第七章 二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作 $\langle x, y\rangle$.

有序对性质:

(1) 有序性 $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$ （当 $x \neq y$ 时）

(2) $\langle x, y\rangle$ 与 $\langle u, v\rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设 A，B 为集合，A 与 B 的**笛卡儿积**记作 $A\times B$，且

$$A\times B = \{ \langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B \}.$$

例1 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$

$A\times B$

$=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

$B\times A$

$=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{\langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m$，$|B| = n$，则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明：$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证：任取 $<x, y>$

$$<x, y>\in A\times(B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in A\times B\vee<x, y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明 $A=B$，$C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$ 是否推出 $A=B$，$C=D$？为什么？

解 (1) 任取$<x, y>$

$$<x, y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in B\times D$$

(2) 不一定．反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$C = D = \varnothing$， 则 $A\times C = B\times D$ 但是 $A \neq B$.

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空，且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系，简称为关系，记作R.

如果 $<x, y>\in R$，可记作xRy；如果 $<x, y>\notin R$，则记作 $x \not R y$

实例：$R=\{<1, 2>，<a, b>\}$，$S=\{<1, 2>, a, b\}$.

R 是二元关系，当 a, b 不是有序对时，S 不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$，aRb，$a\not R c$ 等.

A 到 B 的关系与 A 上的关系

定义7.4 设A, B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做 A 上的二元关系.

例3 $A=\{0, 1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$，那么

$R_1=\{<0, 2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0, 1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数：$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$ 的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A| = 3$，则 A上有 512 个不同的二元关系.

A 上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全域关系 $E_A = \{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{<x, x> \mid x \in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \le y\}$， A为实数子集

整除关系 $D_B = \{<x, y> \mid x, y \in B \wedge x$整除$y\}$，$B$ 为非0整数子集

包含关系 $R_\subseteq = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y\}$， A是集合族.

实例

例如，$A = \{1, 2\}$，则 $E_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>\}$

$$I_A = \{<1, 1>, <2, 2>\}$$

例如，$A = \{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$，则

$$L_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$$

$$D_A = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>\}$$

例如，$A = P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, \{a, b\}>, <\{a\}, \{a\}>,$$
$$<\{a\}, \{a, b\}>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, \{a, b\}>, <\{a, b\}, \{a, b\}>\}$$

类似的还可以定义：

大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R = [\, r_{ij}\,]_{m\times n}$, 其中

$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j \rangle \in R.$ 反之 $r_{ij} = 0$

2. 关系图

若 $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$ 是 A 上的关系，R 的关系图是 $G_R=\langle A, R\rangle$，其中 A 为结点集，R 为边集. 如果 $\langle x_i, x_j\rangle$ 属于关系R，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意:

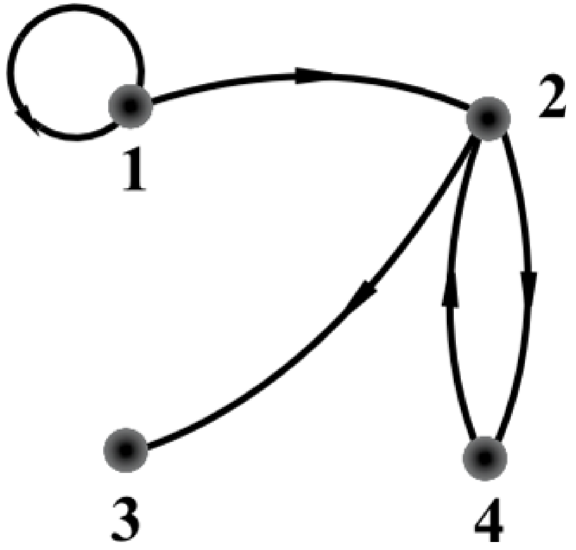
- 关系矩阵适合表示从 A 到 B 的关系或 A 上的关系（A, B 为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集 A 上的关系

实例

例4 $A = \{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$,

R 的关系矩阵 M_R 和关系图 G_R 如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\,(<x, y>\in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\,(<x, y>\in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <4, 3>\}$，则

$$\mathrm{dom}R = \{1, 2, 4\}$$

$$\mathrm{ran}R = \{2, 3, 4\}$$

$$\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3, 4\}$$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y \, (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例6 $R = \{<1, 2>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 2>\}$

$S = \{<1, 1>, <1,3>, <2,3>, <3, 2>, <3, 3>\}$

$R^{-1} = \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <2, 2>\}$

$R \circ S = \{<1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$

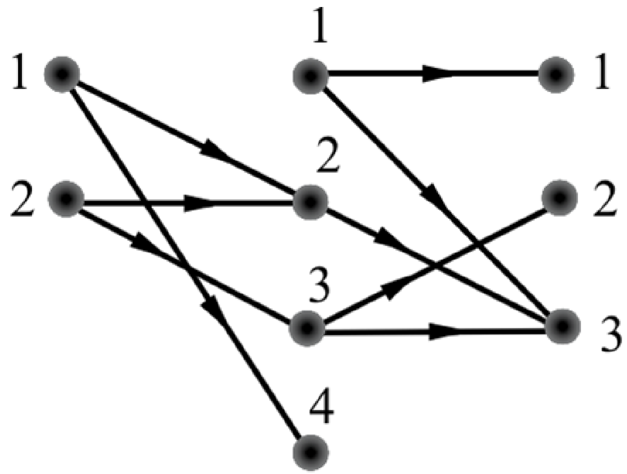
$S \circ R = \{<1, 2>, <1, 4>, <3, 2>, <3, 3>\}$

合成的图示法

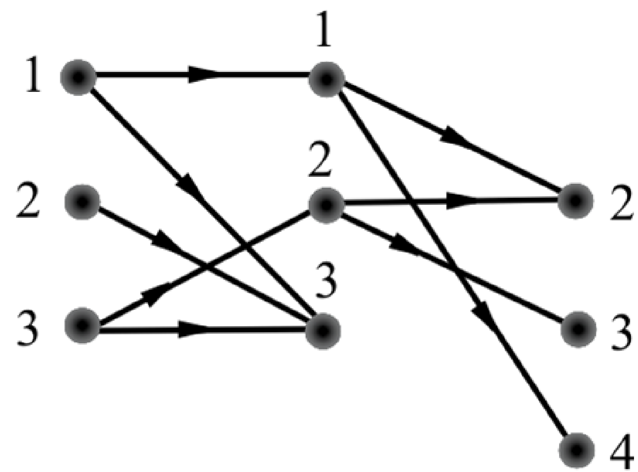
利用图示（不是关系图）方法求合成

$$R \circ S = \{<1, 3>, <2, 2>, <2, 3>\}$$

$$S \circ R = \{<1, 2>, <1, 4>, <3, 2>, <3, 3>\}$$



$R \circ S$



$S \circ R$

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系，A是集合

(1) R在A上的**限制**记作 $R\restriction A$，其中

$$R\restriction A = \{ \langle x, y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$，其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

说明：

- R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系，即 $R\restriction A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设$R = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 4>, <3, 2>\}$, 则$R\upharpoonright\{1\}$,
$R\upharpoonright\varnothing$, $R\upharpoonright\{2,3\}$, $R[\{1\}]$, $R[\varnothing]$, $R[\{3\}]$

$R\upharpoonright\{1\} = \{<1, 2>, <1, 3>\}$

$R\upharpoonright\varnothing = \varnothing$

$R\upharpoonright\{2, 3\} = \{<2, 2>, <2, 4>, <3, 2>\}$

$R[\{1\}] = \{2, 3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$，$\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x, y>$，由逆的定义有

$$<x, y>\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1}\Leftrightarrow <x, y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取 x，$x\in\mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(<x, y>\in F^{-1})$

$$\Leftrightarrow\exists y(<y, x>\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系，则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x, y>$,

$$<x, y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\circ G \wedge <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G) \wedge <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G \wedge <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \wedge \exists t\,(<s, t>\in G \wedge <t, y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x, y>$,

$$<x, y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t> \in F \wedge <t, x> \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in G^{-1} \wedge <t, y> \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设 R 为 A 上的关系，则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取 $<x, y>$

$<x, y>\in R\circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \wedge <t, y>\in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R \wedge t = y \wedge y\in A)$

$\Rightarrow <x, y>\in R$

$<x, y>\in R$

$\Rightarrow <x, y>\in R \wedge y\in A \Rightarrow <x, y>\in R \wedge <y, y>\in I_A$

$\Rightarrow <x, y>\in R\circ I_A$

综上所述有 $R\circ I_A = R$

同理可证　$I_A\circ R = R$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$　　(2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$　　(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x, y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x, y>\in F\circ(G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in G\wedge <t, y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,((<x, t>\in F\wedge <t, y>\in G)\wedge(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in H)) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in G)\wedge\exists t\,(<x, t>\in F\wedge <t, y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & <x, y>\in F\circ G\wedge <x, y>\in F\circ H \\
\Leftrightarrow\ & <x, y>\in F\circ G\cap F\circ H
\end{aligned}
$$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设 F 为关系，A, B 为集合，则

(1) $F\restriction(A\cup B) = F\restriction A\cup F\restriction B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\restriction(A\cap B) = F\restriction A\cap F\restriction B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取 $<x, y>$

$$<x, y> \in F \upharpoonright (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in F \land x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in F \land (x \in A \lor x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x, y> \in F \land x \in A) \lor (<x, y> \in F \land x \in B)$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in F \upharpoonright A \lor <x, y> \in F \upharpoonright B$$

$$\Leftrightarrow <x, y> \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$$

所以有 $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

证明

(4) 任取 y,

$$y \in F[A \cap B]$$
$$\Leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow \exists x((\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in B))$$
$$\Rightarrow \exists x(\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x(\langle x, y\rangle \in F \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有$F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系， n为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：

(1) $R^0 = \{ <x, x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

幂的求法

例 8 设$A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{<a, b>，<b, a>，<b, c>，<c, d>\}$，求$R$的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3 和 R^4 的矩阵是：

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

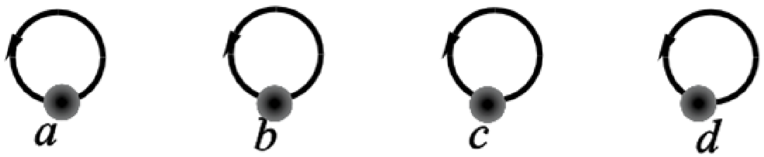
因此$M^4 = M^2$，即$R^4 = R^2$. 因此可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$$

R^0的关系矩阵是 $$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

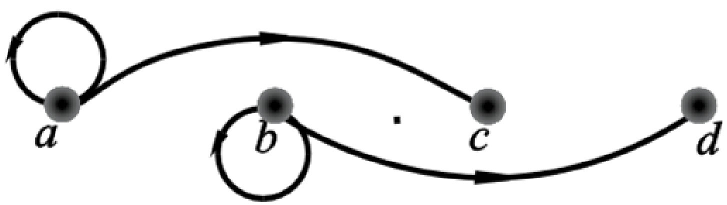
关系图

R^0，R^1，R^2，R^3，… 的关系图如下图所示.

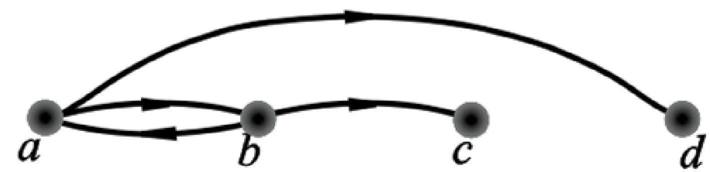


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集，R 是A上的关系，则存在自然数 s 和t，使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系，

由于$|A|=n$， A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系，$m, n\in \mathrm{N}$，则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m\in \mathrm{N}$，施归纳于 n.

若$n = 0$，则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1}\ ,$$

所以对一切 $m, n\in \mathrm{N}$ 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的m∈N，施归纳于 n.

若n=0，则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^n$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 m, n∈N 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R是A上的关系，

若存在自然数 s, t ($s<t$) 使得 $R^s = R^t$，则

(1) 对任何 $k\in$N 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in$N 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t-s$

(3) 令 $S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in$N 有 $R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0，则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中$p = t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$，

若 $q < t$，显然有 $R^q \in S$，

若$q \geq t$，则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i，其中 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x, x\rangle\in R)$，则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x, x\rangle\notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的.

实例:

自反：全域关系E_A，恒等关系I_A，小于等于关系L_A，整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1, 3\rangle\}$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x\forall y(x, y\in A\wedge<x, y>\in R\rightarrow<y, x>\in R)$，则称 R 为 A 上**对称**的关系.

(2) 若 $\forall x\forall y(x, y\in A\wedge<x, y>\in R\wedge<y, x>\in R\rightarrow x=y)$，则称 R 为A上的**反对称**关系. 实例:

对称关系：A 上的全域关系E_A，恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$

反对称关系：恒等关系 I_A 和空关系也是 A 上的反对称关系.

设$A=\{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3 和 R_4 都是 A 上的关系，其中

$R_1=\{<1, 1>, <2, 2>\}$，　　$R_2=\{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>\}$

$R_3=\{<1, 2>, <1, 3>\}$，　　$R_4=\{<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>\}$

R_1：对称和反对称；R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递性

定义7.13 设R为A上的关系，若

$$\forall x\forall y\forall z\,(x, y, z\in A\land \langle x, y\rangle\in R\land \langle y, z\rangle\in R\rightarrow \langle x, z\rangle\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3是 A 上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1, 3\rangle\}$$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系，R_2 不是 A 上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设 R 为 A 上的关系，则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取 $<x, y>$， 由于R 在 A 上自反必有

$$<x, y> \in I_A \Rightarrow x, y \in A \wedge x = y \Rightarrow <x, y> \in R$$

从而证明了$I_A \subseteq R$

充分性.

任取 x，有

$$x \in A \Rightarrow <x, x> \in I_A \Rightarrow <x, x> \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

证明

(3) 必要性.

任取 $<x, y>$,

$$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R \Leftrightarrow <x, y> \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取 $<x, y>$，由 $R = R^{-1}$ 得

$$<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \in R^{-1} \Rightarrow <y, x> \in R$$

所以 R 在 A 上是对称的

证明

(4) 必要性. 任取$<x, y>$，有

$$<x, y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x, y>\in R\wedge<x, y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x, y>\in R\wedge<y, x>\in R \Rightarrow x=y \wedge x, y\in A$$

$$\Rightarrow <x, y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$<x, y>$,

$$<x, y>\in R\wedge<y, x>\in R \Rightarrow <x, y>\in R\wedge<x, y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x, y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x, y>\in I_A$$

$$\Rightarrow x = y$$

从而证明了 R 在 A 上是反对称的.

证明

(5) 必要性.

任取 $<x, y>$ 有

$$<x, y> \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x, t> \in R \wedge <t, y> \in R)$$

$$\Rightarrow <x, y> \in R$$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性.

任取$<x, y>, <y, z> \in R$，则

$$<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R$$

$$\Rightarrow <x, z> \in R \circ R \Rightarrow <x, z> \in R$$

所以 R 在 A上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$，且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$	M^2中1位置，M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边，是一对方向相反的边	两点之间有边,是一条有向边	点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则x_i到x_k也有边

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义7.14 设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反(对称或传递)闭包是 A 上的关系R'，使得 R' 满足以下条件：

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$.

定理7.10 设 R 为 A 上的关系，则有

(1) $r(R)=R \cup R^0$

(2) $s(R)=R \cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系，(3)中的并最多不超过R^n

证明

证 只证(1)和(3).

(1) 由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$知 $R\cup R^0$是自反的，且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系，则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有$R\cup R^0\subseteq R''$. $R\cup R^0$满足闭包定义，所以$r(R)=R\cup R^0$.

(3) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$ 成立.

用归纳法证明对任意正整数 n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$ 时有 $R^1=R\subseteq t(R)$.

假设 $R^n\subseteq t(R)$ 成立，那么对任意的 $<x, y>$

$$<x, y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in R^n\wedge<t, y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x, t>\in t(R)\wedge<t, y>\in t(R)) \Rightarrow <x, y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

证明

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$ 成立，为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \ldots$ 传递.

任取 $<x, y>, <y, z>$，则

$$<x, y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \land <y, z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x, y> \in R^t) \land \exists s(<y, z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, z> \in R^t \circ R^s\,)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, z> \in R^{t+s}\,)$$

$$\Rightarrow <x, z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的.

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R，$r(R)$，$s(R)$， $t(R)$的关系矩阵分别为M，M_r，M_s和 M_t

则 $M_r=M+E$ $M_s=M+M'$ $M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

E 是单位矩阵，M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

设关系 R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 的关系图分别记为 G，G_r，G_s，G_t，则 G_r，G_s，G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了G 的边以外，以下述方法添加新的边：

(1) 考察 G 的每个顶点，若没环就加一个环，得到 G_r

(2) 考察 G 的每条边，若有一条 x_i 到 x_j 的单向边，$i\neq j$，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边，得到G_s

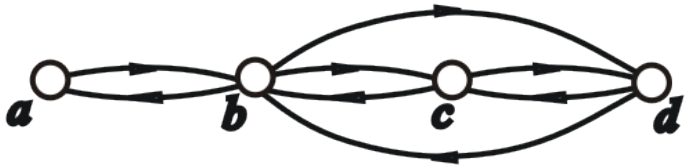
(3) 考察 G 的每个顶点 x_i，找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$)，如果没有从 x_i 到 x_j 的边，就加上这条边，得到图 G_t

实例

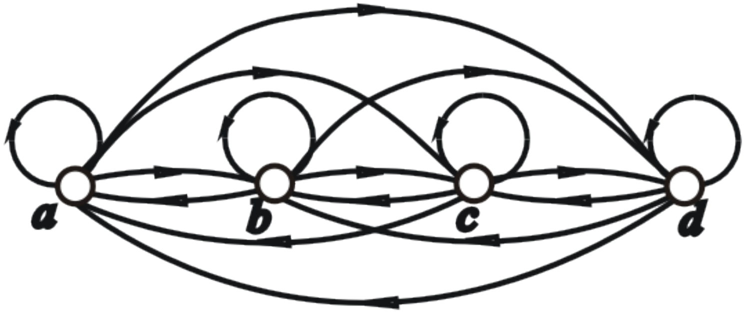
例9 设$A=\{a, b, c, d\}$，$R=\{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b>\}$，$R$ 和 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合 A 上的关系，则

(1) R 是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R 是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R 是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且 $R_1\subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$

证明 略

闭包的性质

定理7.13 设 R 是非空集合 A 上的关系，

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的.

说明：如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$ 传递放在对称之后运算

证明 略

7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例

定义7.15 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的**等价关系**.

设 R 是一个等价关系，若$<x, y>\in R$，称 **x等价于y**，记做 $x\sim y$.

实例 设 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$，如下定义A上的关系 R:

$$R = \{ <x, y> \mid x, y\in A \land x \equiv y \pmod 3 \}$$

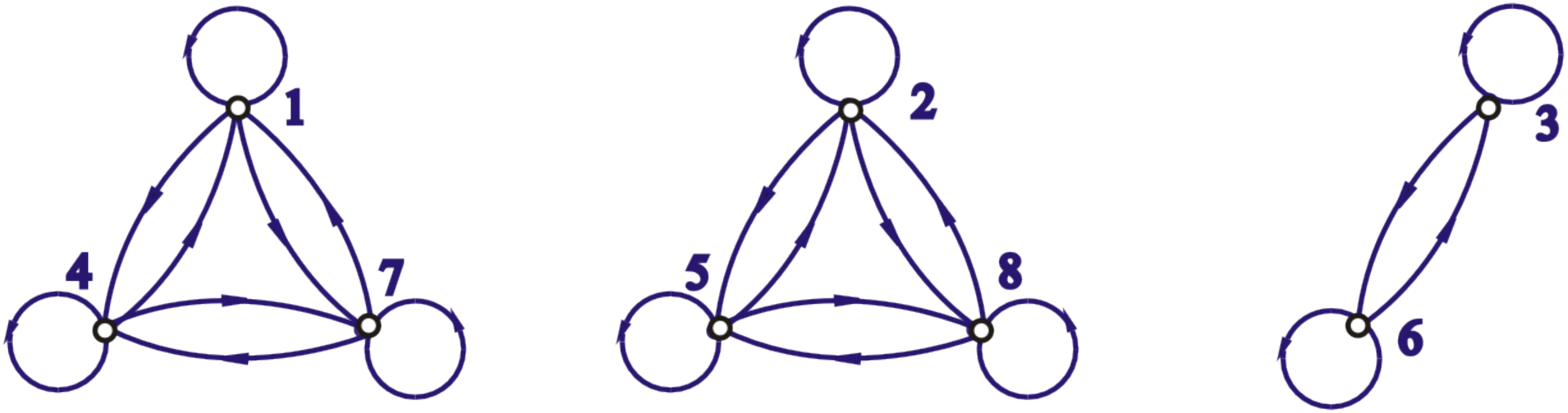
其中 $x \equiv y \pmod 3$ 叫做 **x 与 y 模 3 相等**，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系，因为

(1) $\forall x\in A$，有 $x \equiv x \pmod 3$

(2) $\forall x, y\in A$，若$x \equiv y \pmod 3$，则有$y \equiv x \pmod 3$

(3) $\forall x, y, z\in A$，若$x \equiv y \pmod 3$， $y \equiv z \pmod 3$，则有$x \equiv z \pmod 3$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类，简称为x的**等价类**，简记为$[x]$或$\overline{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$ 上模 3 等价关系的等价类：

$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$

$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$

$[3] = [6] = \{3, 6\}$

等价类的性质

定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

(1) $\forall x \in A$，$[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x, y \in A$，如果 xRy，则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x, y \in A$，如果 $x \not R y$，则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义，$\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$，即$[x]$非空.

(2) 任取 z，则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \Rightarrow \langle z, x\rangle \in R$$

$$\langle z, x\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle z, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, z\rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$.

同理可证 $[y] \subseteq [x]$.

这就得到了$[x] = [y]$.

证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在 $z\in[x]\cap[y]$，从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$，即$<x, z>\in R\wedge<y, z>\in R$成立. 根据 R 的对称性和传递性必有$<x, y>\in R$，与 $x \not R\, y$ 矛盾

(4) 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证 $A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$$

从而有 $\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得 $\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集，记做A/R,

$$A/R = \{[x]R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$， A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}，\quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足：

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称 π 是A的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块.

划分实例

例10 设 $A=\{a, b, c, d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分.

商集与划分的进一步说明

把商集 A/R 和划分的定义相比较，易见商集就是 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分. 反之，任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R:

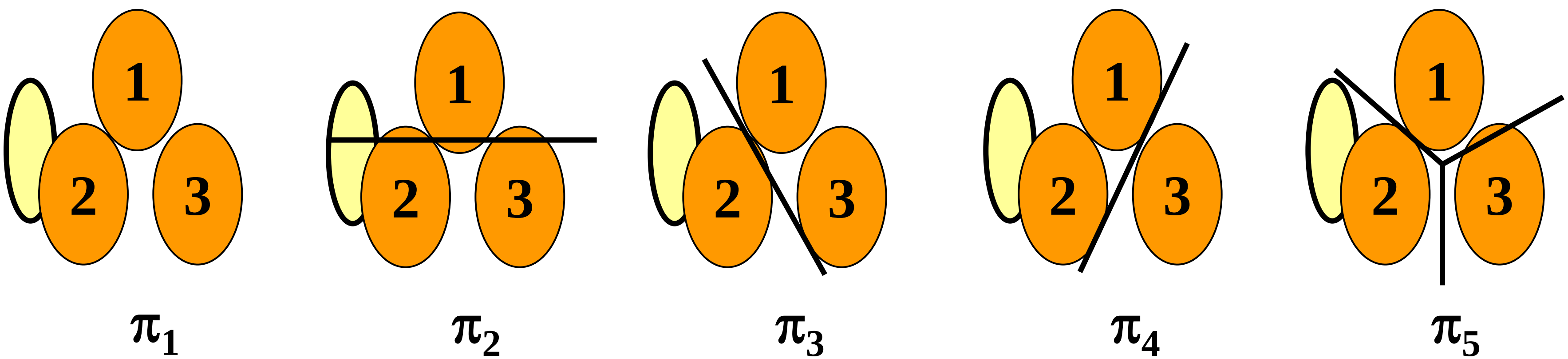
$$R = \{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \}$$

则 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是 π. 即，A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

实例

例11 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

解 先做出 A 的划分，从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1对应 E_A； π_5 对应 I_A； π_2， π_3 和 π_4 分别对应 R_2， R_3 和 R_4.

$$R_2=\{<2, 3>, <3, 2>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1, 3>, <3, 1>\}\cup I_A$$

$$R_4=\{<1, 2>, <2, 1>\}\cup I_A$$

7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系

  偏序关系的定义

  偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质

  极大元、极小元、最大元、最小元

  上界、下界、最小上界、最大下界

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系，如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x "小于或等于" y.

实例：集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系. 小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$，x 与 y 可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y，可能有下述几种情况发生：

$x \prec y$ (或 $y \prec x$)，　$x = y$，　x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x, y \in A$，x与y都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系,整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x, y \in A$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y 覆盖 x. 例如{1, 2, 4, 6}集合上整除关系，2 覆盖 1，4 和 6覆盖2，4不覆盖1.

偏序集与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集，记作 $<A, \preccurlyeq>$.

实例：$<Z, \leq>$，$<P(A), R_{\subseteq}>$

哈斯图：利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图.

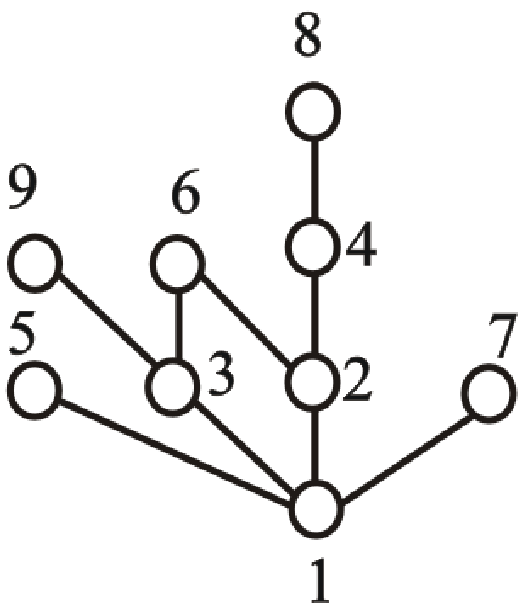
特点：(1) 每个结点没有环

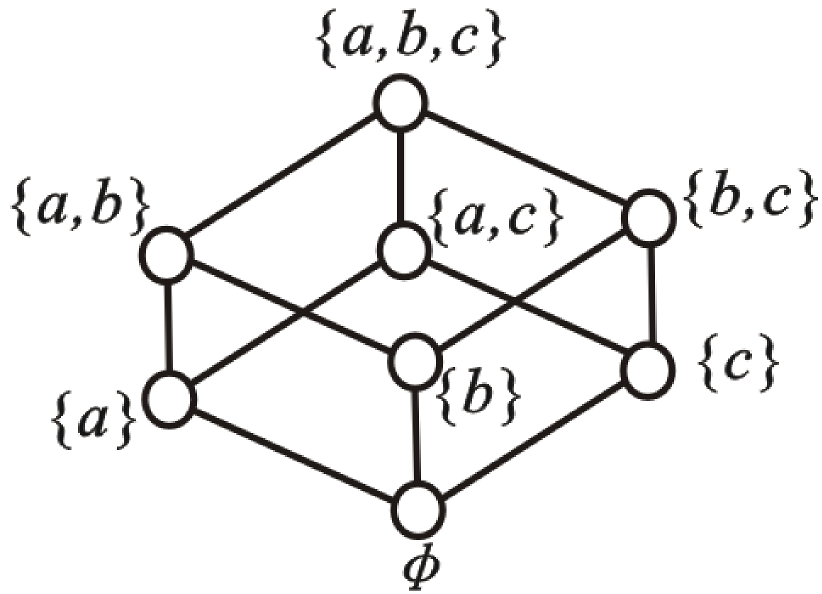
(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

实例

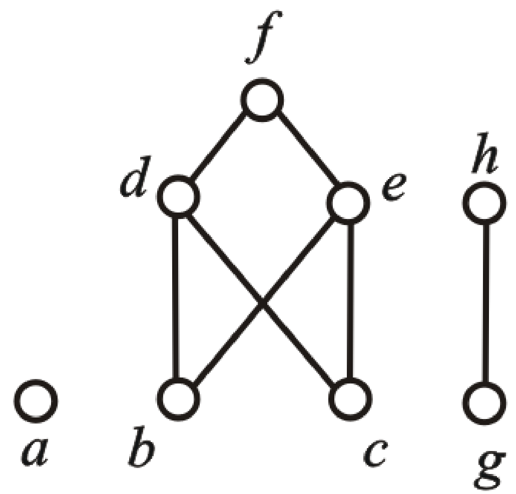
例12 偏序集 $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$R$整除$>$ 和 $< P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq} >$ 的哈斯图.





实例

例13 已知偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解 $A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R = \{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\} \cup I_A$

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称 y 为B的**最小元**

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称 y 为B的**最大元**

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为B的**极小元**

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为B的**极大元**

性质：

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设<A, ≼>为偏序集，$B\subseteq A$, $y\in A$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C=\{y\mid y$为B的上界$\}$， C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D=\{y\mid y$为B的下界$\}$， D的最大元为B的最大下界或下确界

性质：

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

实例

例14 设偏序集<*A*, ≼>，求*A*的极小元、最小元、极大元、最大元，设*B*={ *b*, *c*, *d* }，求*B*的下界、上界、下确界、上确界.

解：极小元：*a*, *b*, *c*, *g*；

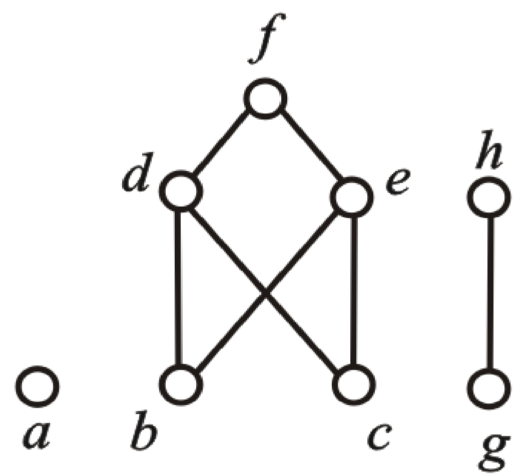
极大元：*a*, *f*, *h*；

没有最小元与最大元.

*B*的下界和最大下界都不存在；

上界有 *d* 和 *f*,

最小上界为 *d*.



实例

例15 设 X 为集合，$A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$，且$A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$, $n\geq 2$. 问：

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元？

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元？

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由.

解：(1) $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元，因为 $n\geq 2$.

(2) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集，即$\{x\}$，$x\in X$.

(3) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素，即$X-\{x\}$，$x\in X$.

第七章 习题课

主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从*A*到*B*的关系、*A*上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质：*A*上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- *A*上关系的自反、对称、传递闭包
- *A*上的等价关系、等价类、商集与*A*的划分
- *A*上的偏序关系与偏序集

基本要求

- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算$A\times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集A/R
- 给定A的划分π，求出π所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法

  证明涉及关系运算的集合等式

  证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

练习1

1． 设$A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle x,y\rangle \mid x, y\in A$且$x+2y \leq 6\}$，

$S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，求：

(1) R的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) $R\circ S$, R^3

(5) $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解答

(1) $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

(2) $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

(3) $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

(4) $R \circ S = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>\}$

$R^3 = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$

(5) $r(R) = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 3>\}$

$s(R) = \{<1, 1>,<1, 2>,<2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <1, 3>\}$

$t(R) = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$

练习2

2． 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，在$A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x, y>, <u, v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求R导出的划分.

$A\times A=\{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 2>,$
$<2, 3>, <2, 4>,<3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <3, 4>,$
$<4, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <4, 4>\}$

根据 $<x, y>$ 中的 $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将 A 划分成等价类：

$A/R=\{\{<1, 1>\}, \{<1, 2>, <2, 1>\}, \{<1, 3>, <2, 2>, <3, 1>\},$
$\{<1, 4>, <2, 3>, <3, 2>, <4, 1>\},$
$\{<2, 4>, <3, 3>, <4, 2>\},$
$\{<3, 4>, <4, 3>\}, \{<4, 4>\}\}$

练习3

3．设R是Z上的模 n 等价关系, 即

$$x\sim y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\, n),$$

试给出由R确定的Z的划分π.

解　设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$，则

$$[r] = \{\, kn+r \mid k\in \mathrm{Z} \,\},\ \ r = 0, 1, \ldots, n-1$$

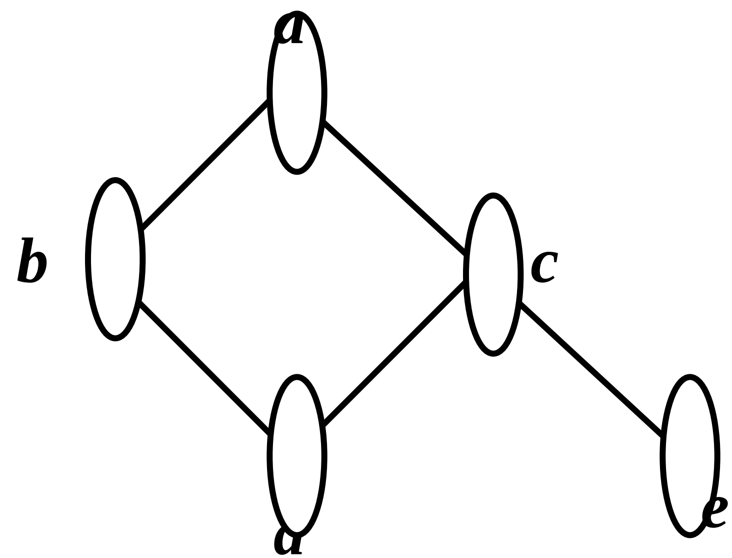
$$\pi = \{\, [r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

练习4

4．设偏序集 <*A*, *R*> 的哈斯图如图所示.

(1) 写出*A*和*R*的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元



解：(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,c\rangle,$

$\langle e,c\rangle, \langle e,a\rangle, \langle b,a\rangle,$

$\langle c,a\rangle\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是 *a*,

极小元是 *d*, *e*;

没有最小元.

练习5

5．设R是A上的二元关系， 设

$$S = \{\langle a, b\rangle \mid \exists c(\langle a, c\rangle \in R \wedge \langle c, b\rangle \in R)\}.$$

证明如果R是等价关系，则S也是等价关系.

证 R 是 A 上的等价关系.

(1) 证自反，任取x,

$$x\in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \exists x\,(\langle x, x\rangle \in R \wedge \langle x, x\rangle \in R) \Rightarrow \langle x, x\rangle \in S$$

(2) 证对称，任取$\langle x,y\rangle$,

$$\langle x, y\rangle \in S \Rightarrow \exists c(\langle x, c\rangle \in R \wedge \langle c, y\rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\,(\langle c, x\rangle \in R \wedge \langle y, c\rangle \in R) \Rightarrow \langle y, x\rangle \in S$$

(3) 证传递，任取$\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle$,

$$\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in S$$

$$\Rightarrow \exists c\,(\langle x, c\rangle \in R \wedge \langle c, y\rangle \in R) \wedge \exists d\,(\langle y, d\rangle \in R \wedge \langle d, z\rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in S$$

练习6

6. 设偏序集 $<A, R>$ 和 $<B, S>$，定义 $A\times B$ 上二元关系 T：

$$<x, y>T<u, v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明 T 为偏序关系.

证 (1) 自反性，任取$<x,y>$,

$$<x, y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x, y>T<x, y>$$

(2) 反对称性，任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x, y>T<u, v>\wedge<u, v>T<x, y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x, y>=<u, v>$$

(3) 传递性，任取$<x, y>, <u, v>, <w,t>$

$$<x, y>T<u, v>\wedge<u, v>T<w, t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x, y>T<w, t>$$

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

2. 证明R在A上对称

任取$\langle x, y\rangle$,

$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

前提　　推理过程　　结论

关系性质的证明方法

3. 证明*R*在*A*上反对称

任取$<x, y>$,

$<x, y>\in R \wedge <y, x> \in R \Rightarrow$ ……………………… $\Rightarrow x = y$

前提　　　　推理过程　　　　结论

4. 证明*R*在*A*上传递

任取$<x, y>, <y, z>$,

$<x, y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow$ ……………………… $\Rightarrow <x, z>\in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

练习7

7．R, S 为A上的关系，证明 $R\subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证　只需证明对于任意正整数 n，$R^n \subseteq S^n$．对n归纳.

n=1，显然为真.

假设对于n，命题为真，任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x, y> \in R^{n+1} \\
\Rightarrow\ & <x, y> \in R^n \circ R \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in R^n \wedge <t, y> \in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in S^n \wedge <t, y> \in S) \\
\Rightarrow\ & <x, y> \in S^n \circ S \\
\Rightarrow\ & <x, y> \in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

关系等式或包含式的证明方法

- 数学归纳法（主要用于幂运算）
- 证明中用到关系运算的定义和公式，如：

$$x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x, y> \in R)$$

$$y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x, y> \in R)$$

$$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R^{-1}$$

$$<x, y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x, t> \in R \wedge <t, y> \in S)$$

$$<x, y> \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x, y> \in R$$

$$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge <x, y> \in R)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$$