Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №4
по дисциплине «**Прикладная математика**».

Методы решения СЛАУ

Автор: Кирьянов Глеб Дмитриевич

Факультет: ФИТиП

Группа: M32091

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2023

Метод Гаусса

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента. На каждом шаге исключения i-го неизвестного в качестве ведущего используется уравнение (с i-го по n-ое), содержащее максимальный по модулю коэффициент (главный элемент). Сам же главный коэффициент может выбираться тремя способами: по столбцу, по строке или по всей матрице. При использовании двух последних способов происходит перестановка столбцов матрицы системы, что приводит к изменению порядка следования компонент вектора неизвестных и требует его восстановления по окончании процесса решения.

Метод с использованием LU-разложения

LU-разложение — это представление матрицы A в виде A=L•U, где L — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, а U — верхнетреугольная матрица. Такое разложение помогает нам упростить решение СЛАУ и уменьшить количество вычислений. Также с помощью применения данного алгоритма можно вычислить определитель, обратную матрицу и др.

Алгоритм заключается в том, что мы проводим элементарные преобразования над матрицей и одновременно те же операции над единичной матрицы, чтобы получить верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы.

Рассмотрим алгоритм на примере матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Результаты после каждого шага:

1. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & l_{2,2} & 0 \\ 0.5 & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -25 & l_{3,3} \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{pmatrix}$$

3. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -25 & 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{pmatrix}$$

Проверкой удостоверяемся, что L*U=A

Если известно LU-разложение матрицы, то исходная система может быть записана как
LU x = b

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система
Ly = b
Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система
Ux = y
Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Метод Зейделя

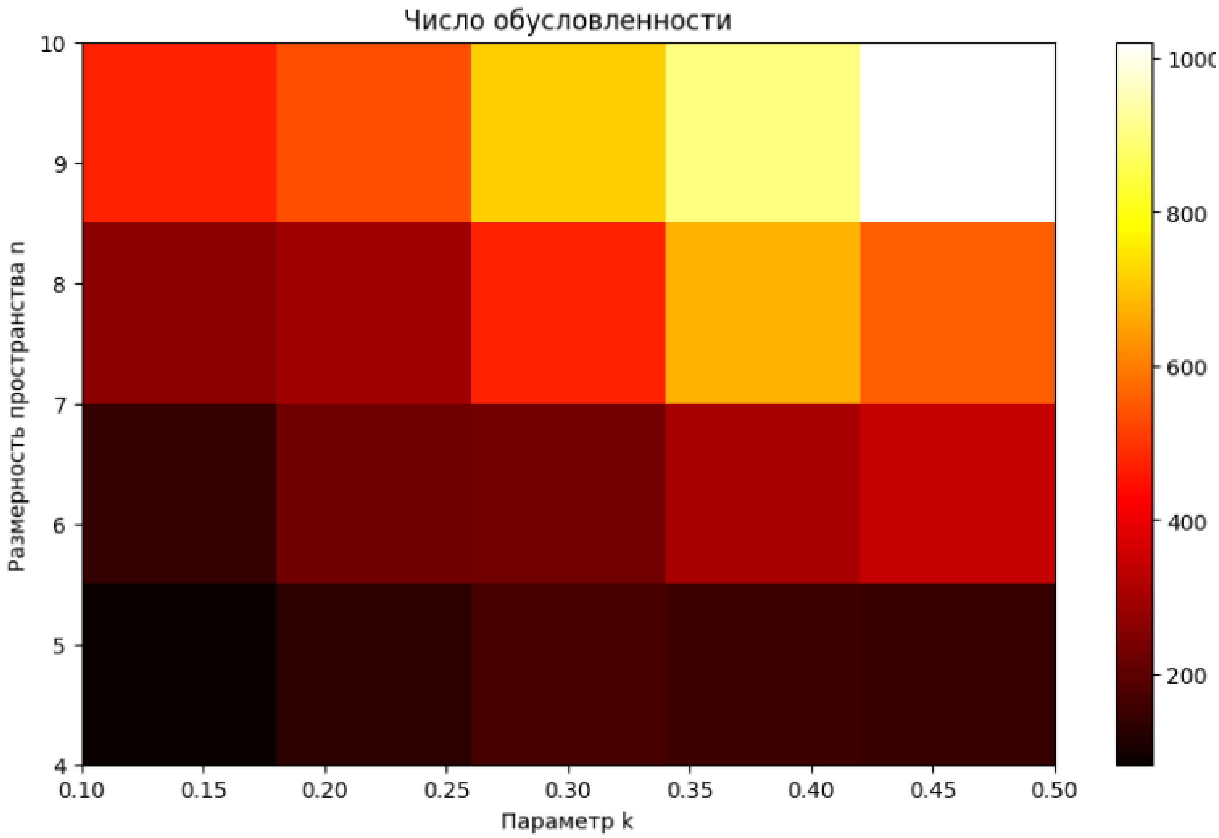
Метод Зейделя представляет собой классический итерационный метод решения системы линейных уравнений. Основная его идея заключается в том, что при вычислении очередного приближения

x^(k+1) его уже полученные компоненты x1^(k+1), ...,xi - 1^(k+1) сразу же используются для вычисления xi^(k+1).
Предполагая, что k-ые приближения корней известны, согласно Зейделю будем строить (k + 1)-е приближения корней по формулам

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1$$
$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2$$
$$\ldots$$
$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n$$

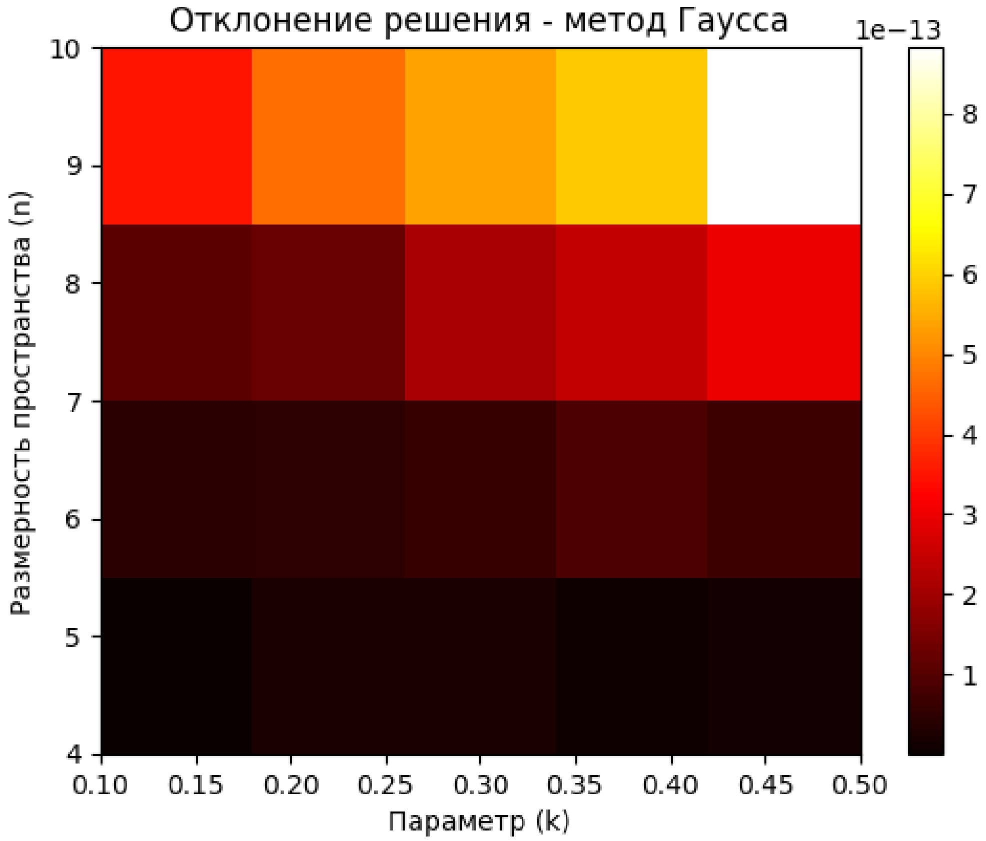
где $x^{(0)}$ - некоторое начальное приближение к решению.

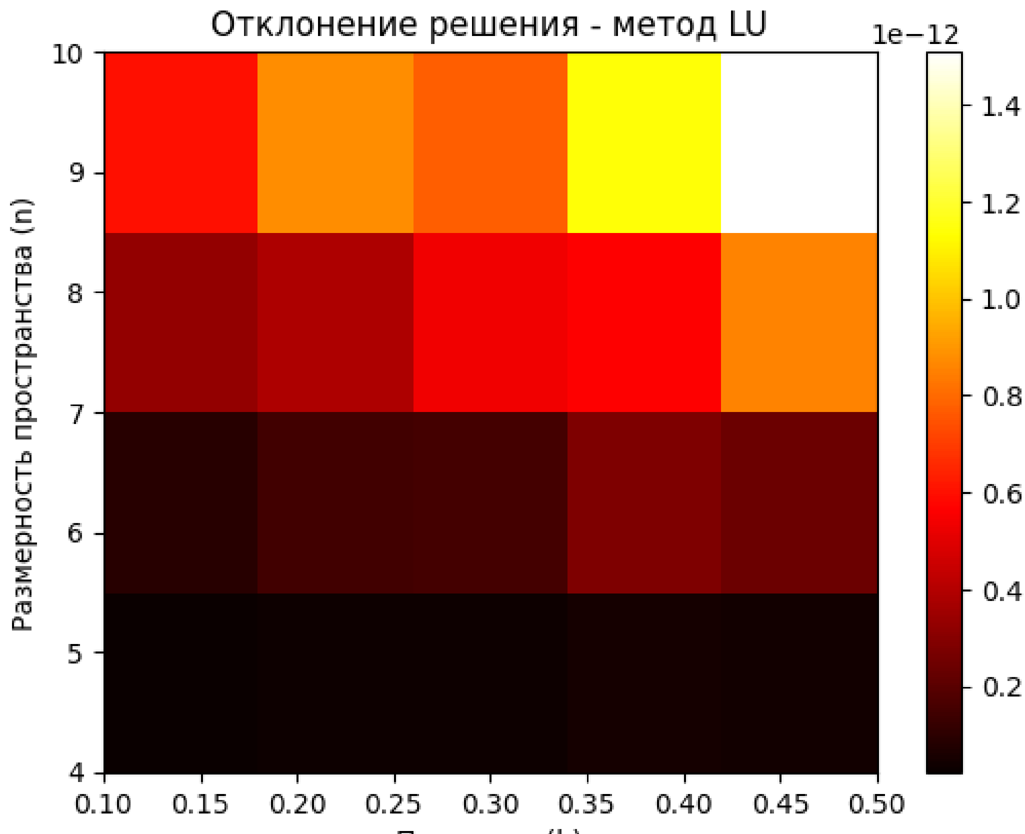
Оценка зависимости числа обусловленности в зависимости от параметра k и n

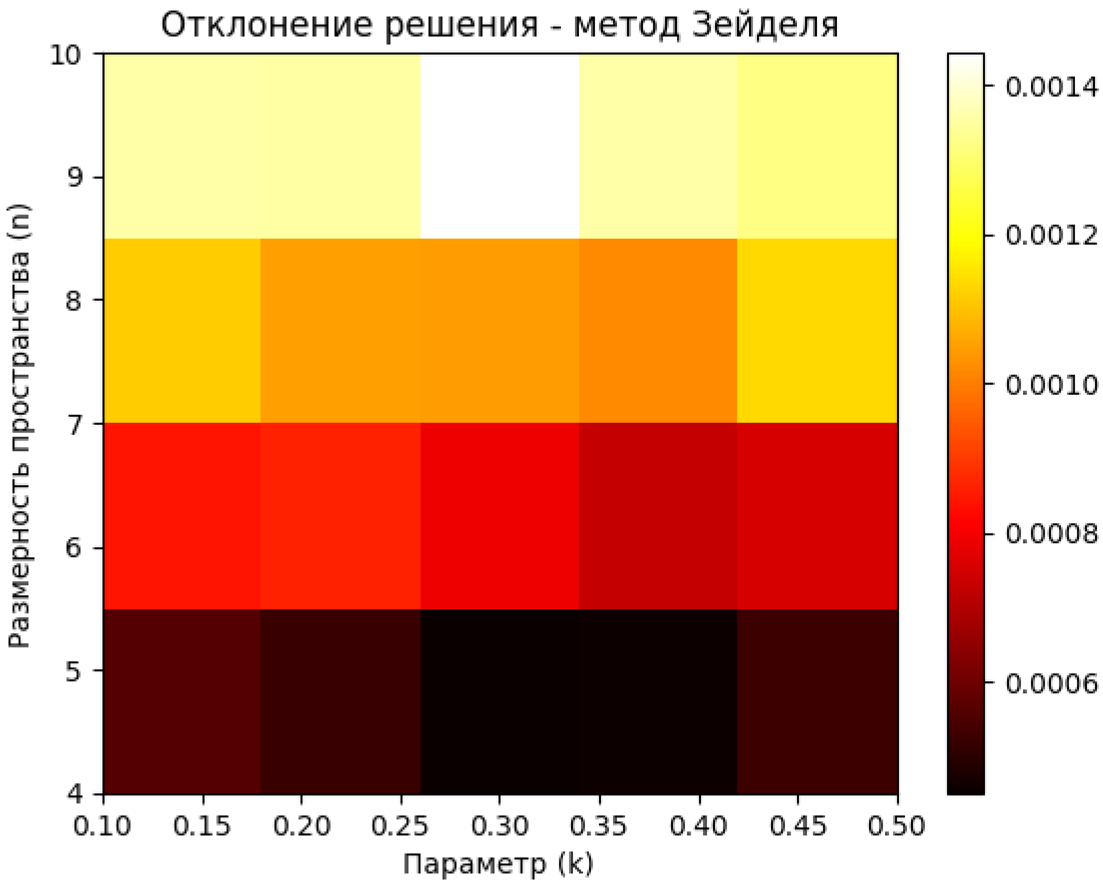


Таким образом, число обусловленности возрастает прямо пропорционально с ростом параметра k и с ростом размерности пространства n.

Оценка зависимости точности полученного решения в зависимости от параметра k и n

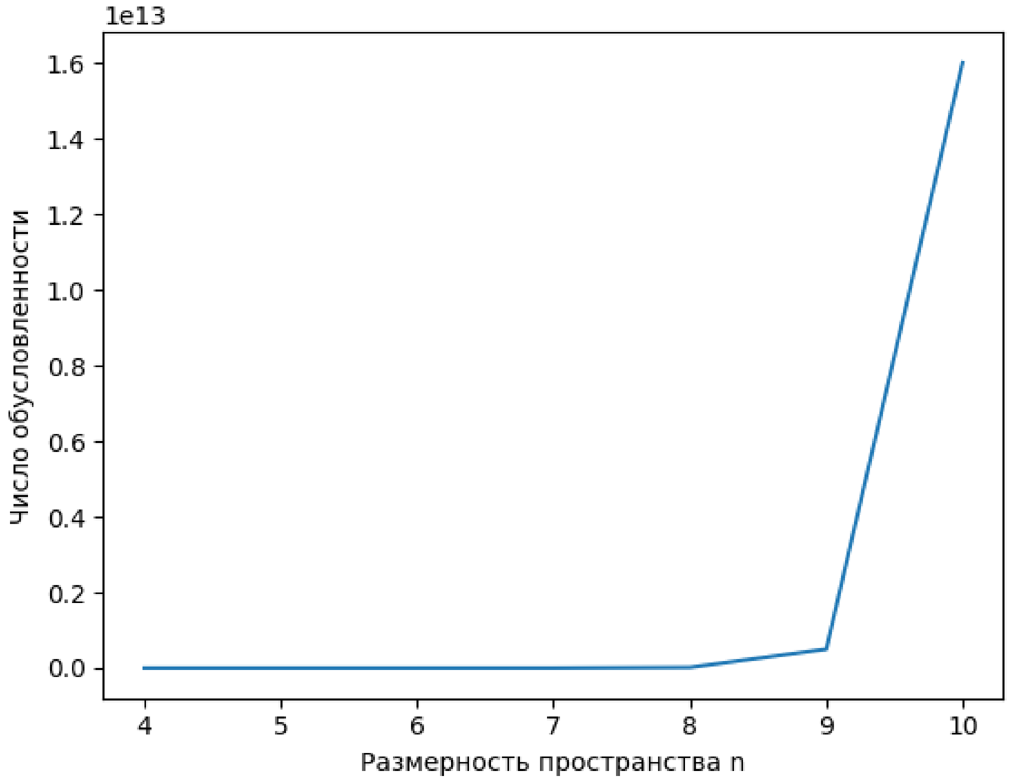






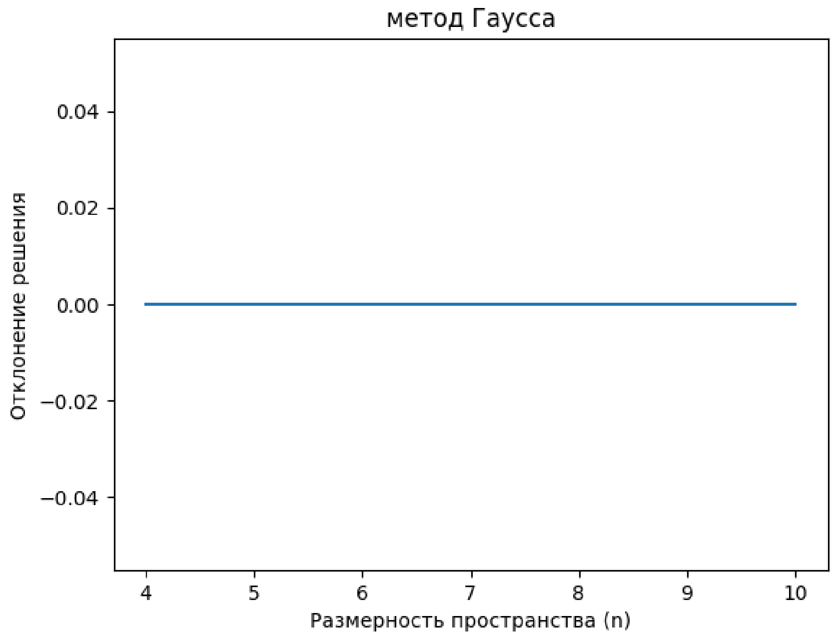
В методе Зейделя точность увеличивается с ростом размерности пространства, но не меняется при изменении параметра k. Однако для методов Гаусса и LU-разложения отклонение растет прямо пропорционально росту и размерности n и параметра k.

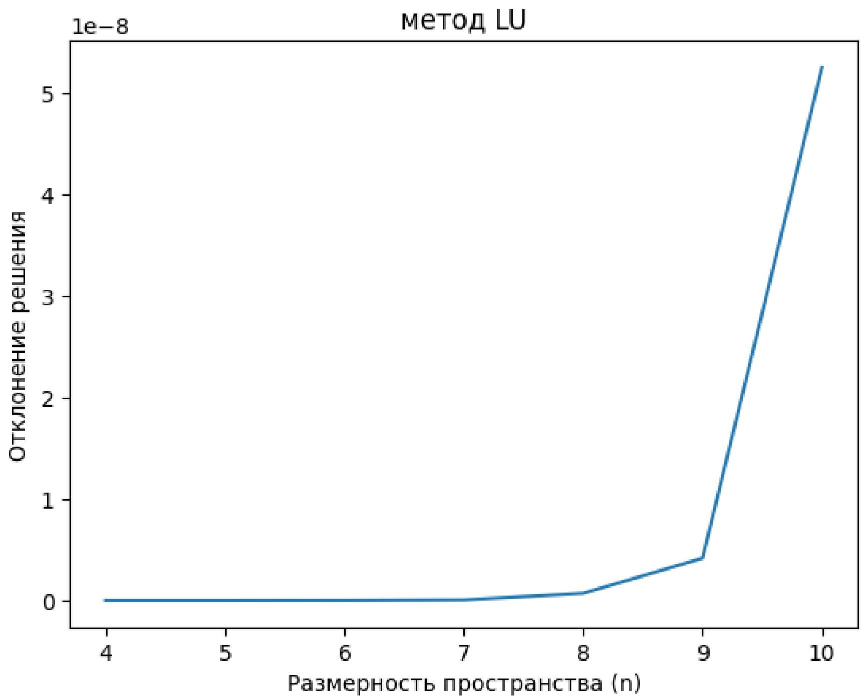
Оценка зависимости числа обусловленности в зависимости от параметра n для матриц Гильберта

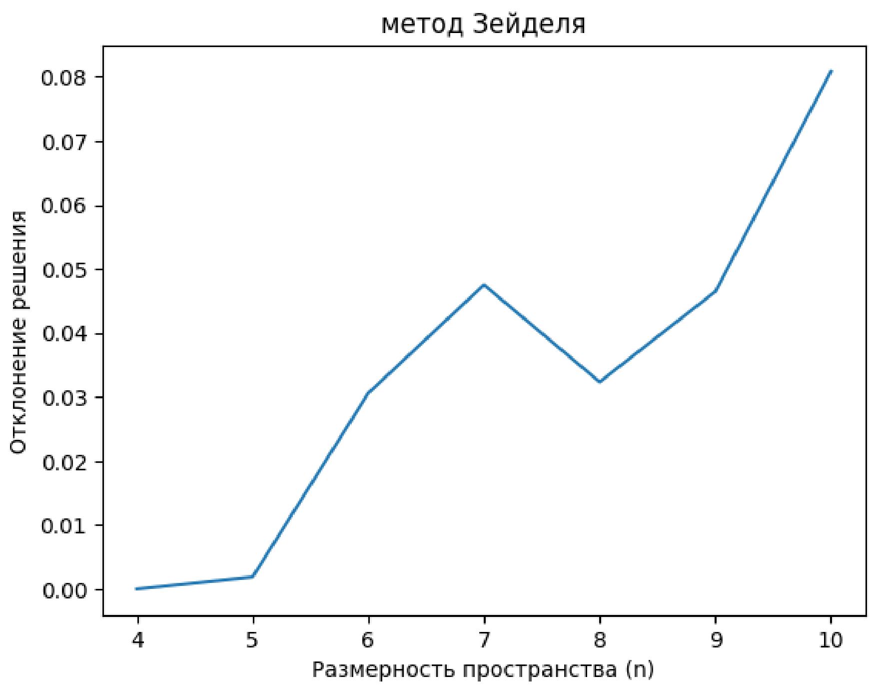


Для матриц Гильберта число обусловленности начинает резко возрастать для размерностей > 8. Это происходит потому, что матрица Гильберта является примером плохо обусловленной матрицы. Число обусловленности функции отражает насколько чувствительная функция к изменениям или ошибкам на входе и насколько ошибка на выходе является результатом ошибки на входе.

Оценка зависимости точности полученного решения для матрицы Гильберта в зависимости от параметра n

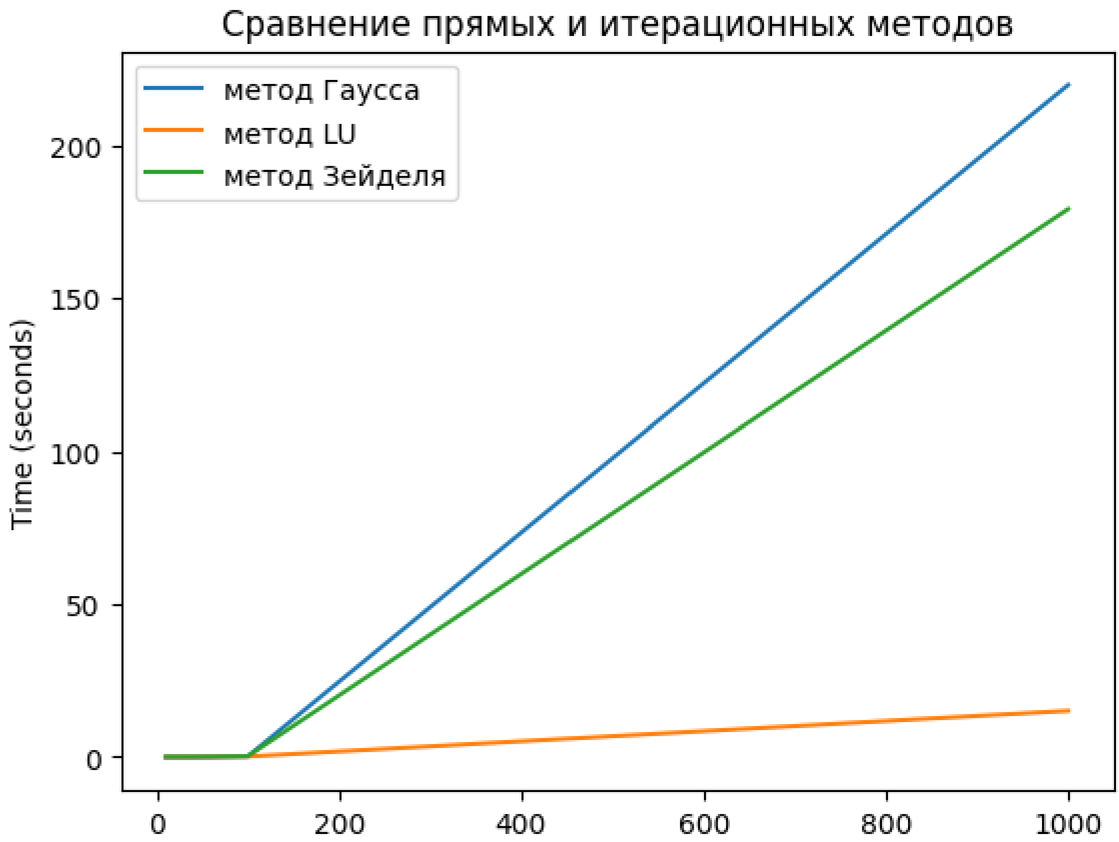






Метод Гаусса показывает очень низкую точность полученного решения матриц Гильберта вне зависимости от размерности. Для метода LU-разложения точность решения увеличивается с ростом размерности пространства.

Сравнение методов по эффективности методов от размеров n матрицы:



По данному графику легко заметить, что метод LU-разложений является наиболеет эффективным для решения обычных матриц, а метод Гаусса - наименее эффективный.

Код и расчеты:
https://github.com/ElderEv1l/applied-math/tree/main/lab-4/Code