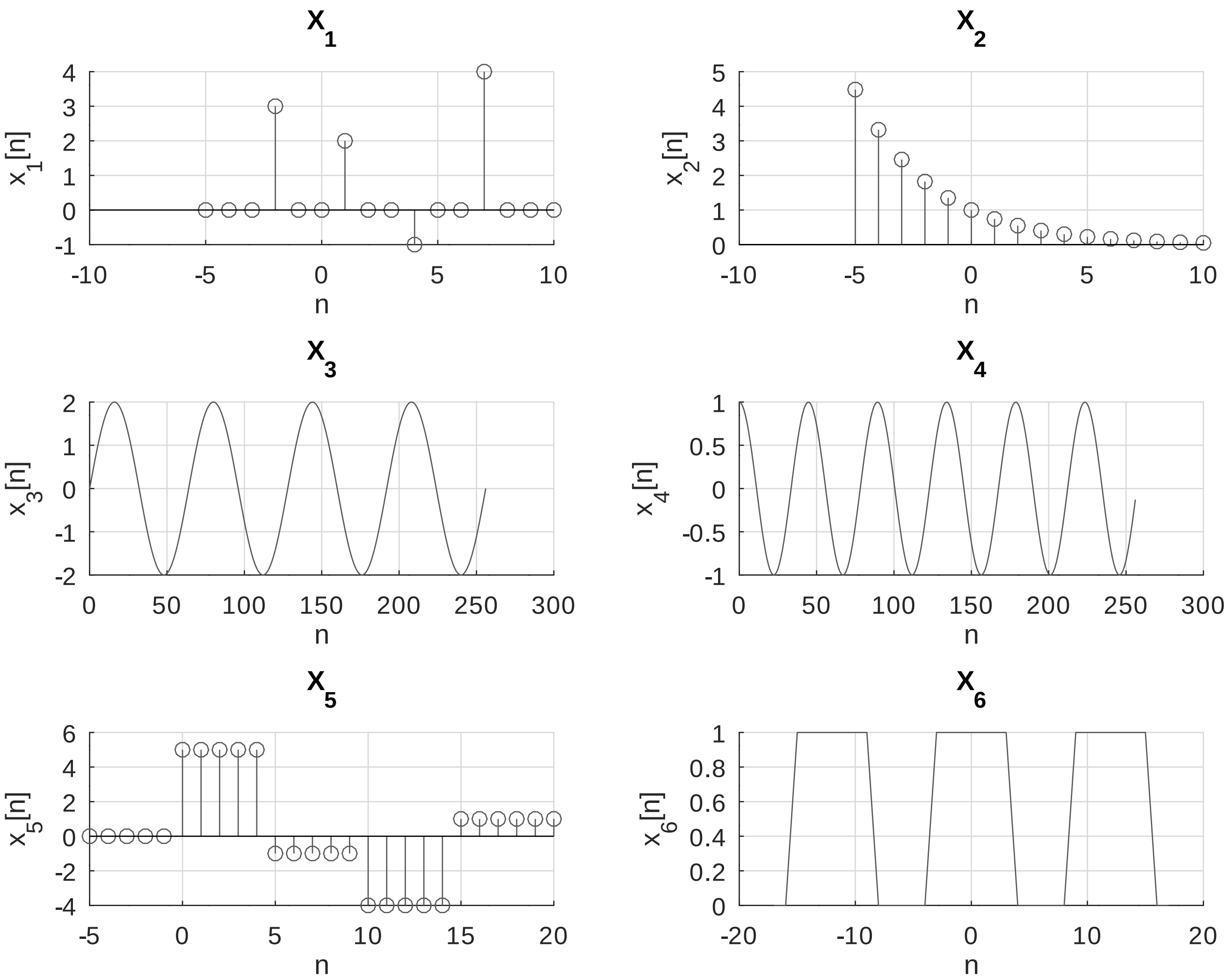
Digitale Signalverarbeitung, WS 2019/20

Bernhard Fürst k0442418, Sebastian Ortner k01607533,
Gruppe 34

1. Übung
Einführung in Matlab und Fourier-Reihen

1. Aufgabe

a)



b)
- $x_3 \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{64}$ ist aus der Angabe ablesbar.
- $x_4 \Rightarrow \Omega_0 = \frac{9}{64}$ ist aus der Angabe ablesbar.

c)
- x_3 ist periodisch, die Periodendauer ist abzulesen bei x= 64.
- $x_4 \rightarrow n = \frac{2\pi k}{\frac{9}{64}} \Rightarrow \frac{2\pi * 64k}{9}$
  k müsste eine irrationale Zahl sein damit n ein Element aus den ganzen Zahlen ist. Zu diesem diskreten Punkt gibt es keine Periodendauer.

d) Periodische Signale aus 1a) sind Signale X3 und x6

Funktion (implementiert in File leistung.m)

Resultate siehe 1f) Tabelle

e) Funktion (implementiert in File energie.m)

Resultate siehe 1f) Tabelle

f)

Funktion	Mittlere Leistung	Energie
x1		30.0000
x3	1.99222	
x6	0.60000	21.0000
x7		9.6846

2. Aufgabe

3. Aufgabe

a) Der Durchschnitt unserer Dreiecksfunktion ist 0 was leicht anhand der Symmetrie bezüglich der x-Achse gesehen werden kann. Damit ist auch der DC-Anteil der Fourierreihe, a_0, 0. Dies kann auch folgendermassen gezeigt werden :

$$a_0 \quad = \tfrac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$$

Aufgrund der Symmetrie in der Funktion erkennen wir dass das Integral von 0 nach $\frac{T_0}{2}$ gleich dem Integral von $\frac{T_0}{2}$ nach T_0 sein muss. Daher können wir sagen dass :

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \tag{1}$$

Wir können uns nun auf einen Teil der zweiteiligen Funktion beschränken. Da die Funktion an der Strecke von 0 nach $\frac{T}{2}$ die Form $A - \frac{4A}{T}$ hat gilt :

$$\begin{aligned}
a_0 = & \tfrac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A - \tfrac{4A}{T_0} t dt \\
= & \tfrac{2}{T_0} (At - \tfrac{4A}{T_0} \tfrac{t^2}{2}) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
= & \tfrac{2}{T_0} (A\tfrac{T_0}{2} - \tfrac{2A\frac{T_0^2}{4}}{T_0} - A0 - \tfrac{2A\frac{0}{4}}{T_0}) \\
= & \tfrac{2}{T_0} (A\tfrac{T_0}{2} - \tfrac{AT_0^2}{2T_0} - 0 - 0) \\
= & \tfrac{2}{T_0} (A\tfrac{T_0}{2} - A\tfrac{T_0}{2} - 0) \\
= & \underline{0}
\end{aligned}$$

Um a_n zu finden können wir, wieder aufgrund der oben festgestellten Symmetrie, folgenden Term evaluieren :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega ntdt \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(A-\frac{4A}{T}t)\cos\omega ntdt \\
&= \frac{A4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(1-\frac{4}{T}t)\cos\omega ntdt \\
&= \frac{A4}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\omega ntdt-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{4}{T}t\cos\omega ntdt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\omega nt)\Big|_0^T-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{4}{T}t\cos\omega ntdt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2}-(\frac{1}{\omega nt}\sin\frac{2\pi}{T}n0)-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{4}{T}t\cos\omega ntdt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\pi n-0-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{4}{T}t\cos\omega ntdt)
\end{aligned}$$

Ganzzahlige Vielfache von pi ergeben immer einen Sinus von 0.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{A4}{T}(0-0-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{4}{T}t\cos\omega ntdt) \\
&= \frac{A4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{-4}{T}t\cos\omega ntdt \\
&= \frac{-16A}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cos\omega ntdt \\
&= \frac{-16A}{T^2}((t\frac{1}{\omega n}\sin\omega nt)\Big|_0^{\frac{T}{2}}-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{\omega n}\sin\omega ntdt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}((\frac{\frac{T}{2}}{\omega n}\sin\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2}-\frac{1}{\omega n}\sin 0)-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{\omega n}\sin\omega ntdt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}((\frac{\frac{T}{2}}{\omega n}\sin\pi n-0)-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{\omega n}\sin\omega ntdt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}(0-\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{1}{\omega n}\sin\omega ntdt) \\
&= \frac{16A}{T^2}(\frac{-1}{\omega^2n^2}\cos\omega nt)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{16A}{T^2}\frac{1}{\omega^2n^2}(-\cos\omega nt)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4A}{\pi^2n^2}(-\cos\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2}+\cos 0) \\
&= \frac{4A}{\pi^2n^2}(-\cos\pi n+1)
\end{aligned}$$

Bei ungeraden Werten von n evaluiert dieser Term zu $\frac{8A}{\pi^2n^2}$ bei geraden zu 0 da der Cosinus bei ungeraden Vielfachen von $\pi - 1$ annimmt und bei geraden 1.

Der Faktor b_n ist bei geraden periodischen Funktionen, d.h. periodischen Funktionen die symmetrisch zur y-Achse sind, immer 0.

Eingesetzt in die Fourierreihe erhalten wir nun.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2\pi(2n-1)f_0t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi(2n-1)f_0t)}{(2n-1)^2}$$

n schreitet voran als $2n-1$ da wir nur an ungeraden Werten interessiert sind.

b) Die Spitzen der Dreiecksfunktion sind bei 10 Harmonischen noch deutlich rundlich und werden bei 1000 eindeutig spitzer. Auch der Verlauf der Steigung ist flacher und ähnelt mehr einer Geraden.