第十六章 树

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树
- 根树及其应用

16.1 无向树及其性质

定义16.1

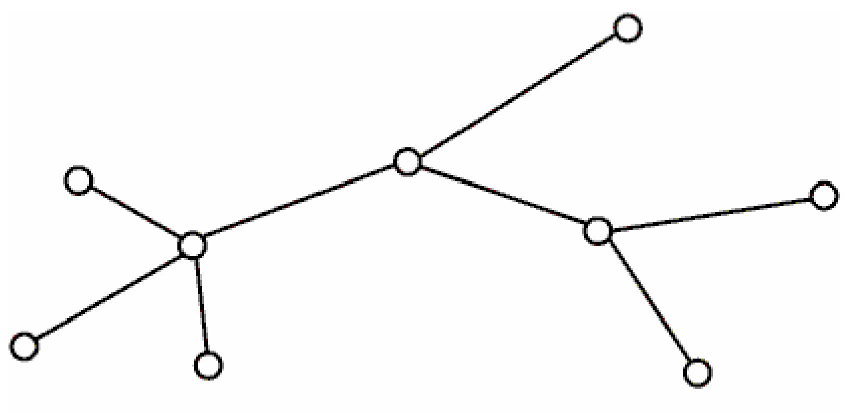
(1) 无向树 —— 连通无回路的无向图，简称树.

(2) 平凡树 —— 平凡图

(3) 森林 —— 至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶 —— 悬挂顶点（1度顶点）

(5) 分支点 —— 度数 ≥2 的顶点



无向树的等价定义

定理16.1 设 $G = <V, E>$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树.

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m = n-1$.

(4) G 是连通的且 $m = n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是，若路径不惟一必有回路(反证法).

由 G 的连通性及定理14.5 的推论可知，$\forall u, v \in V$，u 与 v之间存在一条路径. 若路径不是惟一的，设 Γ_1 和 Γ_2 都是 u 到 v 的路径，则必存在由 Γ_1 和 Γ_2 上的边构成的回路，这与 G 无回路矛盾.

(2)⇒(3). 首先证明 G 中无回路. (反证法) 若 G 中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一，矛盾.

对 n 用归纳法证明 $m=n-1$.

$n=1$正确. 设 $n\le k$ 时命题成立.

证 $n=k+1$ 时也对：取 G 中边 e，$G-e$ 有且仅有两个连通分支 G_1, G_2 (? G 中无回路) . $n_i\le k$，由归纳假设得 $m_i=n_i-1$，$i=1, 2$. 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

证明思路（续）

(3)⇒(4). 只需证明 G 连通. 用反证法. 否则 G 有 s（$s\geq 2$）个连通分支且均无回路，故而都是小树. 由(1)⇒(2)⇒(3)可知，$m_i=n_i-1$，于是

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s \ (s\geq 2)$$

这与 $m=n-1$ 矛盾.

(4)⇒(5). 只需证明 G 中每条边都是桥. 为此只需证明命题“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m\geq n-1$”.

命题的证明：对 n 归纳.

$\forall e\in E$，$|G-e|=n-1-1=n-2$，由命题可知 $G-e$ 不连通，故 e 为桥.

证明思路（续）

(5)⇒(6). 由(5)易知 G 中无圈，故 G 为树. 由(1)⇒(2)知，$\forall u, v \in V$（$u \neq v$），u 到 v 有惟一路径 Γ，加新边 (u, v) 得惟一的一个圈 $\Gamma \cup (u, v)$.

(6)⇒(1). 只需证明 G 连通. 对任意两个不同的顶点 u 和 v，在 u 和 v 之间添加一条新边 e 后产生惟一的一个含 e 的圈 C . 显然，$C - e$ 为 G 中 u 到 v 的通路，故 $u \sim v$. 由 u, v 的任意性可知，G 是连通的.

无向树的性质

定理16.2 设 T 是n阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶.

证：设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理16.1可知，

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

例1 已知无向树 T 中有 1 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

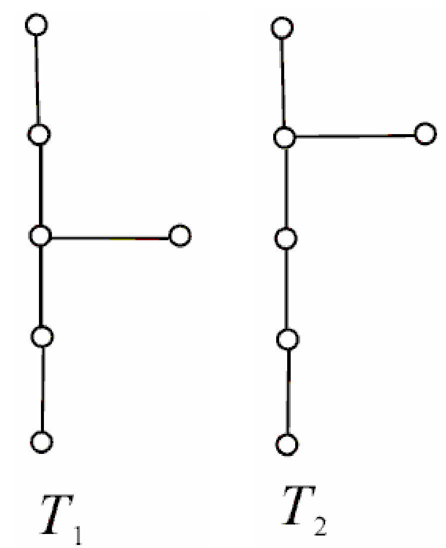
解：解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有 x 片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



例题

例2　已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

解：设 T 的阶数为 n，则边数为 $n-1$，4 度顶点的个数为 $n-7$.

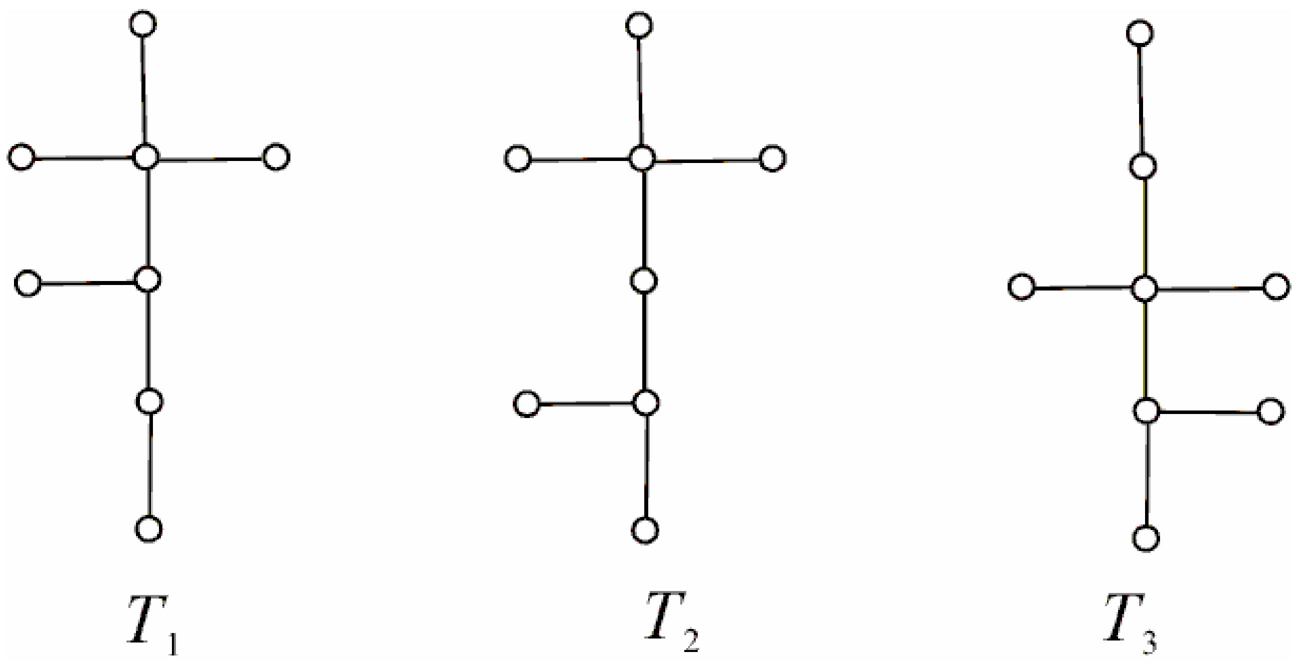
由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出 $n = 8$，4 度顶点为 1 个.

例题

T 的度数列为 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有 3 棵非同构的无向树，如图所示.



16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G 的树 —— T 是 G 的子图并且是树

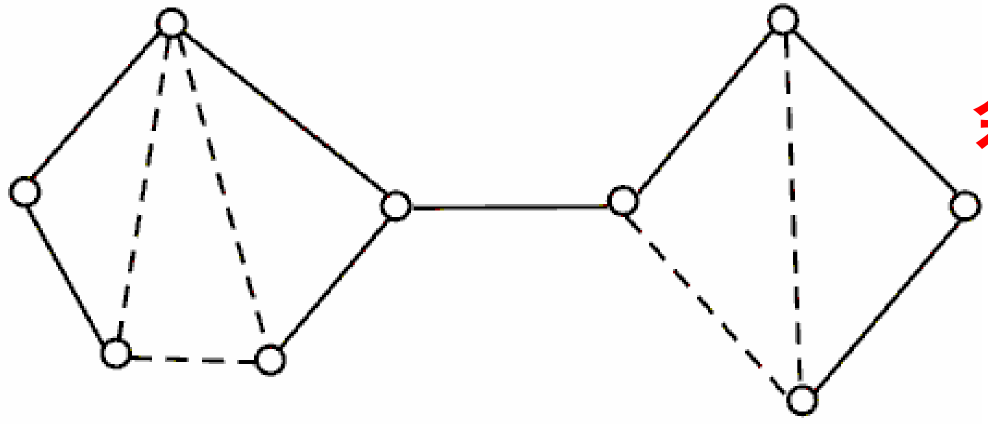
(2) G 的生成树 —— T 是 G 的生成子图并且是树

(3) 生成树 T 的树枝 —— T 中的边

(4) 生成树 T 的弦 —— 不在T 中的边

(5) 生成树 T 的余树 $\overline{T}$ —— 全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



余树不一定是树！

生成树存在条件

定理16.3 无向图 G 具有生成树当且仅当 G 连通.

证 必要性显然.

充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

推论1 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$.

推论2 $\overline{T}$ 的边数为 $m-n+1$.

推论3 $\overline{T}$为 G 的生成树 T 的余树，C 为 G 中任意一个圈，则 C 与 $\overline{T}$一定有公共边.

证 否则，C 中的边全在 T 中，这与 T 为树矛盾.

基本回路系统

定理16.4 设 T 为 G 的生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T\cup e$ 中含一个只有一条弦其余边均为 T 的树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

证：设 $e=(u, v)$，在 T 中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图 G 的一棵生成树，设 $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$ 的弦. 设 C_r 为 T 添加弦 e'_r 产生的只含弦 e'_r、其余边均为树枝的圈. 称 C_r 为 G 的对应树 T 的弦 e'_r 的基本回路或基本圈，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为 G 对应 T 的基本回路系统，称 $m-n+1$为 G 的圈秩，记作 $\xi(G)$.

求基本回路的算法：设弦 $e=(u, v)$，先求 T 中 u 到 v 的路径Γ_{uv}，再并上弦 e，即得对应 e 的基本回路.

基本割集的存在

定理16.5 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，e 为 T 的树枝，则 G 中存在只含树枝 e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

证：由定理16.1可知，e 是 T 的桥，因而 $T-e$ 有两个连通分支 T_1 和 T_2，令 $S_e=\{e \mid e \in E(G)$ 且 e 的两个端点分别属于 $V(T_1)$ 和 $V(T_2)\}$，由构造显然可知 S_e 为 G 的割集，$e \in S_e$ 且 S_e 中除 e 外都是弦，所以 S_e 为所求. 显然不同的树枝对应的割集不同.

基本割集与基本割集系统

定义16.4 设 T 是 n 阶连通图 G 的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$ 为 T 的树枝，S_i 是 G 的只含树枝 e'_i 的割集，则称 S_i 为 G 的对应于生成树 T 由树枝 e'_i 生成的**基本割集**，i=1, 2, …, n–1. 并称 $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ 为 G 对应 T 的**基本割集系统**，称 n–1 为 G 的**割集秩**，记作 $\eta(G)$.

求基本割集的算法：

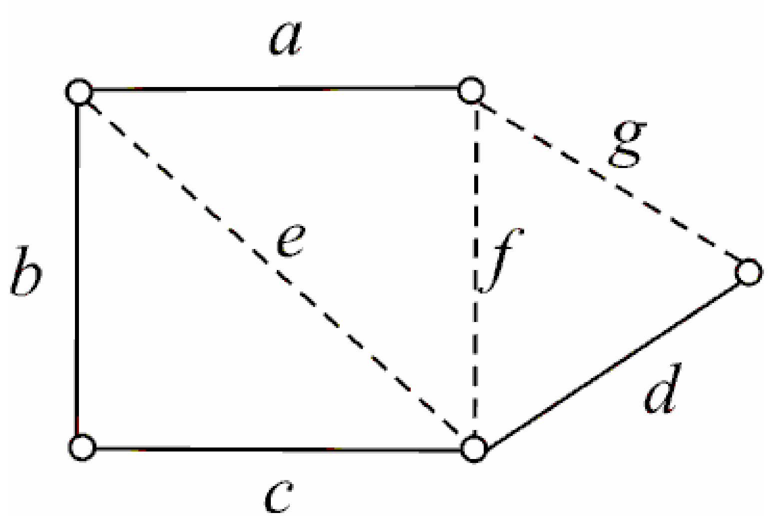
设 e' 为生成树 T 的树枝，T–e' 为两棵小树 T_1 与 T_2，令

$$S_{e'} = \{e \mid e \in E(G) \text{且} e \text{的两个端点分别属于} T_1 \text{与} T_2\}$$

则 $S_{e'}$ 为 e' 对应的基本割集.

实例

例3 图5实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统



解：弦 e, f, g 对应的基本回路分别为

$C_e = e\,b\,c$，$C_f = f\,a\,b\,c$，$C_g = g\,a\,b\,c\,d$，$C_{基} = \{C_e, C_f, C_g\}$.

树枝 a, b, c, d 对应的基本割集分别为

$S_a = \{a, f, g\}$，$S_b = \{b, e, f, g\}$，$S_c = \{c, e, f\ g\}$，$S_d = \{d, g\}$，

$S_{基} = \{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.

最小生成树

定义16.5 T 是 $G=<V, E, W>$ 的生成树

(1) $W(T)$ ——T 各边权之和

(2) **最小生成树** —— G 的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法：

避圈法（**Kruskal**）设 $G=<V, E, W>$，将 G 中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

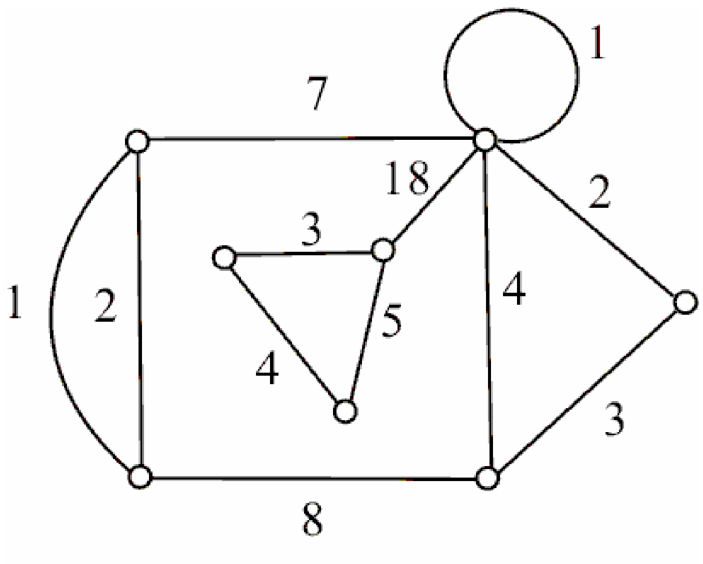
(1) 取 e_1 在 T 中

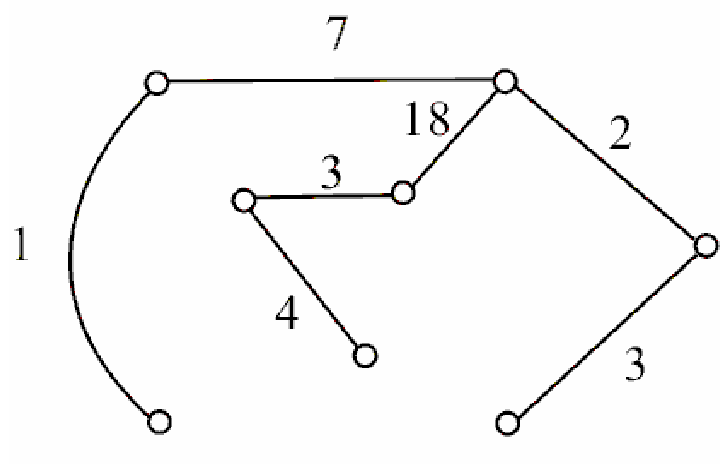
(2) 查 e_2，若 e_2 与 e_1 不构成回路，取 e_2 也在 T 中，否则弃 e_2.

(3) 再查 $e_3,\ldots,$ 直到得到生成树为止.

实例

例4　求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如图所示，$W(T)=38$.

16.3 根树及其应用

定义16.6 T 是有向树（基图为无向树）

(1) T 为**根树**——T 中一个顶点入度为 0，其余的入度均为 1 .

(2) **树根**——入度为 0 的顶点

(3) **树叶**——入度为 1，出度为 0 的顶点

(4) **内点**——入度为 1，出度不为 0 的顶点

(5) **分支点**——树根与内点的总称

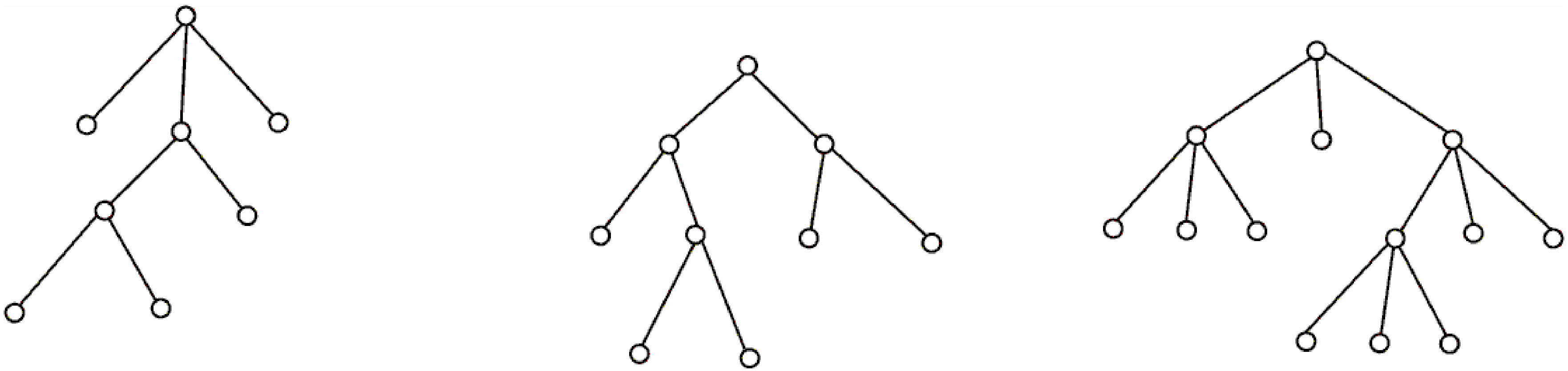
(6) 顶点 v 的**层数** —— 从树根到 v 的通路长度

(7) **树高**——T 中层数最大顶点的层数

(8) **平凡根树**——平凡图

根树实例

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

定义16.7 T 为非平凡根树，$\forall v_i, v_j \in V(T)$

(1) 祖先与后代：若 v_i 可达 v_j，则称 v_i 为 v_j 的祖先，v_j 为 v_i 的后代.

(2) 父亲与儿子：若 v_i 邻接到 v_j (即$<v_i, v_j> \in E(T)$)，则称 v_i 为 v_j 的父亲，而 v_j 为 v_i 的儿子.

(3) 兄弟：若 v_i 和 v_j 的父亲相同，则称 v_i 和 v_j 是兄弟.

定义16.8 设 v 为根树 T 中任意一顶点，称 v 及其后代的导出子图为以 v 为根的**根子树**.

根树的分类

(1) T 为有序根树 —— 同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 叉树 —— 每个分支点至多有 r 个儿子

② r 叉有序树 —— r 叉树是有序的

③ r 叉正则树 —— 每个分支点恰有 r 个儿子

④ r 叉正则有序树

⑤ r 叉完全正则树 —— 树叶层数相同的 r 叉正则树

⑥ r 叉完全正则有序树

⑦ 左(右)子树 —— 2叉正则有序树每个分支点的两个儿子

最优二叉树

定义16.9 设 2 叉树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为 $w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数. 在所有有 t 片树叶，带权 $w_1, w_2, \ldots, w_t$ 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为**最优 2 叉树**.

求最优 2 叉树的算法—— **Huffman算法**

给定实数 $w_1, w_2, \ldots, w_t$，且 $w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

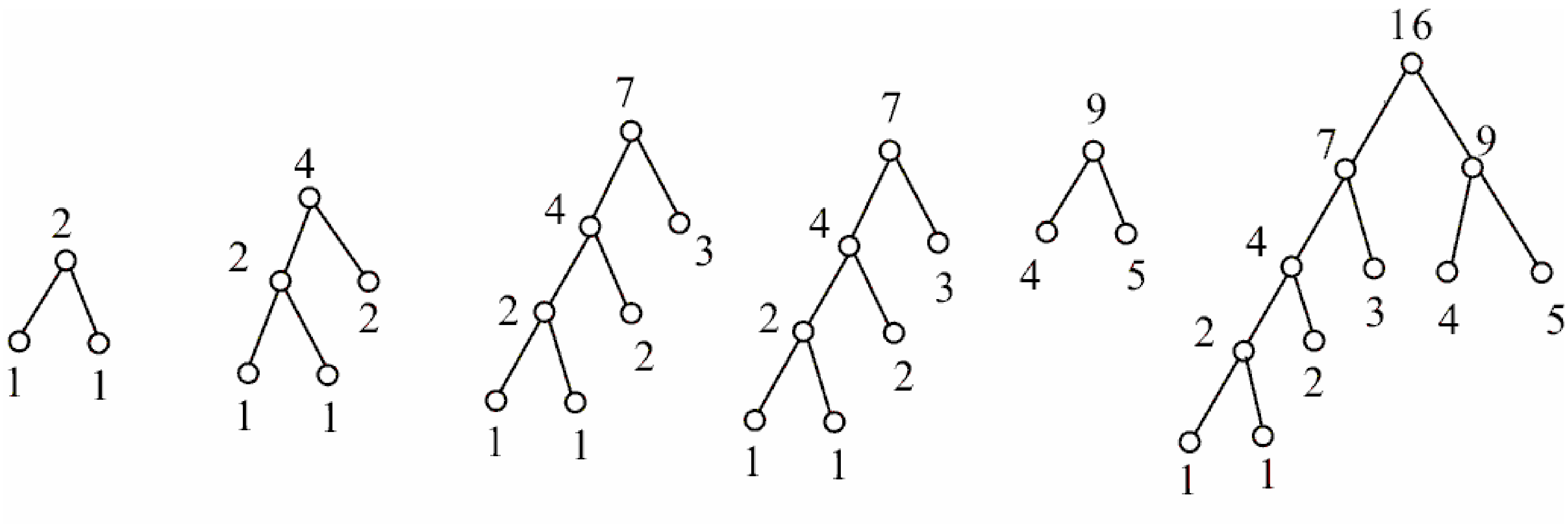
(1) 连接权为 w_1, w_2 的两片树叶，得一个分支点，其权为 w_1+w_2.

(2) 在 $w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$ 中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$ 个分支点，t 片树叶为止.

最优二叉树

例 5 求带权为 1, 1, 2, 3, 4, 5 的最优树.



解题过程由图中给出,

$W(T)=1\times4+1\times4+2\times3+3\times2+4\times2+5\times2=38$

最佳前缀码

定义16.10 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 是长度为 n 的符号串

(1) 前缀 —— 子串 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) 前缀码 —— $A = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ 中任何两个元素互不为前缀

(3) 2元前缀码 —— $\beta_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ 中只出现两个符号，如0与1.

{1, 00, 011, 0101, 01001, 01000} 为前缀码

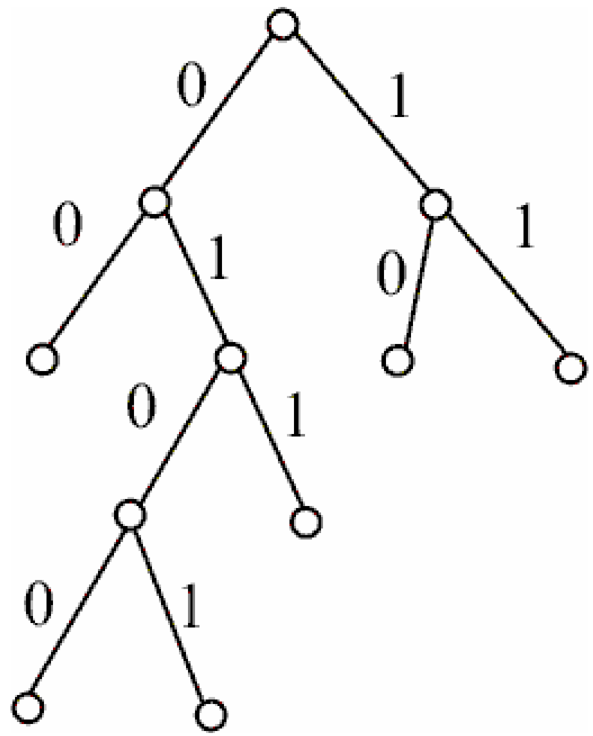
{1, 00, 011, 0101, 0100, 01001, 01000} 不是前缀码

最佳前缀码

如何产生二元前缀码？

定理16.6 一棵2叉树产生一个二元前缀码.

推论 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码（按左子树标0，右子树标1）



图所示二叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }

用Huffman算法产生最佳前缀码

例6 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%

2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%

6：5%　　7：5%

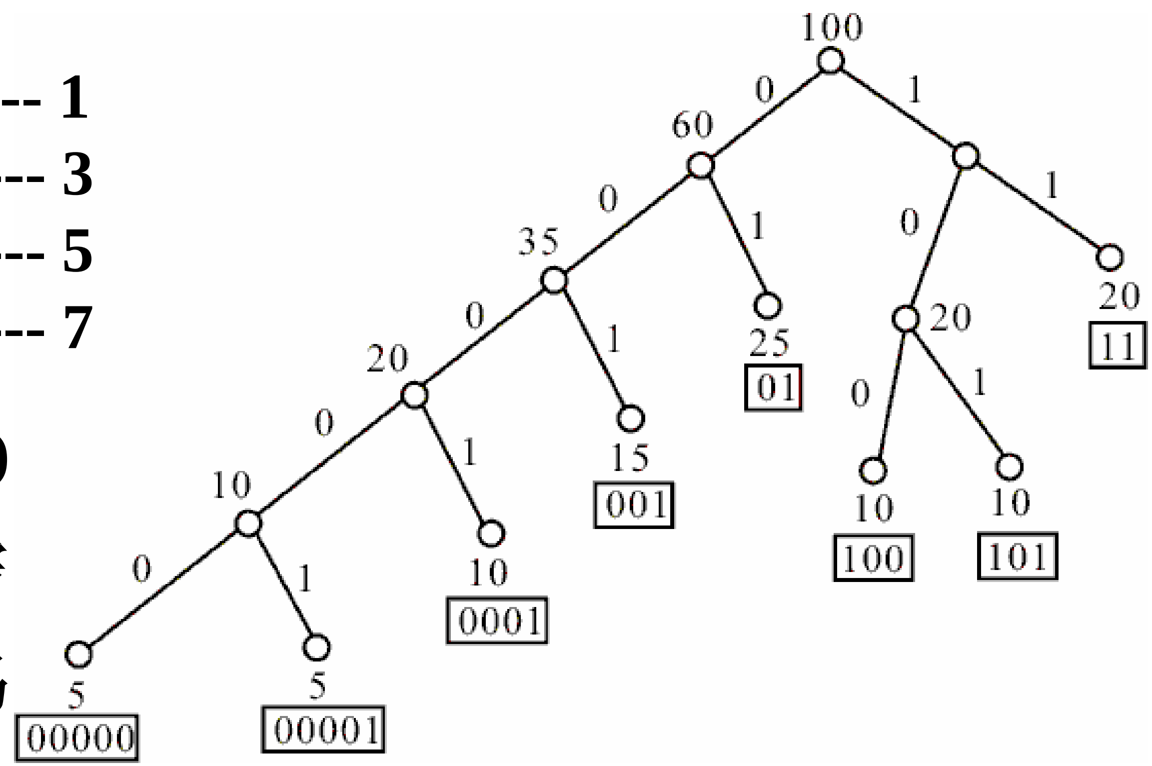
求传输它们的最佳前缀码，并求传输10^n（n≥2）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

求最佳前缀码

解：用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得w_1=5，w_2=5，w_3=10，w_4=10，w_5=10，w_6=15，w_7=20，w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示.

01 ----- 0	11 ----- 1
001 ----- 2	100 ----- 3
101 ----- 4	0001 ----- 5
00000 ----- 6	00001 ----- 7

$W(T)$=285， 传$10^n(n\geq 2)$个用二进制数字需2.85×10^n个，用等长码需3×10^n个数字.



波兰符号法与逆波兰符号法

行遍或周游根树 T —— 对 T 的每个顶点访问且仅访问一次.

对2叉有序正则树的周游方式：

① 中序行遍法 —— 次序为：左子树、根、右子树

② 前序行遍法 —— 次序为：根、左子树、右子树

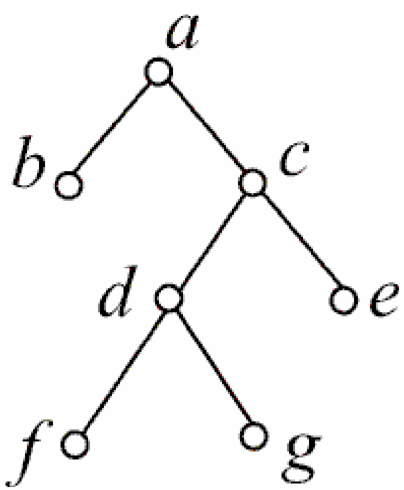
③ 后序行遍法 —— 次序为：左子树、右子树、根

对图所示根树按中序、前序、后序行遍法访问结果分别为：

$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$,

$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$,

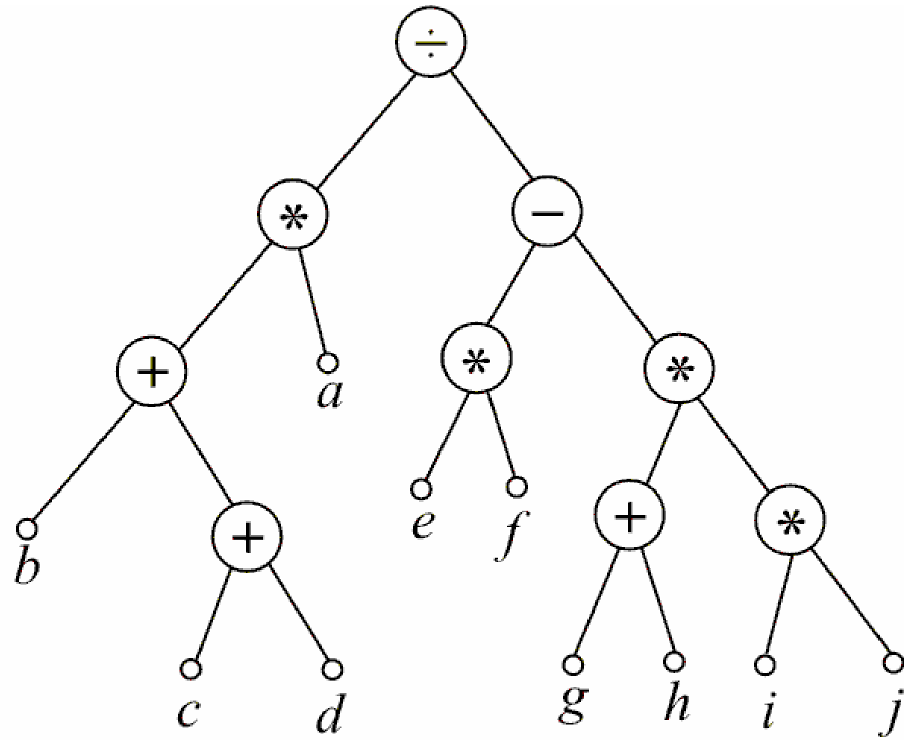
$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$



用2叉有序正则树存放算式

存放规则

- 最高层次运算放在树根
- 后依次将运算符放在根子树的根上
- 数放在树叶上
- 规定：被除数、被减数放在左子树树叶上



算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$ 存放在图所示 2 叉树上.

波兰符号法

波兰符号法

按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确. 称此算法为波兰符号法或前缀符号法. 对上图的访问结果为

$$\div * + b + c\, d\, a - * e\, f * + g\, h * i\, j$$

逆波兰符号法

按后序行遍法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法. 对上图的访问结果为

$$b\, c\, d + + a * e\, f * g\, h + i\, j * * - \div$$

第十六章 习题课

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树、最小生成树、基本回路系统、基本割集系统
- 根树及其分类、最优树、最佳前缀码、波兰符号法、逆波兰符号法

基本要求

- 深刻理解无向树的定义及性质
- 熟练地求解无向树
- 准确地求出给定带权连通图的最小生成树
- 深刻理解基本回路、基本割集的概念，并会计算
- 理解根树及其分类等概念
- 会画n阶（n较小）非同构的无向树及根树（$1\leq n\leq 6$）
- 熟练掌握求最优树及最佳前缀码的方法
- 掌握波兰符号法与逆波兰符号法

练习1

1. 无向树 T 有n_i个i 度顶点，i=2, 3, …,k，其余顶点全是树叶，求T 的树叶数.

解 用树的性质：边数 $m=n-1$（n为阶数），及握手定理.

(1)

$$n=\sum_{i=2}^{k} n_i + t \qquad t□ □ □ □$$

(2)

$$m=\sum_{i=2}^{k} n_i + t - 1$$

(3)

$$2m = 2\sum_{i=2}^{k} n_i + 2t - 2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=2}^{k} i\, n_i + t$$

从而解出

$$t=\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i + 2$$

练习2

2．设n阶非平凡的无向树T中，$\Delta(T) \geq k$，$k \geq 1$. 证明T至少有k片树叶.

证　反证法.

否则，T至多有s片树叶，$s < k$，下面利用握手定理及树的性质$m = n-1$推出矛盾.

由于$\Delta(T) \geq k$，故存在$v0$，$d(v0) \geq k$. 于是，

$$2m = 2n - 2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 2(n - s - 1) + k + s$$

由此解出$s \geq k$，这与$s < k$矛盾.

证本题的方法有多种，请用分支点都是割点来证明.

练习3

3. 设G为n 阶无向简单图，$n\geq 5$，证明G 或$\overline{G}$ 中必含圈.

本题的方法很多，证明中用：G与 $\overline{G}$ 边数之和为K_n的边数 $\frac{n(n-1)}{2}$，以及树的性质：$m = n-1$.

方法一. 反证法. 否则G与$\overline{G}$ 的各连通分支都是树. 设G与 $\overline{G}$ 的连通分支分别为$G_1, G_2, \ldots, G_s$和$G'_1, G'_2, \ldots, G'_{s'}$. 令$n_i, m_i$ 与 n'_j, m'_j 分别为G_i, G'_j的顶点数和边数. 于是

$$\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{i=1}^{s}m_i+\sum_{j=1}^{s'}m'_j=\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)+\sum_{j=1}^{s'}(n'_j-1)=2n-(s+s')\leq 2n-2$$

得 $n^2-5n+4\leq 0$，

解出 $1\leq n\leq 4$, 矛盾于$n\geq 5$.

练习3

方法二. 在 G 与 $\overline{G}$ 中存在一个，比如说 G，它的边数

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

用反证法证明G中必含圈. 比方法一简单.

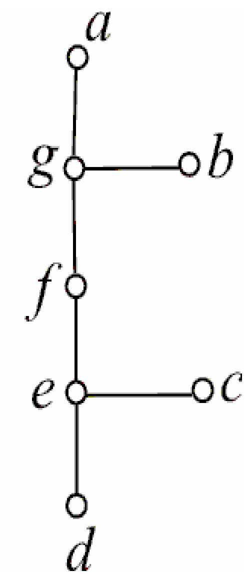
方法三. 不妨设 G 的边数

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

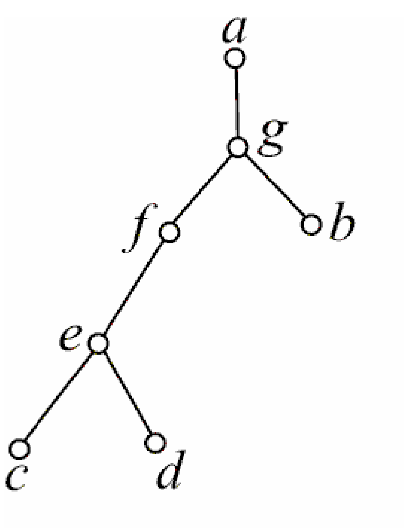
由于$n \geq 5$，得$m \geq n$. 再用反证法证明之，更简单.

练习4

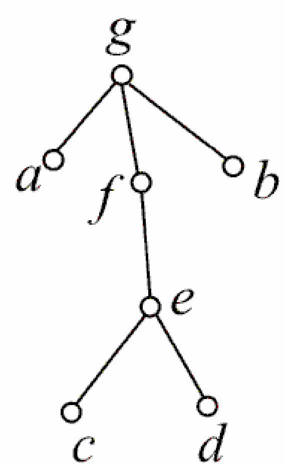
4. 画出基图为图所示无向树的所有非同构的根树.



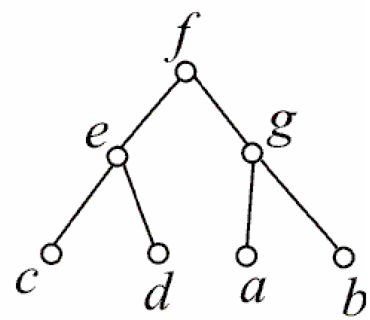
以 ***a*, *b*, *c*** 或 ***d*** 为根的根树同构，选***a***为根，则根树如图(1)；以 ***e*** 与 ***g*** 为根的根树同构，取 ***g***为根，则根树如图(2)； 以 ***f*** 为根，如图(3) 所示.



(1)



(2)



(3)

练习5

5. 设T是正则2叉树，T有t片树叶，证明 T 的阶数 n=2t–1.

方法一. 利用正则2叉树的定义及树的性质直接证明.

(1) $n = t+i$　　(i为分支点数)

(2) $n = m+1$　（m为T的边数）

(3) $m = 2i$　　（正则2叉树定义）

由(2)、(3)得 $i = \dfrac{n-1}{2}$，代入（1）得$n = 2t–1$.

方法二. 利用握手定理及树的性质证.

T的树根为2度顶点，所有内点为3度顶点，当然叶为1度顶点，有

(1) $2m = 2+3(i–1)+t$

(2) $n = m+1 = i+t$

由(1) 和(2) 可解出$n = 2t–1$.

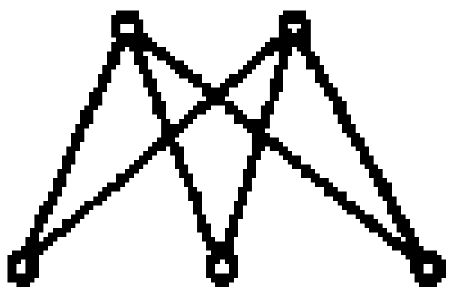
主要内容

- 支配集、点覆盖集与点独立集（自学）
- 边覆盖集与匹配（自学）
- 二部图中的匹配
- 点着色（自学）
- 地图着色与平面图的点着色（自学）
- 边着色（自学）

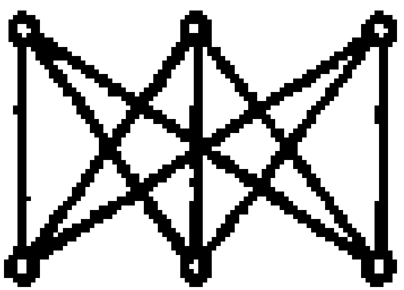
18.3 二部图

定义 若能将无向图 $G=<V, E>$ 的顶点集 V 划分成两个子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中任何一条边的两个端点一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二部图(也称为偶图). V_1，V_2 称为互补顶点子集，此时可将 G 记成 $G=<V_1, V_2, E>$，若 $|V_1|=n$，$|V_2|=m$，则记完全二部图 G 为 $K_{n,m}$.

在下图中，(1) 所示为 $K_{2,3}$，(2) 所示为 $K_{3,3}$．$K_{3,3}$ 是重要的完全二部图，它与 K_5 一起在平面图中起着重要作用.



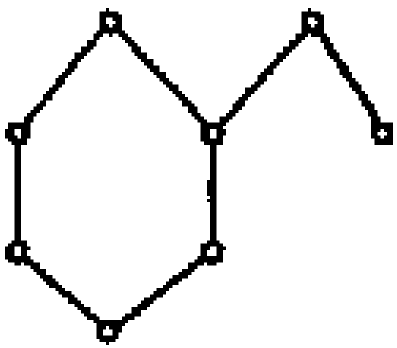
(1)



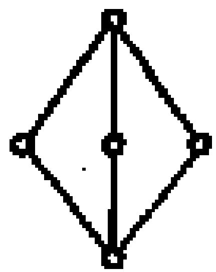
(2)

判断二部图的定理

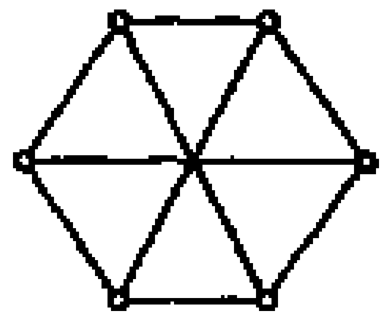
一个无向图 $G=\langle V, E\rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路.



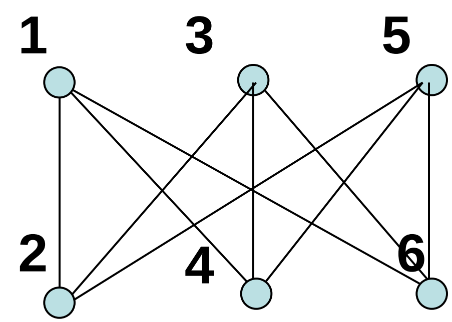
(1)



(2)



(3)



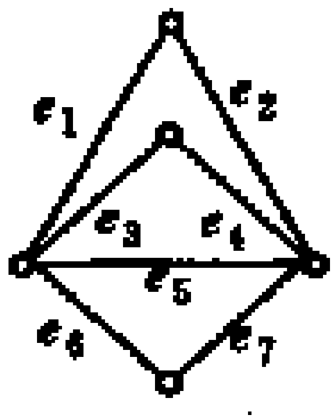
上图中，均无奇数长度的回路，所以，它们都是二部图.

其中图(2)所示为 $K_{2,3}$，图(3)所示为 $K_{3,3}$，它们分别与前一面图中的(1)，(2)所示的图同构.

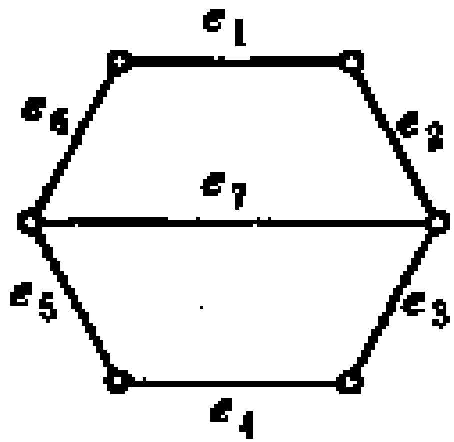
匹 配

- 设 $G=<V, E>$ 为无向图，$E^*\subseteq E$，若 E^* 中任意两条边均不相邻，则称 E^* 为 G 中的匹配(或边独立集).
- 若在 E^* 中再加入任何 1 条边就都不是匹配了，则称 E^* 为极大匹配.
- 边数最多的极大匹配称为最大匹配，最大匹配中的元素(边)的个数称为 G 的匹配数，记为 $\beta_1(G)$，简记为 β_1.

今后常用 M 表示匹配. 设 M 为 G 中一个匹配. $v\in V(G)$，若存在 M 中的边与 v 关联，则称 v 为 M 饱和点，否则称 v 为 M 非饱和点，若 G 中每个顶点都是 M 饱和点，则称 M 为 G 中完美匹配.

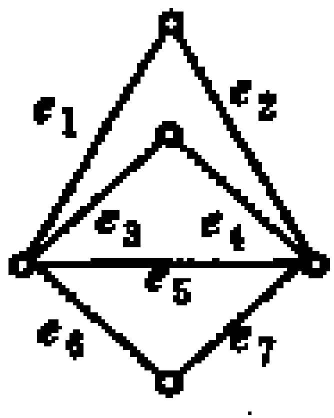


(1)

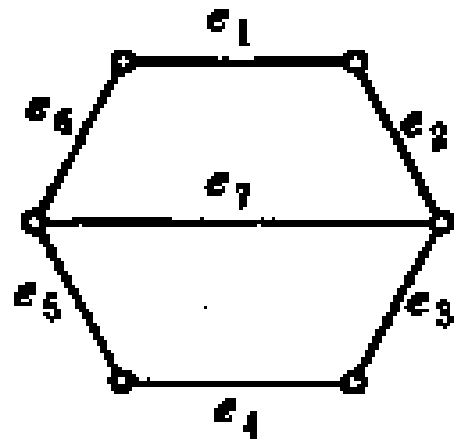


(2)

在图 (1)中，$\{e_1\}$, $\{e_1, e_7\}$, $\{e_5\}$, $\{e_4, e_6\}$ 等都是图中的匹配. 其中$\{e_5\}$, $\{e_1, e_7\}$, $\{e_4, e_6\}$是极大匹配，$\{e_1, e_7\}$, $\{e_2, e_6\}$是最大匹配，匹配数 $\beta_1=2$. 图中不存在完美匹配.



(1)



(2)

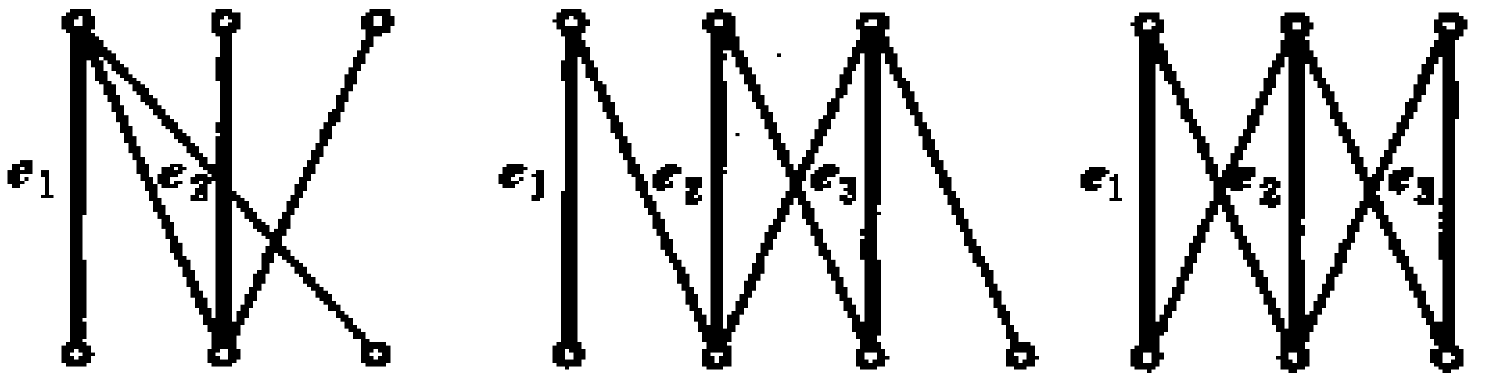
在图(2)中，$\{e_2, e_5\}$, $\{e_3, e_6\}$, $\{e_1, e_7, e_4\}$ 都是极大匹配，其中$\{e_1, e_7, e_4\}$ 是最大匹配，同时也是完美匹配，匹配数为3.

完备匹配

◆设 $G=<V_1,V_2, E>$ 为一个二部图，M 为 G 中一个最大匹配，若 $|M| =\min\{|V_1|, |V_2|\}$，则称 M 为 G 中的一个完备匹配.

◆此时若 $|V_1| \leq|V_2|$，则称 M 为 V_1 到 V_2 的一个完备匹配. 如果 $|V_1|= |V_2|$，这时 M 为 G 中的完美匹配.

图



G_1 G_2 G_3

存在完备匹配吗？存在完美匹配吗？

Hall 定理

定理1（Hall 定理）设二部图 G=<V_1,V_2,E>，$|V_1|\leq|V_2|$，G 中存在从V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k 个顶点 (k=1,2,… $|V_1|$) 至少邻接 V_2 中的 k 个顶点.

定理2 设二部图 G=<V_1, V_2, E>，如果

- (1) V_1 中每个顶点至少关联 t(t>0) 条边;
- (2) V_2 中每个顶点至多关联 t 条边,

则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

- **Hall定理中的条件称为“相异性条件”，定理2中的条件称为“t 条件”，满足 t 条件的二部图，一定满足相异性条件.**

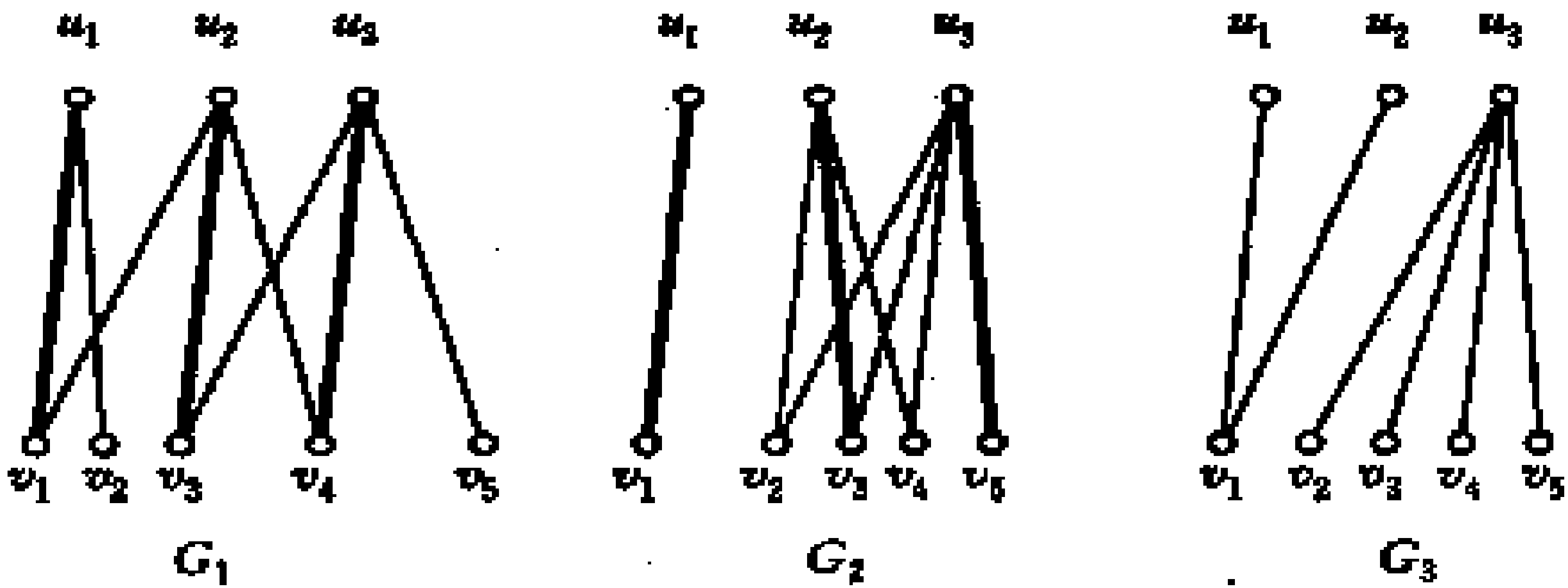
- **事实上，由条件 (1) 可知，V_1 中 k 个顶点至少关联 kt 条边. 由条件 (2) 可知，这 kt 条边至少关联 V_2 中的 k 个顶点，于是若 G 满足 t 条件，则 G 一定满足相异性条件，但反之不真.**

例　某中学有3个课外小组：物理组、化学组、生物组. 今有张、王、李、赵、陈5名同学. 若已知：

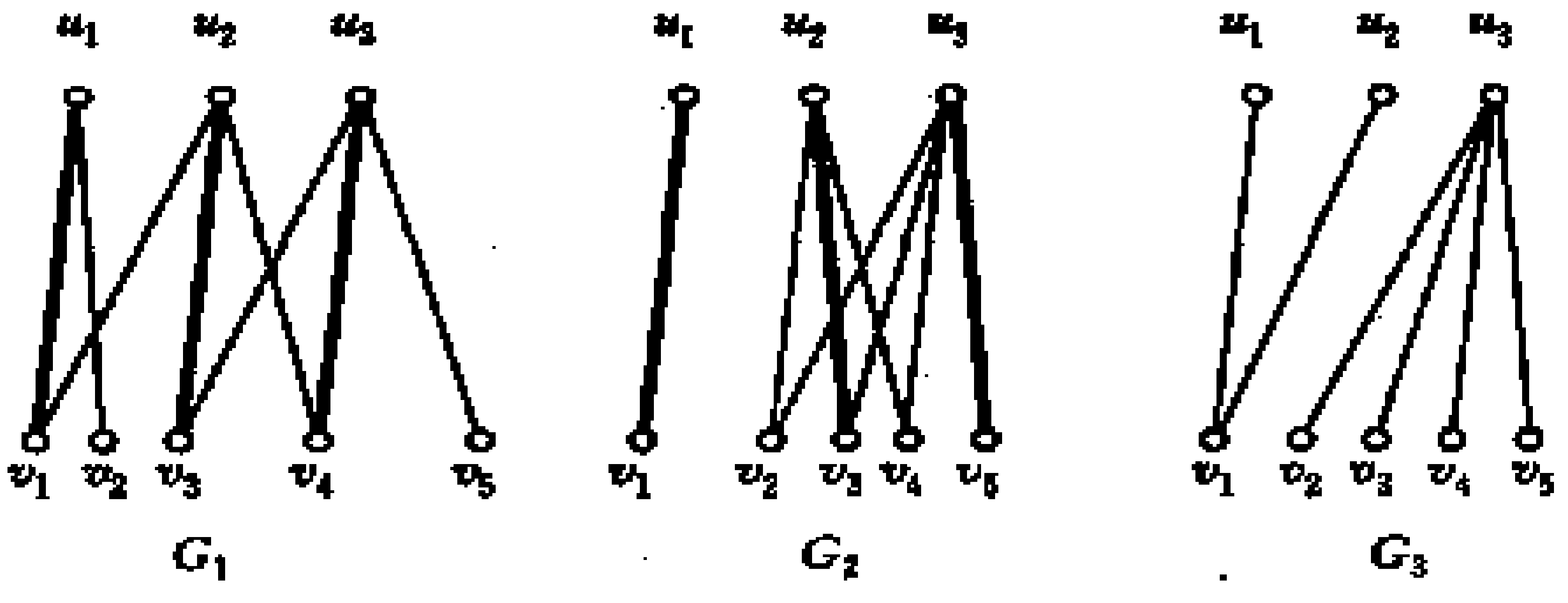
- (1) 张、王为物理组成员，张、李、赵为化学组成员，李、赵、陈为生物组成员；
- (2) 张为物理组成员，王、李、赵为化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员；
- (3) 张为物理组和化学组成员，王、李、赵、陈为生物组成员.

➢ 问在以上3种情况下能否各选出3名不兼职的组长？

解：设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 分别表示张、王、李、赵、陈. u_1, u_2, u_3 分别表示物理组、化学组、生物组. 在3种情况下作二部图分别记为G_1, G_2, G_3，如图所示.

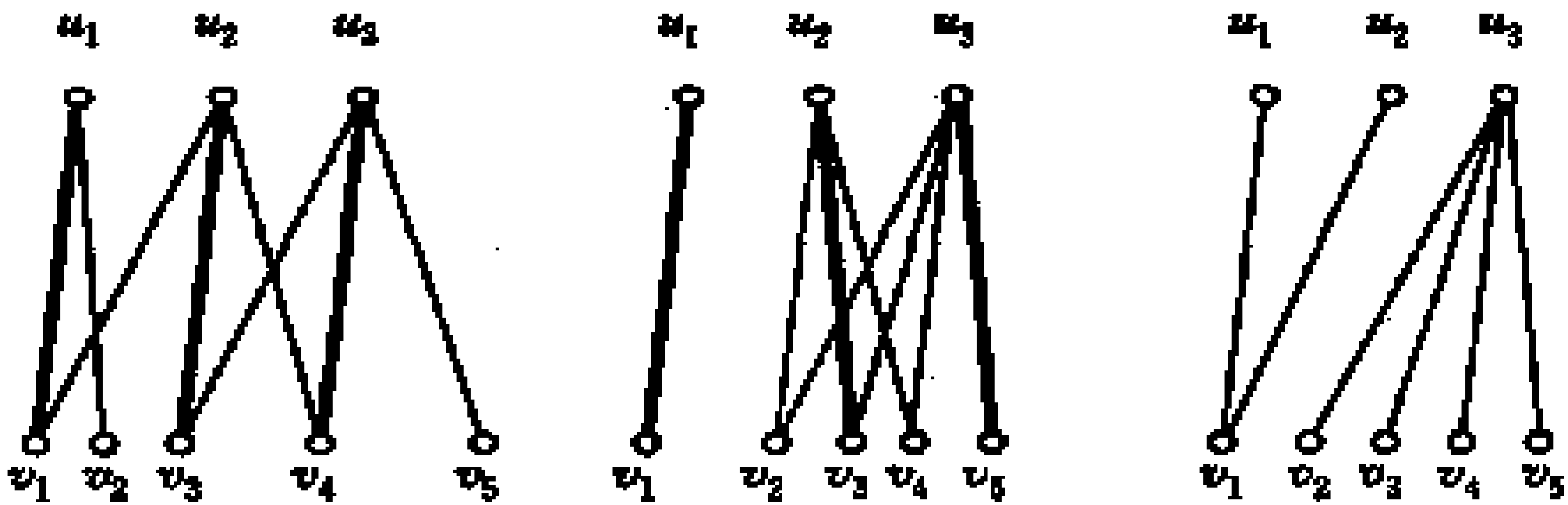


G_1 满足 t=2 的 t 条件，所以，存在从V_1={u_1, u_2, u_3} 到 V_2={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5} 的完备匹配，图中粗边所示的匹配就是其中的一个，即选张为物理组组长、李为化学组组长、赵为生物组组长.



G_2 不满足 t 条件，但满足相异性条件，因而也存在完备匹配，图中粗边所示匹配就是其中的一个完备匹配.

$G3$ 不满足 t 条件，也不满足相异性条件，因而不存在完备匹配，故选不出 3 名不兼职的组长来.



G_1 G_2 G_3

Thank you!
Happy new year!