线性代数期末复习资料

华中农业大学本科课程考试试卷一

考试课程与试卷类型：**线性代数** 姓名：

学年学期： 学号：

考试时间： 班级：

一、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其字母代号写在该题【　】内。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1、设 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} =$ 【　】

(A). $-|A||B|$　　(B). $(-1)^m|A||B|$

(C). $(-1)^n|A||B|$　　(D). $(-1)^{mn}|A||B|$

2、线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵和增广矩阵的秩的关系是 【　】

(A). $r(Ab)=r(A)$　　(B). $r(Ab)=r(A)+1$

(C). $r(Ab)=r(A)$ 或 $r(Ab)=r(A)+1$　　(D). $r(Ab)>r(A)$

3、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则 A 的 【　】

(A). 行向量组线性无关　　(B). 行向量组线性相关

(C). 列向量组线性无关　　(D). 列向量组线性相关

4、设 A 为 n 阶可逆方阵，则 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*|=$ 【　】

(A). 1　　(B). $\frac{1}{|A|}$

(C). $|A|^n$　　(D). $|A|^{n-1}$

5、设 A 是 n 阶方阵，A 有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 【　】

(A). 充分条件　　(B). 必要条件

(C). 充要条件　　(D). 既非充分也非必要条件

二、填空题（将答案写在该题横线上。每小题 3 分，共 15 分。）

1、设 A 是 3 阶方阵且 $|A| = \frac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1} - 2A^*\right|$ =__________；

2、设 A, B 都是可逆方阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆阵是__________；

3、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 的线性相关性是__________；

4、设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则 A^* 的一个特征值是__________________；

5、设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定，则 t 的范围是_________.

三、（本题 10 分）

计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

四、（本题 10 分）**求下列向量组的秩和一个最大无关组：**

$$\alpha_1 = (6,4,1,9,2),\ \alpha_2 = (1,0,2,3,-4),\ \alpha_3 = (1,4,-9,-6,22),\ \alpha_4 = (7,1,0,-1,3).$$

五、（本题 14 分）

当λ为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

有解?有无穷多个解时,求出它的全部解.

六、（本题 10 分）　设矩阵 A 与 B 相似，

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

（1）(5 分). 求 a,b 的值；

（2）(5 分). 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

七、（本题 14 分）求一个正交变换将下列二次型化为标准型. $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

八、证明题（本大题 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1. 证明：若α_1,α_2线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$也线性无关.

2. 若$\left|I-A^2\right|=0$，证明 1 或－1 至少有一个是A的特征值.

华中农业大学本科课程考试一参考答案

考试课程与试卷类型：**线性代数** 姓名：

学年学期： 学号：

考试时间： 班级：

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D； 2. C； 3. D； 4. D； 5. A.

二、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. −16/27； 2. $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ ； 3. 线性无关 ；

4. $\lambda^{-1}|A|$ ； 5. (−4/5, 0).

三、（10 分）

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ （2 分）

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ （2 分）

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$ （4 分）

＝57 (2 分)

四、（10 分）

解：$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ 9 & 3 & -6 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix}$ (3 分)

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ （4 分）

秩为 3，最大无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

五、（14 分）

解：系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&3&\lambda&3\\1&\lambda&3&2\end{pmatrix}$ （1 分）

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&\lambda+2&1\\0&0&(2-\lambda)(3+\lambda)&2-\lambda\end{pmatrix}$$ （4 分）

$\lambda=-3$时，无解

$\lambda=2$时，有无穷多解 （3 分）

$\lambda\neq-3$且 $\lambda\neq2$时，有唯一解

$\lambda=2$时，$(Ab)\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-5&0\\0&1&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ （2 分）

基础解系$\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$，特解$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ （2 分）

通解 $x=k\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, k为任意常数 （2 分）

六、（ 10 分）

解：（1） $|A|=|B|$ ， $3a-3=2b$ （1 分）

b是 A 的特征单根， 2是 A 的 2重特征根，所以 $r(A-2I)=1$ （2 分）

$$A-2I\sim\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&a-5\\0&0&0\end{pmatrix},a=5,b=6$$ （2 分）

（2） $A-2I\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$， $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ （2 分）

$$A-5I\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$ （2 分）

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$$ （1 分）

七.（ 14 分）

解： 二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$$ （3分）

由 $\left|A-\lambda I\right|=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-1)$得

A的特征值为： $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1.$ （4分）

当 $\lambda_1=2$时，解得（ $A-2I$） $x=0$的一个基础解系为： $\alpha_1=(1,0,0)^T$，

当 $\lambda_2=5$时，解得（ $A-5I$） $x=0$的一个基础解系为： $\alpha_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，

当 $\lambda_3=1$时，解得（ $A-I$） $x=0$的一个基础解系为： $\alpha_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，（6分）

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},y=Px$ 为所求的正交变换，（ 2分）

八.（每小题 6 分，共 12 分）

1. 证：令 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_1(\alpha_1-\alpha_2)=0$ （1 分）

$(x_1+x_2)\alpha_1+(x_1-x_2)\alpha_2=0$ （1 分）

α_1,α_2 线性无关，所以 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ （2 分）

$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 只有零解，所以向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 也线性无关 （2 分）

2. 证：$\left|I-A^2\right|=0$，所以 $\left|A-I\right|\left|A+I\right|=0$ （1 分）

$\left|A-I\right|=0$ 或 $\left|A+I\right|=0$ （2 分）

1 或 -1 是 $\left|A-\lambda I\right|=0$ 的根 （2 分）

所以 1 或−1 至少有一个是 A 的特征值 （1 分）

华中农业大学本科课程考试试卷二

考试课程与试卷类型：**线性代数**　　　　姓名：

学年学期：　　　　学号：

考试时间：　　　　班级：

一　选择题 （25 分）

1　已知四阶行列式 D_4 第一行的元素依次为 1，2，－1，－1，它们的余子式依次为 2，－2，1，0，则 D_4 的值为　(　)

(A)　-3　　(B)　-5　　(C)　3　　(D)　5

2　已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & 1 & & \\ . & & & & .. \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$，则 $|A|$ 的所有元素的代数余子式之和等于 (　)

(A)　0　　(B)　1　　(C)　-1　　(D)　2

3　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1，则　(　)

(A)　$r>r_1$　　(B)　$r<r_1$　　(C)　$r=r_1$　　(D)　r 与 r_1 的关系依 C 而定

4　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件是

（A）A 的列向量组线性无关。　　（B）A 的列向量组线性相关

（C）A 的行向量组线性无关。　　（D）A 的行向量组线性相关

5　设 λ 是 n 阶可逆矩阵 A 的特征值，ξ 是 A 的对应于 λ 的特征向量，P 是 n 阶可逆矩阵，则 $P^{-1}A^*P$ 的对应于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量是　（　　）

(A)　$P^{-1}\xi$　　(B)　$P\xi$　　(C)　$P^T\xi$　　(D)　$(P^T)^{-1}\xi$

二　填空题 （25 分）

1　设 A,B 都是 n 阶正交矩阵，若 $|A|+|B|=0$，则 $|A+B|=$ _________　_

2　已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A=$ _________　_

3　已知向量组 a_1,a_2,a_3,a_4. 线性无关，若向量组 $a_1+ka_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_1$ 线性相关，则 $k=$ ____________

4　若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=2b \end{cases}$$

无解，则常数 a,b 应满足的条件是____________

5　若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 1，2，3，4，则矩阵 B^*-E 的全部特征值为 ________________

三　计算证明题 （50 分）

1（12 分）　求向量组 $a_1=(1,3,0,5),\ a_2=(1,2,1,4),\ a_3=(1,1,2,3),\ a_4=(1,-3,6,-1)$ 的一个极大线性无关组和秩

2（15 分）设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 A 的秩 $r(A)=2$

（1）求 A 的全部特征值

（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵

3 （15 分）已知二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$ 通过正交变换可化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换

4 （8 分）设 A 是 n 阶矩阵，且满足 $A^2 = E$，证明: $r(A-E)+r(A+E)=n$

华中农业大学本科课程考试二参考答案

考试课程与试卷类型：**线性代数** 姓名：

学年学期： 学号：

考试时间： 班级：

一 选择题

1 D 2 B 3 C 4 A 5 A

二 填空题

1 (0) 2 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3 (1) 4 （$a=-8$且$b\neq 1$） 5 (23,11,7,5)

三 计算证明题

1 解： 设 $A=(a_1^T,a_2^T,a_3^T,a_4^T)$，用初等行变换将 A 化为行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

易知，a_1,a_2 为向量组 a_1,a_2,a_3,a_4 的一个极大线性无关组，它的秩为 2

2 解：（1）设 λ 为 A 的一个特征值，对应的特征向量为 ξ，即 $A\xi=\lambda\xi$，于是 $(A^2+2A)\xi=(\lambda^2+2\lambda)\xi$

由于 $A^2+2A=0$，可知 $\lambda^2+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2,\lambda=0$。因为实对称矩阵 A 必可对角化，又

$r(A)=2$，所以 A 应与对角矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 相似。因此的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$

(2) 矩阵 $A+kE$ 为实对称矩阵，其特征值为 $-2+k,-2+k,k$，于是，当 $k>2$ 时，矩阵 $A+kE$ 的特征值都为正数，因此 $A+kE$ 为正定矩阵

3 解： 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$

设所求的正交矩阵为 Q，则 $Q^TAQ=\Lambda$

即 $$Q^T\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$$

两边取行列式，有 $$\left|Q^T\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}Q\right|=2(9-a^2)=10$$

即 $2(9-a^2)=10$ ，解得 $a=2(>0)$

又因为 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$

故当 $\lambda=1$ 时，解方程组 $(E-A)X=0$ 得特征向量 $a_1=(0,1,-1)^T$

当 $\lambda=2$ 时，解方程组 $(2E-A)X=0$ 得特征向量 $a_2=(1,0,0)^T$

当 $\lambda=5$ 时，解方程组 $(5E-A)X=0$ 得特征向量 $a_2=(0,1,1)^T$

显然 a_1， a_2， a_3 是正交向量组，将它们单位化后得

$$\beta_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_3=\frac{a_3}{\|a_3\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

故所求的正交矩阵为

$$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

4 证明： 由题设 $A^2=E$， 得

$$(E-A)(E+A)=0$$

于是有 $r(E-A)+r(E+A)\le n$

由 $(E-A)+(E+A)=2E$,可知

$$n = r(E) = r(2E) \leq r(E-A) + r(E+A)$$

综上得 $r(E-A) + r(E+A) = n$

华中农业大学本科课程考试试卷三

考试课程与试卷类型：**线性代数** 姓名：

学年学期： 学号：

考试时间： 班级：

一、单项选择题（从下列各题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其字母代号写在该题【 】内。答案错选或未选者，该题不得分。每小题 3 分，共 15 分。）

1. 已知 A，B 是同阶方阵，下列等式中，正确的是 【 】

(A). $|AB|=|A||B|$　　(B). $(AB)^T=A^TB^T$

(C). $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　(D) $(AB)^k=A^kB^k$

2、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的有非零解的充要条件是 【 】

$(A).\ r(A)=n$　　$(B).\ r(A)<n$

$(C).\ |A|=0$　　$(D).\ m>n$

3、设 A 是 5×4 矩阵，则下列命题正确的是 【 】

$(A).$ A 的行向量组线性无关　　$(B).$ A 的行向量组线性相关

$(C).$ A 的列向量组线性无关　　$(D).$ A 的列向量组线性相关

4、设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则 A^* 的一个特征值是 【 】

$(A).\ \lambda^{-1}|A|^n$　　$(B).\ \lambda^{-1}|A|$

$(C).\ \lambda|A|$　　$(D).\ \lambda|A|^n$

5、设 n 阶方阵 A 与 B 相似，则下列命题不正确的是 【 】

$(A).$ A 与 B 有相同的特征值　　$(B).\ r(A)=r(B)$

$(C).\ |A|=|B|$　　$(D).$ A 与 B 有相同的特征向量

二、填空题（将答案写在该题横线上。每小题 3 分，共 15 分。）

1、已知 $\alpha_1=(1,2,t),\alpha_2=(1,1,-1),\alpha_3=(2,3,1)$，当 t_______时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

2、 $f(y)=\begin{vmatrix} 2y & 1 & -1 \\ -y & -2y & y \\ 1 & 2 & y \end{vmatrix}$ 中 y^3 的系数是 ________；

3、设 A 为 3 阶方阵，A 的特征值为-1，1，2，则 $|3A^{-1}|=$________；

4、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三元线性方程组 $Ax=b$ 的三个解，且 $r(A)=2$，$\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_2-\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $Ax=b$ 的通解为______________；

5、设二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的范围是______________.

三、（本题 10 分）

已知 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，求矩阵 X.

四、（本题 10 分）**求下列向量组的秩和一个最大无关组：**

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\ \alpha_2=(2,-3,1,-1),\ \alpha_3=(1,-1,2,3),\ \alpha_4=(4,-3,4,3).$$

五、（本题 14 分）

已知线性方程组 $\begin{cases} kx_1 - x_2 = k, \\ kx_2 - x_3 = k, \\ kx_3 - x_4 = k, \\ -x_1 + kx_4 = k. \end{cases}$

（1）（8分）. k 为何值时，方程组有唯一解？无解？无穷多解？

（2）（6分）.在有无穷多解的情况下求出其通解.

六、（本题 10 分） 已知三阶方阵 A 的特征值为-1，1，2.

设 $B = I - 3A^2 + 2A^3$.

（1）(5 分). 求矩阵 A 的行列式及 A 的秩;

（2）(5 分). 求矩阵 B 的特征值及其相似对角矩阵.

七、（本题 14 分）求一个正交变换 $X = CY$ 将下列二次型化为

标准型. $f = X^T AX = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

八、证明题（本大题 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

1. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，试证向量组$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

线性无关.

2、.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，　B 为 $n\times m$ 称阵，且　$m>n$. 证明：$|AB|=0$.

华中农业大学本科课程考三参考答案

考试课程与试卷类型：线性代数　　　　姓名：

学年学期：　　　　学号：

考试时间：　　　　班级：

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A ；　2. B；　3. B ；　4. B；　5. D.

三、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. −4；　2. $t \neq 2$ ；　3. −27/2 ；

4. $(1,0,2)^T + k(1,1,1)^T \ (k \in R)$ ；　5. $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$.

三、（10 分）

解：由 $AX = A + 2X$ 得：（$A - 2I$）$X = A$ （1分）

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad （2分）$$

$$\therefore \quad X = (A - 2I)^{-1}A \qquad （2分）$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2 & -4/3 \end{pmatrix} \qquad （3分）$$

$$\therefore \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2/3 & -4 & -5/3 \end{pmatrix} \qquad （2分）$$

四、（10 分）

解：对 A 进行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad （5 分）$$

此向量组的秩为：3　　　（2 分）

它的一个最大无关组：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.　（3 分）

五、（14 分）

解：（1） 系数矩阵 A 的行列式为：

$$|A|=\begin{vmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \\ -1 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}=k^4-1 \qquad （5分）$$

当 $k\neq\pm1$时，方程组有唯一解； （1分）

当 $k=1$时， $r(A)=3, r(Ab)=4$, 方程组无解； （1分）

当 $k=-1$时， $r(A)=r(Ab)=3$, 方程组有无穷多解. （1分）

（2）对增广矩阵进行初等行变换：

$$(Ab)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

$\therefore$ 原方程的通解为： $x=(1,0,1,0)^T+k(-1,1,-1,1)^T \quad (k\in R)$. （3分）

六、（ 10 分）

解：（1）$|A|=-2$ (3分)

$r(A)=3$ （2分）

（2）设 λ 为 A 的特征值， x 为 A 的对应于 λ 的特征向量，则：

$$Bx=(I-3A^2+2A^3)x=(1-3\lambda^2+2\lambda^3)x$$

$\therefore$ B 的特征值为： -4，0，5. （4分）

B 的相似对角矩阵为： $\begin{pmatrix} -4 & & \\ & 0 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$. （1分）

七.（ 14 分）

解：（1）．二次型的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$ （3分）

（2）．由 $\left|A-\lambda I\right|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$ 得

A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$．（3分）

（3）．当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解得（$A-I$）$x=0$ 的一个基础解系为：

$\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,0,1)^T$

$\therefore$ A 的两个正交单位特征向量为：

$p_1=(-2/\sqrt{5},1/\sqrt{5},0)^T$, $p_2=(2/3\sqrt{5},4/3\sqrt{5},5/3\sqrt{5})^T$．（4分）

当 $\lambda_3=10$ 时，A 的单位特征向量为：$p_3=(-1/3,2/3,2/3)$（2分）

（4）．令 $C=(p_1,p_2,p_3)$, C 为正交矩阵．作正交变换 $X=CY$，

得 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$．（2分）

八．（每小题 6 分，共 12 分）

1. 证：令 $x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+2\alpha_2)+x_3(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=0$ （2分）

整理得：$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(2x_2+2x_3)\alpha_2+3x_3\alpha_3=0$ （1分）

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，**所以有：**$x_1=0,x_2=0,x_3=0$．（2分）

则向量组$\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$线性无关．（1分）

2．证：$\because$ A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 称阵，且 $m>n$．

$\therefore$ $r(A)\le n, r(B)\le n$，$r(AB)\le n$．（4分）

又 AB 为 m 阶方阵，则 $|AB|=0$ （2分）

华中农业大学本科课程考试试卷四

考试课程与试卷类型：**线性代数与线性规划** B 卷　　　　姓名：

学年学期：　　　　学号：

考试时间：　　　　班级：

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）在每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题中括号内

1. 设 ***A***、***B*** 为同阶方阵，下列等式中恒正确的是（　　）

A．$AB = BA$　　B．$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

C．$|A+B| = |A| + |B|$　　D．$(A+B)^T = A^T + B^T$

2. 如果方程组 $\begin{cases} 3x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k=（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．已知 3×4 矩阵 ***A*** 的行向量组线性无关，则 $R(\boldsymbol{A}^T)$ 等于（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4．设有二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$，则 $f(x_1, x_2, x_3)$（　　）

A．正定　　B．负定　　C．不定　　D．半正定

5. 设三元线性方程组 $Ax = b$，***A*** 的秩为 2，η_1, η_2, η_3 为方程组的解，$\eta_1 + \eta_2 = (2,0,4)^T$，$\eta_1 + \eta_3 = (1,-2,1)^T$，则对任意常数 k，方程组 $Ax = b$ 的通解为（　　）

A．$(1,0,2)^T + k(1,-2,1)^T$　　B．$(1,-2,1)^T + k(2,0,4)^T$

C．$(2,0,4)^T + k(1,-2,1)^T$　　D．$(1,0,2)^T + k(1,2,3)^T$

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

6. 设向量 $\alpha = (1,-2,-1)^T$，$\beta = \begin{pmatrix} -2 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ 正交，则 $\lambda =$ ______________.

7. 设$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&2&2\end{bmatrix}$，则$A^{-1}=$________________________.

8. 方程组$x_1+x_2-x_3=0$的通解是______________________________________.

9. 若A为三阶方阵，且$\left|A+2E\right|=0$，$\left|2A+E\right|=0$，$\left|3A-4E\right|=0$，则$\left|A\right|=$ _____________.

10. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$\left|A\right|=2$ 则$\left|(-\frac{1}{3}A)^{-1}+A^{*}\right|=$_____________.

三、计算题（本大题共3小题，共23分）

11.**（满分8分）**设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$.求（1）$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$；（2）$|4\boldsymbol{A}|$.

12**（满分8分）**计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

13.**（满分7分）**已知矩阵A相似于对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ **错误！未找到引用源。**，求行列式$\left|A-E\right|$

四、解答题（本大题共4小题，共36分）

14.（**满分 10 分**） 已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = a \end{cases}$，

（1）求当a 为何值时，方程组无解、有解；

（2）当方程组有解时，求出其全部解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示

15（**满分 10 分**） 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

求：（1）A 的秩 $R(A)$；

（2）A 的列向量组的一个最大线性无关组.

16. **(满分 8 分)** 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\xi=(1,1,-1)^T$，求 a,b 及 ξ 所对应的特征值，并写出对应于这个特征值的全部特征向量

17. （**满分 8 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$，求正交变换 $x=Py$，将二次型化为标准形

五、证明题

18. **（满分 6 分）** 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，ξ_1，ξ_2 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.试证明

（1）$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\eta}_0+\xi_1$，$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\eta}_0+\xi_2$ 均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解；

（2）$\boldsymbol{\eta}_0$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

华中农业大学本科课程考试四参考答案

考试课程与试卷类型：线性代数与线性规划　　姓名：

学年学期：　　学号：

考试时间：　　班级：

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. D　2. B　3. C　4. C　5. D

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，满分20分）

6. -2 .　7. $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$.　8. $k_1(-1,1,0)^T + k_2(1,0,1)^T$.　9. $\frac{3}{4}$，　10. $\frac{(-1)^n}{2}$.

三、计算题

11. 解（1）$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ……….2 分　$=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ ………..4 分

（2）$|4\mathbf{A}|=4^3|\mathbf{A}|=64|\mathbf{A}|$，而$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$ …….6 分所以$|4\mathbf{A}|=64\cdot(-2)=-128$…….8 分

12. **（满分8分）**

解　把各行都加到第一行上去，得 $D=\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　…………2 分

提出就第一行的公因子 6，然后各行减去第一行，得 $D=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$……….4 分

$=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$……….6 分　=48　……….8 分

13. **(满分 7 分)**

解：由题意, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 即　$A=P\Lambda P^{-1}$ ……….2分

$\left|A-E\right|=\left|P\Lambda P^{-1}-E\right|=\left|P(\Lambda-E)P^{-1}\right| =\left|\Lambda-E\right|$ …….5分 $=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$ ……………7

分

四、解答题

14. **(满分 10 分)**

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 5 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{pmatrix}$.

（1）$a\neq -3$ 时，方程组无解，$a=-3$ 时，方程组有解； ………………….5 分

（2）$a=-3$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，…………….8 分

$\begin{cases}x_1=-1-2x_3\\ x_2=\ \ 1+x_3\\ x_3=\qquad x_3\end{cases}$， 全部解为$\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$…………….10 分

15. **(满分 10 分)**

解：对矩阵 **A** 施行初等行变换 $\mathbf{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -2\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -21 & 7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$=**B**. ……………………….4 分

（1）秩（**B**）=3，所以秩（**A**）=秩（**B**）=3. ……………………….6 分

（2）由于 **A** 与 B 的列向量组有相同的线性关系，而 **B** 是阶梯形，**B** 的第 1、2、4 列是 **B** 的列向量组的一个最大线性无关组，故 **A** 的第 1、2、4 列是 **A** 的列向量组的一个最大线性无关组。(**A** 的第 1、2、5 列或 1、3、4 列，或 1、3、5 列也是）…….10 分

16. **(满分 8 分)**

解：设 λ 是 ξ 所对应的特征值，则 $A\xi=\lambda\xi$ ，即$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，

从而$\begin{pmatrix}-1\\ a+2\\ b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ -\lambda\end{pmatrix}$，可得$a=-3$，$b=0$，$\lambda=-1$；……….5 分

对于 $\lambda=-1$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$： $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -5 & 2 & -3\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-x_3\\ x_3=\ \ x_3\end{cases}，$$

基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，属于 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$， k 为任意非零实数．…….8 分

17.（**满分 8 分**）

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$．

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ \lambda & \lambda-2 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$=\lambda\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$，特征值 $\lambda_1=0$， $\lambda_2=1$， $\lambda_3=3$．….3 分

对于 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$： $\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\\ x_3=x_3\end{cases}$， $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，

单位化为 $p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$；对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\\ x_3=\ \ x_3\end{cases}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，单位化为 $p_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=3$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$： $\lambda E-A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$， $\begin{cases}x_1=\ \ x_3\\ x_2=-2x_3\\ x_3=\ \ x_3\end{cases}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$，

单位化为 $p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\ -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$． 令 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$， ……6 分

则 P 是正交矩阵，使得 $P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，经正交变换 $x = Py$ 后，原二次型化为标准形

$f = 0 \cdot y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$. ……………………….8 分

五、证明题

18. **（满分 6 分）**

证: 由假设 $\boldsymbol{A\eta_0=b}$，$\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}\xi_2=\mathbf{0}$.

（1）$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_1=\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_0+\xi_1)=\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_0+\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{b}$,同理 $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_2=\mathbf{b}$,

所以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\mathbf{Ax=b}$ 的 2 个解。 …….3 分

（2）考虑 $l_0\boldsymbol{\eta}_0+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2=\mathbf{0}$，即（$l_0+l_1+l_2$）$\boldsymbol{\eta}_0+l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$。则 $l_0+l_1+l_2=0$，否则 $\boldsymbol{\eta}_0$ 将是 $\mathbf{Ax=0}$ 的解，矛盾。所以 $l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$。又由假设，$\xi_1$，$\xi_2$ 线性无关，所以 $l_1=0$，$l_2=0$，从而 $l_0=0$。所以 $\boldsymbol{\eta}_0$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关。 ………………….3 分

华中农业大学本科课程考试试卷

考试课程与试卷类型：**线性代数与线性规划 B 卷** 姓名：

学年学期：2008-2009-2 学号：

考试时间： 2009-06-27 班级：

一、单项选择题（答案错选或未选者，该题不得分。每小题 4 分，共 20 分。）

1. 设 A,B 是 n 阶方阵，下列等式中，正确的是：【 】

A ：|AB|=|BA|

B ：$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

C ：$(AB)^T = A^T B^T$

D ：|A+B|=|A|+|B|

2,设 A 是 m 行 n 列矩阵，若 A 的行向量组线性相关，则必有（）

A $m \le n$ B $m \ge n$ C $m < n$ D $m > n$

3，设线性规划（L）：minf=cx，Ax=b，x>=0，若 x1 和 x2 是（L）的可行解，则（）也是（L）的可行解。

A、$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ B 0.2x1 + 0.8x2

C x1+x2 D x1-x2

4、设 A 是 n 阶方阵，|A=0|的充要条件是（）

A A 的某一行元素全是 0

B A 的行向量组线性相关

C A 的任一行向量可由其他行向量线性表示

D AX=b 有无穷多解。

5、若 A 是正交矩阵，则下列说法不正确的是（）

A: $A^{-1}=A^{T}$

B: |A|=-1 或 1

C：A 的行（或列）向量是两两正交的单位向量。

D：A 的特征值是 1 或-1.

二、**填空题**（将答案写在该题横线上。每小题 4 分，共 20 分。）

1，向量组 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 的秩是 3，则向量组 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_2+4\alpha_3$ 是线性_____的向量组。

2、已知三阶方阵 A 的特征值是-1、1、2，则方阵 A 的秩等于____，并且____（能或不能）似对角化，且行列式 $|4A^{-1}|$=____

3、A 为 5x4 矩阵，且 R(A)=3，α_1,α_2 是线性方程组 AX=b 的两个解，则该方称组的通为______

4、某个求目标函数最小化的线性规划问题，求得基（$\alpha_3\alpha_4\alpha_5$）的单纯形表如下：其中常数 abcd 与 m 已知，问如何限制这些常数，可使如下结论成立。

	X1	X2	X3	X4	X5	
f	m	-2	0	0	0	4
X3	-1	3	1	0	0	2
X4	a	-4	0	1	0	1
X5	b	c	0	0	1	d

当____d>=0_____,当前解为可行解。
当____m<=0_____,当前解为对偶可行解。
当____d>=0 且 m<=0____,当前解为最优解。
当____d<0 且 b>=0,c>=0____,此线性规划问题不可行。
当____m>0 且 b<=0,c<=0____此线性规划问题可行，但目标函数无界.

三、(10 分)

设 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，且 AB=A+2B，求矩阵 B。

四，(15 分)

已知 A 为三阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$，且特征值$\lambda_1$=6 对应的特征向量为$\alpha_1 = (1,1,1)^T$

（1）求$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$对应的所有特征变量。

（2）求正交矩阵 C，使得$C^T - AC$ 为对角矩阵

（3）求矩阵 A。

五，(20 分)

求解线性规划问题 minf=x1+x2 s1=$\begin{cases} 2x1 + x2 \geq 4 \\ x1 + 7x2 \leq 3 \\ x1, x2, x3 \geq 0 \end{cases}$

(1) 用二阶段法求解

(2) 用对偶单纯形法求解

六、（15 分）

某工厂可以用 A、B 两种原料生产 B1、B2、B3 三种产品（每种产品都同时需要两种原料），有关数据如下表：

每吨产品需用原料	产品			现有原料（吨）
	B1	B2	B3	
原料 A	1	1	2	6
原料 B	2	3	1	8
价格（万元/吨）	2	3	5	

（1）问工厂如何安排生产，才能使收益最大

（2）对产品 B1 的价格做灵敏度分析。

（3）对原料 A 的数量做灵敏度分析，若目前市场上原料 A 的实际价格为 2 万元/吨，工厂应如何决策?

七、已知线性规划问题：maxf=x1+x2 s1=$\begin{cases} -x1+x2+x3 \le 2 \\ 2x1-x2+x3 \ge -1 \\ x1,x2,x3 \ge 0 \end{cases}$

试根据对偶问题的性质，证明上述线性规划问题目标函数值无界。

华中农业大学本科课程考试试卷参考答案

考试课程与试卷类型：线性代数与线性规 B 卷　　姓名：

学年学期：2008-2009-2　　学号：

考试时间：　2009-06-27　　班级：

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、A　　2 、D　　3、B　　4、B　　5、D

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1.相关

2.3；能；-32

3.a2+K($\alpha 1-\alpha 2$)(或相应其他形式)

4、d>=0

m<=0　d>=0 且 m<=0

d <0 且 b>=0,c>=0

m>0 且 b<=0,c<=0_

三、（10 分）解： AB=A+2B　变形得：（A-2I）B=A

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-1,\text{故}|A-2I|\text{可逆。}$$

四、(10 分)

解：（1）由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交，故 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的特征向量满足线性方程 x1+x2+x2=0　，所以，$\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的所有特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, 其中 k1,k2 不全为 0.

（2）由 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的特征向量满足线性方程 x1+x2+x3=0，得二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 对应的两个正交的特征向量：$\alpha 2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},,,\alpha_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$,　则 $\{\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3\}$ 构成正交向量组，将他们单位化，则得正交矩阵：

$$C=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

（3）由 $C^T AC = \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 又有 C 正交，所以 A=$C\Lambda C^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

五、（10 分）

解：(1)用二阶段法求解：化原线性规划问题为标准型，引入人工辅助问题

minf=x1+x2 s1= $\begin{cases} 2x1+4x2-x3=4 \\ x1+7x2+x4=3 \\ x1,x2,x3,x4 \geq 0 \end{cases}$ ，minz==y1 ,minfx1+x2

S1= $\begin{cases} 2x1+4x2-x3+y1=4 \\ x1+7x2+x4=3 \\ x1,x2,x3,x4,y1 \geq 0 \end{cases}$ 可得初始可行基（$\alpha 5, \alpha 4$）的单纯形表，换基迭代得（$\alpha 1, \alpha 4$）的单纯形表，因人工问题目标函数值为 0，已得到原问题一个初始可行基（$\alpha 1, \alpha 4$）的单纯形表，以 b22=5 为轴心换基迭代，则原问题的最优解为（8/5,1/5）^{T},最优值为 f=9/5

（2）用对偶单纯形法求解：

化原线性规划问题为标准型，变形得：

minf=x1+x2 s1= $\begin{cases} 2x1+4x2-x3=4 \\ x1+7x2+x4=3 \\ x1,x2,x3,x4 \geq 0 \end{cases}$ ，则原问题有对偶可行基（$\alpha 3, \alpha 4$），及其对应的对偶单纯形表，则原问题的最优解为（8/5,1/5）^{T},最优值为 f=9/5

解：

（1）设 x1,x2,x3,分别表示 B1,B2,B3,的生产量（吨），建立线性规划模型：

Maxf=2x1+3x2+5x3 Maxf’=-f=-2x1-3x2-5x3

$s1 = \begin{cases} x1+x2+2x3 \leq 6 \\ 2x1+3x2+x3 \leq 8 \\ x1,x2,x3 \geq 0 \end{cases}$ 化为标准形式 $s1 = \begin{cases} x1+x2+2x3+x4=6 \\ 2x1+3x2+x3+x5=8 \\ x1,x2,x3,x4,x5 \geq 0 \end{cases}$

可得基 B=$(\alpha 4, \alpha 5)$ 对应的单纯形表，所以，最优基 B=$(\alpha 3, \alpha 2)$，最优解为 x1=0,x2=2,x3=2.对应的目标函数值 f=16 万元。

（2）对产品 B1 的价格灵敏度分析，设 $c1=2+\lambda$,仍取 B=$(\alpha 3, \alpha 2)$ 为基，可得一矩阵，若 B=$(\alpha 3, \alpha 2)$ 仍为最优基，则 $-\infty \leq \lambda \leq \frac{4}{5}$，即产品 B3 的价格在[0,2.8]之间变化时，最优生产计划不变。

（3）对原料 A 的数量 b1 做灵敏度分析，从表中可得

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}, X_B = B^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{5}\Delta b_1 \\ 2 - \frac{1}{5}\Delta b_1 \end{pmatrix} \geq 0$ 则得：-10/3<= Δb_1 <=10

所以原料 A 的数量 b1 在[8/3,16]范围内变化时，最优基不变。从表中可得对偶问题的最优解为 y1=12/5，y2=1/5 若市场上原料 A 的实际价格为 2 万元一吨时，原料 A 得影子价格是 2.4 万元，因此可以考虑购入部分原料，扩大生产，以获得更大利润，为保证最优基不变，购入原料 A 的最大数量为 10 吨，实际利润为 20 万元。

七、 证明：原线性规划问题可化为

Maxf=x1+x2

s1= $\begin{cases} -x1 + x2 + x3 \leq 2 \\ -2x1 - x2 - x3 \geq -1 \\ x1, x2, x3 \geq 0 \end{cases}$

由对称型对偶线性规划，得对偶问题：

Ming=2y1+y2

s1= $\begin{cases} -y1 - y2 \geq \\ y1 + y2 \geq 1 \\ y1 - y2 \geq 0 \\ y1, y2 \geq 0 \end{cases}$

则对偶问题不可行，故由对偶线性规划问题的性质，原线性规划问题目标函数值无界。