第十一章 格与布尔代数

主要内容

格的定义与性质

- 格的定义
- 格的性质

分配格、有补格与布尔代数

- 分配格
- 有补格
- 布尔代数

11.1 格的定义与性质

定义11.1 设 $<S, \preccurlyeq>$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S$，$\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 作成**格**.

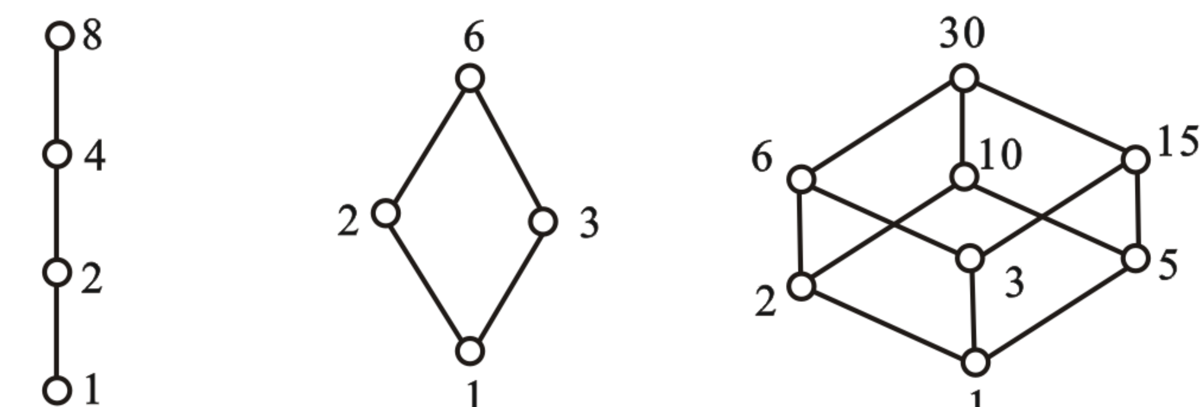
由于最小上界和最大下界的唯一性，可以把求 $\{x, y\}$ 的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$，即 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界.

注意： 这里出现的 $\vee$ 和 $\wedge$ 符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义.

格的实例

例 设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合. D 为整除关系，则偏序集 $<S_n, D>$ 构成格. $\forall x, y\in S_n$，$x\vee y$ 是 lcm(x, y)，即 x 与 y 的最小公倍数. $x\wedge y$ 是 gcd(x,y)，即 x 与 y 的最大公约数.

下图给出了格 $<S_8, D>$，$<S_6, D>$ 和 $<S_{30}, D>$.



(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

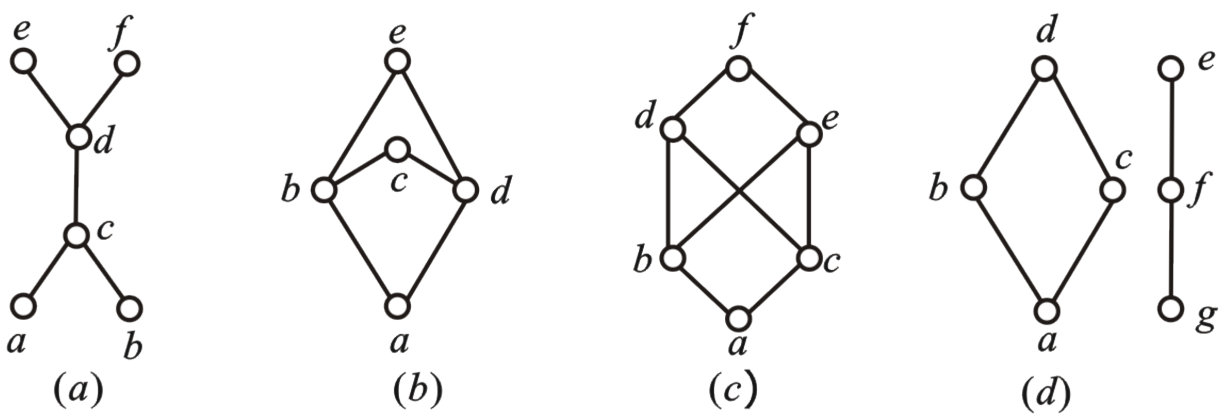
格的实例（续）

例 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B), \subseteq>$，其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.

(2) $<Z, \leq>$，其中 Z 是整数集，$\leq$ 为小于等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



解 (1) 是格. 称 $<P(B), \subseteq>$ 为 B 的幂集格.

(2) 是格.

(3) 都不是格.

格的性质：对偶原理

定义11.2 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的**对偶命题**.

例如，在格中： f 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

格的对偶原理：设 f 是含格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 f 对一切格为真，则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真. 例如，若对一切格 L 都有 $a, b \in L$, $a \wedge b \preccurlyeq a$，那么对一切格 L 都有 $\forall a, b \in L$，$a \vee b \succcurlyeq a$

格的性质：算律

定理11.1 设 $<L, \preccurlyeq>$ 是格，则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$

(2) $\forall a, b, c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(3) $\forall a \in L$ 有 $a \vee a = a$，$a \wedge a = a$

(4) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee (a \wedge b) = a$，$a \wedge (a \vee b) = a$

算律的证明

证 (1) 交换律.

$a \vee b$ 是 $\{a,b\}$ 的最小上界

$b \vee a$ 是 $\{b,a\}$的最小上界

$$\{a, b\} = \{b, a\} \Rightarrow a \vee b = b \vee a.$$

由对偶原理， $a \wedge b = b \wedge a$ 得证.

算律的证明（续）

(2) 结合律. 由最小上界的定义有

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq a \qquad \text{(I)}$$

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq b \qquad \text{(II)}$$

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq c \qquad \text{(III)}$$

由式 (II) 和 (III) 有

$$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq b\vee c \qquad \text{(IV)}$$

由式 (I) 和 (IV) 有 $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee(b\vee c)$.

同理可证 $(a\vee b)\vee c \preccurlyeq a\vee(b\vee c)$.

根据偏序的反对称性得到 $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$.

由对偶原理，$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$ 得证.

算律的证明（续）

(3) 幂等律. 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$，又由 $a \preccurlyeq a$ 得 $a \vee a \preccurlyeq a$.

由反对称性 $a \vee a = a$. 用对偶原理，$a \wedge a = a$ 得证.

(4) 吸收律. 显然有

$$a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a \qquad \text{(V)}$$

由 $a \preccurlyeq a, a \wedge b \preccurlyeq a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a \qquad \text{(VI)}$$

由式 (V) 和 (VI) 可得 $a \vee (a \wedge b) = a$

根据对偶原理，$a \wedge (a \vee b) = a$ 得证.

格作为代数系统的定义

定理11.2 设 $<S, *, \circ>$ 是具有两个二元运算的代数系统，若对于 $*$ 和 $\circ$ 运算适合交换律、结合律、吸收律，则可以适当定义 S 中的偏序 $\preccurlyeq$，使得 $<S, \preccurlyeq>$ 构成格，且 $\forall a, b \in S$ 有 $a \wedge b = a * b$，$a \vee b = a \circ b$.

根据定理，可以给出格的另一个等价定义.

定义11.3 设 $<S, *, \circ>$ 是代数系统，$*$ 和 $\circ$ 是二元运算，如果 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律和吸收律，则 $<S, *, \circ>$ 构成格.

格的性质（续）

定理11.3 设 L 是格，则 $\forall a, b \in L$ 有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

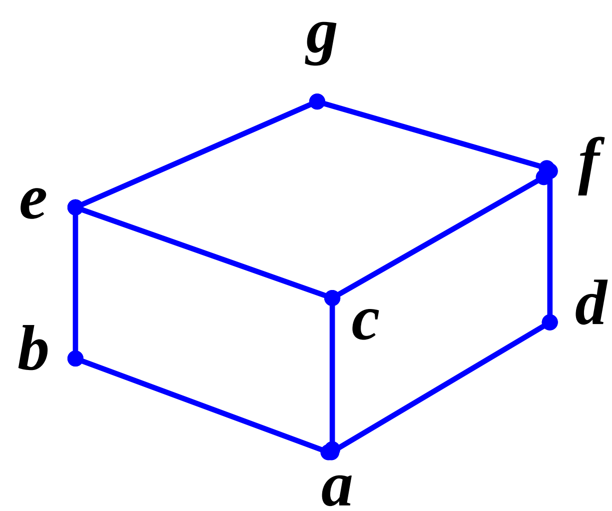
定理11.4 设L是格，则$\forall a, b, c, d \in L$，若$a \preccurlyeq b$且$c \preccurlyeq d$，则

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d,\quad a \vee c = b \vee d$$

子格

定义11.4 设 $<L, \wedge, \vee>$ 是格，S 是 L 的非空子集，若 S 关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格，则称S 为 L 的子格.

例 设格 L 如图所示.



令 $S_1 =\{a, e, f, g\}$和

$S_2 = \{a, b, c, g\}$,

则 S_1 不是 L 的子格.

因为对 e 和 f，有 $e \wedge f = c$,

但 $c \notin S_1$.

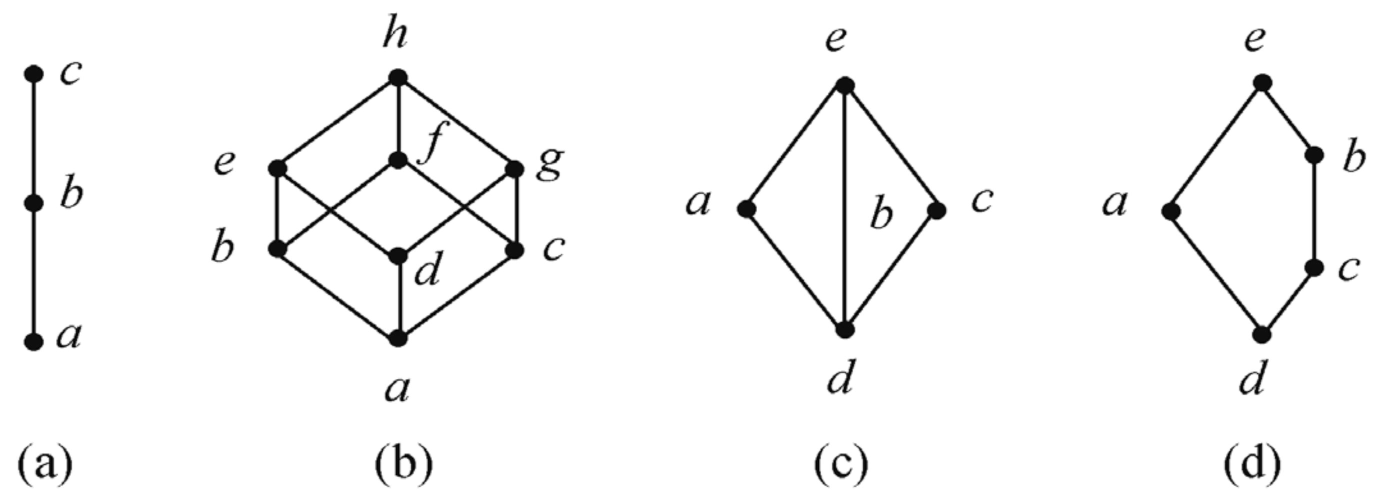
11.2 分配格、有补格与布尔代数

定义11.5 设 $<L, \wedge, \vee>$ 是格，若 $\forall a, b, c \in L$，有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 L 为**分配格**.



(a) 和 (b) 是分配格，(c) 和 (d) 不是分配格.

分配格的充分必要条件

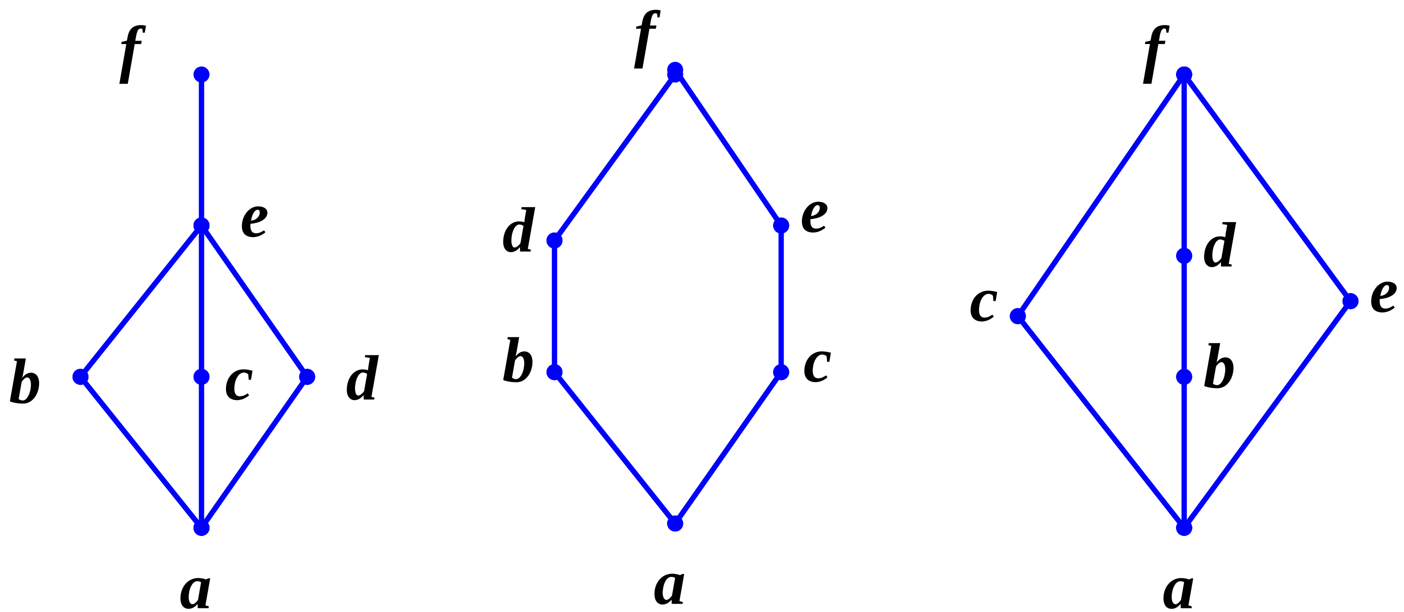
定理11.5 设 L 是格，则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格或五角格同构的子格.

推论 (1) 小于5元的格是分配格.

(2) 任何一条链都是分配格.

分配格充分必要条件实例

例 说明下图中的格是否为分配格，为什么？



L_1 L_2 L_3

解： 上述所有的格都不是分配格.

全上界与全下界

定义11.6 设 L 是格，若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$，则称 a 为 L 的全下界；若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$，则称 b 为 L 的全上界.

说明：格 L 若存在全下界或全上界，一定是唯一的. 一般将格 L 的全下界记为 0, 全上界记为 1.

定义11.7 设 L 是格，若 L 存在全下界和全上界，则称 L为有界格，有界格 L 记为 $<L, \wedge, \vee, 0, 1>$.

注意：有限格 $L=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 是有界格，求对偶命题时，必须将 0 与 1 互换.

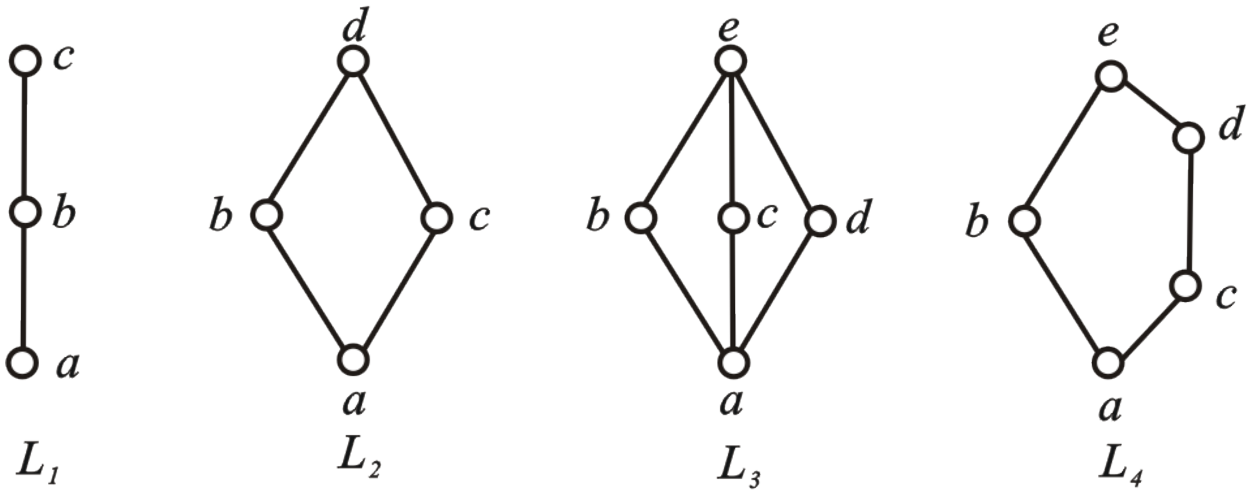
补元的定义

定义11.8 设 $<L, \wedge, \vee, 0, 1>$ 是有界格，$a \in L$，若存在 $b \in L$ 使得 $a \wedge b = 0$ 和 $a \vee b = 1$ 成立，则称 b 是 a 的补元.

注意：若 b 是 a 的补元，则 a 也是 b 的补元. a 和 b 互为补元.

定理11.6 设 $<L, \wedge, \vee, 0, 1>$ 是有界分配格. 若 L 中元素 a 存在补元，则存在惟一的补元.

实例: 求补元

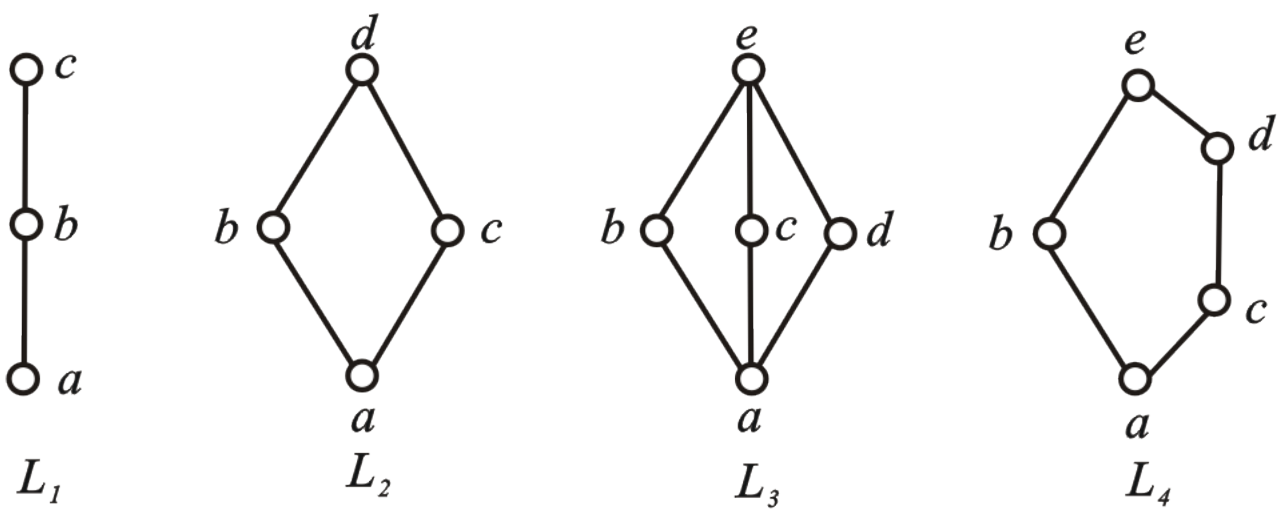


解：L_1 中 a, c 互补，b 没补元.
L_2 中 a, d 互补，b, c 互补.
L_3 中 a, e 互补，b 的补元是 c 和 d，c 的补元是 b 和 d，d 的补元是 b 和 c.
L_4 中的 a, e 互补，b 的补元是 c 和 d，c 的补元是b，d 的补元是 b.

有补格的定义

定义11.9 设 $<L, \wedge, \vee, 0, 1>$ 是有界格，若 L 中所有元素都有补元存在，则称 L 为**有补格**.

例如，下图中的 L_2, L_3 和 L_4 是有补格，L_1 不是有补格.



布尔代数的定义

定义11.10 有补分配格，称为**布尔格**或**布尔代数**.

求补元的运算看作是布尔代数中的一元运算. 布尔代数标记为 $<B, \wedge, \vee, ', 0, 1>$，其中 ' 为求补运算.

例 设 $S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$ 是110的正因子集合.

gcd 表示求最大公约数的运算

lcm表示求最小公倍数的运算.

则 $<S_{110}, \text{gcd}, \text{lcm}>$ 是否构成布尔代数？

布尔代数的性质

定理11.7 设 $<B, \wedge, \vee, ', 0, 1>$ 是布尔代数，则

(1) $\forall a \in B, (a')' = a$.　（双重否定律）

(2) $\forall a, b \in B$，$(a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$

（德摩根律）

注意：德摩根律对有限个元素也是正确的.

证明

证 (1) $(a')'$是 a'的补元．A 是 a' 的补元．由补元惟一性得 $(a')'=a$.

(2) 对任意 $a, b\in B$ 有

$$(a\wedge b)\vee(a'\vee b') = (a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')$$

$$= (1\vee b')\wedge(a'\vee 1) = 1\wedge 1 = 1,$$

$$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b') = (a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')$$

$$= (0\wedge b)\vee(a\wedge 0) = 0\vee 0 = 0.$$

所以 $a'\vee b'$是 $a\wedge b$ 的补元.

根据补元惟一性可得 $(a\wedge b)' = a'\vee b'$.

同理可证 $(a\vee b)' = a'\wedge b'$.

有限布尔代数的表示定理

定理11.8 设 L 是有限布尔代数，则 L 含有 2^n 个元素 $(n\in N)$，且 L 与 $<P(S), \cap, \cup, \sim, \varnothing, S>$ 同构，其中 S 是一个 n 元集合.

结论：含有 2^n 个元素的布尔代数在同构意义下只有一个.

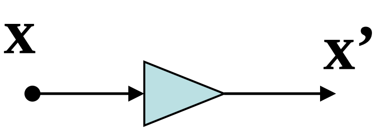
应用：逻辑门代数

计算机部件及其网络或其它电子装置都是由许多电路构成，这类电路设计常要用到开关代数的布尔表达式与布尔函数的概念.

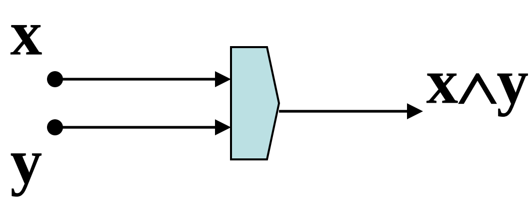
此类布尔表达式可用带3个基本元件的电路来实现.

3个基本元件是:

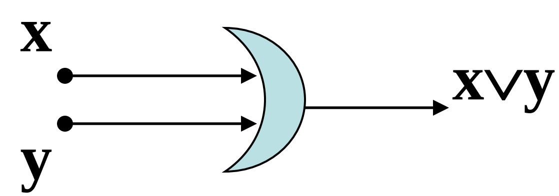
①反相器



②与门

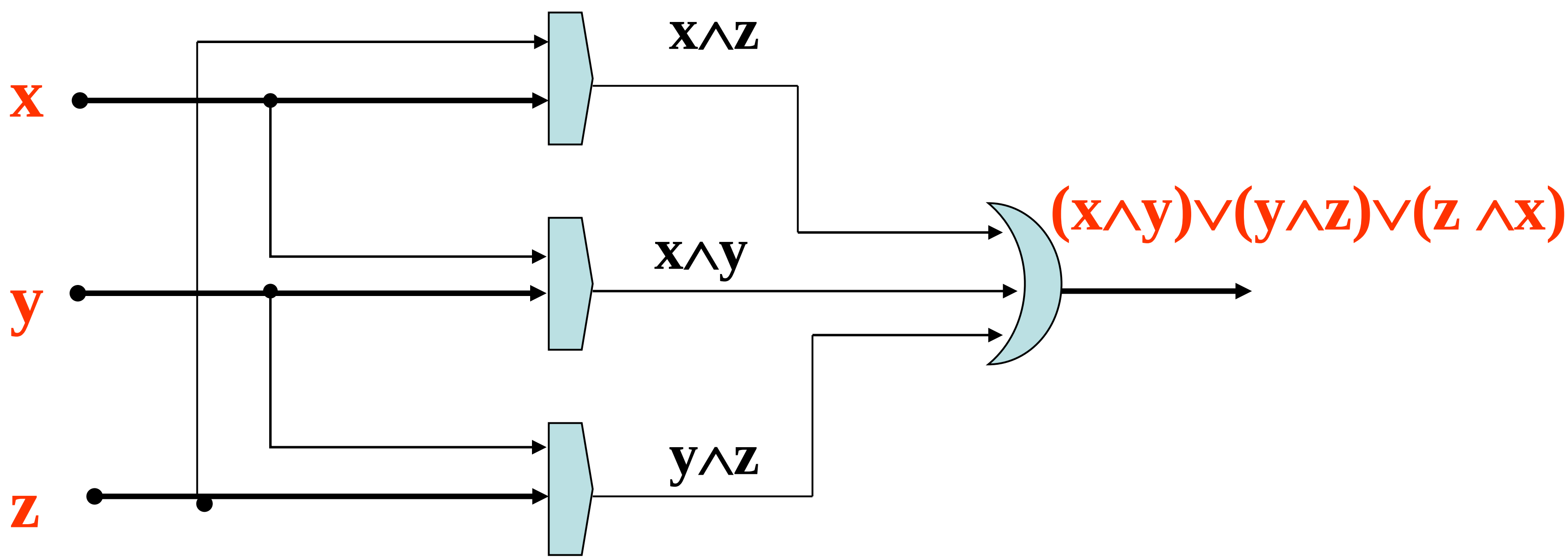


③或门



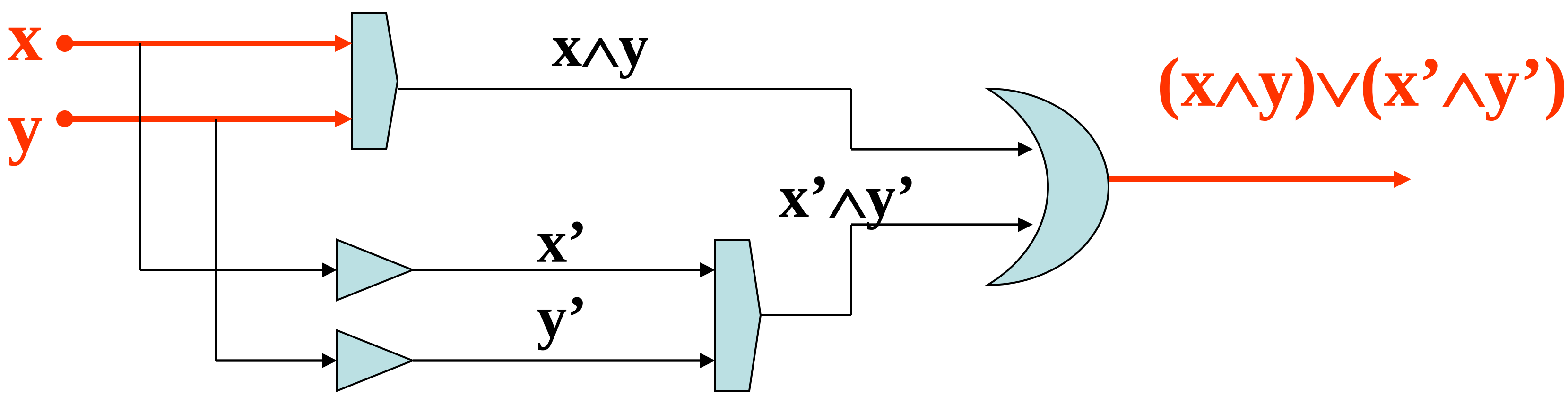
实例之一

实例1：三人委员会表决某个提案，如有两张赞成票即获通过，实现上述过程的表决机器的控制电路如下图所示：



实例之二

实例2：设计两个房间照明灯具的开关控制电路使当灯具处于关闭状态时，按下任一开关都可打开此灯具；当灯具已打开时，按下任一开关都可关闭此灯具. 实现上述过程的组合电路如下图所示：



注：也可用布尔函数 $(x' \vee y) \wedge (x \vee y')$ 来设计线路.