

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ

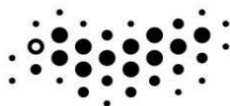
по лабораторной работе №1
по дисциплине «**Прикладная математика**».

Численное дифференцирование и интегрирование

Автор: Кирьянов Глеб Дмитриевич

Факультет: ФИТиП

Группа: М32091



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2023

Методы нахождения производной при фиксированном значении шага

Рассмотрим три способа численного вычисления производной.

Правая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Левая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Центральная разностная производная

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Возьмем две функции и их производные аналитически.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

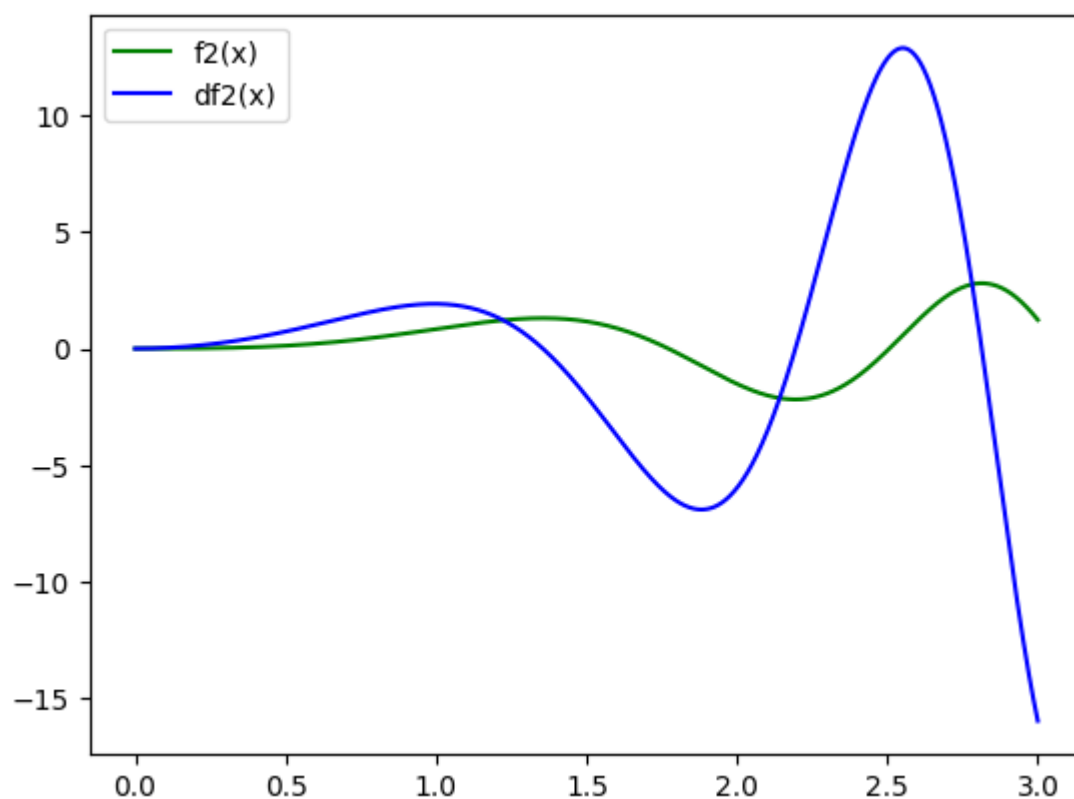
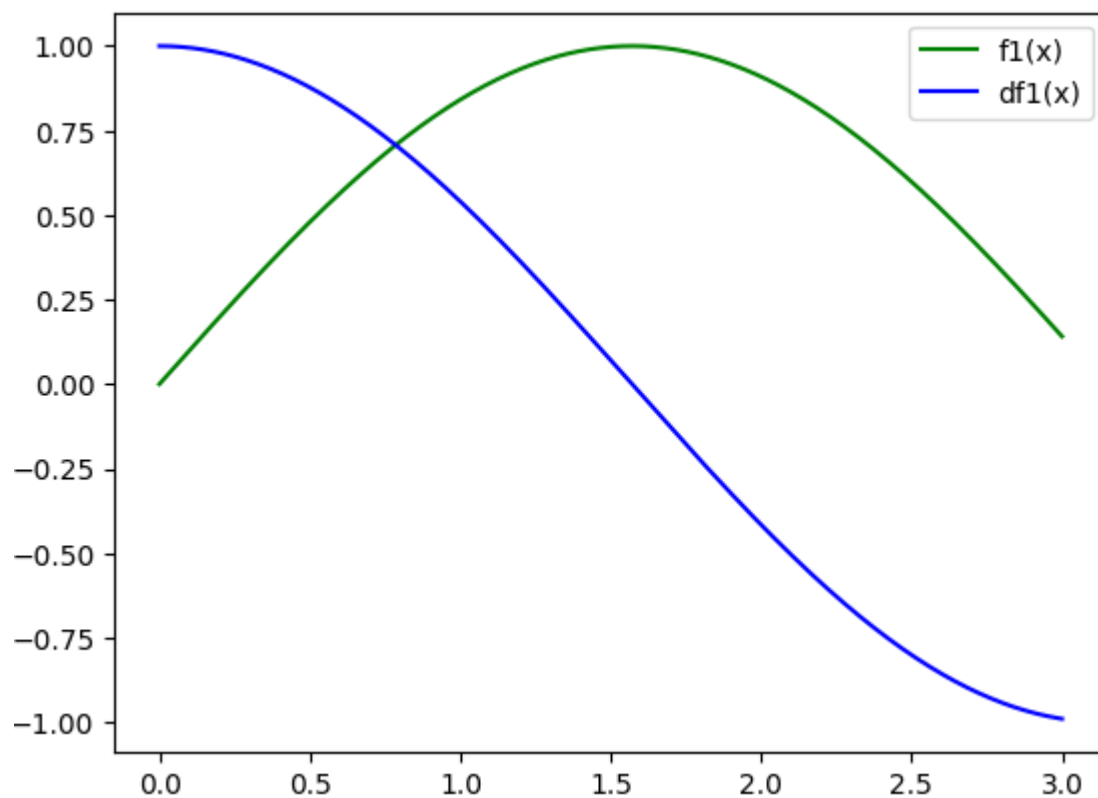
$$\frac{df_1(x)}{dx} = \cos(x)$$

$$f_2(x) = x \sin(x^2)$$

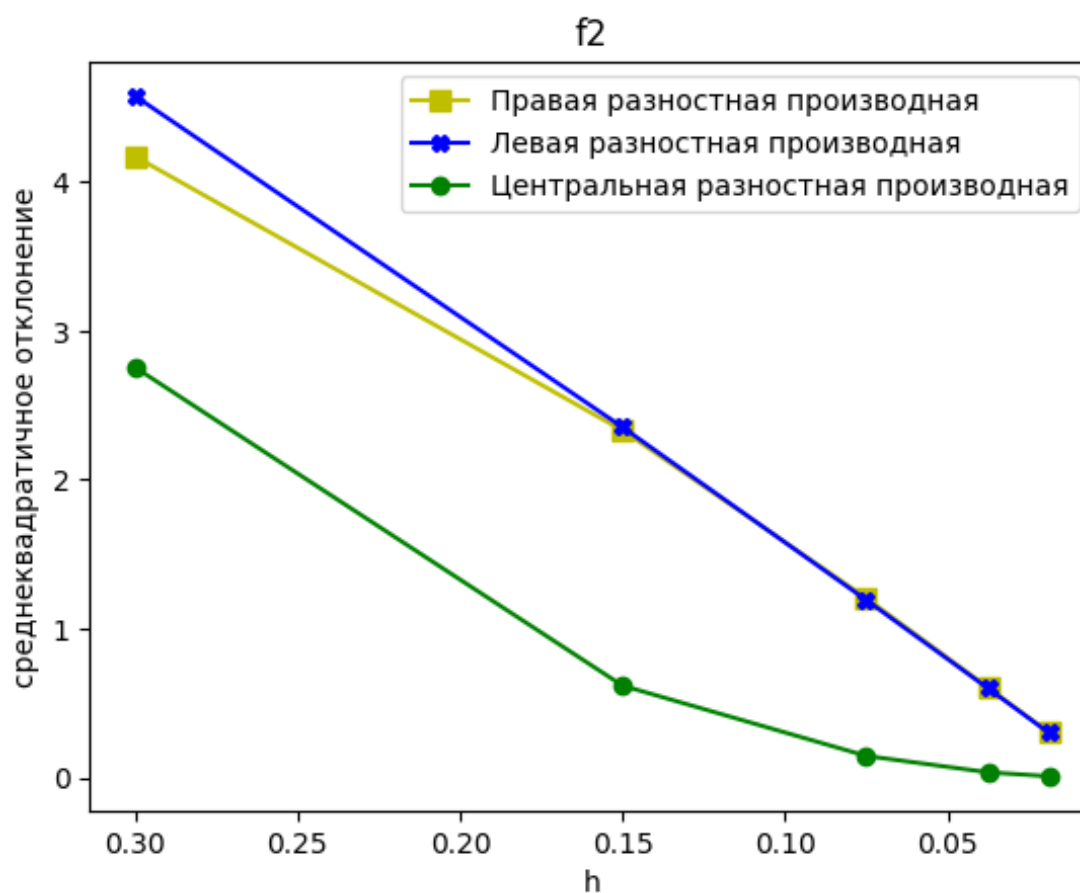
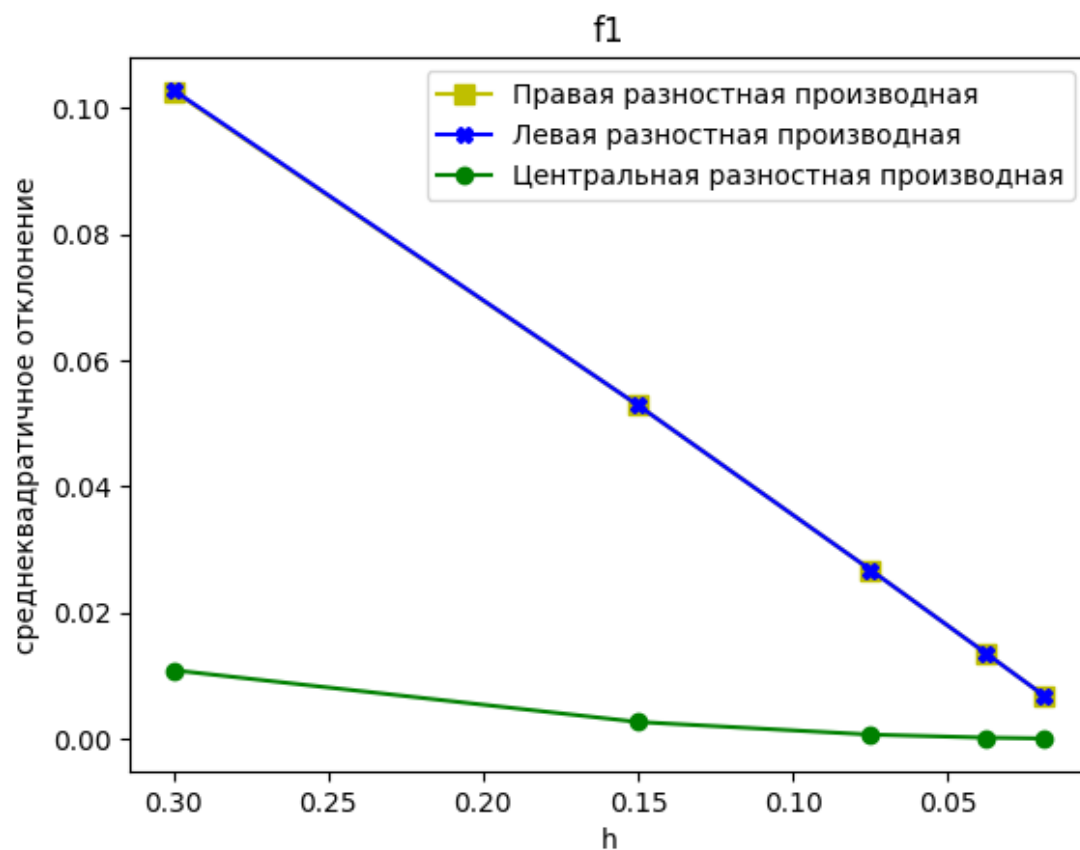
$$\frac{df_2(x)}{dx} = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)$$

Для исследования алгоритмов возьмем участок $x \in [0; 3]$.

Построим графики функций а также их аналитически вычисленных производных.



Для каждого алгоритма и размера сетки вычислим производные в точках сетки аналитически и алгоритмически. Вычислим среднеквадратическое отклонение. Построим зависимость среднеквадратического отклонения от размера сетки.



По полученным нами графикам мы можем убедиться, что при уменьшении шага h среднеквадратичное отклонение каждый раз уменьшается и в итоге стремится к нулю.

Методы численного интегрирования

Суть методов заключается в разбиении площади под кривой на площадь определенных фигур, а интеграл на всем отрезке интегрирования считается как сумма этих частичных интегралов.

Рассмотрим три способа численного интегрирования.

Возьмем интегралы от двух наших функций аналитически.

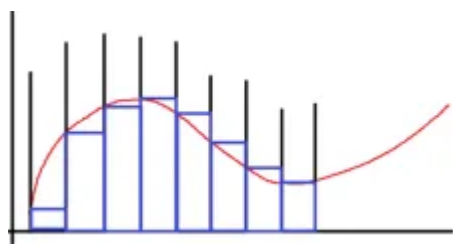
$$\int \sin(x) = -\cos(x)$$

$$\int x \sin(x^2) = -\frac{\cos(x^2)}{2}$$

Метод прямоугольников

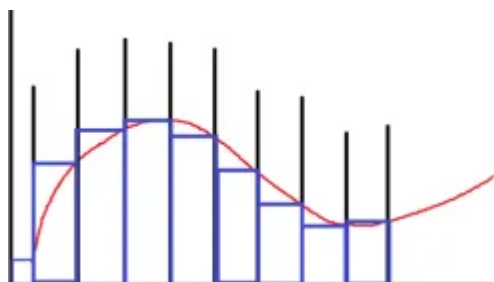
Площадь каждой элементарной криволинейной трапеции можно приближать площадью прямоугольников. Причем в зависимости от той точки, которая определяет высоту прямоугольника можно получить либо метод левых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1}$$



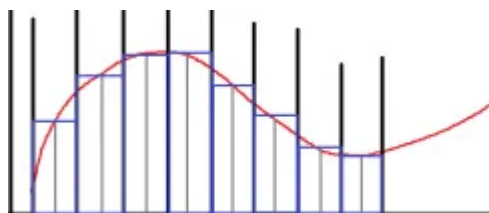
либо правых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_i$$



либо средних прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1/2}$$



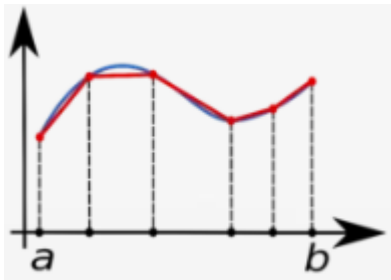
Численно рассчитанное значение для f1: 1.92
Аналитически рассчитанное значение для f1: 1.99

Численно рассчитанное значение для f2: 0.933
Аналитически рассчитанное значение для f2: 0.956

Метод трапеций

Используя оба конца отрезка элементарной криволинейной трапеции, можно приближать ее площадь как площадь трапеции

$$I_i \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$



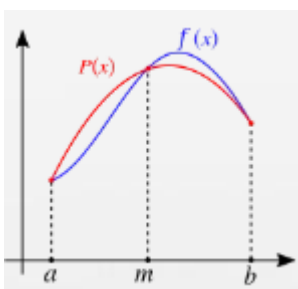
Численно рассчитанное значение для f1: 1.917
Аналитически рассчитанное значение для f1: 1.99

Численно рассчитанное значение для f2: 0.913
Аналитически рассчитанное значение для f2: 0.956

Метод Симпсона (метод парабол)

Также криволинейную трапецию можно приближать параболой, которая проходит соответственно через точки x_{i-1} , $x_{i-1/2}$, x_i .

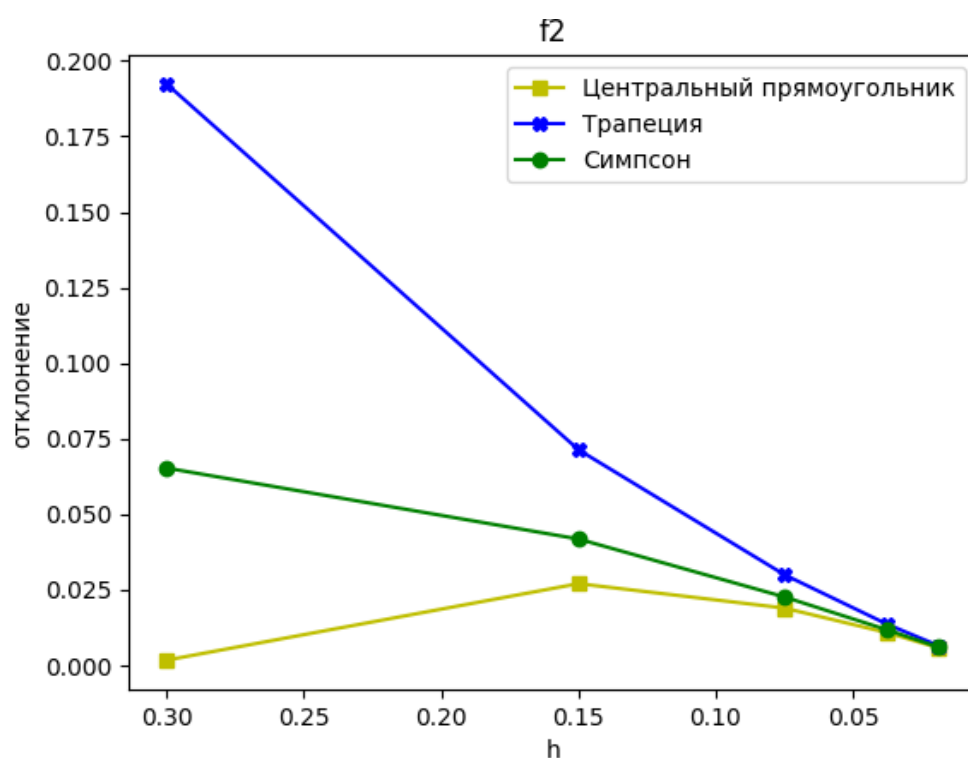
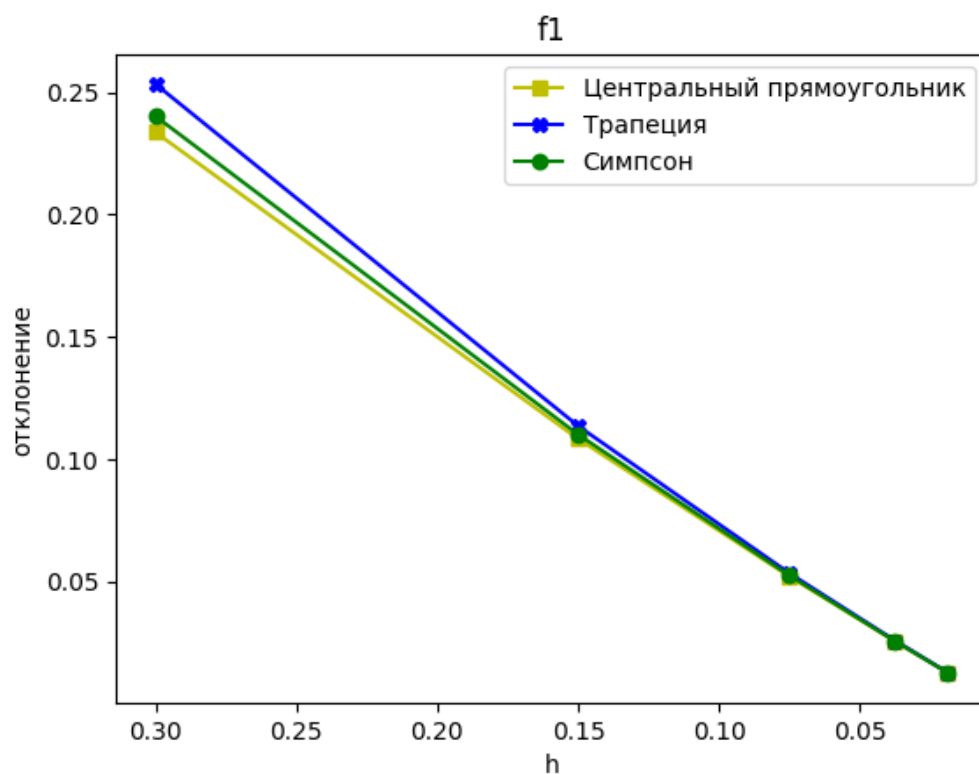
$$I_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$



Численно рассчитанное значение для f1: 1.919
Аналитически рассчитанное значение для f1: 1.99

Численно рассчитанное значение для f2: 0.926
Аналитически рассчитанное значение для f2: 0.956

Теперь построим график зависимости отклонения численного ответа от аналитического при уменьшении шага в 2, 4, 8 и 16 раз.



По данным графикам мы можем сделать вывод, аналогичный методам численного дифференцирования - при уменьшении шага h отклонение полученного значения от истинного стремится к нулю.

Вывод:

Нами были изучены методы численного дифференцирования и интегрирования. Как для методов численного дифференцирования, так и для методов численного интегрирования мы получили график

зависимости отклонения от шага h - по своей сути выбранной нами точностью.

Все рассмотренные нами методы хорошо справляются со своей задачей, в случае невозможности или сложности аналитического вычисления значения производной в точке или определенного интеграла использование данных методов будет просто необходимо.

Лучшим из рассмотренных методов численного дифференцирования мы посчитали метод центральной разностной производной. Для обеих функций он дает нам минимальное среднеквадратичное отклонение.

А лучшим из рассмотренных методов численного интегрирования мы считаем метод парабол - он является самым точным, так как вычисляет значение функции в трёх точках.

Код и расчеты:

<https://github.com/ElderEv11/applied-math/blob/main/lab-1/lab1.ipynb>