第一章微商小结

（一）第一章内容提要

一、函数

1、定义

2、运算（四则运算、取绝对值运算、取大小运算、复合运算）

3、初等函数

4、函数的改变量（联系函数连续、可微的定义）

5、函数模型（生命科学中、经济管理中）

6、邻域

二、极限

1、定义

2、用极限描述的概念

①连续与间断

②无穷大与无穷小

③水平渐近线与垂直渐近线及斜渐近线

④微商

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\begin{cases}\text{若}A\text{为有限值，则极限存;}\\ \text{若}A=0\text{，则}f(x)\text{为无穷小；}\\ \text{若}A=\infty\text{，则}f(x)\text{为无穷大；}\\ \text{若}A=f(x_0)\text{，则}f(x)\text{连续。}\end{cases}$$

上一页
下一页
退出

3、两个重要极限

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad 比较\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

$$(2)\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e或\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

4、极限的基本性质

1）唯一性

2）局部保号性

3）两边夹法则　4）比值极限性质

三、连续函数

1、初等函数在其定义区间内连续

2、闭区间上连续函数的性质

1）最大（小）值定理

2）根的存在性定理

3）介值定理

四、微商

1、定义　　2、求微商的步骤

3、可微与连续的关系

（二）求极限的方法（先判断类型）

1、利用极限运算法则和连续性

2、应用两个重要极限求极限

3、应用两边夹法则证明或求极限

4、运用等价无穷小代换求极限

5、求分段函数在分段点处的极限

6、其它

上一页
下一页
退出

例1　求$\lim\limits_{x\to\infty}[(\arcsin\dfrac{x+1}{x}).\ln(1+\dfrac{1}{x})^{x}]$

例2.求极限　$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{1+x})^{\frac{1}{2x}+1}$

例3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^{2}}\right)^{n}$

上一页
下一页
退出

例4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

例5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x+x^2)}{x}$

例6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 3x}$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

例8 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}(x\geq 0)$的连续性

解　此题为极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}=\begin{cases}1 & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

故$f(x)$在$[0,1)\cup(1,\ \infty)$内连续，

$x=1$是跳跃间断点.

例9　　已知$f(x)$在x_0处可导，

且有$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，求$f'(x_0)$

$(f'(x_0)=-2)$

例10

已知$f(x)$是周期为5的连续函数，在$U(0)$内满足

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时x的高阶无穷小

且$f(x)$在$x=1$处可微

求曲线$y=f(x)$在点$(6, f(6))$的切线方程

解：切线方程为 $y - f(6) = f'(6)(x-6)$

$f(6) = f(1+5) = f(1)$　　　$f'(6) = f'(1+5) = f'(1)$

$\because f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x)] = \lim\limits_{x\to 0}[8x + \alpha(x)]$

$\therefore f(1) - 3f(1) = 0$　　　$\therefore f(1) = 0$

$f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 存在

$\because f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)+f(1)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=8$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}-\frac{3f(1-\sin x)-3f(1)}{\sin x}$$

$$=f'(1)+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}=4f'(1)$$

$\therefore f'(1)=2$　　故切线方程为 $y-0=2(x-6)$

即 $2x-y-12=0$

上一页
下一页
退出