线性规划

某公司计划生产 I、II 两种产品，每天生产条件如表，问

(1)该公司应如何安排生产计划才能使总利润最多?

(2)若产品Ⅰ的利润降至 1.5 百元/单位，而产品Ⅱ的利润增至 2 百元/单位，最优生产计划有何变化 ？

(3)若产品Ⅰ的利润不变，则产品Ⅱ的利润在什么范围内变化时，该公司的最优生产计划将不发生变化？

(4)设备 A 和调试工序每天能力不变，而设备 B 能力增加到 32，问最优生产计划如何变化？

资源　　产品	Ⅰ	Ⅱ	每天可用能力
设备 A（h）	0	5	15
设备 B（h）	6	2	24
调试工序（h）	1	1	5
利润（百元）	2	1	

(1) 设 x1, x2 分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品的生产数量，得 LP 模型

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 2x1+x2 \\
\text{s.t.}\quad & 5x2 \leqslant 15 \\
& 6x1+2x2 \leqslant 24 \\
& x1+\ \ x2 \leqslant 5 \\
& x1,\ x2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

得最优解为：X*=(7/2, 3/2)’ z*= 17/2

即每天生产 3.5 单位产品Ⅰ，1.5 单位产品Ⅱ时总利润最多，且 zmax=8.5(百元)。

(2) 考虑产品Ⅰ、Ⅱ的利润变化，可得

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 1.5x1+2x2 \\
\text{s.t.}\quad & 5x2 \leqslant 15 \\
& 6x1+2x2 \leqslant 24 \\
& x1+\ \ x2 \leqslant 5 \\
& x1,\ x2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

得最优解为：X*=(2, 3)’

说明随产品利润的改变，为获得最高利润，应将生产计划调整为每天生产 2 单位产品Ⅰ，3 单位产品Ⅱ，且 zmax=9(百元)。

（3）考虑产品Ⅱ的利润变化，可得

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 2x1+(1+\triangle c2)x2 \\
\text{s.t.}\quad & 5x2 \leqslant 15 \\
& 6x1+2x2 \leqslant 24 \\
& x1+\ \ x2 \leqslant 5 \\
& x1,\ x2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

表中解仍为最优解的条件是(手工计算，也可以用灵敏度分析获得)

$$-\frac{1}{4}+\frac{\Delta C_2}{4}\le 0;-\frac{1}{2}-\frac{3\Delta C_2}{2}\le 0 \quad 即-\frac{1}{3}\le \Delta C_2 \le 1$$

故当产品 II 的利润在[2/3，2]范围变化时，最优生产计划不变。

（4）由题目，可得

max z = 2x1+x2

s.t. 5x2 ≤15

6x1+2x2 ≤24+8

x1+ x2 ≤5

x1, x2 ≥0

最优解为：X*=(5, 0)’ (也可以用 LINGO 灵敏度判断分析)

说明随设备 B 能力的增加，为获得最高利润，应将生产计划调整为每天仅生产 5 单位产品Ⅰ，且 zmax=10(百元)。

0-1 规划

建立代销点：

思路 :每个销售代理只能对本区和一个相邻区售书 , 等价于每个销售代理选择两个相邻的区 进行售书 , 两个相邻的区一一对应于一条 " 边界 ", 于是问题变成寻找两个 " 边界 ", 使得其邻接 的区的人数总和最大 . 我们先将所有的边界进行标记. 用 0-1 变量 xi 表示第 i 个 " 边 界 " 是否被选中 (用 xi=1 表示未被选中). 我们考虑选 10 条边界中的两条后 , 每个区是否能得 到销售 .

```
model:

sets:

hang/1..11/:x,b;

lie/1..7/:c;

xishu(hang,lie):a;

endsets

data:

b=64 76 71 50 85 63 77 39 92 74 89;

a=1 1 0 0 0 0 0

1 0 1 0 0 0 0
```

```
0 1 1 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0
0 0 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1;
enddata
max=@sum(hang:b*x);
@sum(hang:x)=2;
@for(hang:@bin(x));
@for(lie(j):@sum(hang(i):a(i,j)*x(i))<1);
end
```

解得 x(5)与 x(9)为 1，最大值 177，查看这两行对应的即为 2,5 区和 4,7 区

目标规划

某计算机公司生产三种型号的笔记本电脑 A，B，C。这三种笔记本电脑需要在复杂的装配线上生产，生产 1 台 A，B，C 型号的笔记本电脑分别需要 5，8，12（h）公司装配线正常的生产时间是每月 1700h。公司营业部门估计 A,B,C 三种笔记本电脑的利润分别是每台 1000，1440，2520（元），而公司预测这个月生产的笔记本电脑能够全部售出，公司经理考虑以下目标：

第一目标：充分利用正常的生产能力，避免开工不足；

第二目标：优先满足老客户的需求，A，B，C 三种型号的电脑 50，50，80（台）同时根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第三目标：限制装配线的加班时间，不允许超过 200h

第四目标：满足各种型号电脑的销售目标，A，B，C 型号分别为 100，120，100（台），再根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第五目标：装配线的加班时间尽可能少。

请列出相应的目标规划模型。并求解

解：建立目标约束

(1)　装配线正常生产

设生产 A,B,C 型号的电脑为 x1，　x2，　x3 台，

$\mathbf{d_1^-}$：装配线正常生产时间未利用数，

$\mathbf{d_1^+}$：装配线加班时间，

第一问中希望装配线正常生产，避免开工不足，因此装配线　约束目标为

$$\begin{cases}\min\{d_1^-\}\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700\end{cases}$$

（2）销售目标

（3）优先满足老客户的需求，并根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子，A，B，C 三种型号的电脑每小时利润是 $\frac{1000}{5}$ 、$\frac{1400}{8}$、$\frac{2520}{12}$ 因此，老客户的销售约束为：

销售目标约束为 $\begin{cases}\min\{20d_2^- + 18d_3^- + 21d_4^-\}\\ x_1+d_2^- - d_2^+ = 50\\ x_2+d_3^- - d_3^- = 50\\ x_3+d_4^- - d_4^- = 80\end{cases}$

(2)　销售目标　(接上)　再考虑一般销售，类似上面的讨论，得到

$$\begin{cases}\min\{20d_5^- + 18d_6^- + 21d_7^-\}\\ x_1+d_5^- - d_5^+ = 100\\ x_2+d_6^- - d_6^+ = 120\\ x_3+d_7^- - d_7^+ = 100\end{cases}$$

加班限制

首先是限制装配线加班时间，不允许超过 200 小时，

因此得到

$$\begin{cases}\min\{d_8^+\}\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_8^- - d_8^+ = 1900\end{cases}$$

其次装配线的加班时间尽可能少，即

$$\begin{cases}\min\{d_1^+\};\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700.\end{cases}$$

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2(20d_2^- + 18d_3^- + 21d_4^-) + p_3 d_8^- + p_4(20d_5^- + 18d_6^- + 21d_7^-) + p_5 d_1^+ \quad ;$$

$$5x_1 + 8x_2 + 12x_3 + d_1^- - d_1^+ = 1700\,;$$

$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50;$$

$$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50;$$

$$x_3 + d_4^- - d_4^+ = 80;$$

$$x_1 + d_5^- - d_5^+ = 100;$$

$$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 120;$$

$$x_3 + d_7^- - d_7^+ = 100;$$

$$5x_1 + 8x_2 + 12x_3 + d_8^- - d_8^+ = 1900\,;$$

LINGO 程序：（写成展开形式亦可，但注意别写错了）

```
  MODEL:
sets:
  Level/1..5/: P, z, Goal;
  Variable/1..3/: x;
  S_Con_Num/1..8/: g, dplus, dminus;
  S_Cons(S_Con_Num, Variable): C;
  Obj(Level, S_Con_Num): Wplus, Wminus;
endsets
data:
  P= ? ? ? ? ?;
  Goal = ?, ?, ?,?,0;
  g=1700 50 50 80 100 120 100 1900;
  C = 5 8 12
      1 0 0
      0 1 0
      0 0 1
      1 0 0
      0 1 0
      0 0 1
      5 8 12;
  Wplus =  0 0 0 0 0 0 0 0
           0 0 0 0 0 0 0 0
           0 0 0 0 0 0 0 0
           0 0 0 0 0 0 0 0
           1 0 0 0 0 0 0 0;
  Wminus = 1 0 0 0 0 0 0 0
           0 20 18 21 0 0 0 0
           0 0 0 0 0 0 0 1
```

```
         0  0  0  0  20  18  21  0
         0  0  0  0  0  0  0  0;
enddata
min=@sum(Level: P * z);
@for(Level(i):
   z(i)=@sum(S_Con_Num(j): Wplus(i,j)*dplus(j))
       +@sum(S_Con_Num(j): Wminus(i,j)*dminus(j)));
@for(S_Con_Num(i):
   @sum(Variable(j): C(i,j)*x(j))
     + dminus(i) - dplus(i) = g(i);
);
@for(Level(i) | i #lt# @size(Level):
    @bnd(0, z(i), Goal(i));
);
```

运行的部分结果：

```
第一次 z(1)=0
第二次 z(2)=0
第三次 z(3)=0
第四次 z(4)=0
第五次 z(5)=960.0000
                      X( 1)        100.0000            0.000000
                      X( 2)        120.0000            0.000000
                      X( 3)        100.0000            0.000000
```

答：A 型电脑生产 100 台，B 型电脑生产 120 台，C 型电脑生产 100 台。

模糊聚类问题

某高中高二有 7 个班级，学生成绩的好与差，没有明确的评定界限，并且班级间成绩好坏的表现具有一定的模糊不确定性。各班级成绩指标值见表 1。

解：问题的分析：

解决上述问题可运用模糊聚类分析方法。现以 7 个班级某次其中考试的四门主课成绩为依据，对 7 个班级成绩好坏的相关程度分类。

设 7 个班级组成一个分类集合： $X=(x_1,x_2,\cdots,x_7)$ 分别代表 1 班到 7 班。每个班级成绩均是四门基础课（语文、数学、英语、综合）作为四项统计指标，即有 $X_{ij}=\{X_{i1},X_{i2},X_{i3},X_{i4}\}$

这里 X_{ij} 表示为第 i 个班级的第 j 门基础课指标 $(i=1,2,\cdots,7;\ j=1,2,\cdots,4)$。这四项成绩指标为：语文平均成绩 X_{i1}，数学平均成绩 X_{i2}，英语平均成绩 X_{i3}，综合平均成绩 X_{i4}。

问题的解决：

1、数据标准化

采用极差变换 $X'_{ij}=\dfrac{x_{ij}-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$，　　　　　　　　　　（1）

式中 x_{ij} 是第 i i 个班级第 j 门基础课平均成绩的原始数据，x_{max} 和 x_{min} 分别为不同班级的同一门基础课平均成绩的最大值和最小值。 X'_{ij} 为第 i 个班级第 j 门基础课平均成绩指标的标准化数值。当 $x_{ij}=x_{min}$ 时， $x'=0$，当 $x_{ij}=x_{max}$ 时， $x'=1$。

2、用最大最小法建立相似矩阵

计算模糊相似矩阵 R，根据标准化数值建立各班级之间四门基础课成绩指标的相似关系矩阵，采用最大最小法来计算 r_{ij}：

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})}$$

其中 $r_{ij}\in[0,1],(i=1,2,\cdots,7\ j=1,2,3,4)$ 是表示第 i 个班级与第 j 个班级在四门基础课成绩指标上的相似程度的量。其余运算量可以通过 MATLAB 编程运算，程序如下：

3、改造相似关系为等价关系进行聚类分析

矩阵 R 满足自反性和对称性，但不具有传递性，为求等价矩阵，要对 R 进行改造，只需求其传递闭包。由平方法可得模糊等价矩阵。用其可对 7 个班级进行聚类分析。

令 λ 由 1 降至 0，写出 R_λ，按 R_λ 分类元素 u_i 和 u_j 归同一类的条件是

$$R_\lambda(u_i,u_j)=1\quad (i,j=1,2,3,4,5,6,7)$$

取 λ =1，则有 $R_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

U 可分 7 类 $\{u_1\}$，$\{u_2\}$，$\{u_3\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$，$\{u_6\}$，$\{u_7\}$。

降低置信水平 λ，对不同的 λ 作同样分析，得到

按不同的置信水平对 7 个班级进行模糊聚类，将会得到不同的分类结果

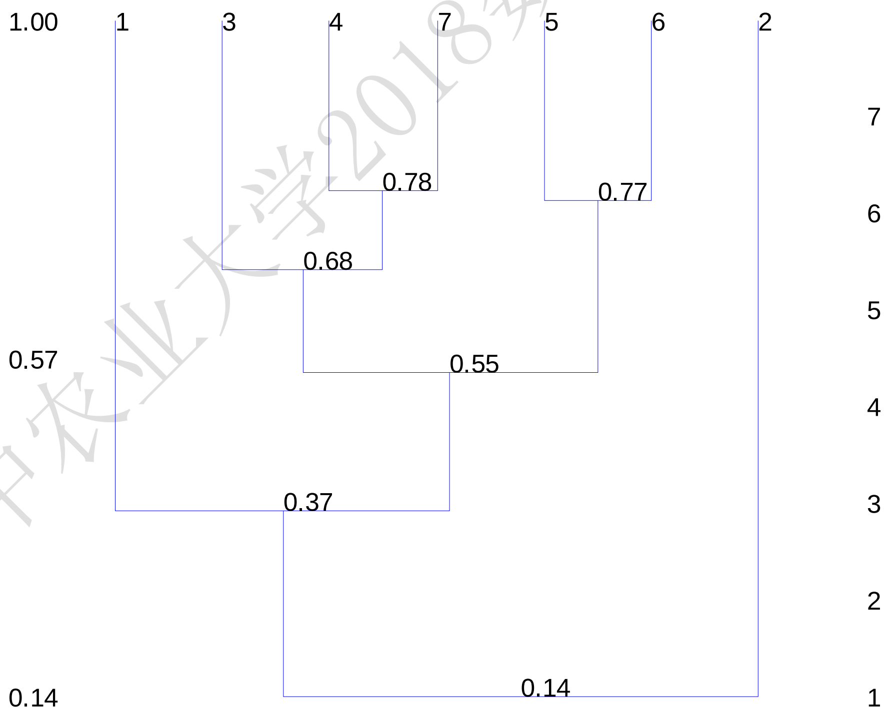
代码如下：

```
function [M,N] = Example8_11


X=[62.03  62.48  78.52  70.77  74.18  73.95  66.83
   59.47   63.70  72.38  77.68  67.07  68.32  76.04
```

```
  68.17     61.04 75.17  73.28  67.74  70.09  76.87
  72.45   68.17  74.65  72.12  70.43  68.73  73.18];
X=X';%转置成对象乘以指标的矩阵
[M,N]=fuzzy_jlfx(2,5,X);%极差变换 最大最小法
end
%%
function [M,N]=fuzzy_jlfx(bzh,fa,X)%得到聚类结果
[X]=F_JlSjBzh(bzh,X);%数据标准化
[R]=F_JlR(fa,X);%建立相似矩阵
[A]=fuzzy_cdbb(R);%得到传递闭包矩阵
[Alamd]=fuzzy_lamdjjz(A);%得到 lamdf 截矩阵从而得到聚类结果
[M,N]=F_JlDtjl(R);%动态聚类并画出聚类图
%% 下面调用课程网站提供的函数（略）
```

得到结果



可聚为三类

模糊综合评判部分作业

“晋升”的数学模型，以高校教师晋升教授为例：因素集 U={政治表现及工作态度，教学水平，科研水平，外语水平}；评判集：V={好，较好，一般，较差，差}；

评判集 因素集	好	较好	一般	较差	差
政治表现及工作态度	4	2	1	0	0
教学水平	6	1	0	0	0
科研水平	0	0	5	1	1
外语水平	2	2	1	1	1

（1）建立模糊综合评判矩阵

当学科评审组的每个成员对评判的对象进行评价，假定学科评审组由 7 人组成，用打分或投票的方法表明各自的评价例如对张某，学科评审组中有 4 人认为政治表现及工作态度好，2 人认为较好，1 人认为一般，对其他因素作类似评价。其结果如上表：

设$c_{ij}(i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4,5)$表示赞成第$i$项因素为第$j$种评价的票数，令

$$r_{ij}=\frac{c_{ij}}{\sum_{k=1}^{5}c_{ik}}\ (i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4,5)$$

$$R=\begin{pmatrix} 0.57 & 0.29 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0.86 & 0.14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.71 & 0.14 & 0.14 \\ 0.29 & 0.29 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \end{pmatrix}$$

（2）综合评判

以教学为主的教师，权重 A1=(0.2,0.5,0.1,0.2)

以科研为主的教师，权重 A2=(0.2,0.1,0.5,0.2)

用模型$M(\wedge,\vee)$计算得，

B1=(0.5,0.2,0.14,0.14,0.14)

B2=(0.2,0.2,0.5,0.14,0.14)

对 B1，B2 归一化（即将每分量初一分量总和），得

B1=(0.46,0.18,0.12,0.12,0.12)

B2=(0.17,0.17,0.42,0.12,0.12)

若规定评价“好”“较好”要占 50%以上才可晋升，则此教师晋升为教学型教授，不可晋升为科研型教授，这与实际实相符的。

代码

```
function Example8_5
A1=[0.2 0.5 0.1 0.2];
A2=[0.2 0.1 0.5 0.2];
R=[0.57 0.29 0.14 0 0;
    0.86 0.14 0 0 0;
    0 0 0.71 0.14 0.14;
    0.29 0.29 0.14 0.14 0.14];
fuzzy_zhpj(1,A1,R)
fuzzy_zhpj(1,A2,R)
```

end

下面调用网站提供的代码函数

5.模糊线性规划部分作业

某企业根据市场信息及自身生产能力，准备开发甲乙两种系列产品，甲种系列产品最多大约能生产 400 套，乙种系列产品最多大约能生产 250 套。据测算：

甲每套成本 3 万元，获纯利润 7 万元；乙每套成本 2 万元，获纯利润 3 万元。生产两种系列产品的资金总投入大约不能超过 1500 万元。问如何安排生产才能使企业获利最多？（浮动 5%）

解：设生产甲 x_1 套，生产乙 x_2 套，则可以建立模型如下：

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le [1500,75] & (1) \\ x_1 \le [400,20] & (2) \\ x_2 \le [250,12] & (3) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求解模糊线性规划

设约束（1）、（2）、（3）的伸缩系数分别为：

$d_1 = 75$（万元），$d_2 = 20$（套），$d_3 = 12$（套）

为了将目标函数模糊化，先解经典线性规划问题（1）

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 1500 \\ x_1 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

求得：$x_1 = 400$，$x_2 = 150$，$z_0 = 3250$。

再解经典线性规划问题（3）

$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 1500 + 75 \\ x_1 \le 400 + 20 \\ x_2 \le 250 + 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

增加取整约束

求得：$x_1 = 420$，$x_2 = 157$，$z_0 + d_0 = 3411$，于是 $d_0 = 3411 - 3250 = 161$。

将 z_0, d_0, d_1, d_2, d_3 带入（5.24）得

$\max \lambda$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 75\lambda \le 1500 + 75 \\ \quad x_1 + 20\lambda \le 400 + 20 \\ x_2 + 12\lambda \le 250 + 12 \\ 7x_1 + 3x_2 - 161\lambda \ge 3250 \\ \lambda \ge 0 \ \lambda \le 1 \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

```
max=th;
7*x1+3*x2-161*th>3250;
3*x1+2*x2+75*th<1575;
x1+20*th<420;
x2+12*th<262;
th<1;
@gin(x1);
@gin(x2);
```

上述线性规划问题的最优解为

X1 = 410.0000 X2 = 154.0000 $\lambda = 0.49333$

因此，安排甲种系列产品 410 套，乙种系列产品 154 套，能获最大利润为 3332（万元）