ausgangsignal $x(t)$ führen.

$$y(t - T) = f(x(t - T))$$

b) Anmerkung: Hier sind 3 Signale auf linearität und zeitinvarianz zu prüfen.

Gegeben:

$$\text{(i) } y_1(t) = [x(t)]^2$$
$$\text{(ii) } y_2(t) = \int_{-\infty}^{1} x(t)dt$$
$$\text{(iii) } y_3(t) = cos(w_c t)x(t)$$

Berechnungen:

(i) $f(x) = |x|^2$
Linearität:

$$\begin{aligned}
y_a &= [\alpha x_1(t)]^2 + [\beta x_2(t)]^2 \\
&= \alpha^2 x_1(t)^2 + \beta^2 x_2(t)^2 \\
y_b &= [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]^2 \\
&= [\alpha x_1(t)]^2 + 2\alpha x_1(t) x_2(t) + [\beta x_2(t)]^2 \\
&\text{also:} \\
y_a &\neq y_b
\end{aligned}$$

y_1 ist nicht linear.

Zeitinvarianz:
Annahme: $y_1(t-T) = f(x(t-T))$

$$\begin{aligned}
y_1(t-T) &= f(x(t-T)) \\
|x(t-T)|^2 &= |x(t-T)|^2
\end{aligned}$$

$y_1(t-T) = f(x(t-T))$ also ist y_1 zeitinvariant.

(ii) $f(x) = \int_{-\infty}^{1} x dt$
Linearität:

$$\begin{aligned}
y_a &= \int_{-\infty}^{1} \alpha x_1(t) dt + \int_{-\infty}^{1} \beta x_2(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{1} \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) dt \\
\\
y_b &= \int_{-\infty}^{1} \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) dt \\
&\text{also:} \\
y_a &= y_b
\end{aligned}$$

y2 ist linear.

Zeitinvarianz: Annahme: $y_2(t-T) = f(x(t-T))$

$$\begin{aligned}
y_2(t-T) &= f(x(t-T)) \\
\int_{-\infty}^{t-T} x(t-T) d(t-T) &= \int_{-\infty}^{t-T} x(t-T) dt
\end{aligned}$$

Die Annahme hat sich als falsch herausgestellt also ist y_2 nicht zeitinvariant.

(iii) $f(x) = cos(w_c t)x$ Linearität:

$$\begin{aligned}
y_a &= \alpha cos(\omega_c t) x_1(t) + \beta cos(\omega_c t) * x_2(t) \\
&= cos(\omega_c t)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \\
\\
y_b &= cos(\omega_c t)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \\
&\text{also:} \\
y_b &= y_a
\end{aligned}$$

y_3 ist linear.

Zeitinvarianz:

$$y_3(t-T) = cos(\omega_c t - T)x(t-T)$$
$$f(x(t-T)) = cos(\omega_c t)x(t-T)$$

$y_3(t-T) \neq f(x(t-T))$ also ist y_3 nicht zeitinvariant.

4. Aufgabe

Anmerkung: In dieser Aufgabe sollen die Spektren eines mit 25kHz und 15kHz abgetasteten Analogsingals dargestellt und diskutiert werden.

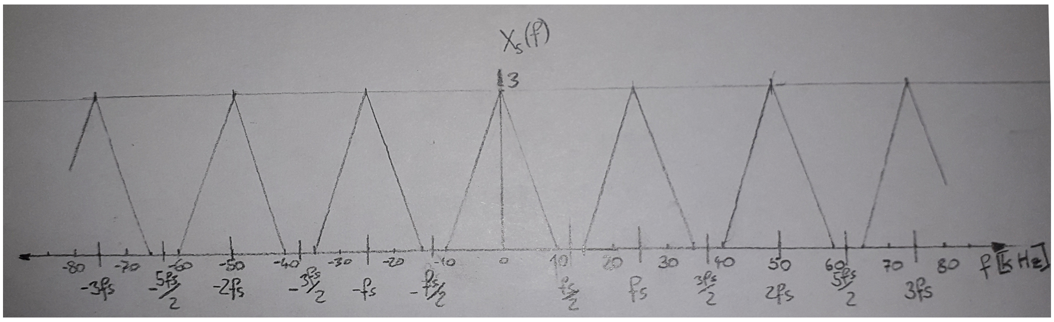


Figure 1: Das Spektrum des mit 25kHz abgetasteten Analogsignals.

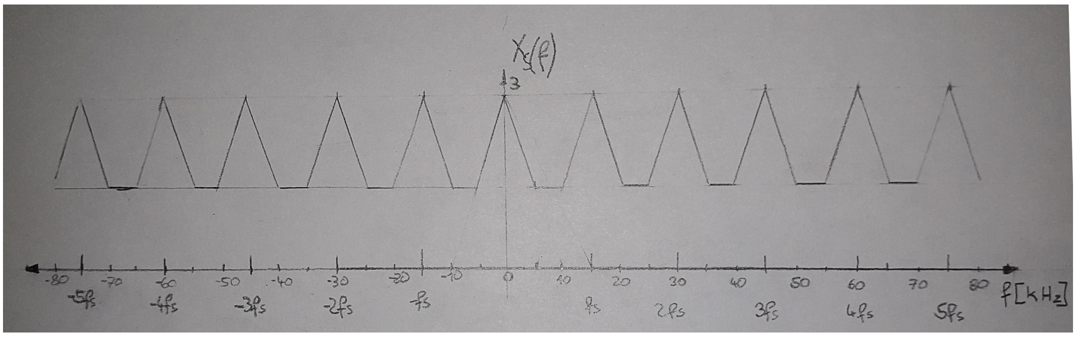


Figure 2: Dieses Bild zeigt das Spektrum des mit 15kHz abgetasteten Analogsignals.

Bei einer Abtastfrequenz von 15kHz wird das Nyquist-Abtasttheorem nicht eingehalten also kann das Signal nicht ohne Fehler rekonstruiert werden. Es entsteht Aliasing. Außerdem ist zu erkennen dass sich das Spektrum wiederholt.