ИДЗ-3
Вариант №20

Игорь Маркелов 203 группа
Telegram

15 января 2021 г.

Задача №1

Для решения данной чудесной задачи мне нужен гениальный алгоритм от Дмитрия Витальевича Трушина по разложению матрицы A в $rk(A)$ матриц $x_i, rk(x_i) = 1$. В начале рассмотрим подпространство в $\mathbb{F}^5$ натянутое на вектор-стобцы данной матрицы. Выделим среди данных столбцов базис, и выразим оставшиеся (зависимые) столбцы через базисные. (Видимо нужно сказать магические слова про алгоритм с семинаров)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -16 & -5 & 11 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 21 & -3 & -11 \\ 2 & 6 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_3(5,\,\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -16 & -5 & 11 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 21 & -3 & -11 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_2(1,\,5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & 21 & -3 & -11 \\ -1 & 5 & -16 & -5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Э_1(4,\,1,\,-1) \\ Э_1(3,\,1,\,-3)}]{\substack{Э_1(2,\,1,\,-1) \\ Э_1(5,\,1,\,1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 9 & -4 & -4 \\ 0 & -10 & 22 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & -17 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_3(2,\,-\frac{1}{2}) \\ Э_3(4,\,-\frac{1}{2})}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 9 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -11 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & -17 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[Э_1(4,\,2,\,-5)]{\substack{Э_1(3,\,2,\,4) \\ Э_1(5,\,2,\,-8)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_1(4,\,3,\,1) \\ Э_1(5,\,3,\,1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_1(2,\,3,\,2) \\ Э_1(1,\,3,\,1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -11 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -26 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1(1,\,2,\,-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 67 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & -26 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее базисные векторы - это вектор-столбцы с главными переменными, то есть $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$, а зависимые - $A^{(4)}$ и $A^{(5)}$.
$A^{(4)} = 67 \cdot A^{(1)} - 26 \cdot A^{(2)} - 12 \cdot A^{(3)}$, $A^{(5)} = -25 \cdot A^{(1)} + 10 \cdot A^{(2)} + 4 \cdot A^{(3)}$, следовательно в качестве ответа можно взять следующие матрицы:

$x_1 = \left(\, A^{(1)} \, \middle| \, 0 \, \middle| \, 0 \, \middle| \, 67 \cdot A^{(1)} \, \middle| \, -25 \cdot A^{(1)} \, \right),$
$x_2 = \left(\, 0 \, \middle| \, A^{(2)} \, \middle| \, 0 \, \middle| \, -26 \cdot A^{(2)} \, \middle| \, 10 \cdot A^{(2)} \, \right),$
$x_3 = \left(\, 0 \, \middle| \, 0 \, \middle| \, A^{(3)} \, \middle| \, -12 \cdot A^{(3)} \, \middle| \, 4 \cdot A^{(3)} \, \right)$

Они же, но в числах:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -67 & 25 \\ 1 & 0 & 0 & 67 & -25 \\ 3 & 0 & 0 & 201 & -75 \\ 1 & 0 & 0 & 67 & -25 \\ 2 & 0 & 0 & 134 & -50 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -130 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -26 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & -130 & 50 \\ 0 & -7 & 0 & 182 & -70 \\ 0 & 6 & 0 & -156 & 60 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 & 192 & -64 \\ 0 & 0 & 3 & -36 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & -72 & 24 \\ 0 & 0 & 21 & -252 & 84 \\ 0 & 0 & -2 & 24 & -8 \end{pmatrix}$$

P.S. $rk(A) = 3$, т.к. количество независимых столбцов – 3, следовательно нужно разложить в 3 матрицы с $rk(x_i) = 1$, я это и сделал, во всех трёх матрицах: x_1, x_2, x_3, все столбцы выражаются через какой-то (и он не нулевой), следовательно их ранги равны 1, следовательно мой ответ не лажа, а то, что нужно в задаче.
Это первый раз в моей жизни когда я чёта техал, так что выглядит просто отвратно. -6.5 часов жизни тупа. Если будет не 1 за данную задачу я прыгну в окно.

Задача №2

Для начала найдём какой-нибудь базис U. Уложим векторы u_i в матрицу по строчкам и применим алгоритм Гаусса. (Да, это тоже стандартный алгоритм с семинаров)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ -13 & 9 & 8 & -5 \\ 9 & -7 & 6 & -5 \\ 6 & -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_3(2,\,3)]{\substack{\text{Э}_1(3,\,1,\,-3) \\ \text{Э}_1(4,\,1,\,-2)}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ -39 & 27 & 24 & -15 \\ 0 & -1 & 15 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Э}_1(2,\,1,\,13)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & -1 & 15 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Э}_1(3,\,2,\,1)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$ – 3 вектора уложенные по строчкам - это базис в U

Теперь нужно проверить, можно ли выразить v_1 и v_2 через базис U, то есть по сути, проверить, лежат ли они в U. Для этого уложим их по строчкам в полученную на предыдущем шаге матрицу, и с помощью элементарных преобразований 1−го типа попробуем занулить их:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ -6 & -5 & 6 & 2 \\ -17 & 13 & -8 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_1(5,\,1,\,17)]{\substack{\text{Э}_1(4,\,1,\,2) \\ \text{Э}_3(5,\,3)}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -75 & 55 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_1(4,\,2,\,3)]{\substack{\text{Э}_1(5,\,2,\,5) \\ \text{Э}_3(4,\,\frac{1}{3})}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -45 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Э}_3(4,\,\frac{1}{5})}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_1(4,\,3,\,9)]{\text{Э}_3(4,\,11)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Э}_3(4,\,\frac{1}{68})} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак: v_1 не лежит в U, т.к. v_1 не лежит в множестве векторов порождаемых каким-то базисом U, следовательно не лежит в U, v_2 лежит в каком-то базисе U, следовательно лежит в U. То есть только один из данных двух векторов лежит в U. .
Теперь дополним его (v_2) до базиса U. Сделаем это следующим образом: у нас сейчас есть базис U состоящий из векторов:
$x_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 & 11 \end{pmatrix}$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

При этом, $v_2 \cdot 3 = x_1 \cdot 17 + x_2 \cdot 5$, следовательно т.к. x_1 и x_2 – линейно независимы,v_2 и x_2 так же линейно независимы, следовательно v_2, x_2, x_3 - базис U.

Задача №3

Для решения данной чудесной задачи мне нужен очередной стандартный алгоритм: найдём какую-нибудь ФСР для ОСЛУ $A = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad Ax = 0$, уложим полученые векторы в матрицу по строкам, и составим ОСЛУ для этой матрицы. Полученная ОСЛУ и будет ответом на задачу. (Видимо нужно сказать магические слова про алгоритм с семинаров)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & -7 & -4 \\ -1 & 5 & -2 & 16 \\ -1 & -1 & 4 & -8 \\ 2 & 3 & -9 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Э}_2(1,\,3)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & -8 \\ -1 & 5 & -2 & 16 \\ 4 & -5 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & -9 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_1(3,\,1,\,4)]{\substack{\text{Э}_1(2,\,1,\,-1) \\ \text{Э}_1(4,\,1,\,2)}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & -6 & 24 \\ 0 & -9 & 9 & -36 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_3(3,\,-\frac{1}{3})]{\substack{\text{Э}_3(2,\,\frac{1}{3}) \\ \text{Э}_3(1,\,-1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Э}_1(4,\,2,\,-1)]{\substack{\text{Э}_1(3,\,2,\,-1) \\ \text{Э}_1(1,\,2,\,-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, можно выбрать следующую ФСР для этой системы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда возможный ответ выглядит так: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача №4

Вот это я понимаю, в первых трёх задачах нужно сделать 3 Гаусса и в четвёртой ещё 3, мда...
План решения: выделить базисы в L_1 и L_2, а потом сделать чёрную магию. Выделять будем какие-то базисы, то есть уложим векторы в матрицу по строкам и сделаем прямого Гаусса, те векторы, которые не занулятся и есть искомый базис. (Да, я ещё раз скажу магические слова про алгоритм с семинаров и что ты мне сделаешь я в другом городе)

Выделим базис в L_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ -6 & -19 & 7 & -1 \\ 3 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Э_1(3,\,1,\,6)]{\substack{Э_1(2,\,1,\,-4) \\ Э_1(4,\,1,\,-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 87 & -15 & -3 \\ 0 & -145 & 25 & 5 \\ 0 & 58 & -10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Э_3(3,\,\frac{1}{5})]{\substack{Э_3(2,\,\frac{1}{3}) \\ Э_3(5,\,\frac{1}{2})}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & -29 & 5 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_1(3,\,2,\,1) \\ Э_1(4,\,2,\,-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно $dim(L_1) = rk(L_1) = 2$, базис состоит из двух векторов:
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 29 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Выделим базис в L_2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 1 \\ -1 & 22 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_2(1,\,4)} \begin{pmatrix} -1 & 22 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Э_1(3,\,1,\,2)]{\substack{Э_1(2,\,1,\,3) \\ Э_1(4,\,1,\,4)}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 22 & -3 & -2 \\ 0 & 62 & -10 & -6 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \\ 0 & 93 & -15 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_3(2,\,\frac{1}{2}) \\ Э_3(4,\,\frac{1}{3})}} \begin{pmatrix} -1 & 22 & -3 & -2 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{Э_1(3,\,2,\,-1) \\ Э_1(4,\,2,\,-1)}} \begin{pmatrix} -1 & 22 & -3 & -2 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно $dim(L_2) = rk(L_2) = 2$, базис состоит из двух векторов:
$u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 22 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 31 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Теперь чёрная магия будет выглядеть следующим образом: чтобы выделить базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$ уложим в одну общую матрицу базисы L_1 и L_2 по строкам, а затем, с помощью элементарных преобразований первого и третьего типа доприведём часть матрицы заданную базисом L_2 к ступенчатому виду. Все векторы, которые получется таким образом занулить (нужно учесть, что занулённый вектор - это не тот, который записан в строчке изначально, а линейная комбинация u_i-х, которую занулили линейной комбинацией v_i-х, и нужно брать в качестве ответа именно эту линейную комбинацию) образуют базис $L_1 \cap L_2$, т.к. лежат и в L_1 и в L_2, а оставшиеся дополняют базис L_1 до базиса $L_1 + L_2$ (это даже не магия, а стандартный алгоритм с семинаров!)
P.S. Если это не достаточно подробное объяснение с твоей точки зрения, я готов забиваться.

$$\begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ -1 & 22 & -3 & -2 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Э_3(3,\,29)]{Э_1(3,\,1,\,1)} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 29 & 0 & -29 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1(3,\,2,\,-1)} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -28 \\ 0 & 31 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_3(4,\,29)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -28 \\ 0 & 899 & -145 & -87 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1(4,\,2,\,-31)} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -28 \\ 0 & 0 & 10 & -56 \end{pmatrix} \xrightarrow{Э_1(4,\,3,\,-2)} \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \\ 0 & 29 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть согласно чёрной магии, $dim(L_1 + L_2) = rk(L_1 + L_2) = 3$, и можно взять в нём вот такой базис:
$sum_1 = \begin{pmatrix} 1 & -21 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$sum_2 = \begin{pmatrix} 0 & 29 & -5 & -1 \end{pmatrix}$
$sum_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -28 \end{pmatrix}$
А так же, согласно чёрной магии, $dim(L_1 \cap L_2) = 1$ (это не совсем магия, т.к. следует из тождества $dim(A)+dim(B) = dim(A+B)+dim(A \cup B)$), и можно взять в этом пространстве базис следующим образом: рассмотрим линейную комбинацию векторов которой мы занулили нижнюю строчку
$u_1 \cdot 29 - v_2 \cdot 31 - 2 \cdot ((u_1 + v_1) \cdot 29 - v_2) = 0$
$u_1 \cdot 29 - v_2 \cdot 31 - 2 \cdot (u_1 \cdot 29 + v_1 \cdot 29 - v_2) = 0$
$u_1 \cdot 29 - v_2 \cdot 31 - 2 \cdot 29 \cdot u_1 - 2 \cdot 29 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = 0$
$u_1 \cdot 29 - v_2 \cdot 29 - 58 \cdot u_1 - 58 \cdot v_1 = 0$
$-58 \cdot v_1 - 29 \cdot v_2 = 58 \cdot u_1 - 29 \cdot u_1$
$-2 \cdot v_1 - v_2 = 2 \cdot u_1 - u_1$
Заметим, что мы нашли то, что требуется: $dim(L_1 \cap L_2) = 1$, и мы нашли вектор, такой, что он выражается и через базис L_1 и через базис L_2, следовательно является базисным для пространства $L_1 \cap L_2$.
Вот он в числах:
$inter_1 = \begin{pmatrix} -2 & 13 & -1 & -1 \end{pmatrix}$