第十五章 欧拉图与哈密顿图

主要内容

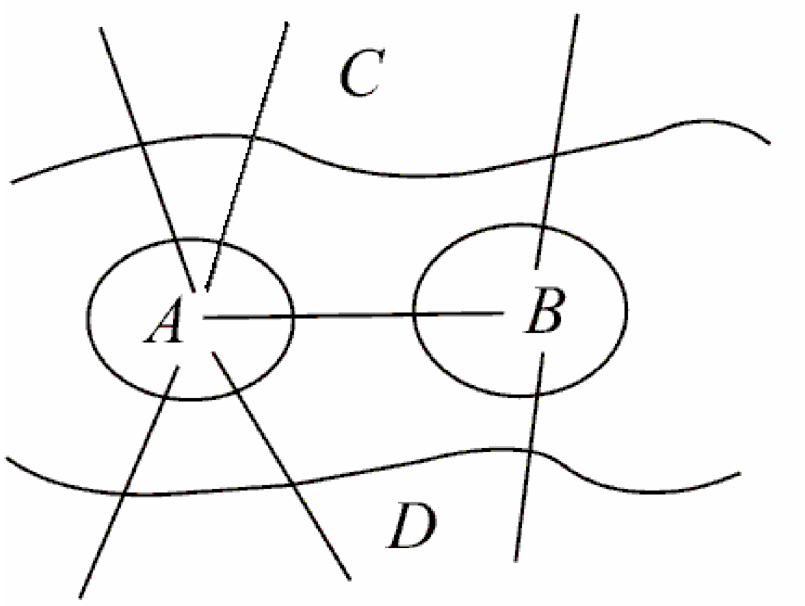
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 最短路问题、中国邮递员问题与货郎担问题
- 运算

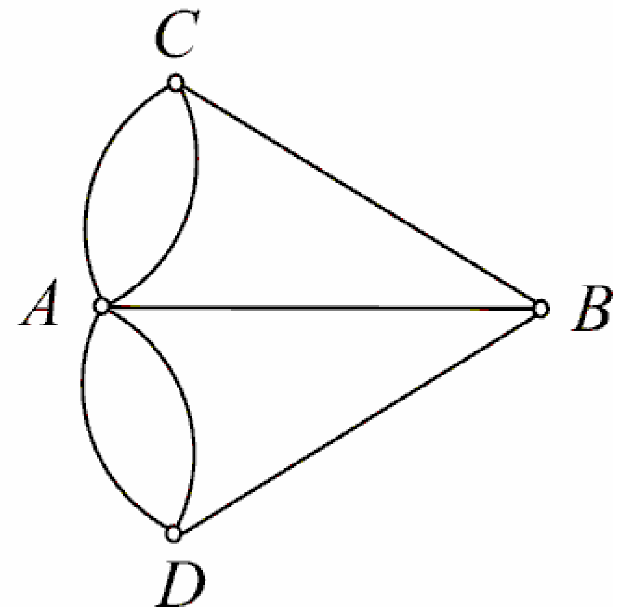
预备知识

- 多重集合 —— 元素可以重复出现的集合
- 无序集 —— $A\&B=\{\,(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\,\}$

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——通过图（无向图或有向图）中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

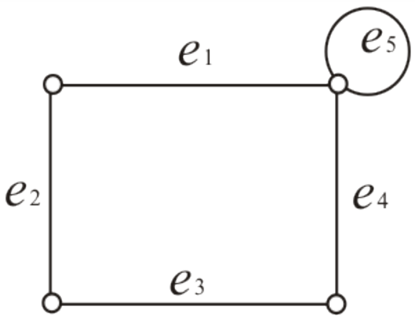
(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

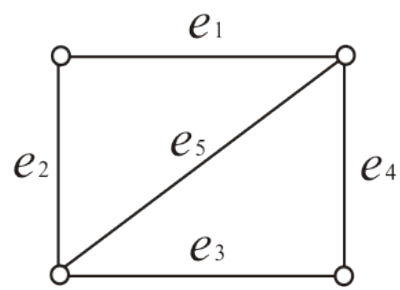
几点说明:

- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.
- 环不影响图的欧拉性.

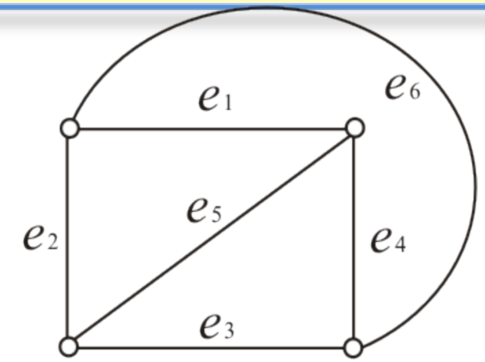
欧拉图实例



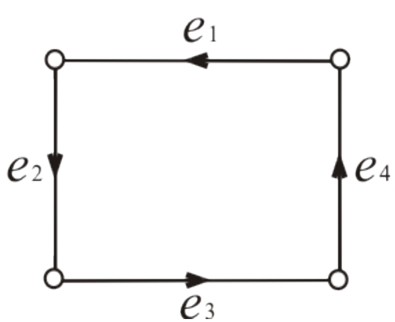
(1)



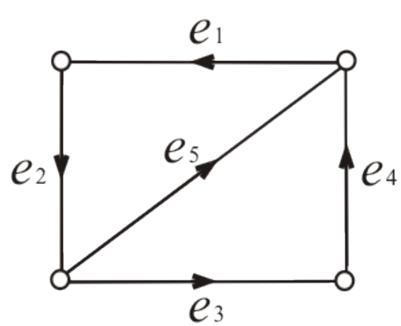
(2)



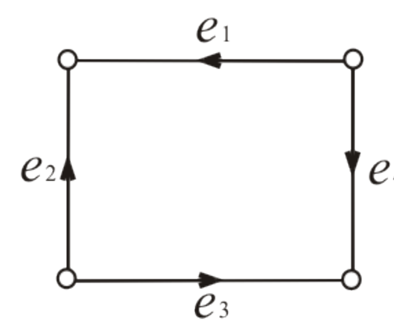
(3)



(4)



(5)



(6)

上图中，(1) 和 (4) 为欧拉图，(2) 和 (5) 为半欧拉图，(3) 和 (6) 既不是欧拉图，也不是半欧拉图. 在 (3) 和 (6) 中各至少加几条边才能成为欧拉图？

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度数顶点.

证：若G 为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C 为G 中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以 v_i 为偶度顶点.

由v_i 的任意性，结论为真.

充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(1) $m=1$时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明：

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度数顶点.

证(续)：充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(2) 设$m \leq k$（$k \geq 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明：

由 G 的连通性及无奇度顶点，$\delta(G) \geq 2$，可以证明 G 中必含圈，设 C 为 G 中一个圈. 删除 G 上的全部边，得 G 的生成子图 G'. 设 G' 有 s 个连通分支 $G'_1, G'_2, \ldots, G'_s$，每个连通分支至多有 k 条边，且无奇度顶点. 设 G'_i 与 C 的公共顶点为 $v^*_{j_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 由归纳假设可知， $G'_1, G'_2, \ldots, G'_s$ 都是欧拉图，因而都存在欧拉回路. 设 C_i 是 G'_i 中一条欧拉回路， $i = 1, 2, \ldots, s$.

无向欧拉图的判别法

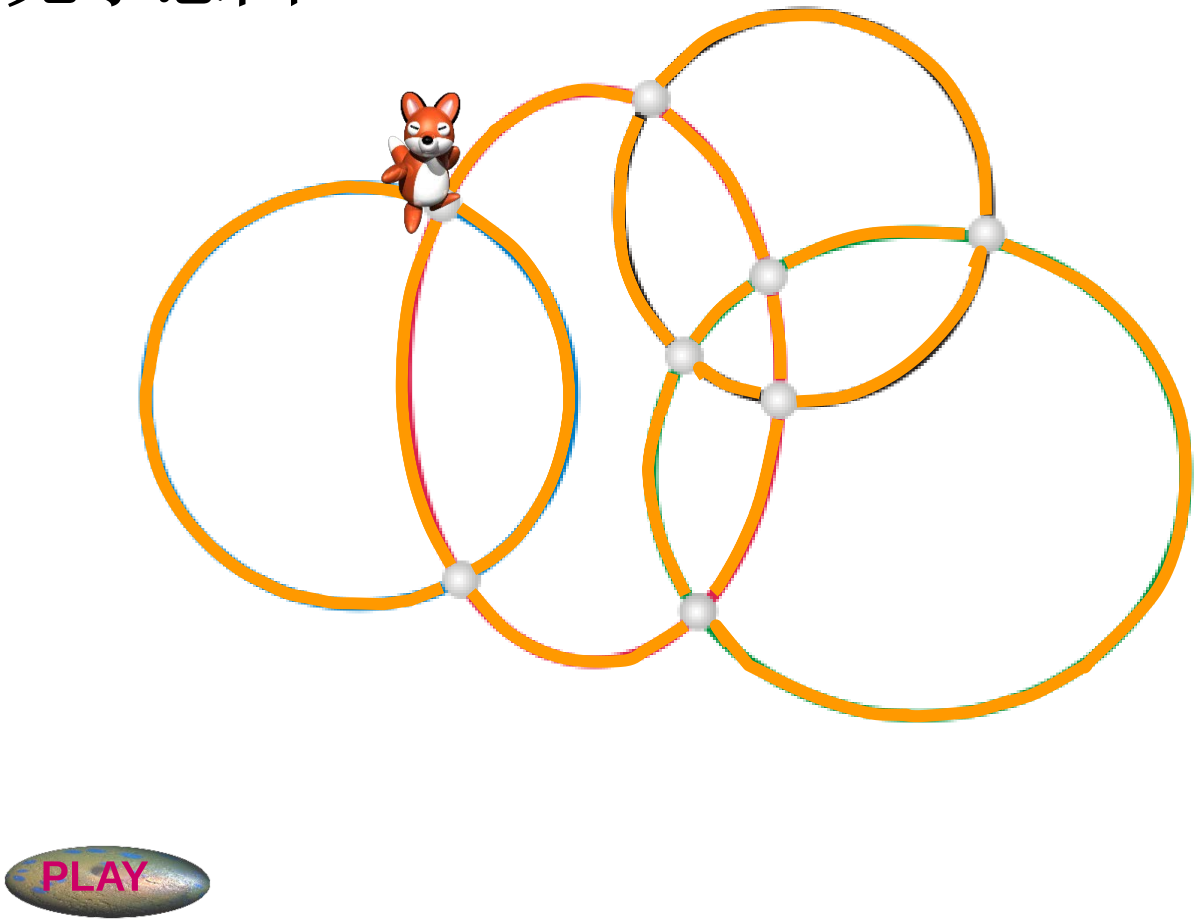
定理15.1 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度数顶点.

证(续)：充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明：

设 C_i 是 G'_i 中一条欧拉回路， $i = 1, 2, \ldots, s$. 从某个顶点 v_r 开始沿 C 行走，每遇到 v^*_{ji}，就行遍 C_i，回到v^*_{ji} 再继续沿 C_i 行走，最后回到 v_r，得到一条回路 $v_r, \ldots v^*_{j1} \ldots v^*_{j1} \ldots v^*_{j2} \ldots v^*_{j2} \ldots v^*_{js} \ldots v^*_{js} \ldots v_r$，此回路经过 G 中每条边一次且仅一次并行遍 G 中所有顶点，它是 G 中的一条欧拉回路（见图），得证 G 为欧拉图.

从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图.



欧拉图的判别法

定理15.2 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 连通且恰有两个奇度顶点.

证：必要性简单.

充分性（利用定理15.1）

设 u, v 为 G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u, v)$$

则 G' 连通且无奇度顶点，由定理15.1 知 G' 为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u, v)$$

则 Γ 为 G 中欧拉通路.

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图 *D* 是欧拉图当且仅当 *D* 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.4 有向图 *D* 是半欧拉图当且仅当 *D* 是单向连通的，且 *D* 中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大 1，另一个的出度比入度大 1，而其余顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.5 *G* 是非平凡的欧拉图当且仅当 *G* 是连通的且为若干个边不重的圈之并.

可用归纳法证定理15.5.

例题

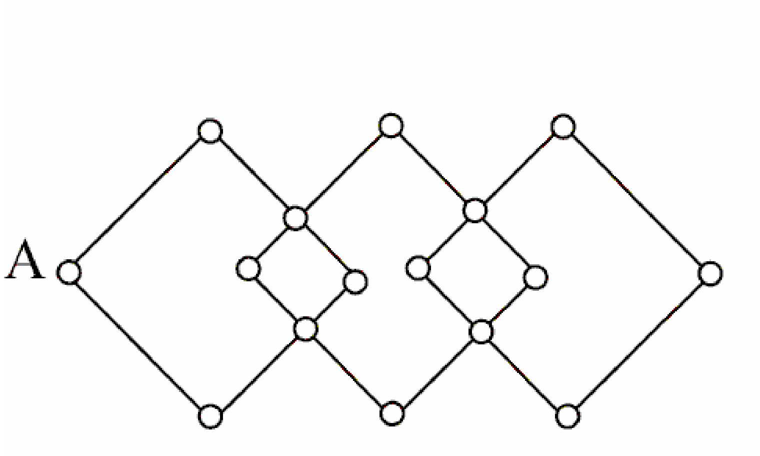
例1 设 G 是欧拉图，但 G 不是平凡图，也不是一个环，则 $\lambda(G) \geq 2$.

证：只需证明 G 中不可能有桥（如何证明？）

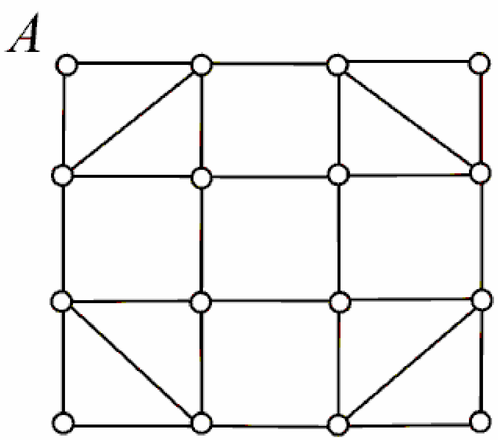
设 C 一条欧拉回路，则 G 任意一条边 e 都在 C 上，因而 $p(G-e) = p(G)$，故 e 不是桥.

例题

例2 下图中，(1), (2) 两图都是欧拉图，均从 *A* 点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？



(1)



(2)

Fleury算法

Fleury 算法的基本思想：能不走桥就不走要桥.

算法：(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍，按下面方法从$E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$：

(a) e_{i+1}与v_i相关联；

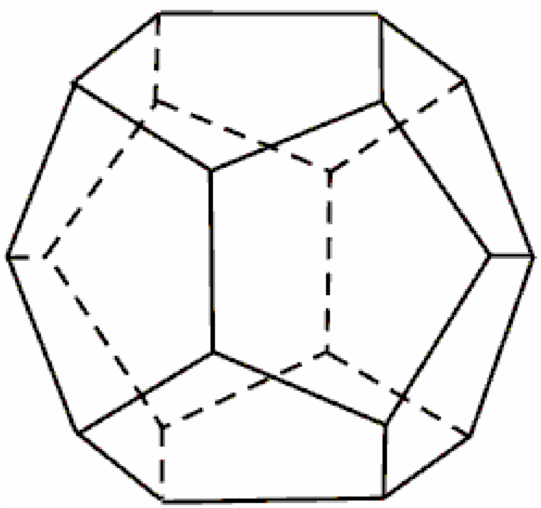
(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为$G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

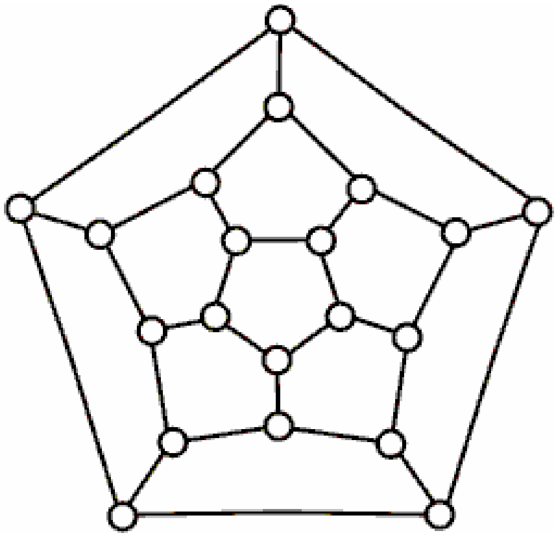
可以证明：算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m$ ($v_m=v_0$) 为 G 中一条欧拉回路.

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

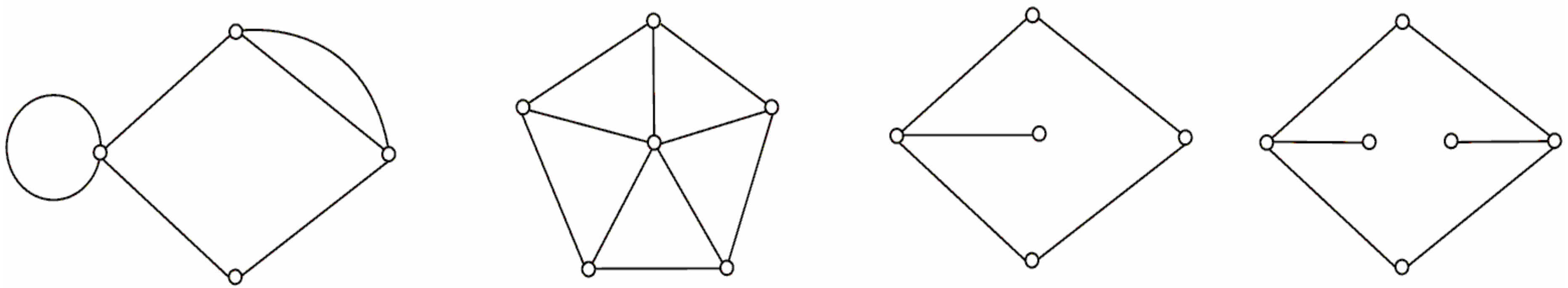
(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

- 平凡图是哈密顿图.
- 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.
- 环与平行边不影响哈密顿性.
- 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上.

实例



在上图中，

(1), (2) 是哈密顿图;

(3) 是半哈密顿图;

(4) 既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图 $G=<V, E>$ 是哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$.

证：设 C 为 G 中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1) \leq |V_1|$

(2) $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$ （因为$C \subseteq G$）

推论 设无向图 $G=<V, E>$ 是半哈密顿图，对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$ 均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|+1$.

证：令 Γ：$u, \ldots, v$ 为 G 中哈密顿通路，令 $G' = G \cup (u, v)$，则 G' 为哈密顿图. 于是 $p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u, v)) \leq |V_1|+1$

几点说明

- 定理15.6 中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）
- 由定理15.6 立刻可知，$K_{r,s}$ 当 $s\geq r+1$ 时不是哈密顿图. 易知 $K_{r,r}$（$r\geq 2$）时都是哈密顿图，$K_{r,r+1}$ 都是半哈密顿图.
- 常利用定理15.6 判断某些图不是哈密顿图.

例2 设 G 为 n 阶无向连通简单图，若 G 中有割点或桥，则 G 不是哈密顿图.

证：设 v 为割点，则 $p(G-v)\geq 2>|\{v\}|=1$.

K_2 有桥，它显然不是哈密顿图. 除 K_2 外，其他有桥的图（连通的）均有割点.

其实，本例对非简单连通图也对.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则 G 中存在哈密顿通路.

证明线索：

(1) 由(*)证 G 连通

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为 G 中极大路径. 若 $l = n$，证毕.

(3) 否则，证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈 C，由(1) 知 C 外顶点存在与 C 上某顶点相邻顶点，从而得比 Γ 更长的路径，重复 (2) –(3)，最后得 G 中哈密顿通路.

证明

证：（着重关键步骤）

(1) 由(*)及简单图的性质，用反证法证明 G 连通.

假设 G 不是连通的，则 G 至少有两个连通分支，设 G_1, G_2 是阶数分别为 n_1, n_2 的两个连通分支. 设 $u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$，因为 G 是简单图，所以

$$d_G(u) + d_G(v) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v) \le n_1 - 1 + n_2 - 1 \le n - 2$$

这与 (*) 式矛盾，所以 G 必为连通图.

证明

证：（着重关键步骤）

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为极大路径，$l \le n$，若 $l = n$（结束）.

下面讨论 $l<n$ 的情况，即要证 G 中存在过 Γ 上所有顶点的圈.

① 若 (v_1, v_l) 在 G 中，则 $\Gamma\cup(u, v)$ 为 G 中圈

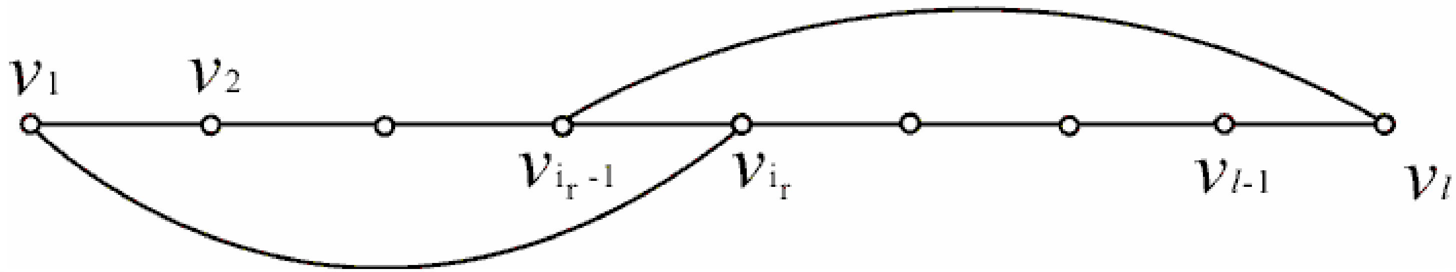
② 否则，设 v_1 与 Γ 上 $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ 相邻，则 $k\ge2$ (否则由极大路径端点性质及(*)，会得到 $d(v_1)+d(v_l)\le1+l-2<n-1$)，

又 v_l 至少与 $v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots v_{i_k}$ 左边相邻顶点之一相邻(否则，$d(v_1)+d(v_l) \le k+l-2-(k-1) = l-1 < n-1$)，设 v_{i_r-1} 与 v_l 相邻，见图中(1)，于是得 G 中回路 C ((1)中图去掉边(v_{i_r-1}, v_{i_r}))

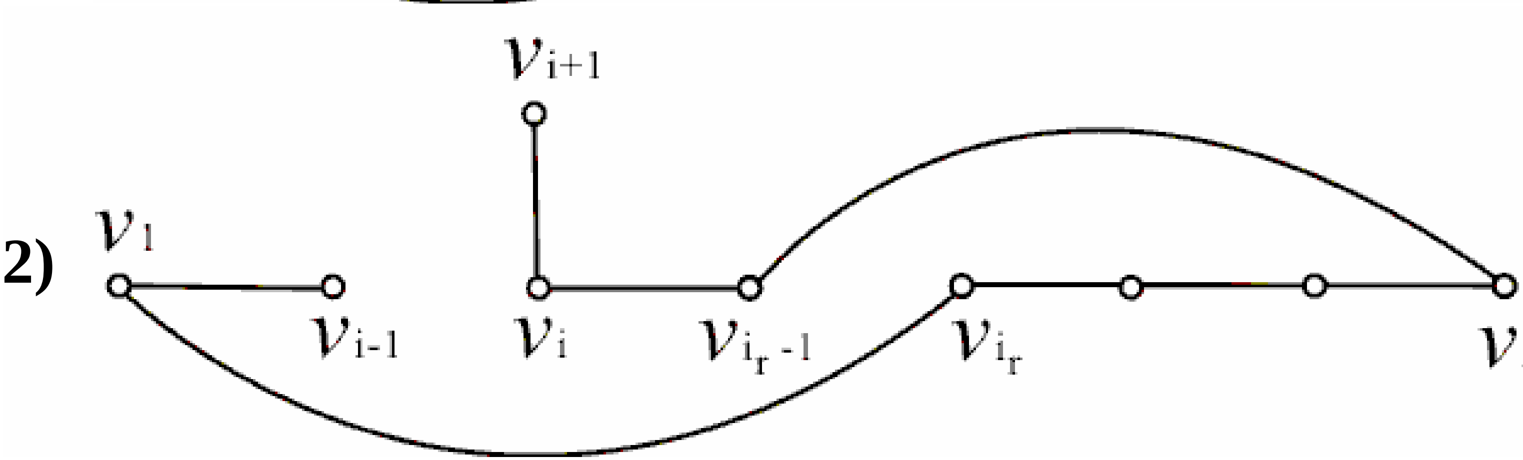
证明

于是，回路 $C=v_1v_2\ldots v_{i_r-1}v_lv_{l-1}\ldots v_{i_r}v_1$ 过 Γ 上所有顶点.

图(1)



图(2)



(3) 由连通性，$\exists v_{l+1}\in V(G)-V(C)$ 与 C 上的某顶点相邻，可得到比 Γ 更长的路径（如图(2)所示），对它再扩大路径，重复(2)，最后得哈密顿通路.

推论

推论 设 G 为 n ($n\geq3$) 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则 G 中存在哈密顿回路，从而 G 为哈密顿图.

证明线索：由定理15.7得$\Gamma = v_1v_2\ldots v_n$ 为G中哈密顿通路. 若$(v_1,v_n)\in E(G)$，得证.

否则利用（**）证明存在过 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的圈(哈密顿回路).

定理15.8 设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v)\geq n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G\cup(u, v)$ 为哈密顿图.

几点说明

定理15.7 是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件. 长度为 $n-1$（$n\geq4$）的路径构成的图不满足（*）条件，但它显然是半哈密顿图.

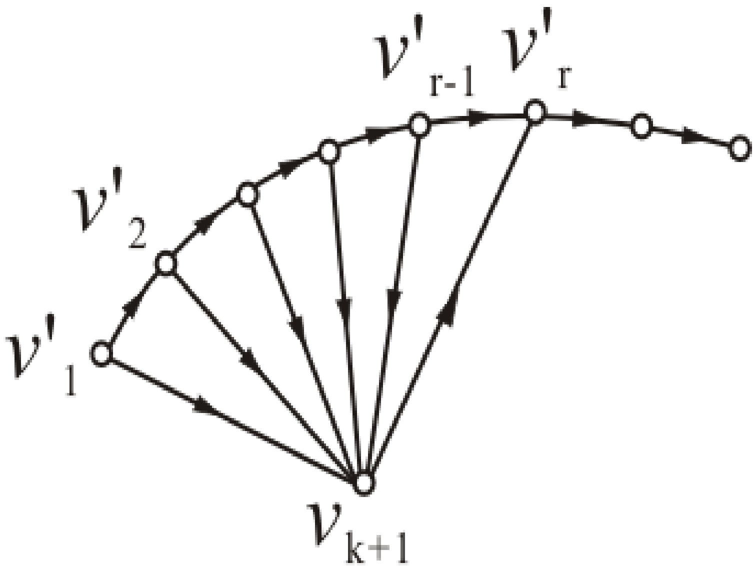
定理15.7 的推论同样不是哈密顿图的必要条件，G 为长为 n 的圈，不满足（**）条件，但它当然是哈密顿图.

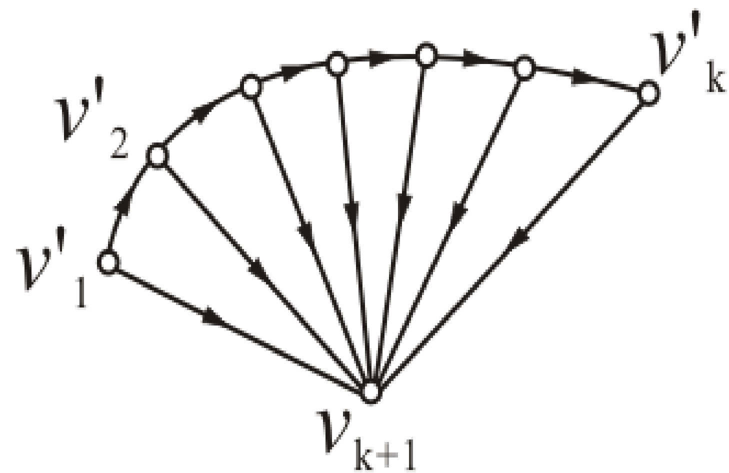
由定理15.7 的推论可知，K_n（$n\geq3$）均为哈密顿图.

有向哈密顿图的充分条件

定理15.9 若 D 为 n（$n\geq2$）阶竞赛图，则 D 中具有哈密顿通路.

证明思路：注意，竞赛图的基图是无向完全图. 对 $n(n\geq2)$ 做归纳. 只需观察下面两个图.





判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

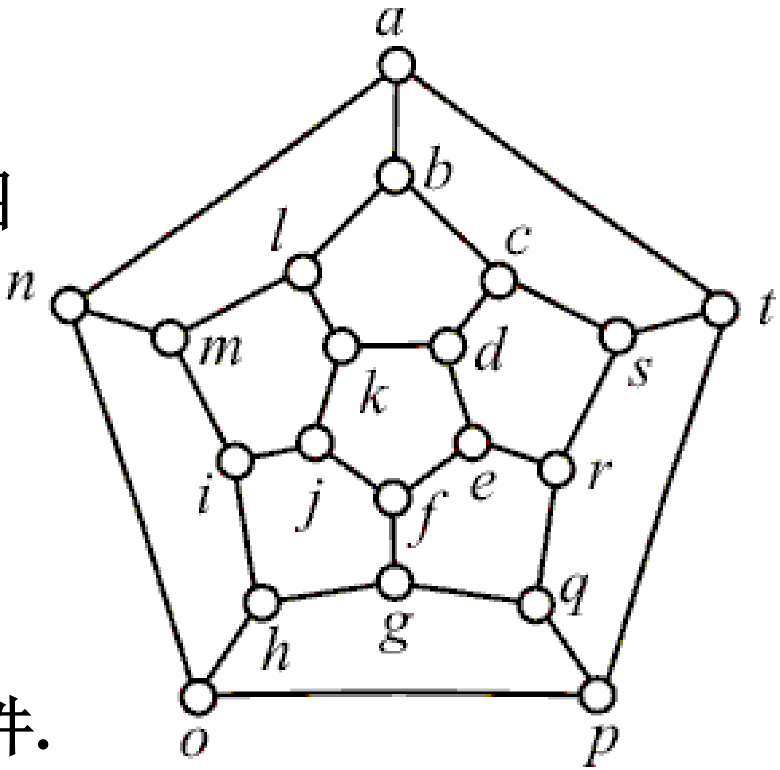
例4 下图(周游世界问题)是哈密顿图

易知

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.

注意，此图不满足定理15.7 推论条件.



判断某图是否为哈密顿图方法

2．满足定理15.7推论的条件（**）.

例5 完全图K_n ($n\geq3$) 中任何两个顶点u, v，均有

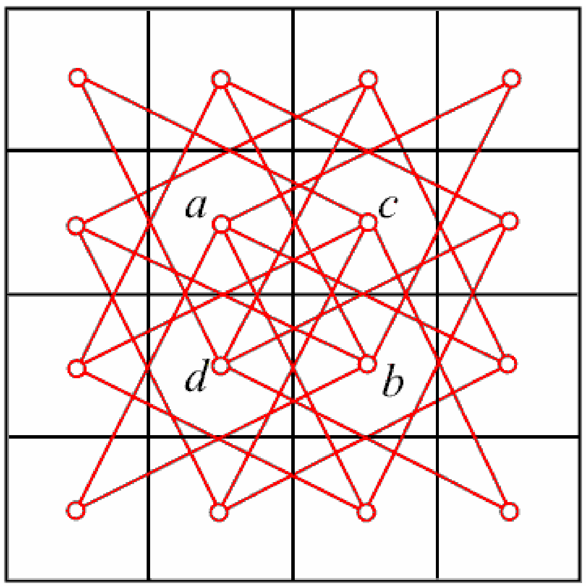
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n\geq3),$$

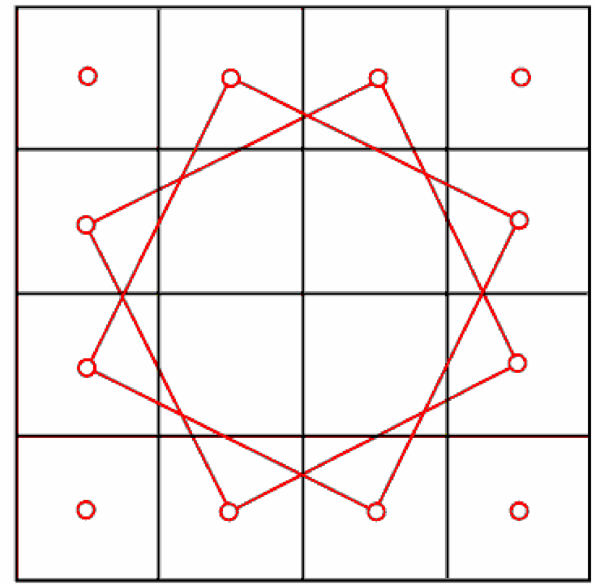
所以K_n为哈密顿图.

3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

例6 在四分之一国际象棋盘（4×4方格组成）上跳马无解.

在国际象棋盘上跳马有解.





令 $V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 > 4$，由定理15.6可知图中无哈密顿回路.

在国际象棋盘上跳马有解，试试看.

定义15.3 给定图 $G = <V, E>$，(G为无向图或有向图)，设 $W:E\to \mathrm{R}$ (R为实数集)，对 G 中任意边 $e = (v_i, v_j)$ (G为有向图时，$e = <v_i, v_j>$)，设 $W(e) = w_{ij}$，称实数 w_{ij} 为边 e 上的**权**，并将 w_{ij} 标注在边 e 上，称 G 为**带权图**(**或赋权图**)，此时常将带权图 G 记作 $<V, E, W>$.

设 P 是 G 中的一条通路，P 中所有边的权之和称作 P 的长度，记作 $W(P)$，即

$$W(P) = \sum_{e\in E(P)} w(e)$$

类似地，可以定义回路 C 的长度 $W(C)$.

最短路问题

设带权图 $G=<V, E, W>$(无向图或有向图)，其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数. $\forall u, v \in V$，当 u 和 v 连通(u 可达 v)时，称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的**最短路径**，称其长度为从 u 到 v 的距离，记作 $d(u, v)$. 约定：$d(u, u) = 0$；当 u 和 v 不连通(u 不可达 v)时，$d(u, v)= +\infty$.

最短路问题：给定带权图 $G=<V, E, W>$ 及顶点 u 和 v，其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数，求从 u 到 v 的最短路径.

Dijkstra 算法

Dijkstra算法是由荷兰计算机科学家Edsger．Dijkstra(迪杰斯特拉)于1959年提出． 算法给出从给定的起点 s 到每一顶点的最短路径．Dijkstra算法被广泛用于路由.

如果 $uv_{i1}v_{i2}\ldots v_{ik}v$ 是从 u 到 v 的最短路径，则对每一个 t $(1 \le t \le k)$，是从 u 到 v_{it} 的最短路径.

Dijkstra 算法

在计算过程中，赋予每一个顶点 v 一个标号 $l(v)=(l_1(v), l_2(v))$. 标号分永久标号(P标号)和临时标号(T标号). 在 v 的永久标号 $l(v)$ 中，$l_2(v)$ 是从 s 到 v 的距离，$l_1(v)$ 是 s 到 v 的最短路径上 v 的前一个顶点. 当 $l(v)$ 是临时标号时，$l_1(v)$ 和 $l_2(v)$ 分别是当前从 s 经过永久标号的顶点到 v 的长度最短的路径上 v 的前一个顶点和这条路径的长度.

Dijkstra 算法

输入：带权图$G=<V,E,W>$ 和$s\in V$，其中$|V|=n$，$\forall e\in E$，$W(e)\geq 0$

输出：s 到 G 中每一顶点的最短路径及距离

1. 令 $l(s) \leftarrow (s,0)$，$l(v) \leftarrow (s,+\infty)$（$v\in V-\{s\}$），$i \leftarrow 1$，

   $l(s)$是永久(P)标号，其余标号均为临时(T)标号，$u \leftarrow s$

2. For 与 u 关联的临时标号的顶点 v

3. if $l_2(u) + W(u, v) < l_2(v)$ then 令 $l(v) \leftarrow (u, l_2(u) + W(u, v))$

4. 计算 $l_2(t)=\min\{l_2(v) \mid v\in V$ 且有临时标号$\}$，把$l(t)$改为永久标号

5. if $i<n$ then 令 $u \leftarrow t$，$i \leftarrow i+1$，转 2

计算结束时，对每一个顶点u，$d(s,u)= l_2(u)$，利用$l_1(u)$从u开始回溯找到从s到u的最短路径.

Dijkstra 算法另外一种描述

算法步骤：

1. 给始点 v_s 以P标号 $P(v_s)=0$，这表示从v_s到 v_s的最短距离为 0，其余节点均给T标号，$T(v_i)=+\infty \quad (i=2,3,\cdots,n)$.

2. 设节点 v_i 为刚得到P标号的点，考虑点 v_j，其中 $(v_i,v_j)\in E$ ，且 v_j 为T标号. 对 v_j 的T标号进行如下修改：

$$T(v_j)=\min\{T(v_j),P(v_i)+w_{ij}\}$$

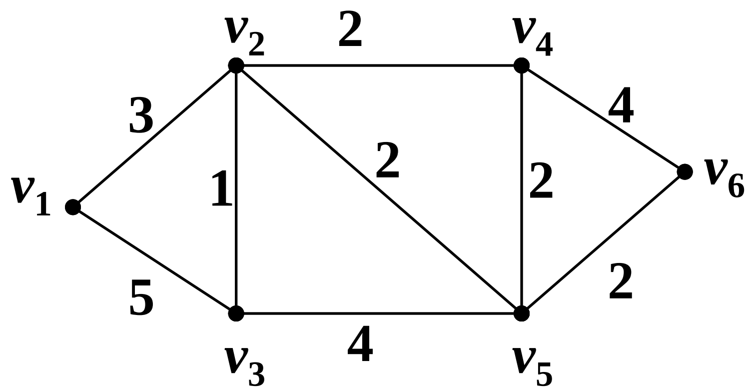
3. 比较所有具有T标号的节点，把最小者改为P标号，即：

$$P(v_k)=\min\{T(v_i)\}$$

当存在两个以上最小者时，可同时改为P标号. 若全部节点均为P标号，则停止，否则用 v_k 代替 v_i，返回步骤 2.

Dijkstra 算法算例

例 用Dijkstra算法求下图从v_1到v_6的最短路。



解：(1) 首先给 v_1 以 P标号，给其余所有点 T标号.

$$P(v_1)=0 \qquad T(v_i)=+\infty \quad (i=2,3,\cdots,6)$$

(2) $T(v_2)=\min\{T(v_2),P(v_1)+w_{12}\}=\min\{+\infty,0+3\}=3$

$T(v_3)=\min\{T(v_3),P(v_1)+w_{13}\}=\min\{+\infty,0+5\}=5$

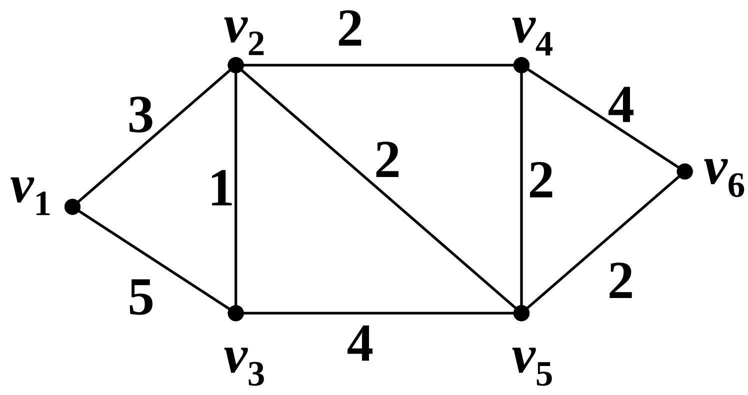
(3) $P(v_2)=3$

(4) $T(v_3)=\min\{T(v_3),P(v_2)+w_{23}\}=\min\{5,3+1\}=4$

$T(v_4)=\min\{T(v_4),P(v_2)+w_{24}\}=\min\{+\infty,3+2\}=5$

$T(v_5)=\min\{T(v_5),P(v_2)+w_{25}\}=\min\{+\infty,3+2\}=5$

Dijkstra 算法算例



(4) $T(v_3)=\min\{T(v_3),P(v_2)+w_{23}\}=4$

$T(v_4)=\min\{T(v_4),P(v_2)+w_{24}\}=5$

$T(v_5)=\min\{T(v_5),P(v_2)+w_{25}\}=5$

(5) $P(v_3)=4$

(6) $T(v_5)=\min\{T(v_5),P(v_3)+w_{35}\}=\min\{5,4+4\}=5$

(7) $P(v_4)=5 \quad P(v_5)=5$

(8) $T(v_6)=\min\{T(v_6),P(v_4)+w_{46}\}=\min\{+\infty,5+4\}=9$

(9) $T(v_6)=\min\{T(v_6),P(v_5)+w_{56}\}=\min\{+\infty,5+2\}=7$

(10) $P(v_6)=7$

反向追踪得 v_1 到 v_6 的最短路为： $v_1\to v_2\to v_5\to v_6$

中国邮递员问题

思考：邮递员从邮局出发，走遍他负责的街区投递邮件，最后回到邮局. 问：如何走才能使他走的路最短？

图论(数学)问题：给定一个带权无向图，其中每条边的权为非负实数，求每一条边至少经过一次的最短回路. 这个问题是我国管梅谷教授于1962年提出的，故称为中国邮递员问题. 属于欧拉问题.

货郎担问题

思考：有 n 个城市，给定城市之间道路的长度（长度可以为∞，对应这两个城市之间无交通线），一个旅行商（货郎担）从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问：如何走才能使他走的路线最短？

图论(数学)问题：设 $G=\langle V, E, W\rangle$ 是 n 个顶点的无向完全图，其中 W 是从 E 到正实数集的一个函数，对在 V 中任意三点 v_i, v_j, v_k 满足

$$W(i, j)+W(j, k)\geq W(i, k)$$

试求出赋权图上的最短哈密尔顿回路.

货郎担问题

完全带权图K_n（$n \geq 3$）中不同的哈密顿回路数

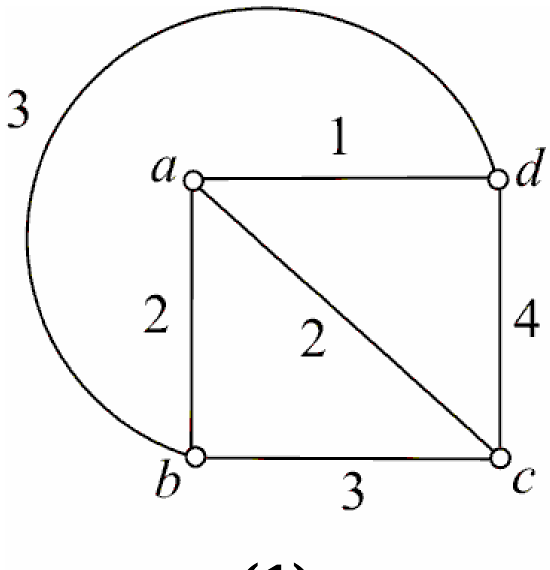
(1) K_n中有$n!$ 条不同的哈密顿回路（定义意义下）.

(2) 完全带权图中有$n!$ 条不同的哈密顿回路.

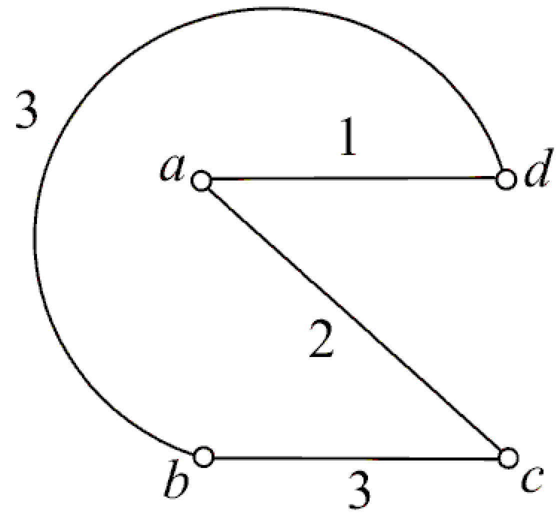
(3) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为$n!$，当n较大时，计算量惊人地大（众多 NP 难问题中的一个）.

货郎担问题

例6 求图中(1) 所示带权图 K_4 中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

解：$C_1 = a\ b\ c\ d\ a$, $W(C_1) = 10$

$C_2 = a\ b\ d\ c\ a$, $W(C_2) = 11$

$C_3 = a\ c\ b\ d\ a$, $W(C_3) = 9$

可见 C_3 (见图中(2)) 是最短的，其权为 9.

第十五章 习题课

主要内容

- 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法
- 哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
- 带权图、中国邮递员问题、货郎担问题

基本要求

- 深刻理解欧拉图、半欧拉图的定义及判别定理
- 深刻理解哈密顿图、半哈密顿图的定义.
- 会用哈密顿图的必要条件判断某些图不是哈密顿图.
- 会用充分条件判断某些图是哈密顿图. 要特别注意的是，不能将必要条件当作充分条件，也不要将充分条件当必要条件.

练习1

1. 设G为n（$n\geq 2$）阶无向欧拉图，证明G中无桥.

方法1：直接证明法.

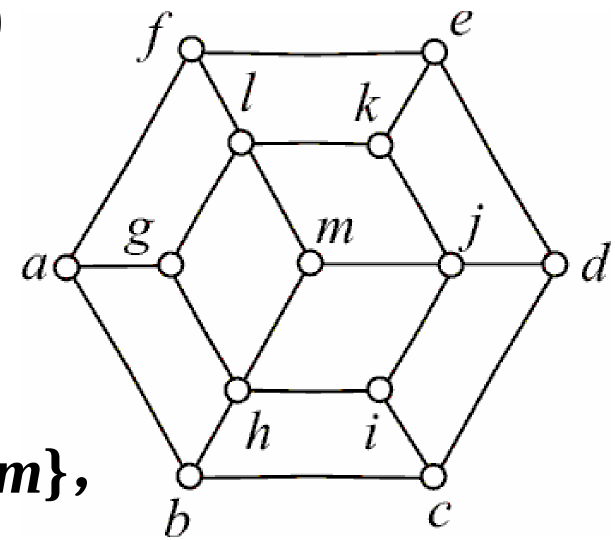
命题 (*)：设 C 为任意简单回路，e 为 C 上任意一条边，则 $C-e$ 连通.

证：设 C 为 G 中一条欧拉回路，任意的 $e\in E(C)$，可知 $C-e$ 是 $G-e$ 的子图，由(*)知 $C-e$ 连通，所以 e 不为桥.

方法2：反证法. 利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论. 否则，设 $e=(u, v)$ 为 G 中桥，则 $G-e$ 产生两个连通分支 G_1, G_2，不妨设 u 在 G_1 中，v 在 G_2 中. 由于从 G 中删除 e 时，只改变 u, v 的度数(各减1)，因而 G_1 与 G_2 中均只含一个奇度顶点，这与握手定理推论矛盾.

练习 2

2. 证明下图不是哈密顿图. (破坏必要条件)



方法1. 利用定理15.6，

取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$，则

$$p(G-V_1) = 7 > |V_1| = 6$$

方法2. G为二部图，互补顶点子集

$V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$，$V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$，

$|V_1| = 6 \neq 7 = |V_2|$.

方法3. 利用可能出现在哈密顿回路上的边至少有n(n为阶数)条 —— 这也是哈密顿图的一个必要条件，记为（*）. 此图中，$n = 13$，$m = 21$. 由于h, l, j 均为4度顶点，a, c, e为 3度顶点，且它们关联边互不相同. 而在哈密顿回路上，每个顶点准确地关联两条边，于是可能用的边至多有$21-(3\times2+3\times1) = 12$. 这达不到（*）的要求.

练习 3

3．某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都与两边的人交谈？

解：图是描述事物之间关系的最好的手段之一.

做无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中 $V=\{v|\ v$为与会者$\}$,

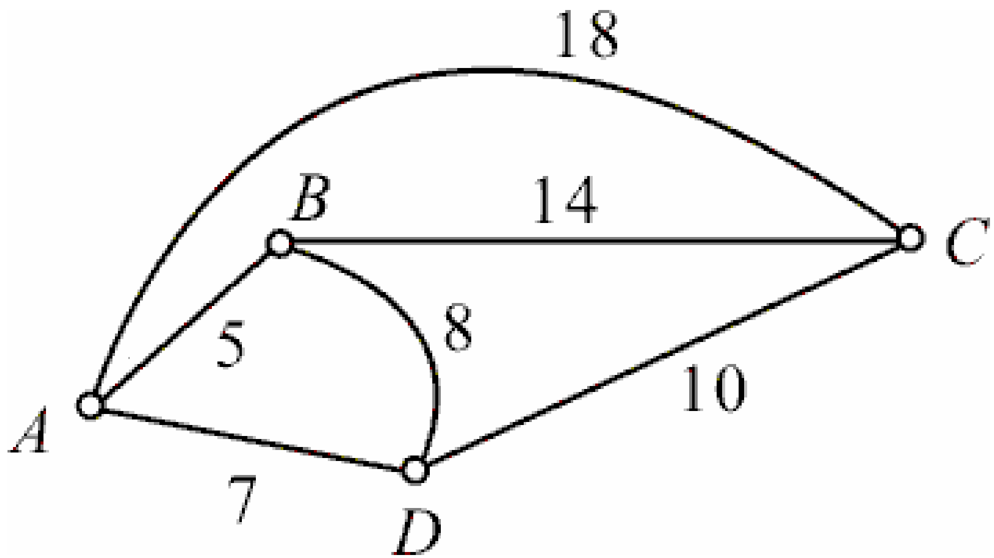
$E=\{ (u, v) \mid u, v\in V$ 且 u 与 v 有共同语言，且 $u\neq v \}$.

易知G为简单图且$\forall v\in V$，$d(v)\geq 4$，于是$\forall u$，$v\in V$，有 $d(u)+d(v) \geq 8$，由定理15.7 的推论可知 G 为哈密顿图. 服务员在 G 中找一条哈密顿回路 C，按 C 中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的：哈密顿回图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

练习 4

4. 距离(千米) 如图所示. 某人从A城市出发，经过所有城市后再回到A城市，他如何走行程最短？



最短的路为*ABCDA*，距离为36千米，其余两条各为多少？