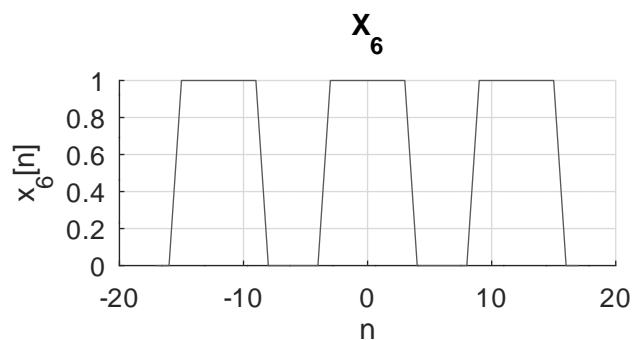
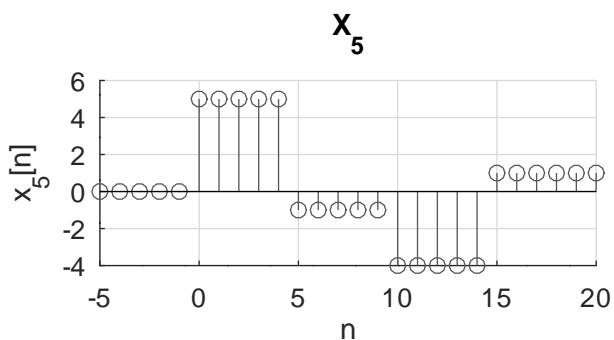
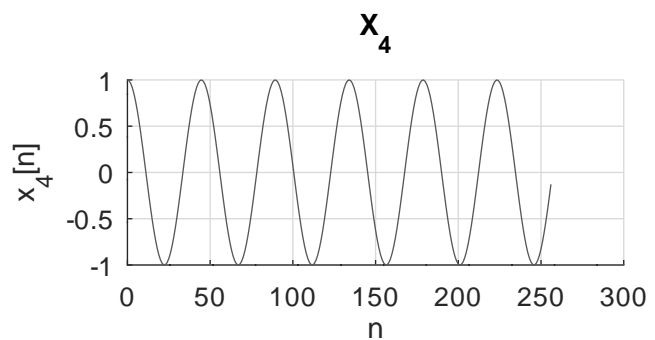
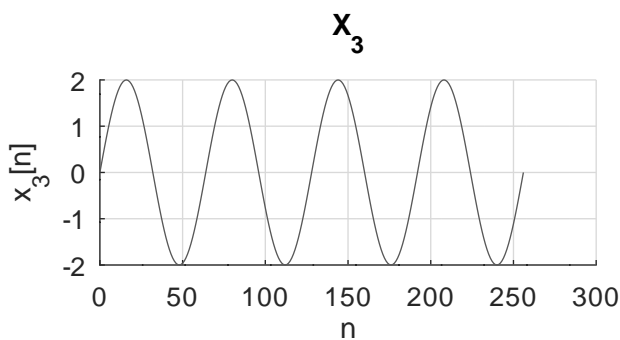
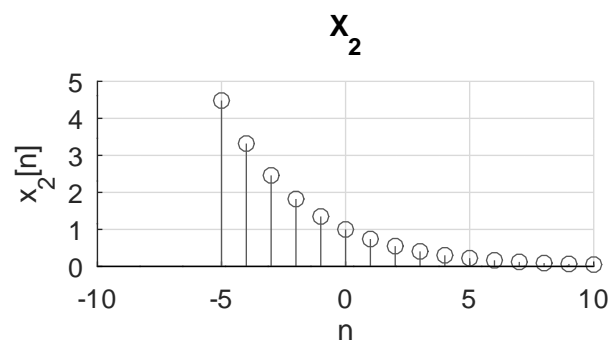
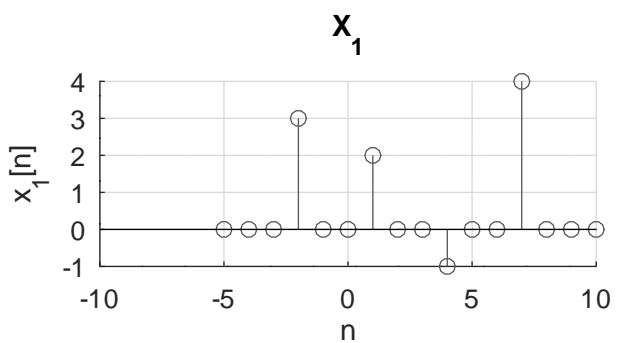


1. Übung
Überschrift der Übung

1. Aufgabe

a)



b) • $x_3 \rightarrow f_0 = \frac{2\pi}{64} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{64}$

• $x_4 \rightarrow f_0 = \frac{9}{64 \cdot 2\pi} \Rightarrow \frac{9}{64}$

c) • x_3 ist periodisch, die Periodendauer ist abzulesen bei $x = 64$.

• $x_4 \rightarrow n = \frac{2\pi k}{\frac{9}{64}} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 64 k}{9}$

k müsste eine irrationale Zahl sein damit n ein Element aus den ganzen Zahlen ist. Zu diesem diskreten Punkt gibt es keine Periodendauer.

d)

2. Aufgabe

a

3. Aufgabe

Der Durchschnitt unserer Dreiecksfunktion ist 0 was leicht anhand der Symmetrie bezüglich der x-Achse gesehen werden kann. Damit ist auch der DC-Anteil der Fourierreihe, a_0 , 0. Dies kann auch folgendermassen gezeigt werden :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Aufgrund der Symmetrie in der Funktion erkennen wir dass das Integral von 0 nach $\frac{T_0}{2}$ gleich dem Integral von $\frac{T_0}{2}$ nach T_0 sein muss. Daher können wir sagen dass :

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \quad (1)$$

Wir können uns nun auf einen Teil der zweiteiligen Funktion beschränken. Da die Funktion an der Strecke von 0 nach $\frac{T}{2}$ die Form $A - \frac{4A}{T}$ hat gilt :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} A - \frac{4A}{T_0} t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left(At - \frac{4A}{T_0} \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\ &= \frac{2}{T_0} \left(A \frac{T_0}{2} - \frac{2A}{T_0} \frac{T_0^2}{4} - A \cdot 0 - \frac{2A \cdot 0}{T_0} \right) \\ &= \frac{2}{T_0} \left(A \frac{T_0}{2} - \frac{AT_0^2}{2T_0} - 0 - 0 \right) \\ &= \frac{2}{T_0} \left(A \frac{T_0}{2} - A \frac{T_0}{2} - 0 \right) \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

Um a_n zu finden können wir, wieder aufgrund der oben festgestellten Symmetrie, folgenden Term evaluieren :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega n t dt \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (A - \frac{4A}{T}t) \cos \omega n t dt \\
&= \frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (1 - \frac{4}{T}t) \cos \omega n t dt \\
&= \frac{4A}{T} (\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega n t dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t \cos \omega n t dt) \\
&= \frac{4A}{T} ((\frac{1}{\omega n} \sin \omega n t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t \cos \omega n t dt) \\
&= \frac{4A}{T} ((\frac{1}{\omega n} \sin \frac{2\pi}{T}n \frac{T}{2} - (\frac{1}{\omega n} \sin \frac{2\pi}{T}n 0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t \cos \omega n t dt) \\
&= \frac{4A}{T} ((\frac{1}{\omega n} \sin \pi n - 0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t \cos \omega n t dt)
\end{aligned}$$

Ganzzahlige Vielfache von π ergeben immer einen Sinus von 0.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4A}{T} (0 - 0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T}t \cos \omega n t dt) \\
&= \frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{4}{T}t \cos \omega n t dt \\
&= \frac{-16A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos \omega n t dt \\
&= \frac{-16A}{T^2} ((t \frac{1}{\omega n} \sin \omega n t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n} \sin \omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2} ((\frac{T}{2} \frac{1}{\omega n} \sin \frac{2\pi}{T}n \frac{T}{2} - \frac{1}{\omega n} \sin 0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n} \sin \omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2} ((\frac{T}{2} \frac{1}{\omega n} \sin \pi n - 0) - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n} \sin \omega n t dt) \\
&= \frac{-16A}{T^2} (0 - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\omega n} \sin \omega n t dt) \\
&= \frac{16A}{T^2} (\frac{-1}{\omega^2 n^2} \cos \omega n t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{16A}{T^2} \frac{1}{\omega^2 n^2} (-\cos \omega n t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4A}{\pi^2 n^2} (-\cos \frac{2\pi}{T}n \frac{T}{2} + \cos 0) \\
&= \frac{4A}{\pi^2 n^2} (-\cos \pi n + 1)
\end{aligned}$$

Bei ungeraden Werten von n evaluiert dieser Term zu $\frac{8A}{\pi^2 n^2}$ bei geraden zu 0 da der Cosinus bei ungeraden Vielfachen von $\pi - 1$ annimmt und bei geraden 1.

Der Faktor b_n ist bei geraden periodischen Funktionen, d.h. periodischen Funktionen die symmetrisch zur y-Achse sind, immer 0.

Eingesetzt in die Fourierreihe erhalten wir nun.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos(2\pi(2n-1)f_0 t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2n-1)f_0 t)}{(2n-1)^2}$$

n schreitet voran als $2n-1$ da wir nur an ungeraden Werten interessiert sind.