1. 若事件 A 与 B 互斥，则下列描述中（ D ）正确.

A. A 与 B 对立；　　B. A，B 的相关系数为 1；

C. $P(AB)>0$；　　D. $P(A)+P(B)\le 1$.

2. 某人向同一个目标独立反复射击，每次击中目标的概率为 p ($0<p<1$)，则他第三次射击时恰好击中目标的概率为（ A ）.

A. $3p(1-p)^2$；　B. $3p$；　C. $3(1-p)$；　D. p

$$P = C_3^1 P(1-P)^2 = 3P(1-P)^2$$

3. 设 $f_1(x)$ 为 $[0,1]$ 上均匀分布的密度函数，$f_2(x)$ 为 $[-1,1]$ 上均匀分布的密度函数.

若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x) & x>0 \\ bf_2(x) & x\le 0 \end{cases}$ $(a,b>0)$ 为密度函数，则必有（ B ）.

A. $a+2b=2$；　B. $2a+b=2$；　C. $a+b=1$；　D. $2a+2b=1$.

$$\int_0^1 a\times 1\,dx + \int_{-1}^0 b\times\frac{1}{2}\,dx = a+\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow 2a+b=1$$

4. 设 X，Y 相互独立，且分别服从参数为 1，9 的指数分布，则 $P(X=3Y)$ 为（ A ）.

A. 0；　B. $\frac{1}{3}$；　C. $\frac{2}{3}$；　D. $\frac{1}{9}$.

X，Y 为连续型随机变量，单点概率为 0.

5．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.1\Phi(x)+0.9\Phi(2x)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$（ A ）.

A. 0；　　B. 1；　　C. 3；　　D. 5.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1．袋中有 50 个乒乓球，其中 10 个是黄球，40 个是白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第 2 个人取得黄球的概率是 0.2 .

$$\frac{C_{10}^1}{C_{50}^1}\times\frac{C_9^1}{C_{49}^1}+\frac{C_{40}^1}{C_{50}^1}\times\frac{C_{10}^1}{C_{49}^1}=\frac{490}{2450}=\frac{1}{5}=0.2$$

2．若三次独立的随机试验中，事件 A 至少出现 1 次的概率为 $\frac{26}{27}$，则一次试验中 A 出现的概率为 $\frac{2}{3}$.

设A出现概率为 p　$A\sim(3,p)$

$$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-C_3^0p(1-p)^3=\frac{26}{27}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

3．随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $E(X+E(X))=$ 1 .

服从参数2的指数分布，则 $E(X)=\frac{1}{2}$

$$E(X+E(X))=E\left(X+\frac{1}{2}\right)=E(X)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

4. 若 $P(A)=\frac{1}{5}$，且 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，则 $P(B)=$ $\underline{\frac{4}{5}}$.

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B) \\ P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B) \end{cases} \Rightarrow P(A)+P(B)=1 \Rightarrow P(B)=1-P(A)=\frac{4}{5}$$

5. 若 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P\{3<X<4\}=0.2$，则 $P\{X\geq 2\}=$ $\underline{0.7}$.

三、（本题满分为 8 分）

已知 $P(A)=0.3$， $P(B)=0.4$， $P(A|B)=0.5$，试求 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\,|\,A\cup B)$.

$$P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

$$P(B|A)=\frac{0.4\times 0.5}{0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{B}|A)=\frac{1}{3},\quad P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)$$

$$=0.3\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{10}=0.1$$

解: $P(AB)=P(B)P(A|B)=0.2$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5$$

$$P((\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B))=P((\overline{A}A)\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{B}A)\cup(\overline{B}B))$$

$$=P(\overline{A}B\cup\overline{B}A)=P(\overline{A}B)+P(\overline{B}A)=P(B)P(\overline{A}|B)+P(\overline{B}A)$$

$$=0.2+0.1=0.3$$

$$\therefore P(\overline{A}\cup\overline{B}|A\cup B)=\frac{P((\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

四、（本题满分为 12 分）

6 个乒乓球中有 4 个新球，2 个旧球，每次比赛时取出 2 个用完后放回，求第 2 次比赛时取到的 2 个球都是新球的概率.

解：设第1次、第2次取出k个新球分别为事件 A_k, B_k

$$P(B_2)=P(A_0)P(B_2|A_0)+P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)$$

$$=\frac{C_2^2}{C_6^2}\times\frac{C_4^2}{C_6^2}+\frac{C_4^1\times C_2^1}{C_6^2}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{C_4^2\times C_2^0}{C_6^2}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}$$

$$=\frac{6+8\times3+6}{15\times15}=\frac{24+12}{225}=\frac{36}{225}=\frac{4}{25}=0.16$$

五、（本题满分为 14 分）

已知连续型随机变量 X 有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx+1 & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$ 求系数 k 及分布函数 $F(x)$，并计算 $P\{1.5<X<3.5\}$.

解：① 求系数 k .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^2 (kx+1)\,dx=\frac{k}{2}x^2+x\Big|_0^2=2k+2=1 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

② 求 $F(x)$.

当 $0\le x\le 2$ 时. $F(x)=\int_0^x (kt+1)\,dt=\frac{k}{2}t^2+t\Big|_0^x=\frac{k}{2}x^2+x=-\frac{1}{4}x^2+x$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}x^2+x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

③ $P\{1.5<X<3.5\}=\int_{1.5}^2 (-\frac{1}{2}x+1)\,dx=-\frac{1}{4}x^2+x\Big|_{1.5}^2=(-\frac{1}{4}\times 4+2)-(-\frac{1}{4}\times 1.5^2+1.5)$

$=0.0625$

六、（本题满分为 12 分）

某商店出售某种贵重商品，根据经验，该商品每周销售量服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布，假定各周的销售量是相互独立的，用中心极限定理计算该商店在 36 周内共售出该商品的件数在 30 件到 42 件之间的概率. $(\Phi(1)\approx 0.8413)$

解：在一分布的随机变量，已知其期望 μ，方差 σ，其 n 个样本量的平均值 $\overline{x}$，有 $\dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

本题，每周销售量 $X\sim P(1)$，$E(X)=D(X)=1$

36周，则 $n=36$，共售出件数为 $n\cdot\overline{x}$.

$$30<n\overline{x}<42 \Rightarrow \frac{30}{n}<\overline{x}<\frac{42}{n}$$

即求 $P\left(\frac{30}{36}<\overline{x}<\frac{42}{36}\right)=P\left(\dfrac{\frac{30}{36}-1}{\frac{1}{\sqrt{36}}}<\dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\dfrac{\frac{42}{36}-1}{\frac{1}{\sqrt{36}}}\right)=P\left(-1<\dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<1\right)$

$=2\Phi(1)-1$

$=0.6826$

七、（本题满分为 12 分）

将两封信随机地投入到编号为 1，2，3，4 的信筒中，用 X_1 表示第 1 封信被投入的信筒中的编号，X_2 表示信筒中信的最多封数．求 X_1, X_2 的联合分布，对 X_1 的边际分布以及 $D(X_1)$．

解： X_1 可能取 1, 2, 3, 4 X_2 可能取 1, 2.

X_2 \ X_1	1	2	3	4
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$

$$P\{X_1=k\} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

X_1	1	2	3	4
X_1^2	1	4	9	16
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$D(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1)$$

$$E(X_1^2) = 1\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4} + 9\times\frac{1}{4} + 16\times\frac{1}{4} = \frac{30}{4}$$

$$E^2(X_1) = \left(\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{100}{16}$$

$$D(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1)$$
$$= \frac{30\times4}{16} - \frac{100}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1.25$$

八、（本题满分为 12 分）

（1）如果 $P(A|C)\ge P(B|C)$，$P(A|\bar{C})\ge P(B|\bar{C})$，试证明：$P(A)\ge P(B)$．

（2）如果 $P(A|B)=P(B|A)$，且 $P(A\cup B)=1$，$P(A\cap B)>0$，试证明：$P(A)>1/2$．

解：

(1) $P(A)=P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})$

$P(B)=P(C)P(B|C)+P(\bar{C})P(B|\bar{C})$

$P(A)-P(B)=P(C)\cdot[P(A|C)-P(B|C)]+P(\bar{C})[P(A|\bar{C})-P(B|\bar{C})]\ge 0$

$\therefore P(A)\ge P(B)$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$

$\because P(A|B)=P(B|A)\Rightarrow P(A)=P(B)$

$\therefore P(A\cup B)+P(A\cap B)=2P(A)$

$P(A)=\dfrac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}$

$\because P(A\cup B)=1$，$P(A\cap B)>0$

$\therefore P(A)>\frac{1}{2}$