# 第四章 一阶逻辑基本概念

主要内容

- 一阶逻辑命题符号化

  个体词、谓词、量词

  一阶逻辑命题符号化

- 一阶逻辑公式及其解释

  一阶语言

  合式公式

  合式公式的解释

  永真式、矛盾式、可满足式

# 命题逻辑的局限性

命题逻辑具有一定的局限性：

凡偶数都能被 2 整除. 6 是偶数. 所以 6 能被 2 整除.

$(p \wedge q) \to r$ 非重言式

引入量词，以期达到表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系，这就是一阶逻辑所研究的内容，一阶逻辑也称作一阶谓词逻辑或谓词逻辑.

# 4.1 一阶逻辑命题符号化

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：具体的事务，用 $a, b, c$ 表示

个体变项：抽象的事物，用 $x, y, z$ 表示

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{ a, b, c \}$, $\{ 1, 2 \}$

无限个体域，如 N, Z, R, …

全总个体域——由宇宙间一切事物组成

# 谓词

谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项　如, $F(a)$：$a$ 是人

谓词变项　如, $F(x)$：$x$ 具有性质 $F$

$n$（$n\geq 1$）元谓词

一元谓词($n$=1)——表示性质

多元谓词($n\geq 2$)——表示事物之间的关系

如, $L(x,y)$：$x$与 $y$ 有关系 $L$，$L(x,y)$：$x\geq y$，…

0元谓词——不含个体变项的谓词，即命题常项

或命题变项

# 量词

量词——表示数量的词

全称量词$\forall$：表示所有的.

$\forall x$：对个体域中所有的$x$，如，

$\forall xF(x)$ 表示个体域中所有的 $x$ 具有性质 $F$

$\forall x\forall yG(x,y)$ 表示个体域中所有的 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

存在量词$\exists$：表示存在，有一个.

$\exists x$：个体域中有一个 $x$，如，

$\exists xF(x)$ 表示个体域中有一个 $x$ 具有性质 $F$

$\exists x\exists yG(x,y)$ 表示个体域中存在 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

$\forall x\exists yG(x,y)$ 表示对个体域中每一个 $x$ 都存在一个 $y$ 使得 $x$ 和 $y$ 有关系 $G$

$\exists x\forall yG(x,y)$ 表示个体域中存在一个 $x$ 使得对每一个 $y$，$x$ 和 $y$ 有关系 $G$

# 实例 1

**例1** 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于北美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果 2 > 3，则 3 < 4

解：在命题逻辑中：

(1) $p$，$p$ 为墨西哥位于北美洲 （真命题）

(2) $p \to q$，其中，$p$：$\sqrt{2}$ 是无理数，$q$: $\sqrt{3}$ 是有理数. （假命题）

(3) $p \to q$，其中，$p$：2 >3，$q$：3 < 4. （真命题）

# 实例 1 解答

解：在命题逻辑中：

(1) $p$，$p$ 为墨西哥位于北美洲 （真命题）

(2) $p \rightarrow q$，其中，$p$：$\sqrt{2}$是无理数，$q$: $\sqrt{3}$是有理数. （假命题）

(3) $p \rightarrow q$，其中，$p$：$2 > 3$，$q$：$3 < 4$. （真命题）

在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，$a$：墨西哥，$F(x)$：$x$位于北美洲 .

(2) $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：$x$是无理数，$G(x)$：$x$是有理数

(3) $F(2, 3) \rightarrow G(3, 4)$，其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

# 实例 2

例 2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) $D$ 为人类集合

(b) $D$ 为全总个体域

解：(a) (1) $\forall x G(x)$，$G(x)$：$x$ 爱美

(2) $\exists x G(x)$，$G(x)$：$x$用左手写字

(b) $F(x)$：$x$为人，$G(x)$：$x$爱美

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

1. 引入特性谓词$F(x)$

2. (1)，(2) 是一阶逻辑中两个“基本”公式

# 实例 3

**例3** 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解：注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：$x$为正数，$G(y)$：$y$为负数， $L(x,y)$：$x > y$

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

(2) 令$F(x)$：$x$是无理数，$G(y)$：$y$是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$$

# 实例 4

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解： (1) $F(x)$：$x$ 是人，$G(x)$：$x$ 呼吸

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) $F(x)$：$x$ 是人，$G(x)$：$x$ 喜欢吃糖

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

# 实例 5

**例5** 设个体域为实数域，将下面命题符号化

(1) 对每一个数 $x$ 都存在一个数 $y$ 使得 $x < y$

(2) 存在一个数 $x$ 使得对每一个数 $y$ 都有 $x < y$

解： $L(x, y)$： $x < y$

(1) $\forall x \exists y L(x, y)$

(2) $\exists x \forall y L(x,y)$

**注意：** $\forall$ 与 $\exists$ 不能随意交换

显然 (1) 是真命题，(2) 是假命题

# 4.2 一阶逻辑公式及解释

**定义4.1** 设$L$是一个非逻辑符集合，由$L$生成的**一阶语言** L 的**字母表**包括下述符号：

非逻辑符号

(1) 个体常项符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(, ), ,

# 一阶语言 L 的项与原子公式

**定义4.2** L 的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是任意的 $n$ 个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1)，(2) 得到的，如,

$a, x, x+y, f(x), g(x, y)$ 等都是项

**定义4.3** 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是 L 的任意$n$元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是L 的任意$n$个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是 L 的原子公式.

如，$F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式

# 一阶语言 L 的公式

**定义4.4** L 的**合式公式**定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若$A$是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若$A$, $B$是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若$A$是合式公式，则 $\forall xA$，$\exists xA$ 也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

合式公式简称**公式**

如，$F(x)$，$F(x)\vee\neg G(x,y)$，$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$ 等都是合式公式

# 封闭的公式

**定义4.5** 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称$x$为**指导变元**，$A$为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，$x$ 的所有出现都称为**约束出现**，$A$中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例如，$\forall x(F(x, y)\rightarrow G(x, z))$，$x$ 为指导变元，$(F(x, y)\rightarrow G(x, z))$ 为 $\forall x$ 的辖域，$x$的两次出现均为约束出现，$y$与 $z$ 均为自由出现.

又如, $\exists x(F(x, y, z)\rightarrow \forall y(G(x, y)\wedge H(x, y, z)))$，$\exists x$ 中的 $x$ 是指导变元，辖域为 $(F(x, y, z)\rightarrow \forall y(G(x, y)\wedge H(x, y, z)))$. $\forall y$ 中的 $y$ 是指导变元，辖域为$(G(x, y)\wedge H(x, y, z))$. $x$ 的3次出现都是约束出现，$y$ 的第一次出现是自由出现，后2次是约束出现, $z$的2次出现都是自由出现.

# 封闭的公式

**定义4.6** 若公式 $A$ 中不含自由出现的个体变项，则称 $A$为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如，$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ 为闭式，

而 $\exists x (F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式

# 公式的解释

定义4.7 设 L 是$L$生成的一阶语言，L 的**解释** $I$ 由4部分组成：

(a) 非空个体域 $D_I$.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$，有一个 $\overline{a}\in D_I$，称 $\overline{a}$ 为 $a$ 在 $I$ 中的解释.

(c) 对每一个$n$元函数符号 $f\in L$，有一个$D_I$上的$n$元函数 $\overline{f}:D_I^n\to D_I$，称 $\overline{f}$ 为 $f$ 在 $I$ 中的解释.

(d) 对每一个$n$元谓词符号$F\in L$，有一个$D_I$上的$n$元谓词常项 $\overline{F}$，称 $\overline{F}$ 为 $F$ 在 $I$ 中的解释.

$I$ 下的**赋值**$\sigma$：对每一个自由出现的个体变项符号 $x$ 指定 $D_I$ 中的一个值 $\sigma(x)$.

# 公式的解释

设公式 $A$，规定：在解释 $I$ 和 赋值 $\sigma$ 下：

(1) 取个体域 $D_I$，

(2) 若 $A$ 中含个体常项符号 $a$ 就将它替换成 $\overline{a}$，

(3) 若 $A$ 中含函数符号 $f$ 就将它替换成 $\overline{f}$，

(4) 若 $A$ 中含谓词符号 $F$ 就将它替换成 $\overline{F}$，

(5) 若 $A$ 中含自由出现的个体变项符号 $x$ 就将它替换成 $\sigma(x)$，

把这样所得到的公式记作 $A'$，并称 $A'$ 为 $A$ 在 $I$ 下的解释，或 $A$ 在 $I$ 下被解释成 $A'$.

# 实例

例6 给定解释 $I$ 如下：

(a) 个体域 $D = \mathbf{R}$

(b) $\bar{a} = 0$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \quad \bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

写出下列公式在 $I$ 下的解释，并指出它的真值.

(1) $\exists x F(f(x, a), g(x, a))$

$\exists x(x+0 = x \cdot 0)$ 真

(2) $\forall x \forall y(F(f(x, y), g(x, y)) \rightarrow F(x, y))$

$\forall x \forall y(x+y = x \cdot y \rightarrow x = y)$ 假

(3) $\forall x F(g(x, y), a)$

$\forall x(x \cdot y = 0)$ 真值不定，不是命题

# 公式的类型

**定理4.1** 闭式在任何解释下都是命题

注意：不是闭式的公式在解释下可能是命题，也可能不是命题.

**定义4.8** 若公式 $A$ 在任何解释下均为真，则称$A$为永真式(逻辑有效式). 若 $A$ 在任何解释下均为假，则称$A$为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释使$A$为真，则称$A$为可满足式.

几点说明：

永真式为可满足式，但反之不真

判断公式是否是可满足的(永真式，矛盾式)是不可判定的

# 代换实例

**定义4.9** 设 $A_0$ 是含命题变项 $p_1$，$p_2$，…，$p_n$的命题公式，$A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 是$n$个谓词公式，用$A_i$ $(1\le i\le n)$ 处处代替$A_0$中的$p_i$，所得公式 $A$ 称为 $A_0$ 的代换实例.

例如， $F(x)\rightarrow G(x)$，$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$ 等都是 $p\rightarrow q$ 的代换实例.

**定理4.2** 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

# 实例

例7 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

(1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

解释$I_1$：个体域N，$F(x)$：$x>5$，$G(x)$：$x>4$， 公式为真

解释$I_2$：个体域N，$F(x)$：$x<5$，$G(x)$：$x<4$， 公式为假

结论：非永真式的可满足式

# 第四章 习题课

主要内容

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言 L

  项、原子公式、合式公式
- 公式的解释

  量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型

  永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

# 基本要求

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念，会判断简单公式的类型

# 练习 1

1. 在分别取个体域为

(a) $D_1 = \mathbf{N}$

(b) $D_2 = \mathbf{R}$

(c) $D_3$ 为全总个体域

的条件下，将下面命题符号化，并讨论真值.

(1) 对于任意的数$x$，均有 $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

解 设$G(x)$：$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

(a) $\forall x G(x)$ 假

(b) $\forall x G(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：$x$ 是实数

$\forall x(F(x) \to G(x))$ 真

# 练习 1 (续)

(2) 存在数$x$，使得 $x+7=5$

解 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists x H(x)$ 假

(b) $\exists x H(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：$x$为实数

$\exists x(F(x) \wedge H(x))$ 真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）.

# 练习 2

**2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化**

**(1) 大熊猫都可爱**

设$F(x)$：$x$ 为大熊猫，$G(x)$：$x$ 可爱

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

**(2) 有人爱发脾气**

设$F(x)$：$x$是人，$G(x)$：$x$ 爱发脾气

$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

**(3) 说所有人都爱吃面包是不对的**

设$F(x)$：$x$ 是人，$G(x)$：$x$ 爱吃面包

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

# 练习 2

(4) 没有不爱吃糖的人

设$F(x)$： $x$ 是人，$G(x)$：$x$ 爱吃糖

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设$F(x)$：$x$是人，$H(x, y)$，$x$与 $y$相同，$L(x, y)$：$x$与$y$一样高

$\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg H(x, y)\rightarrow\neg L(x, y))$

或 $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(F(y)\wedge\neg H(x, y)\rightarrow\neg L(x, y)))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设$F(x)$：$x$ 是汽车，$G(y)$：$y$ 是火车，$H(x, y)$：$x$ 比 $y$ 快

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x, y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x, y))$

# 练习 3

3. 给定解释 $I$ 如下:

(a) 个体域 $D = \mathbf{N}$

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \quad \bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

说明下列公式在 $I$ 下的涵义，并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x, a), x)$

$\forall x(2x=x)$　　假

(2) $\forall x \forall y(F(f(x,a),y) \to F(f(y,a),x))$

$\forall x \forall y(x+2=y \to y+2=x)$　　假

# 练习 3

**(3)** $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y), z)$

$\forall x \forall y \exists z (x+y=z)$ 真

**(4)** $\exists x \forall y \forall z F(f(y, z), x)$

$\exists x \forall y \forall z (y+z=x)$ 假

**(3)，(4)** 说明$\forall$与$\exists$不能随意交换

**(5)** $\exists x F(f(x, x), g(x, x))$

$\exists x (x+x=x \cdot x)$ 真

# 练习 4

**4.** 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式：

(1) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释1：$D_1$=N，$F(x)$：$x$是偶数，$G(x)$：$x$是素数，　　真

解释2：$D_2$=N，$F(x)$：$x$是偶数，$G(x)$：$x$是奇数，　　假

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

解释1：$D_1$=Z，$F(x)$：$x$是正数，$G(x)$：$x$是负数，$H(x,y)$：$x>y$
真

解释2：$D_2$=Z，$F(x)$：$x$是偶数，$G(x)$：$x$是奇数，$H(x,y)$：$x>y$
假

# 练习 5

5. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

$(A\rightarrow B)\wedge A\rightarrow B$的代换实例　　　假言推理

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$

设$I$是任意的一个解释，对每一个$x\in D_I$，

$F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$恒为真　　　附加律