第三部分 代数结构

主要内容

- 代数系统
- 群与环（自学）
- 格与布尔代数

第九章 代数系统

主要内容

二元运算及其性质

- 一元和二元运算定义及其实例
- 二元运算的性质

代数系统

- 代数系统定义及其实例
- 子代数
- 积代数

代数系统的同态与同构

9.1 二元运算及其性质

定义9.1 设S为集合，函数f：$S \times S \to S$ 称为S上的二元运算，简称为二元运算.

- S中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一.
- S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算封闭.

例1 (1) 自然数集合N上的加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是.

(2) 整数集合Z上的加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是.

(3) 非零实数集R*上的乘法和除法都是R*上的二元运算，而加法和减法不是.

实例

(4) 设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$M_n(R)=\left\{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\ \right|\ a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

则矩阵加法和乘法都是M_n(R)上的二元运算.

(5) S 为任意集合，则∪、∩、−、⊕ 为$P(S)$上二元运算.

(6) S^S为S上的所有函数的集合，则合成运算∘为S^S上二元运算.

一元运算的定义与实例

定义9.2 设S为集合，函数 $f:S\to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.

例2

(1) 求相反数是整数集合 Z，有理数集合 Q 和实数集合 R 上的一元运算.

(2) 求倒数是非零有理数集合Q*，非零实数集合R*上一元运算 .

(3) 求共轭复数是复数集合C上的一元运算.

(4) 在幂集$P(S)$上规定全集为S，则求绝对补运算~是$P(S)$上的一元运算.

(5) 设 S 为集合，令 A 为 S 上所有双射函数的集合，$A\subseteq S^S$，求一个双射函数的反函数为A上的一元运算.

(6) 在 $n(n\geq 2)$ 阶实矩阵的集合 M_n(R) 上，求转置矩阵是 $M_n(R)$上的一元运算.

二元与一元运算的表示

1．算符

可以用 $\circ$，$*$，$\cdot$，$\oplus$，$\otimes$，Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符.

对二元运算 $\circ$，如果 x 与 y 运算得到 z，记做 $x\circ y = z$

对一元运算 Δ， x 的运算结果记作 Δx.

2．表示二元或一元运算的方法：解析公式和运算表

公式表示

例 设 R 为实数集合，如下定义 R 上的二元运算 $*$：

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x * y = x.$$

那么 $3*4 = 3$， $0.5*(-3) = 0.5$

运算表

运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\dots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\dots$	$a_2 \circ a_n$
.		$\dots$		
.		$\dots$		
.		$\dots$		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\dots$	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例3 设 $S=P(\{a,b\})$，S上的⊕和 ~运算的运算表如下：

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

二元运算的性质

定义9.3 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，

(1) 若对任意 $x, y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在 S 上满足交换律.

(2) 若对任意 $x, y, z \in S$ 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$，则称运算在$S$上满足结合律.

(3) 若对任意 $x \in S$ 有 $x \circ x = x$，则称运算在 S 上满足幂等律.

定义9.4 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算，

(1) 若对任意 $x, y, z \in S$ 有 $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$，

$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$，则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律.

(2) 若 $\circ$ 和 $*$ 都可交换，且对任意 $x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x,\quad x * (x \circ y) = x,$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足吸收律.

实例

Z, Q, R 分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$ 为 n 阶实矩阵集合， $n\geq 2$；$P(B)$ 为幂集；A^A 为从 A 到 A 的函数集，$|A|\geq 2$

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩ 相对补− 对称差⊕	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无
A^A	函数复合∘	无	有	无

实例（续）

Z, Q, R 分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$ 为 n 阶实矩阵集合， $n\geq 2$；$P(B)$ 为幂集；A^A 为从 A 到 A 的函数集，$|A|\geq 2$

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

特异元素：单位元、零元

定义9.5 设∘为S上的二元运算，

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x),$$

则称 e_l(或 e_r) 是 S 中关于∘运算的左(或右)单位元.

若 $e\in S$ 关于∘运算既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 S 上关于∘运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

(2) 如果存在 θ_l(或θ_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \quad (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta r),$$

则称 θ_l(或 θ_r) 是 S 中关于∘运算的左(或右)零元.

若$\theta\in S$ 关于∘运算既是左零元又是右零元，则称 θ为 S 上关于运算∘的零元.

可逆元素和逆元

(3) 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，令 e 为 S 中关于运算 $\circ$ 的单位元.

对于 $x\in S$，如果存在 y_l(或 y_r)$\in S$ 使得

$$y_l\circ x=e\text{（或 }x\circ y_r=e\text{）}$$

则称 y_l (或 y_r)是 x 的左逆元（或右逆元）.

关于$\circ$运算，若$y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 为 x 的逆元. 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x逆元 $-x$ x逆元 x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n 阶全 0 矩阵 n 阶单位矩阵	无 n阶全0矩阵	X逆元$-X$ X的逆元X^{-1} （X可逆）
$P(B)$	并$\cup$ 交$\cap$ 对称差$\oplus$	$\varnothing$ B $\varnothing$	B $\varnothing$ 无	$\varnothing$的逆元为 $\varnothing$ B的逆元为 B X的逆元为 X

惟一性定理

定理9.1 设 ∘ 为 S 上的二元运算，e_l 和 e_r 分别为 S 中关于运算的左和右单位元，则 $e_l = e_r = e$ 为 S 上关于 ∘ 运算的惟一的单位元.

证：$e_l = e_l \circ e_r$　(e_r为右单位元)，　$e_l \circ e_r = e_r$　(e_l为左单位元)

所以$e_l = e_r$，将这个单位元记作 e.

假设e' 也是S 中的单位元，则有 $e' = e \circ e' = e$. 惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

注意：

- 当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；
- 当 $|S| = 1$时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理

定理9.2 设 ∘ 为 S 上可结合的二元运算，e 为该运算的单位元，对于 $x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r，则有 $y_l = y_r = y$，且 y 是 x 的惟一的逆元.

证：由 $y_l\circ x = e$ 和 $x\circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l\circ e = y_l\circ(x\circ y_r) = (y_l\circ x)\circ y_r = e\circ y_r = y_r$$

令 $y_l = y_r = y$，则 y 是 x 的逆元.

假若 $y'\in S$ 也是 x 的逆元，则

$$y' = y'\circ e = y'\circ(x\circ y) = (y'\circ x)\circ y = e\circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

- 说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}

9.2 代数系统

定义9.6 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1,f_2,\ldots, f_k$ 组成的系统称为代数系统，简称代数，记做$<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

实例：

(1) $<N,+>$，$<Z,+,\cdot>$，$<R,+,\cdot>$ 是代数系统，+ 和 · 分别表示普通加法和乘法.

(2) $<M_n(R),+,\cdot>$ 是代数系统，+ 和 · 分别表示 n 阶($n\geq 2$)实矩阵的加法和乘法.

(3) $<Z_n,\oplus,\otimes>$ 是代数系统，$Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，$\oplus$ 和 $\otimes$ 分别表示模 n 的加法和乘法，对于 $x,y\in Z_n$，$x\oplus y=(x+y)\bmod n$，$x\otimes y=(xy)\bmod n$

(4) $<P(S),\cup,\cap,\sim>$ 是代数系统，$\cup$和$\cap$为并和交，~为绝对补.

代数系统的成分与表示

构成代数系统的成分：

- 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
- 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
- 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

  研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做**代数常数**.

例如：代数系统 <Z,+,0>：集合 Z，运算 +，代数常数 0

代数系统 <*P*(*S*),∪,∩>：集合 *P*(*S*)，运算 ∪ 和 ∩，无代数常数

代数系统的表示

(1) 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在）

如 <Z,+,0>，<*P*(*S*),∪,∩>

(2) 列出集合和运算，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（无代数常数）

如 <Z,+>，<*P*(*S*),∪,∩>

(3) 用集合名称简单标记代数系统

在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用，如

代数系统 *Z*，*P*(*B*)

同类型与同种代数系统

定义9.7

(1) 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统.

(2) 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统.

例如 V_1=<R, +, ·, 0, 1>，V_2=<M_n(R), +, ·, θ, E>，θ 为 n 阶全 0 矩阵，E为 n 阶单位矩阵，V_3=<$P(B)$, ∪, ∩, ∅, B>

- V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算, 2个代数常数.
- V_1, V_2是同种的代数系统，V_1, V_2与V_3不是同种的代数系统

运算性质比较

V_1	V_2	V_3
+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 不满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	∪可交换、可结合 ∩可交换、可结合 ∪不满足消去律 ∩不满足消去律 ∩对∪可分配 ∪对∩可分配 ∪与∩满足吸收律

子代数系统

定义9.8 设 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是代数系统，B 是 S 的非空子集，如果 B 对 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$ 是 V 的**子代数系统**，简称子代数. 有时将子代数系统简记为 B.

实例

N 是 <Z,+> 的子代数，N 也是 <Z,+,0> 的子代数

N–{0} 是 <Z,+> 的子代数，但不是 <Z,+,0> 的子代数

说明:

- 子代数和原代数是同种的代数系统
- 对于任何代数系统 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$，其子代数一定存在.

关于子代数的术语

(1) 最大的子代数：就是 V 本身

(2) 最小的子代数：如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，则 B 就构成了 V 的最小的子代数

(3) 最大和最小的子代数称为 V 的平凡的子代数

(4) 若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数.

例 设 $V=\langle Z,+,0\rangle$，令 $nZ=\{nz \mid z\in Z\}$，n为自然数，则 nZ 是 V 的子代数

当$n=1$和0时，nZ是V的平凡的子代数；

其他的都是V的非平凡的真子代数.

积代数

定义9.9 设 $V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$ 是同类型的代数系统，$\circ$ 和 $*$ 为二元运算，在集合 $A\times B$ 上如下定义二元运算$\cdot$，$\forall<a_1,b_1>$，$<a_2,b_2>\in A\times B$，有

$$<a_1,b_1>\cdot<a_2,b_2>=<a_1\circ a_2, b_1*b_2>$$

称 $V=<A\times B,\cdot>$ 为 V_1 与 V_2 的**积代数**，记作 $V_1\times V_2$. 这时也称V_1和V_2为V的**因子代数**.

积代数的性质

定理9.3 设 $V_1=<A,\circ>$ 和 $V_2=<B,*>$ 是同类型的代数系统，

$V_1\times V_2=<A\times B,\cdot>$ 是它们的积代数.

(1) 如果$\circ$ 和 $*$运算是可交换（可结合、幂等）的，那么$\cdot$运算也是可交换（可结合、幂等）的.

(2) 如果 e_1 和 e_2（θ_1和θ_2）分别为$\circ$ 和 $*$运算的单位元（零元），那么$<e_1, e_2>$（$<\theta_1, \theta_2>$）也是$\cdot$运算的单位元（零元）.

(3) 如果 x 和 y 分别为$\circ$和 $*$运算的可逆元素，那么$<x,y>$也是$\cdot$运算的可逆元素，其逆元就是$<x^{-1}, y^{-1}>$.

9.3 代数系统的同态与同构

定义9.10 设 $V_1=\langle A, \circ\rangle$ 和 $V_2=\langle B, *\rangle$ 是同类型的代数系统，

$$f: A\to B，且 \forall x, y\in A 有 \ f(x\circ y) = f(x)*f(y),$$

则称 f 是V_1到V_2的**同态**映射，简称同态.

同态分类:

(1) f 如果是单射，则称为**单同态**.

(2) 如果是满射，则称为**满同态**，这时称V_2是V_1的**同态像**，记作$V_1\sim V_2$

(3) 如果是双射，则称为同构，也称代数系统V_1**同构**于V_2，记作$V_1\cong V_2$

(4) 如果$V_1=V_2$，则称作**自同态**.

实例

(1) 设V_1=<Z, +>, V_2=<Z_n, ⊕>．其中Z为整数集，+为普通加法；Z_n={0,1,…,n−1}，⊕为模n加. 令

$$f: Z \to Z_n，f(x)=(x) \bmod n$$

那么 f 是V_1到V_2的满同态.

(2) 设V_1=<R, +>, V_2=<R*, ·>，其中R和R*分别为实数集与非零实数集，+ 和 · 分别表示普通加法与乘法．令

$$f: R \to R^*，f(x)= e^x$$

则 f 是V_1到V_2的单同态.

(3) 设V=<Z,+>，其中Z为整数集，+为普通加法. $\forall a \in Z$，令

$$f_a: Z \to Z，f_a(x)=ax，$$

那么 f_a 是V的自同态. 当a=0时称 f_0 为零同态；当a=±1时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态.

第九章 习题课

主要内容

- 代数系统的构成：非空集合、封闭的二元和一元运算、代数常数
- 二元运算性质和特异元素：交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律、单位元、零元、可逆元和逆元
- 同类型的与同种的代数系统
- 子代数的定义与实例
- 积代数的定义与性质
- 代数系统的同态与同构

基本要求

- 判断给定集合和运算能否构成代数系统
- 判断给定二元运算的性质
- 求而二元运算的特异元素
- 了解同类型和同种代数系统的概念
- 了解子代数的基本概念
- 计算积代数
- 判断函数是否为同态映射和同构映射

练习1

1． 设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y \in Q,\ \ x \circ y = x+y+2xy,$$

(1) 判断 ∘ 运算是否满足交换律和结合律，并说明理由.

(2) 求出 ∘ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(1) ∘ 运算可交换，可结合.

任取 $x, y \in Q$,

$$x \circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x,$$

任取 $x, y, z \in Q$,

$$(x \circ y) \circ z = (x+y+2xy)+z+2(x+y+2xy)z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x+(y+z+2yz)+2x(y+z+2yz$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

解答

(2) 设 ∘ 运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即

$$x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于 ∘ 运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta+2x\theta=\theta \Rightarrow x+2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y，则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$ 时， $-\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

练习2

2. 下面是三个运算表

(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解答

(1) * 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律.

∘ 不满足交换律，满足结合律，满足幂等律.

• 满足交换律，满足结合律，不满足幂等律.

(2) * 的单位元为b，没有零元， $a^{-1}=c, b^{-1}=b$，$c^{-1}=a$

∘ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.

• 的单位元为 a，零元为 c，$a^{-1}=a$，b，c 不是可逆元素.

说明：关于结合律的判断

需要针对运算元素的每种选择进行验证，若 $|A|=n$，一般需要验证 n^3 个等式.

单位元和零元不必参与验证.

通过对具体运算性质的分析也可能简化验证的复杂性.

练习3

3. 设 G 为非 0 实数集 R^* 关于普通乘法构成的代数系统，判断下述函数是否为 G 的自同态？如果不是，说明理由. 如果是，判别它们是否为单同态、满同态、同构.

(1) $f(x) = |x| + 1$

(2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = 0$

(4) $f(x) = 2$

解答

解 (1) 不是同态，因为 $f(2\times2)=f(4)=5$， $f(2)\times f(2)=3\times3=9$

(2) 是同态，不是单同态，也不是满同态，因为 $f(1)= f(-1)$，且 ran f 中没有负数.

(3) 不是 G 的自同态，因为 f 不是 G 到 G 的函数

(4) 不是 G 的自同态，因为 $f(2\times2)=2$, $f(2)\times f(2)=2\times2=4$

说明：判别或证明同态映射的方法

(1) 先判断（或证明）f 是 G_1 到 G_2 的映射 $f: G_1\to G_2$. 如果已知 $f: G_1\to G_2$，则这步判断可以省去.

(2) $\forall x, y \in G_1$，验证 $f(xy) = f(x) f(y)$

(3) 判断同态性质只需判断函数的单射、满射、双射性即可.