Report Übung 01

Bernhard Fürst
k0442418

Sebastian Ortner
kxxxxxxxxxx

November 11, 2019

1

a

b

- $x_3 \to f_0 = \frac{\frac{2\pi}{64}}{1} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{64}$
- $x_4 \to f_0 = \frac{9}{64*2\pi} \Rightarrow \frac{9}{64}$

c

- x_3 ist periodisch, die Periodendauer ist abzulesen bei x= 64.
- $x_4 \to n = \frac{2\pi k}{\frac{9}{64}} \Rightarrow \frac{2\pi*64k}{9}$
  k müsste eine irrationale Zahl sein damit n ein Element aus den ganzen Zahlen ist. Zu diesem diskreten Punkt gibt es keine Periodendauer.

d

3

Der Durchschnitt unserer Dreiecksfunktion ist 0 was leicht anhand der Symmetrie bezüglich der x-Achse gesehen werden kann. Damit ist auch der DC-Anteil der Fourierreihe, a_0, 0. Dies kann auch folgendermassen gezeigt werden :

$$a_0 \quad = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$$

Aufgrund der Symmetrie in der Funktion erkennen wir dass das Integral von 0 nach $\frac{T_0}{2}$ gleich dem Integral von $\frac{T_0}{2}$ nach T_0 sein muss. Daher können wir sagen dass :

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \tag{1}$$

Wir können uns nun auf einen Teil der zweiteiligen Funktion beschränken. Da die Funktion an der Strecke von 0 nach $\frac{T}{2}$ die Form $A - \frac{4A}{T}$ hat gilt :

$$\begin{aligned}
a_0 = &\quad \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A - \frac{4A}{T_0} t dt \\
= &\quad \frac{2}{T_0}(At - \frac{4A}{T_0}\frac{t^2}{2})\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
= &\quad \frac{2}{T_0}(A\frac{T_0}{2} - \frac{2A\frac{T_0^2}{4}}{T_0} - A0 - \frac{2A\frac{0}{4}}{T_0}) \\
= &\quad \frac{2}{T_0}(A\frac{T_0}{2} - \frac{AT_0^2}{2T_0} - 0 - 0) \\
= &\quad \frac{2}{T_0}(A\frac{T_0}{2} - A\frac{T_0}{2} - 0) \\
= &\quad \underline{0}
\end{aligned}$$

Um a_n zu finden können wir, wieder aufgrund der oben festgestellten Symmetrie, folgenden Term evaluieren :

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega n t dt \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (A - \frac{4A}{T}t)\cos\omega n t dt \\
&= \frac{A4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (1 - \frac{4}{T}t)\cos\omega n t dt \\
&= \frac{A4}{T}(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\omega n t dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t\cos\omega n t dt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\omega n t)\Big|_0^T - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t\cos\omega n t dt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2} - (\frac{1}{\omega n t}\sin\frac{2\pi}{T}n0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t\cos\omega n t dt) \\
&= \frac{A4}{T}((\frac{1}{\omega n}\sin\pi n - 0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t\cos\omega n t dt)
\end{aligned}
$$

Ganzzahlige Vielfache von pi ergeben immer einen Sinus von 0.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{A4}{T}(0 - 0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t\cos\omega n t dt) \\
&= \frac{A4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{-4}{T}t\cos\omega n t dt \\
&= \frac{-16A}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos\omega n t dt \\
&= \frac{-16A}{T^2}((t\frac{1}{\omega n}\sin\omega n t)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n}\sin\omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}((\frac{\frac{T}{2}}{\omega n}\sin\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2} - \frac{1}{\omega n}\sin 0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n}\sin\omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}((\frac{\frac{T}{2}}{\omega n}\sin\pi n - 0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n}\sin\omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2}(0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n}\sin\omega n t dt) \\
&= \frac{16A}{T^2}(\frac{-1}{\omega^2 n^2}\cos\omega n t)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{16A}{T^2}\frac{1}{\omega^2 n^2}(-\cos\omega n t)\Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4A}{\pi^2 n^2}(-\cos\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{2} + \cos 0) \\
&= \frac{4A}{\pi^2 n^2}(-\cos\pi n + 1)
\end{aligned}
$$

Bei ungeraden Werten von n evaluiert dieser Term zu $\frac{8A}{\pi^2 n^2}$ bei geraden zu 0 da der Cosinus bei ungeraden Vielfachen von $\pi - 1$ annimmt und bei geraden 1.

Der Faktor b_n ist bei geraden periodischen Funktionen, d.h. periodischen Funktionen die symmetrisch zur y-Achse sind, immer 0.

Eingesetzt in die Fourierreihe erhalten wir nun.

$$
x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}\cos(2\pi(2n-1)f_0 t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi(2n-1)f_0 t)}{(2n-1)^2}
$$

n schreitet voran als $2n - 1$ da wir nur an ungeraden Werten interessiert sind.