



主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 可满足性问题与消解法

定义2.1 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \leftrightarrow B$ ，并称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式

几点说明：

- 定义中， A, B, \leftrightarrow 均为元语言符号
- A 或 B 中可能有哑元出现，例如

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r)) \quad r \text{ 为左边公式的哑元.}$$

- 用真值表可检查两个公式是否等值，请验证：

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ 不与 } (p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ 等值}$$

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

| p | q | r | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow r$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|--------------|------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

结论: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

| p | q | r | $q \rightarrow r$ | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-----------------------------------|-------------------|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

结论: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 不等值

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),$
 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

| | |
|---------|--|
| 零律 | $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ |
| 同一律 | $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ |
| 排中律 | $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ |
| 矛盾律 | $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$ |
| 蕴涵等值式 | $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ |
| 等价等值式 | $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ |
| 假言易位 | $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ |
| 等价否定等值式 | $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ |
| 归谬论 | $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$ |

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则（见3）

3. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式， $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式

若 $B \Leftrightarrow A$ ，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

证明两个公式等值

例2 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (结合律, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ (德摩根律, 置换规则)

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$ (蕴涵等值式, 置换规则)

今后在注明中省去置换规则

注意: 用等值演算不能直接证明两个公式不等值

证明两个公式不等值

例3 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 不等值

证 方法一 真值表法, 见例1(2)

方法二 观察法. 观察到000, 010是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式, 然后再观察

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$$

更容易看出前面的两个赋值分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

判断公式类型： A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

解 (1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

矛盾式

$$(2) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

重言式

$$(3) ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

双重否定律

幂等律

交换律

结合律

分配律

德摩根律

吸收律

零律

同一律

排中律

矛盾律

蘊涵等值式

等价等值式

假言易位

等价否定等值式

归谬论



基本概念

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$$p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$$p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$$p, \neg p \wedge q, p \vee \neg q, (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$$p, p \vee \neg q, \neg p \wedge q, (p \vee q \wedge \neg p \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r))$$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

说明：

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 形如 $p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

定理2.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

定理2.2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式
求公式A的范式的步骤：

(1) 消去A中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ （若存在）

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(2) 否定联结词 \neg 的内移或消去

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(3) 使用分配律

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

求合取范式

求析取范式

公式范式的不足——不惟一

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

(2) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

解 (1) $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式), 又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式)

$$(2) (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \quad (\text{消去第一个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{消去第二个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{否定号内移——德摩根律}) \quad \text{析取范式}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律}) \quad \text{合取范式}$$

定义2.4 在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个文字出现在左起第 i 位上（ $1 \leq i \leq n$ ），称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项**（**极大项**）。

几点说明：

- n 个命题变项有 2^n 个极小项和 2^n 个极大项
- 2^n 个极小项（极大项）均互不等值
- 用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示。用 M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示。 m_i （ M_i ）称为极小项（极大项）的名称。

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

| 极小项 | | | 极大项 | | |
|------------------------|------|-------|----------------------|------|-------|
| 公式 | 成真赋值 | 名称 | 公式 | 成假赋值 | 名称 |
| $\neg p \wedge \neg q$ | 0 0 | m_0 | $p \vee q$ | 0 0 | M_0 |
| $\neg p \wedge q$ | 0 1 | m_1 | $p \vee \neg q$ | 0 1 | M_1 |
| $p \wedge \neg q$ | 1 0 | m_2 | $\neg p \vee q$ | 1 0 | M_2 |
| $p \wedge q$ | 1 1 | m_3 | $\neg p \vee \neg q$ | 1 1 | M_3 |

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

| 极小项 | | | 极大项 | | |
|--------------------------------------|-------|-------|----------------------------------|-------|-------|
| 公式 | 成真赋值 | 名称 | 公式 | 成假赋值 | 名称 |
| $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ | 0 0 0 | m_0 | $p \vee q \vee r$ | 0 0 0 | M_0 |
| $\neg p \wedge \neg q \wedge r$ | 0 0 1 | m_1 | $p \vee q \vee \neg r$ | 0 0 1 | M_1 |
| $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ | 0 1 0 | m_2 | $p \vee \neg q \vee r$ | 0 1 0 | M_2 |
| $\neg p \wedge q \wedge r$ | 0 1 1 | m_3 | $p \vee \neg q \vee \neg r$ | 0 1 1 | M_3 |
| $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ | 1 0 0 | m_4 | $\neg p \vee q \vee r$ | 1 0 0 | M_4 |
| $p \wedge \neg q \wedge r$ | 1 0 1 | m_5 | $\neg p \vee q \vee \neg r$ | 1 0 1 | M_5 |
| $p \wedge q \wedge \neg r$ | 1 1 0 | m_6 | $\neg p \vee \neg q \vee r$ | 1 1 0 | M_6 |
| $p \wedge q \wedge r$ | 1 1 1 | m_7 | $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ | 1 1 1 | M_7 |

m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如, $n=3$ 时, 命题变项为 p, q, r 时,

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$ ——主析取范式

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_7$ ——主合取范式

公式A 的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是惟一的.

求公式主析取范式的步驟：

设公式 A 含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n

(1) 求 A 的析取范式 $A' = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_s$ ，其中 B_j 是简单合取式 $j=1, 2, \dots, s$

(2) 若某个 B_j 既不含 p_i ，又不含 $\neg p_i$ ，则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单合取式都是长度为 n 的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项，即用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式的主合取范式的步驟：

设公式 A 含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n

(1) 求 A 的合取范式 $A'=B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_s$ ，其中 B_j 是简单析取式 $j=1, 2, \dots, s$

(2) 若某个 B_j 既不含 p_i ，又不含 $\neg p_i$ ，则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单析取式都是长度为 n 的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项，即用 M_i 代替 $M_i \wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

例6 (1) 求公式 $A=(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式

解 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{析取范式}) \quad ①$$

$$(p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_6 \vee m_7 \quad ②$$

$$r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad ③$$

②, ③代入①并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (\text{主析取范式})$$

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \\ \Leftrightarrow & (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\text{合取范式}) \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \vee r \\ \Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow & M_0 \wedge M_2 \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & q \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg p) \vee q \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ \Leftrightarrow & M_0 \wedge M_4 \quad \textcircled{6} \end{aligned}$$

⑤, ⑥代入④ 并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \quad (\text{主合取范式})$$

1. 求公式的成真成假赋值

设公式 A 含 n 个命题变项, A 的主析取范式有 s 个极小项, 则 A 有 s 个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余 2^n-s 个赋值都是成假赋值

例如 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地, 由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

2. 判断公式的类型

设 A 含 n 个命题变项.

A 为重言式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含全部 2^n 个极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A 为矛盾式 $\Leftrightarrow A$ 的主合析取范式含全部 2^n 个极大项

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A 为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

例7 用主析取范式判断公式的类型:

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q \quad (2) B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q) \quad (3) C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

解

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0 \quad \text{矛盾式}$$

$$(2) B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \quad \text{重言式}$$

$$(3) C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{非重言式的可满足式}$$

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判以下每一组公式是否等值

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

解 $p \rightarrow (q \rightarrow r) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$$(p \wedge q) \rightarrow r = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值。

4. 解实际问题

例9 某单位要从 A,B,C 三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

- (1) 若A去, 则C必须去;
- (2) 若B去, 则C不能去;
- (3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p : 派A去, q : 派B去, r : 派C去

(1) $p \rightarrow r$, (2) $q \rightarrow \neg r$, (3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

求A的主析取范式

$$\begin{aligned} A &= (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg r)) \\ &\quad \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (p \wedge \neg q)) \\ &\quad \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \\ &\quad \vee ((\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg p \wedge q)) \vee ((r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

成真赋值: 101, 010

结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知 $A = m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

由主合取范式确定主析取范式

用真值表确定主范式

定义2.6 称 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

$\{0,1\}^n = \{00\dots 0, 00\dots 1, \dots, 11\dots 1\}$, 包含 2^{2^n} 个长为 n 的 0,1 符号串.
共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

1元真值函数

| p | $F_0^{(1)}$ | $F_1^{(1)}$ | $F_2^{(1)}$ | $F_3^{(1)}$ |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

2元真值函数

| $p \quad q$ | $F_0^{(2)}$ | $F_1^{(2)}$ | $F_2^{(2)}$ | $F_3^{(2)}$ | $F_4^{(2)}$ | $F_5^{(2)}$ | $F_6^{(2)}$ | $F_7^{(2)}$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $p \quad q$ | $F_8^{(2)}$ | $F_9^{(2)}$ | $F_{10}^{(2)}$ | $F_{11}^{(2)}$ | $F_{12}^{(2)}$ | $F_{13}^{(2)}$ | $F_{14}^{(2)}$ | $F_{15}^{(2)}$ |
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A 都对应惟一的一个 n 元真值函数 F , F 恰好为 A 的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

例如: $p \rightarrow q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

定义2.7 设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是**联结词完备集**。若 S 是联结词完备集，则任何命题公式都可由 S 中的联结词表示。

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集。

证明 由范式存在定理可证

推论 以下都是联结词完备集

$$(1) S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$(2) S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$(3) S_3 = \{\neg, \wedge\}$$

$$(4) S_4 = \{\neg, \vee\}$$

$$(5) S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$$

证明

(1), (2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

$$(3) A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$(4) A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(5) A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集, 0不能用它表示

它的子集 $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$, $\{\rightarrow\}$, $\{\leftrightarrow\}$, $\{\wedge, \vee\}$, $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 等都不是

定义2.8 设 p, q 为两个命题, $\neg(p \wedge q)$ 称作 p 与 q 的**与非式**, 记作 $p \uparrow q$, 即 $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, \uparrow 称为**与非联结词**

$\neg(p \vee q)$ 称作 p 与 q 的**或非式**, 记作 $p \downarrow q$, 即 $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$, \downarrow 称为**或非联结词**

定理2.7 $\{\uparrow\}$ 与 $\{\downarrow\}$ 为联结词完备集.

证明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

得证 $\{\downarrow\}$ 为联结词完备集. 对 $\{\uparrow\}$ 类似可证

主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 消解法

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单析取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题
- 掌握消解规则及其性质
- 会用消解算法判断公式的可满足性

1. 设 A 与 B 为含 n 个命题变项的公式, 判断下列命题是否为真?

- | | |
|--|---|
| (1) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式 | 真 |
| (2) 若 A 为重言式, 则 A 的主合取范式为0 | 假 |
| (3) 若 A 为矛盾式, 则 A 的主析取范式为1 | 假 |
| (4) 任何公式都能等值地化成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式 | 假 |
| (5) 任何公式都能等值地化成 $\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$ 中的公式 | 真 |

说明:

- (2) 重言式的主合取范式不含任何极大项, 为1.
- (3) 矛盾式的主合析范式不含任何极小项, 为0.
- (4) $\{\wedge, \vee\}$ 不是完备集, 如矛盾式不能写成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式.
- (5) $\{\neg, \rightarrow\}$ 是完备集.

2. 判断下列公式的类型:

$$(1) (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (2) \neg(p \rightarrow q) \wedge q \quad (3) (p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

解 (1) 用等值演算法求主范式

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg p) \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p) \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \Leftrightarrow & m_2 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_0 \\ \Leftrightarrow & m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

主析取范式

主合取范式

重言式

$$(2) \neg(p \rightarrow q) \wedge q$$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$\neg(p \rightarrow q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q$$

$$\Leftrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$$

主析取范式

主合取范式

矛盾式

$$(3) (p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1$$

$$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3$$

主析取范式

主合取范式

非重言式的可满足式

3. 已知命题公式A中含3个命题变项 p, q, r ，并知道它的成真赋值为001, 010, 111，求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数.

解 A的主析取范式为 $m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为 $M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

| $p \ q \ r$ | F | $p \ q \ r$ | F |
|-------------|-----|-------------|-----|
| 0 0 0 | 0 | 1 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 1 0 1 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 1 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 0 | 1 1 1 | 1 |

4. 将 $A = (p \rightarrow \neg q) \wedge r$ 改写成下述各联结词集中的公式：

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$

(4) $\{\neg, \rightarrow\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$

(2) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r$

(3) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$
 $\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r)$

$$\begin{aligned}(4) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg \neg((p \uparrow q) \wedge r) \\ &\Leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow r) \uparrow ((p \uparrow q) \uparrow r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \quad (p \rightarrow \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow \neg r \\ &\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))\end{aligned}$$

说明：答案不惟一

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

- (1) 若赵去, 钱也去.
- (2) 李、周两人中至少有一人去
- (3) 钱、孙两人中去且仅去一人.
- (4) 孙、李两人同去或同不去.
- (5) 若周去, 则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?



解此类问题的步骤:

1. 设简单命题并符号化
2. 用复合命题描述各条件
3. 写出由复合命题组成的合取式
4. 将合取式成析取式（最好是主析取范式）
5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

解

1. 设简单命题并符号化

设 p : 派赵去, q : 派钱去, r : 派孙去, s : 派李去, u : 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去, 钱也去

$$p \rightarrow q$$

(2) 李、周两人中至少有一人去

$$s \vee u$$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人

$$(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$$

(4) 孙、李两人同去或同不去

$$(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$$

(5) 若周去, 则赵、钱也去

$$u \rightarrow (p \wedge q)$$

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，
派孙、李去（赵、钱、周不去）
派赵、钱、周去（孙、李不去）

$$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge \\ (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge \\ ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$$

$$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \\ \Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \\ \Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \\ \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$$

再令 $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) = B_3$, 则

$$B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$