第五部分 图论

主要内容

- 图的基本概念
- 欧拉图与哈密顿图
- 树
- 平面图（自学）
- 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色（大部分自学）

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 图的运算

预备知识

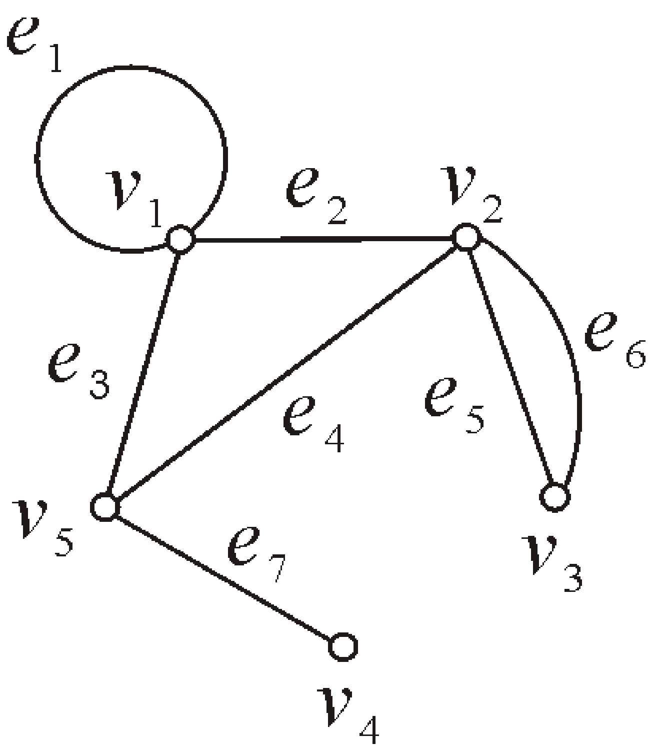
- 多重集合 —— 元素可以重复出现的集合
- 无序集 —— $A\&B=\{\ (x, y) \mid x\in A\wedge y\in B\ \}$

14.1 图

定义14.1 无向图 $G = <V, E>$，其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为**顶点**.

(2) E为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称**边**.



实例，设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V, E>$ 为一无向图

有向图

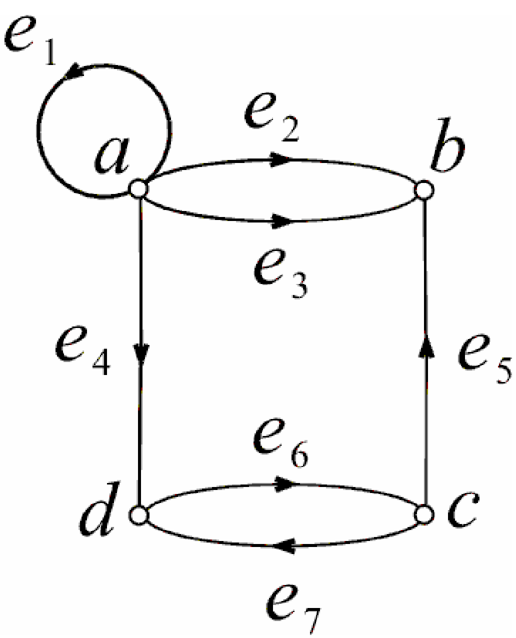
定义14.2 一个有向图 D 是一个有序的二元组 $<V, E>$，其中

(1) V 同定义14.1 (1).

(2) E 是笛卡儿积 $V\times V$ 有穷多重子集，称作边集，其元素称作有向边，简称为边.

图2是一个有向图，

试写出它的V 和 E



注意：(1) E 是 $V\times V$ 的多重子集.

(2) 图的数学定义与图形表示，在同构（待叙）的意义下是一一对应的.

相关概念

1. 图

① 可用G泛指图（无向的或有向的）

② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$

③ n阶图

2. 有限图

3. n 阶零图与平凡图

4. 空图——$\varnothing$

5. 用 e_k 表示无向边或有向边

6. 顶点与边的关联关系

① 关联、关联次数；② 环；③ 孤立点

7. 顶点之间的相邻与邻接关系

相关概念（续）

8. 邻域与关联集

① $v\in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v)\cup\{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e\in E(G)\wedge e$与$v$关联$\}$

② $v\in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge\langle v,u\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge\langle u,v\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$

9. 标定图与非标定图

10. 基图

多重图与简单图

定义14.3

(1) 在无向图中，如果关联一对顶点的无向边多于1条，则称这些边为**平行边**，平行边的条数称作**重数**.

(2) 在有向图中，如果关联一对顶点的有向边多于1条，并且这些边的始点与终点相同（也就是它们的方向相同），则称这些边为**平行边**.（注意方向性）

(3) 含平行边的图称作**多重图**.

(4) 既不含平行边也不含环的图称作**简单图**.

在定义14.3 中定义的简单图是极其重要的概念.

顶点的度数

定义14.4

(1) 设 $G=<V, E>$ 为无向图，$\forall v\in V$，称 v 作为边的端点的次数为 v 的度数，简称为度，记作 $d(v)$.

(2) 设 $D=<V, E>$ 为有向图，$\forall v\in V$,

$d^+(v)$ —— v的出度：v 作为边的始点的次数.

$d^-(v)$ —— v的入度：v 作为边的终点的次数.

$d(v)$ —— v的度或度数： $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

顶点的度数（续）

定义14.4

(3) 在无向图 G 中，

最大度：$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$

最小度：$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$

(4) 类似地，在有向图中有

$\Delta^+(D)$，$\delta^+(D)$，$\Delta^-(D)$，$\delta^-(D)$，$\Delta(D)$，$\delta(D)$

(5) 称度数为1的顶点为悬挂顶点，与它关联的边称作悬挂边.

(6) 度为偶数（奇数）的顶点称作偶度（奇度）顶点.

握手定理

定理14.1 设 $G=\langle V, E\rangle$ 为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

证：G 中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理14.2 设 $D=\langle V, E\rangle$ 为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)=m$$

本定理的证明类似于定理14.1

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证： 设 $G=<V, E>$ 为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为奇数\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为偶数\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$， $\sum_{v\in V_2}d(v)$ 均为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$ 为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解　本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$，则

$$d(v_i) \le 2，i = 1, 2, \ldots, x，$$

于是得不等式

$$32 \le 24 + 2x$$

得 $x \ge 4$，阶数 $n \ge 4+4+3=11$.

图的度数列

1．$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为无向图G的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列.

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列 $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 是可图化的，是可简单图化的.

图的度数列（续）

定理14.3 非负整数列 $d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)$$

是偶数.

定理14.4 设 G 为任意 n 阶无向简单图，则 $\Delta(G) \leq n-1$.

易知：(2, 4, 6, 8, 10)，(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，后者又是可简单图化的，而(2, 2, 3, 4, 5)，(3, 3, 3, 4) 都不是可简单图化的，特别是后者也不是可图化的.

图的同构

定义14.5 设$G_1=<V_1, E_1>$，$G_2=<V_2, E_2>$ 为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数 $f:V_1 \to V_2$，对于v_i, $v_j \in V_1$,

$$(v_i, v_j) \in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$$

$$（<v_i, v_j> \in E_1 \text{ 当且仅当 } <f(v_i), f(v_j)> \in E_2）$$

并且, (v_i, v_j)（$<v_i, v_j>$）与 $(f(v_i), f(v_j))$（$<f(v_i), f(v_j)>$）的重数相同，则称 G_1 与 G_2 是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

图的同构（续）

- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.
- 能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件：

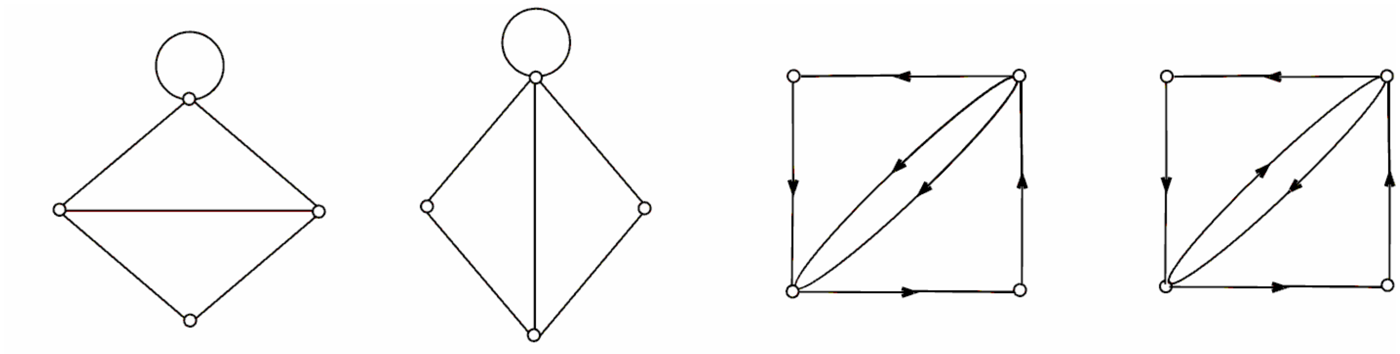
  ① 边数相同，顶点数相同；

  ② 度数列相同；

  ③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

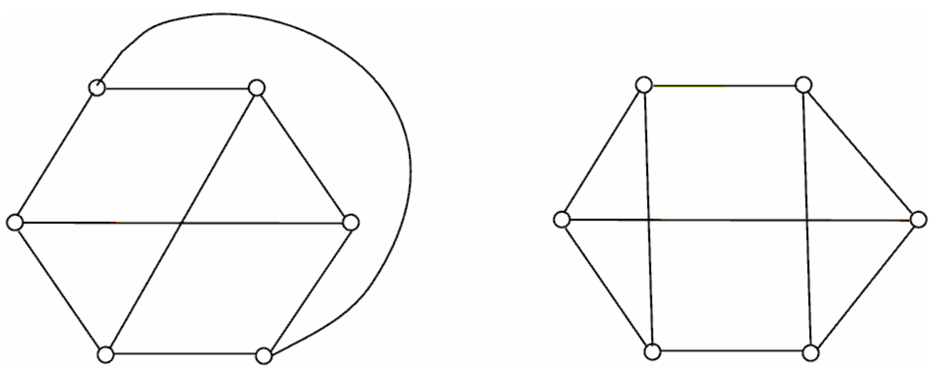
  若破坏必要条件，则两图不同构
- 判断两个图同构是个难题

图同构的实例



(1) (2) (3) (4)

图中，(1)与(2)不同构（度数列不同），(3)与(4)也不同构.



(1) (2)

（不同构，按定义或对应顶点的邻域中的顶点不相邻.）

图中(1)与(2)的度数列相同，它们同构吗？为什么？

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：边数 $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n-1$

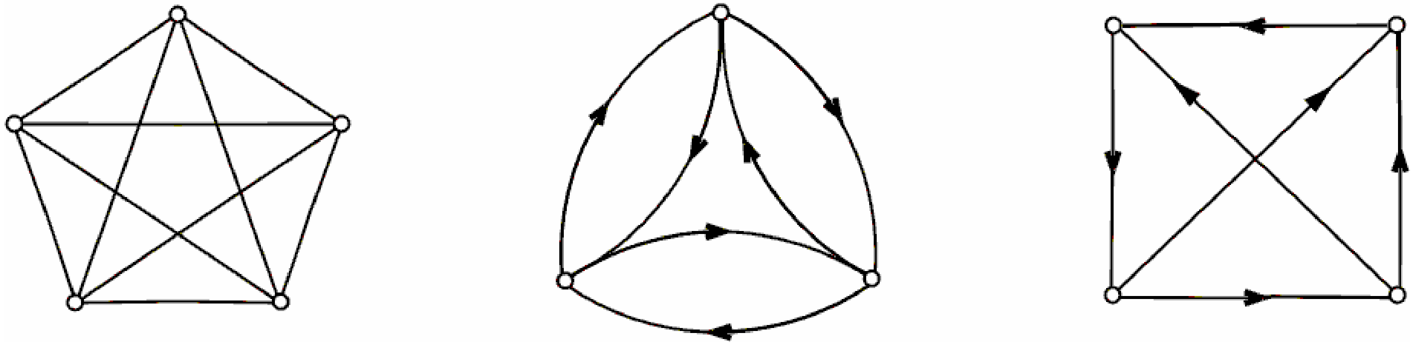
(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质： $m = n(n-1)$, $\Delta = \delta = 2(n-1)$, $\Delta^+ = \delta^+ = n-1$

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为 K_n 的有向简单图.

简单性质：边数 $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n-1$

n 阶 k 正则图



(1) (2) (3)

(1)为K_5，(2)为3阶有向完全图，(3)为4阶竞赛图.

定义14.7 n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

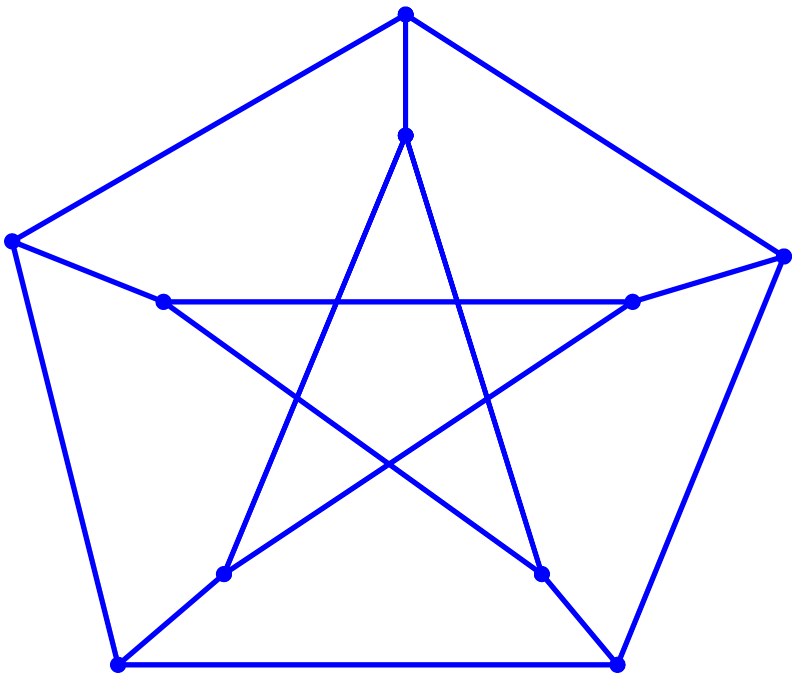
简单性质：边数（由握手定理得）$m=\dfrac{nk}{2}$

K_n 是 n–1正则图，

彼得松(Peterson)图（见书上图14.3(a) 所示，记住它）

彼得松(Peterson)图

彼得松(Peterson)图（见书上图14.3(a) 所示，记住它）



子图

定义14.8 设无向图（或有向图）$G=<V, E>$，$G'=<V', E'>$

(1) 若 $V'\subseteq V$ 或 $E'\subseteq E$，则称 G' 为 G 的子图，G 为 G' 的母图，记作 $G'\subseteq G$.

(2) 若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 为 G 的真子图.

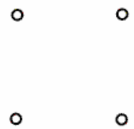
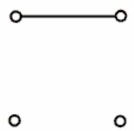
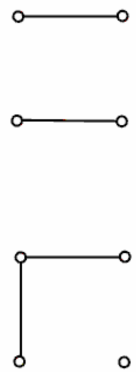
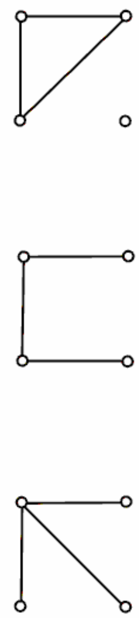
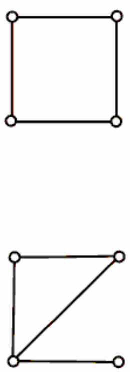
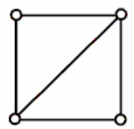
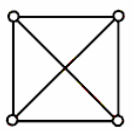
(3) 若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$，则称 G' 为 G 的生成子图.

(4) $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，V_1 为顶点集，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成的边集 E_1 的图为 G 的 V_1 导出子图，记作 $G[V_1]$.

(5) $E_1\subset E$ 且 $E_1\neq\varnothing$，E_1 为边集，以 E_1 中边关联的顶点为顶点集 V_1 的图为 G 的 E_1 导出子图，记作 $G[E_1]$.

实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图.

m	0	1	2	3	4	5	6
							

补图

定义14.9 设 $G=\langle V, E\rangle$ 为 n 阶无向简单图，以 V 为顶点集，以所有使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 的补图，记作 $\overline{G}$.

若 $G\cong\overline{G}$，则称 G 是自补图.

相对于 K_4，求上面图中所有图的补图，并指出哪些是自补图.

问：互为自补图的两个图的边数有何关系？

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图 $G=\langle V, E\rangle$（无向或有向的），G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$ 称作 v_0 到 v_l 的通路，v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点．v_0, v_l 分别称作 Γ 的始点和终点. Γ 中边的条数称作它的长度．若 $v_0=v_l$，称Γ 为回路.

(1) 简单通路与回路：所有边各异，Γ 为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ 为简单回路.

(2) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ 中所有顶点各异且所有边各异，则称Γ为初级通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，则称Γ为初级回路(圈)．长度为奇数(偶数)的圈称作奇圈(偶圈).

(3) 复杂通路与回路：有边重复出现.

几点说明

表示法

① 定义表示法

② 只用边表示法

③ 只用顶点表示法（在简单图中）

④ 混合表示法

环（长为1的圈）的长度为 1，两条平行边构成的圈长度为 2，无向简单图中，圈长 ≥3，有向简单图中圈的长度 ≥2.

不同的圈（以长度 ≥3 的为例）

① 定义意义下

无向图：图中长度为 l（$l \geq 3$）的圈，定义意义下为 $2l$ 个

有向图：图中长度为 l（$l \geq 3$）的圈，定义意义下为 l 个

② 同构意义下：长度相同的圈均为1个

试讨论 $l=3$ 和 $l=4$ 的情况

通路与回路的长度

定理14.5 在n 阶图 G 中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图 G 中，若从顶点v_i 到 v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n 阶图 G 中，若存在 v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在一个n 阶图 G 中，若存在 v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n 的初级回路.

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V, E>$ 为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② ~ 是V上的等价关系 $R=\{ <u, v> \mid u, v \in V 且 u \sim v \}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u, v \in V$，$u \sim v$，则称 G 连通

② 商集 $V/R=\{[V_1]_R, [V_2]_R, \ldots, [V_k]_R\}$，称导出子图$G[V_1]$, $G[V_2], \ldots, G[V_k]$ 为连通分支，其个数 $p(G)=k$ $(k \geq 1)$；

$k=1$，G 连通

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u 与 v 之间的短程线：$u \sim v$，u 与 v 之间长度最短的通路

② u 与 v 之间的距离：$d(u, v)$ —— 短程线的长度

③ $d(u, v)$ 的性质：

$d(u, v) \geq 0$, $u \nsim v$ 时 $d(u, v) = \infty$

$d(u, v) = d(v, u)$

$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

无向图的连通度

1. 删除顶点及删除边

$G-v$ ——从 G 中将 v 及关联的边去掉

$G-V'$——从 G 中删除 V' 中所有的顶点

$G-e$ ——将 e 从 G 中去掉

$G-E'$——删除 E' 中所有边

无向图的连通度

2. 点割集与边割集

定义14.16 $G = <V, E>$，$V' \subset V$

V' 为**点割集** —— $p(G-V') > p(G)$，且对于任意的 $V'' \subset V'$，均有 $p(G-V'') = p(G)$ （**极小性**）

v 为**割点** —— $V' = \{v\}$ 为点割集

定义14.17 $G = <V, E>$，$E' \subseteq E$

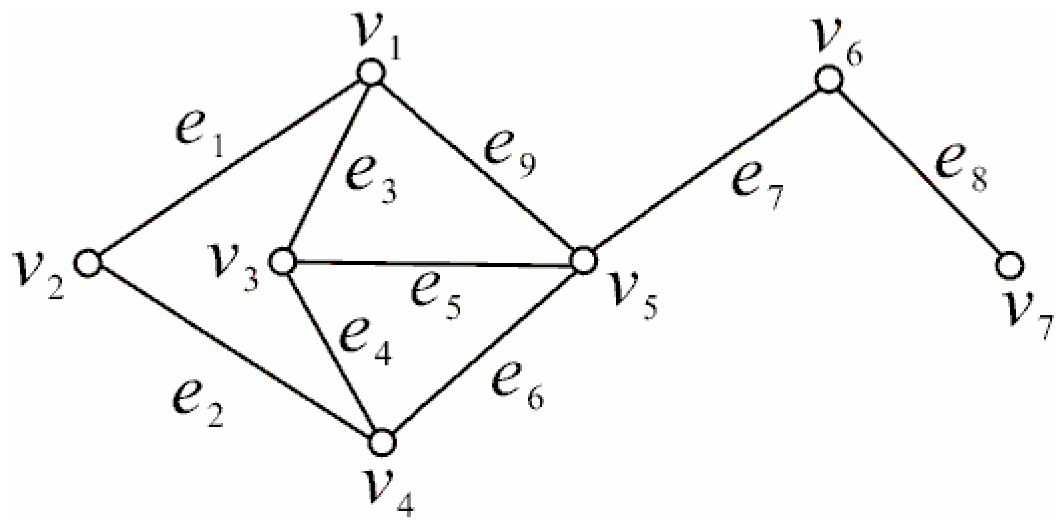
E'是**边割集** —— $p(G-E') > p(G)$，且对于任意的 $E'' \subset E'$，均有 $p(G-E'') = p(G)$ （**极小性**）

e 是**割边**（桥）—— $E'=\{e\}$ 为边割集

点割集与割点

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点．$\{v_2,v_5\}$是点割集吗？

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗？



几点说明：

- K_n 中无点割集，N_n 中既无点割集，也无边割集，其中 N_n 为 n 阶零图.
- 若 G 连通，E' 为边割集，则 $p(G-E')=2$，V' 为点割集，则 $p(G-V') \geq 2$

点连通度与边连通度

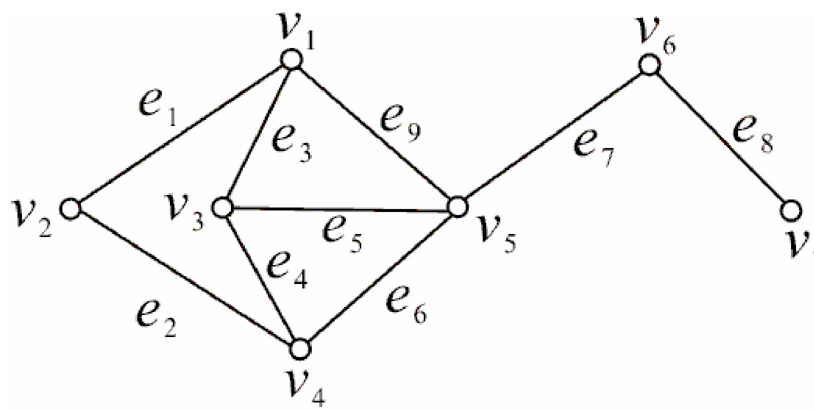
定义14.18 G 为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{\,|V'|\;\big|\; V'$为点割集 $\}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$□

若G非连通，$\kappa(G) = 0$□

若 $\kappa(G)\geq k$，则称 G 为 k-连通图



定义14.19 设 G 为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'|\;\big|\; E'$为边割集$\}$

若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若 $\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图

图中，$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图 和 1边-连通图

几点说明

- $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$，则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图，但不是$(k+s)$-连通图，$s\geq1$
- 若$\lambda(G)=r$，则G是1-边连通图，2-边连通图，…，r-边连通图，但不是$(r+s)$-边连通图，$s\geq1$
- κ, λ, δ之间的关系.

定理7.5　$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

请画出一个 $\kappa<\lambda<\delta$ 的无向简单图

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V, E>$ 为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i 到 v_j 有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i 与v_j 相互可达）

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

v_i 到v_j 的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

(无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性及分类

定义14.22 $D=<V, E>$ 为有向图

D 弱连通(连通)——基图为无向连通图

D 单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D 强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

判别法

定理14.8 D 强连通当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路.

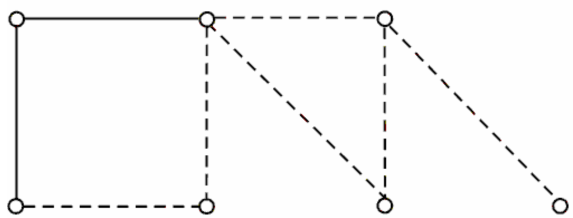
扩大路径法

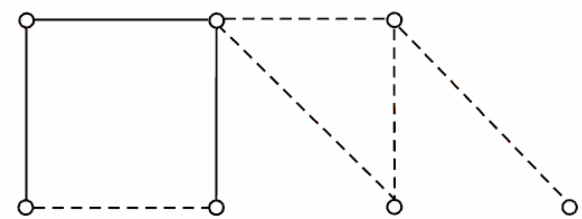
无向图中，设 $G=<V, E>$ 为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ_l 为 G 中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止. 设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），称 Γ_{l+k}为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”.

有向图中类似讨论，只需注意，在每步扩大中保证有向边方向的一致性.

实例

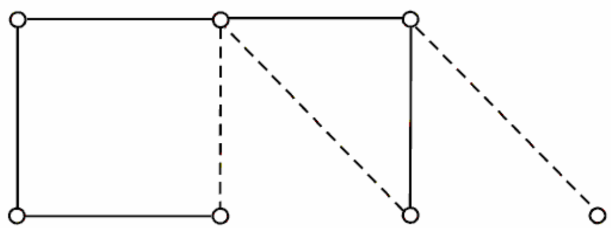
(1)

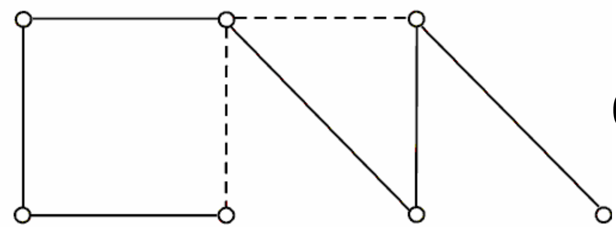




(2)

(3)





(4)

由某条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是图中最长的路径.

上图中，(1)中实线边所示的长为2的初始路径Γ，(2), (3), (4)中实线边所示的都是它扩展成的极大路径.

还能找到另外的极大路径吗？

扩大路径法的应用

例4 设 G 为 n（$n\geq 3$）阶无向简单图，$\delta\geq 2$，证明 G 中存在长度 $\geq\delta+1$ 的圈.

证：设 $\Gamma = v_0v_1\ldots v_l$ 是由初始路径 Γ_0 用扩大路径法的得到的极大路径，则 $l\geq\delta$（为什么？）.

因为 v_0 不与 Γ 外顶点相邻，又 $d(v_0)\geq\delta$，因而在 Γ 上除 v_1外，至少还存在 $\delta-1$个顶点与 v_0 相邻. 设 v_x 是离 v_0 最远的顶点，于是 $v_0v_1\ldots v_xv_0$ 为 G 中长度 $\geq\delta+1$ 的圈.

二部图

定义14.23 设 $G=<V, E>$ 为一个无向图，若能将 V 分成 V_1 和 V_2 ($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为**二部图** (或称**二分图**、**偶图**等)，称 V_1 和 V_2 为**互补顶点子集**，常将二部图G记为$<V_1, V_2, E>$.

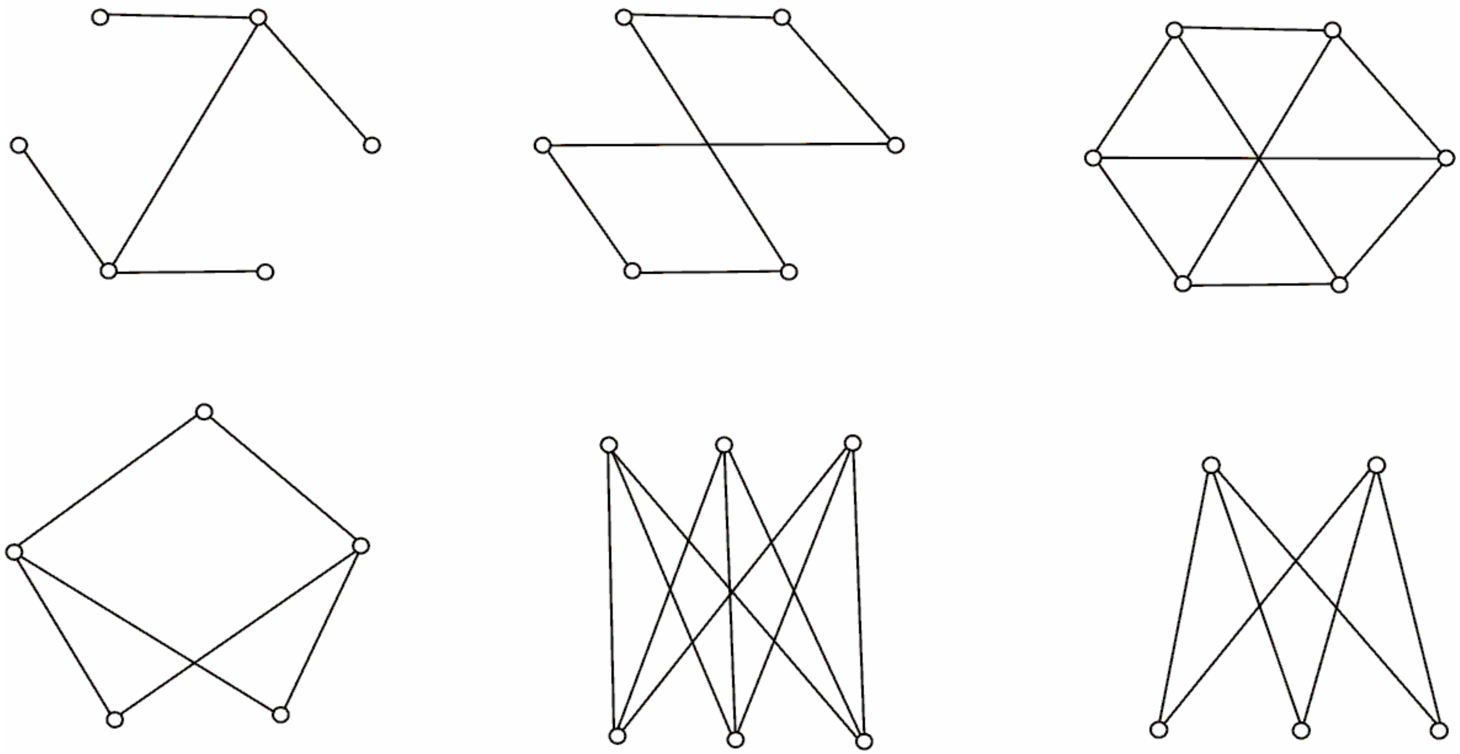
又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为**完全二部图**，记为 $K_{r,s}$，其中 $r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

注意，n 阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理14.10 无向图 $G=<V, E>$ 是二部图当且仅当 G中无奇圈.

由定理14.10可知下图中各图都是二部图，哪些是完全二部图？哪些图是同构的？



14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵（对图无限制）

定义14.24 无向图 $G=<V, E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数，称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵，记为 $M(G)$.

性质：

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

有向图的关联矩阵（无环有向图）

定义14.25 有向图D=<V,E>，令

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记为$M(D)$.

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

性质 (1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^+(v_i), \quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^-(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵（无限制）

定义14.26 设有向图 $D=<V, E>$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为D的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为A.

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ——— D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ——— D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq1$），则

B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数.

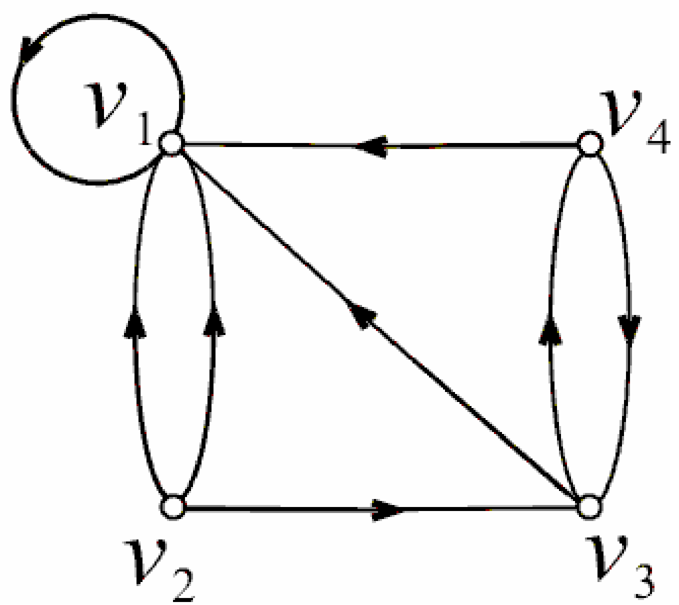
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D 中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D 中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D 中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D 中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵（无限制）

定义14.27 设 $D=\langle V, E\rangle$ 为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{可达} v_j \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

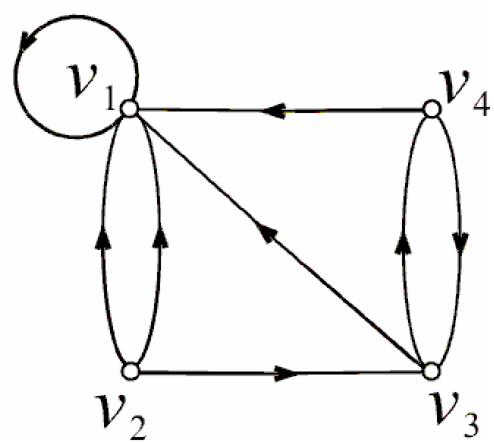
称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，$v_i\leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

下图所示有向图 D 的可达矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



第十四章 习题课

主要内容

- 无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图；握手定理与推论；图的同构
- 通路与回路及其分类
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类
- 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解握手定理及推论的内容并能灵活地应用它们
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图的概念以及它们的性质及相互之间的关系
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

练习1

1．9阶无向图 G 中，每个顶点的度数不是 5 就是 6．证明 G 中至少有 5 个 6 度顶点或至少有 6 个 5 度顶点.

证：关键是利用握手定理的推论.

方法一：穷举法

设G中有x个5度顶点，则必有$(9-x)$个6度顶点，由握手定理推论可知，$(x,9-x)$只有5种可能：(0,9)，(2,7)，(4,5)，(6,3)，(8,1）它们都满足要求.

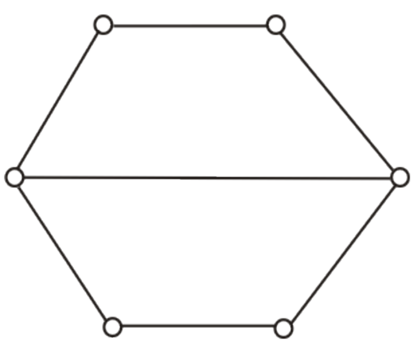
方法二：反证法

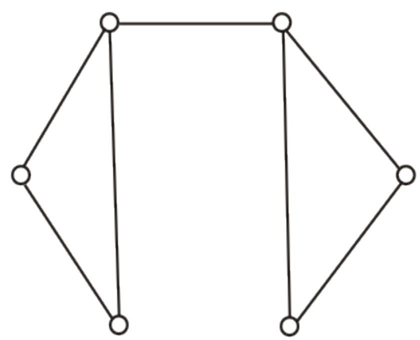
否则，由握手定理推论可知，“G至多有4个5度顶点并且至多有4个6度顶点”，这与G是 9 阶图矛盾.

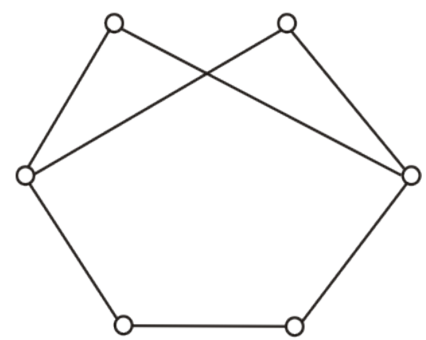
练习2

2．数组2，2，2，2，3，3能简单图化吗？若能，画出尽可能多的非同构的图来.

只要能画出6 阶无向简单图，就说明它可简单图化. 下图的4个图都以此数列为度数列，请证明它们彼此不同构，都是K_6的子图.







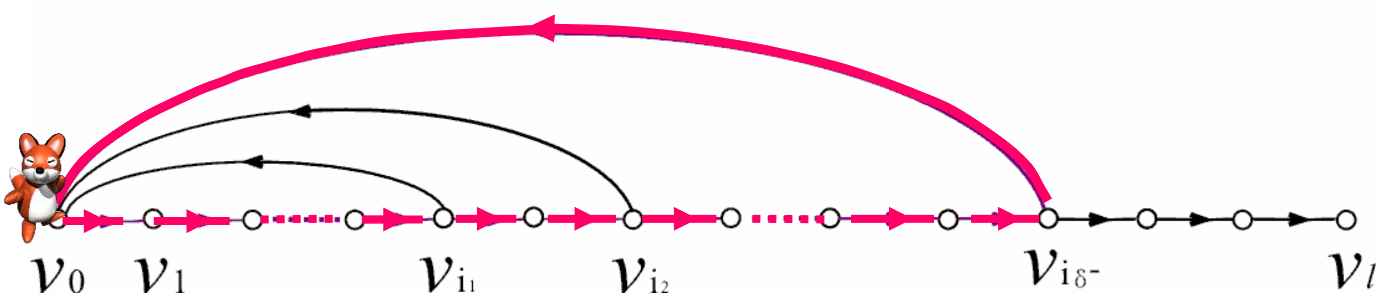
练习3

3．设 $D=<V, E>$ 为有向简单图，已知 $\delta(D)\ge 2$，$\delta^+(D)>0$，$\delta^-(D)>0$，证明D中存在长度$\ge \max\{\delta^+,\delta^-\}+1$的圈.

用扩大路径法证明.

情况一：$\delta^-\ge\delta^+$. 证明D中存在长度$\ge\delta^-+1$的圈.

设 $\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$为极大路径，则$l\ge\delta^-$(为什么?).由于$d^-(v_0)\ge\delta^-$，所以在 Γ上存在 $v_{i_1},v_{i_2},\ldots,v_{i_{\delta^-}}$邻接到$v_0$，于是 $v_0v_1\ldots v_{i_1}\ldots v_{i_2}\ldots v_{i_{\delta^-}}v_0$为$D$中长度$\ge\delta^-+1$的有向圈

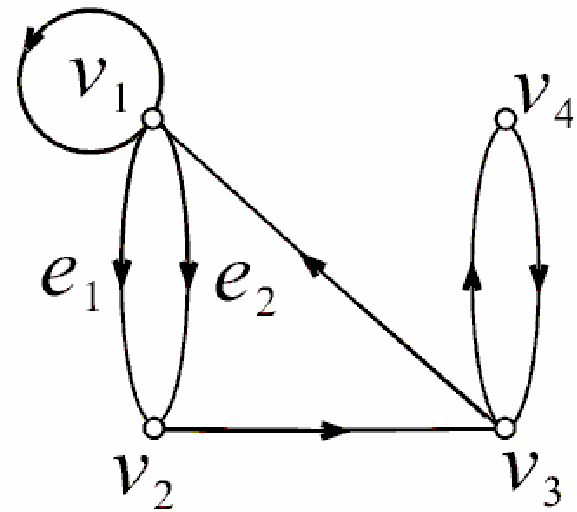


情况二：$\delta^+\ge\delta^-$，只需注意 $d^+(v_l)\ge\delta^+$.

PLAY

练习4

4. 有向图D如图所示，回答下列诸问：



(1) D中有几种非同构的圈？

(2) D中有几种非圈非同构的简单回路？

(3) D是哪类连通图?

(4) D中v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路各多少条？其中几条是非初级的简单通路？

(5) D中v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路各多少条？讨论它们的类型.

(6) D中长度为4的通路（不含回路）有多少条？

(7) D中长度为4的回路有多少条？

(8) D中长度≤4的通路有多少条？其中有几条是回路？

(9) 写出D的可达矩阵.

解答

(1) D中有3种非同构的圈，长度分别为1,2,3，请画出它们的图形.

(2) D中有3种非圈的非同构的简单回路，它们的长度分别为 4,5,6. 请画出它们的图形来.

(3) D是强连通的（为什么？）

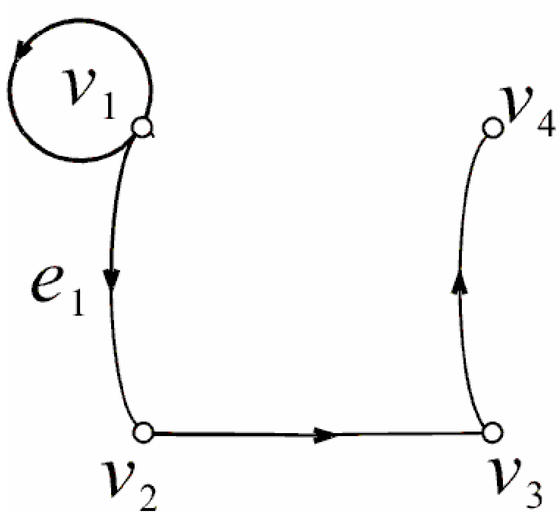
为解(4)—(8)，只需先求D的邻接矩阵的前4次幂.

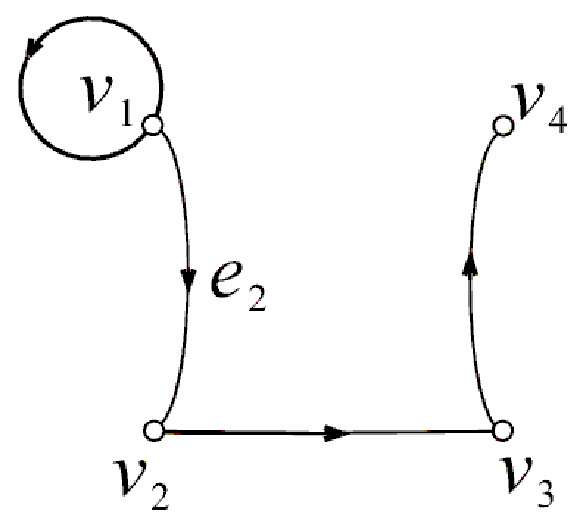
$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

解答（续）

(4) v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路数分别为0,0,2,2. 其中只有长度为4的两条是非初级的简单通路（定义意义下），见下图所示.





解答（续）

(5) v_1 到 v_1 长度为1,2,3,4的回路数分别为1,1,3,5. 其中长度为1的是初级的(环)；长度为2的是复杂的；长度为3的中有1条是复杂的，2条是初级的；长度为4的有1条是复杂的，有4条是非初级的简单回路. 请在图中行遍以上各回路.

(6) 长度为4的通路(不含回路)为33条.

(7) 长度为4的回路为11条.

(8) 长度≤4的通路88条，其中22条为回路.

(9) 4×4的全1矩阵.