Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «**Прикладная математика**».

Численное дифференцирование и интегрирование

Автор: Кирьянов Глеб Дмитриевич

Факультет: ФИТиП

Группа: M32091

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург 2023

Методы нахождения производной при фиксированном значении шага

Рассмотрим три способа численного вычисления производной.

Правая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Левая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Центральная разностная производная

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Возьмем две функции и их производные аналитически.

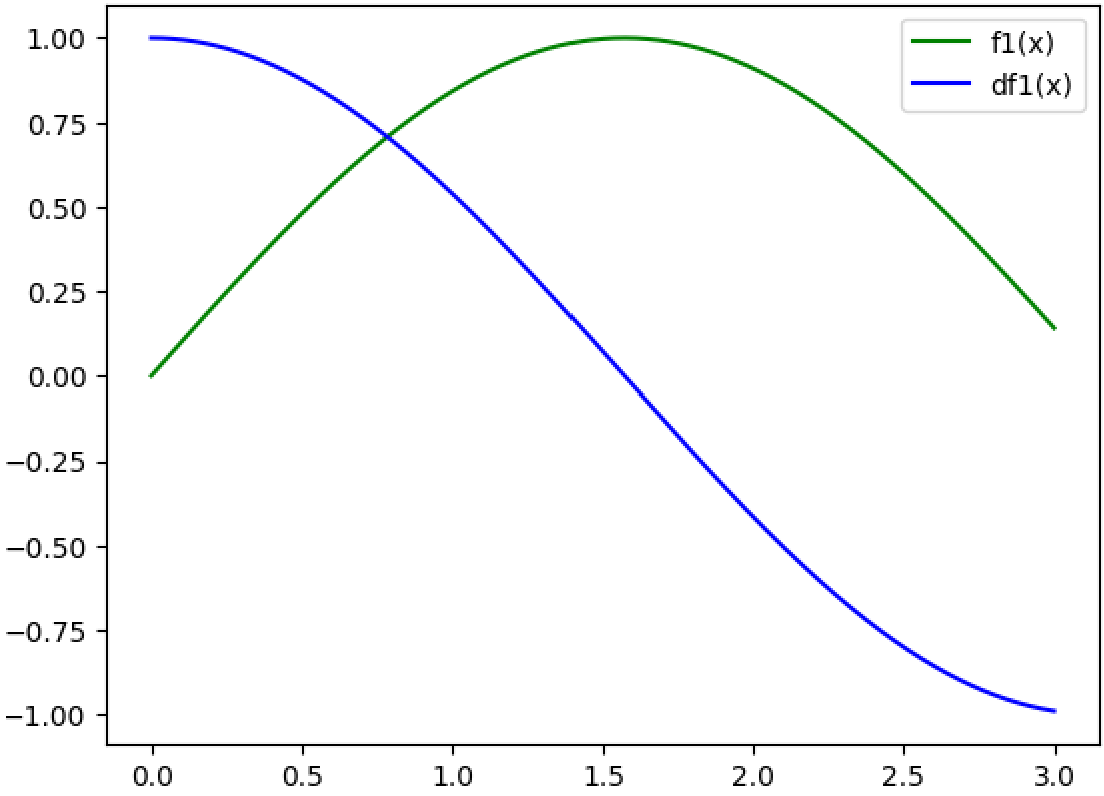
$$f_1(x) = sin(x)$$

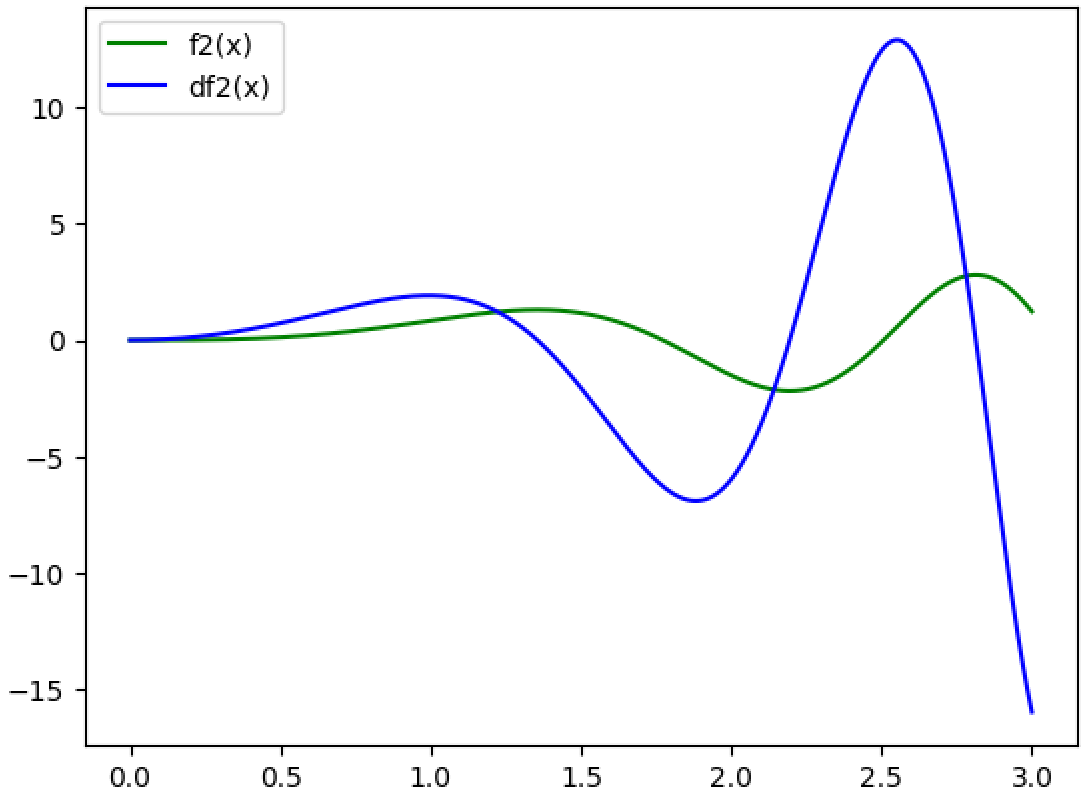
$$\frac{df_1(x)}{dx} = cos(x)$$

$$f_2(x) = xsin(x^2)$$

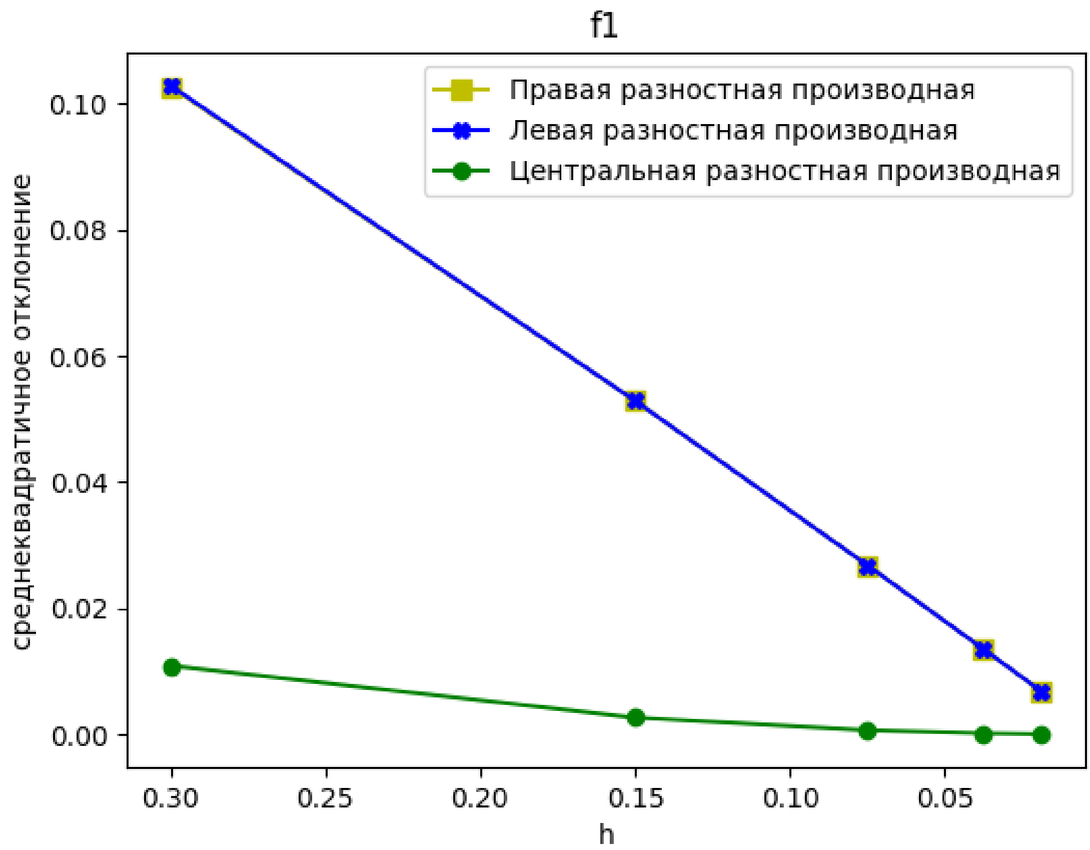
$$\frac{df_2(x)}{dx} = sin(x^2) + 2x^2cos(x^2)$$

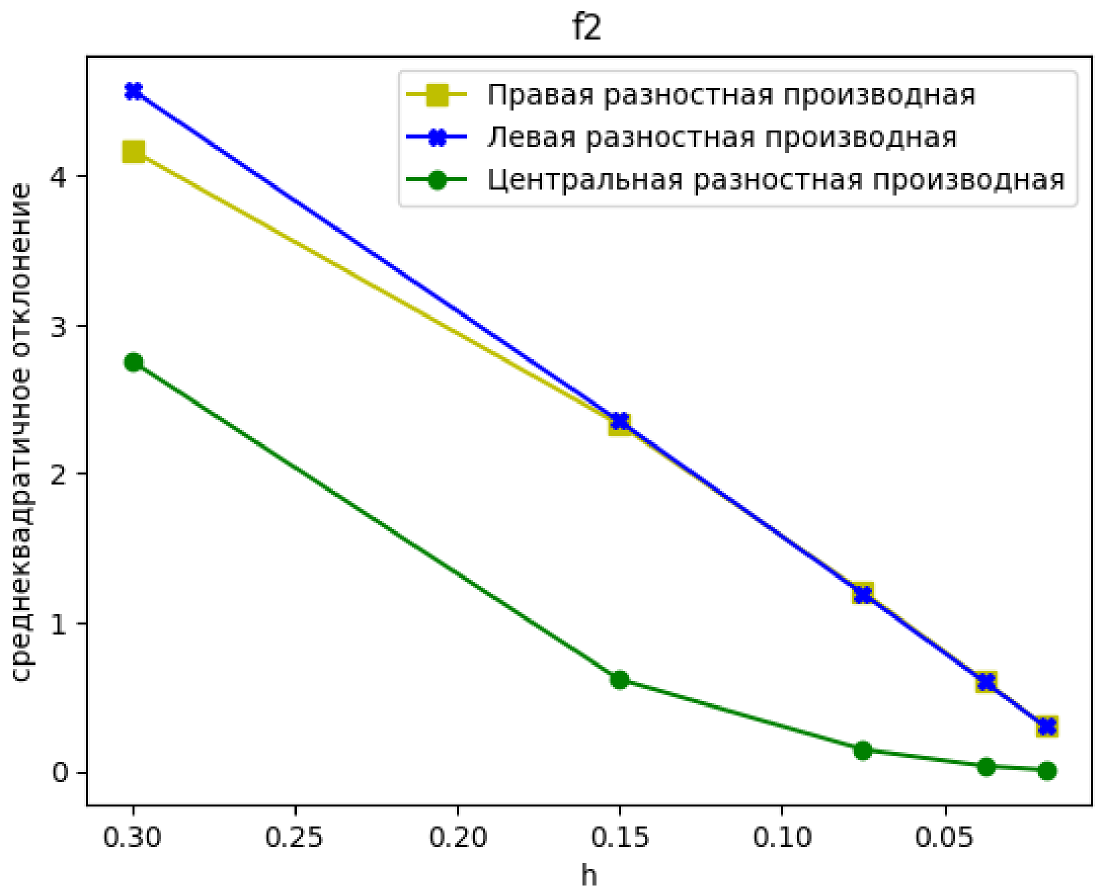
Для исследования алгоритмов возьмем участок $x \in [0; 3]$.
Построим графики функций а также их аналитически вычисленных производных.





Для каждого алгоритма и размера сетки вычислим производные в точках сетки аналитически и алгоритмически. Вычислим среднеквадратическое отклонение. Построим зависимость среднеквадратического отклонения от размера сетки.





По полученным нами графикам мы можем убедиться, что при уменьшении шага h среднеквадратичное отклонение каждый раз уменьшается и в итоге стремится к нулю.

Методы численного интегрирования

Суть методов заключается в разбиении площади под кривой на площадь определенных фигур, а интеграл на всем отрезке интегрирования считается как сумма этих частичных интегралов. Рассмотрим три способа численного интегрирования.
Возьмем интегралы от двух наших функций аналитически.

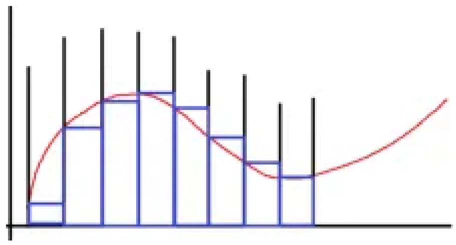
$$\int sin(x) = -cos(x)$$

$$\int xsin(x^2) = -\frac{cos(x^2)}{2}$$

Метод прямоугольников

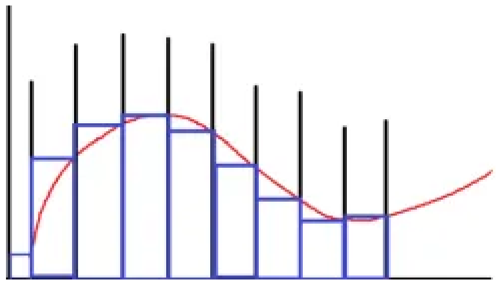
Площадь каждой элементарной криволинейной трапеции можно приближать площадью прямоугольников. Причем в зависимости от той точки, которая определяет высоту прямоугольника можно получить либо метод левых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1}$$



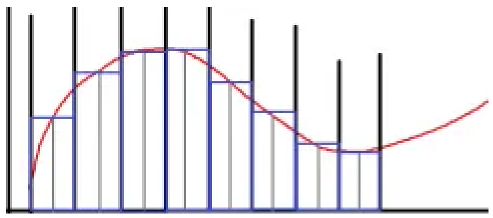
либо правых прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_i$$



либо средних прямоугольников

$$I_i \simeq h \cdot f_{i-1/2}$$



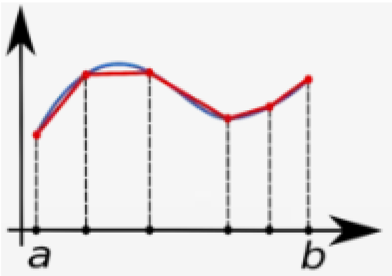
```
Численно расчитанное значение для f1: 1.92
Аналитически расчитанное значение для f1: 1.99

Численно расчитанное значение для f2: 0.933
Аналитически расчитанное значение для f2: 0.956
```

Метод трапеций

Используя оба конца отрезка элементарной криволинейной трапеции, можно приближать ее площадь как площадь трапеции

$$I_i \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$



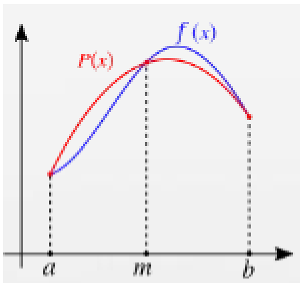

```
Численно расчитанное значение для f1: 1.917
Аналитически расчитанное значение для f1: 1.99

Численно расчитанное значение для f2: 0.913
Аналитически расчитанное значение для f2: 0.956
```

Метод Симпсона (метод парабол)

Также криволинейную трапецию можно приближать параболой, которая проходит соответственно через точки x_{i-1}, $x_{i-1/2}$, x_i.

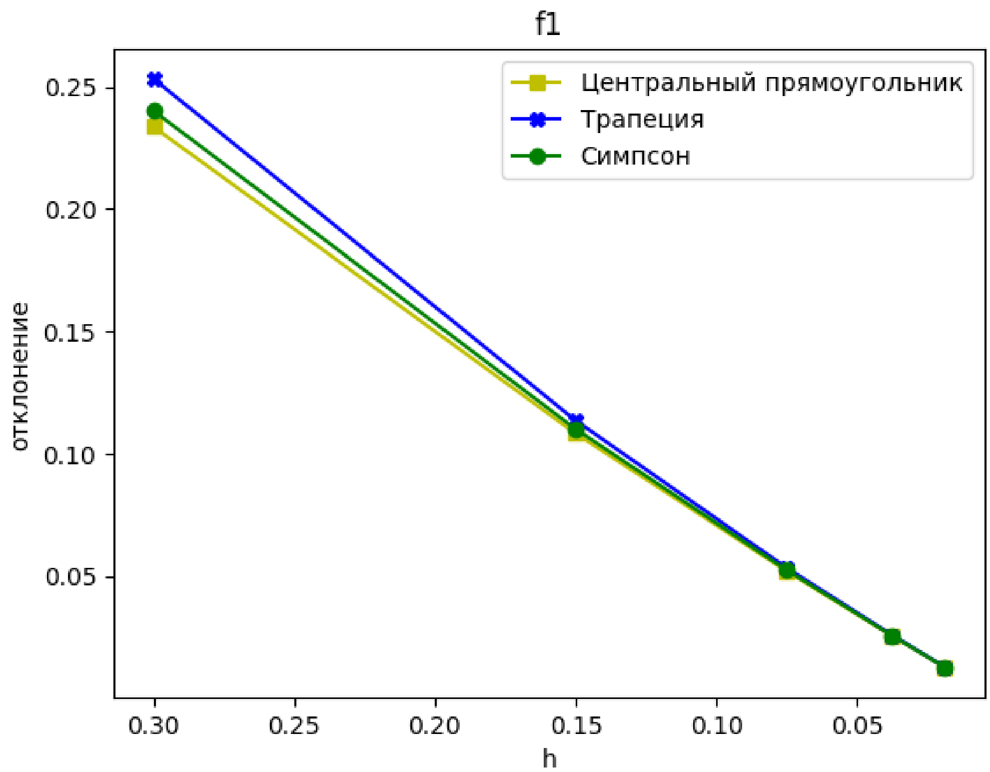
$$I_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$

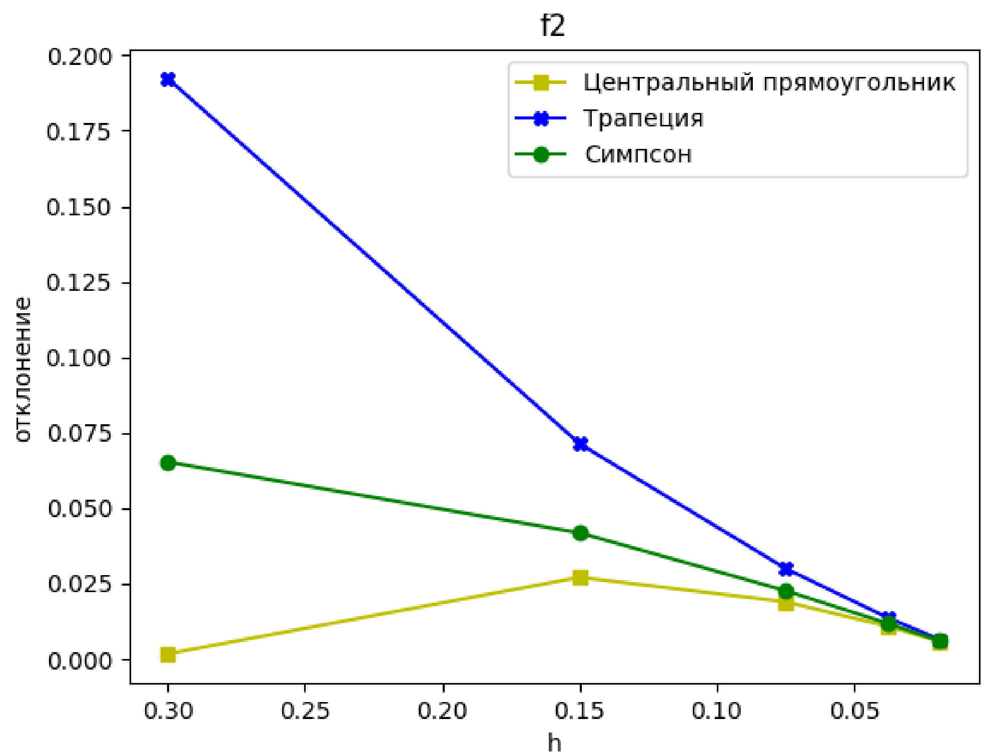



```
Численно расчитанное значение для f1: 1.919
Аналитически расчитанное значение для f1: 1.99

Численно расчитанное значение для f2: 0.926
Аналитически расчитанное значение для f2: 0.956
```

Теперь построим график зависимости отклонения численного ответа от аналитического при уменьшении шага в 2, 4, 8 и 16 раз.





По данным графикам мы можем сделать вывод, аналогичный методам численного дифференцирования - при уменьшении шага h отклонение полученного значения от истинного стремится к нулю.

Вывод:

Нами были изучены методы численного дифференцирования и интегрирования. Как для методов численного дифференцирования, так и для методов численного интегрирования мы получили график зависимости отклонения от шага h - по своей сути выбранной нами точностью.

Все рассмотренные нами методы хорошо справляются со своей задачей, в случае невозможности или сложности аналитического вычисления значения производной в точке или определенного интеграла использование данных методов будет просто необходимо.

Лучшим из рассмотренных методов численного дифференцирования мы посчитали метод центральной разностной производной. Для обеих функций он дает нам минимальное среднеквадратичное отклонение.
А лучшим из рассмотренных методов численного интегрирования мы считаем метод парабол - он является самым точным, так как вычисляет значение функции в трёх точках.

Код и расчеты:
https://github.com/ElderEv1l/applied-math/blob/main/lab-1/lab1.ipynb