Division euclidienne : diviseurs et PGCD

On a introduit en cours la notion de division euclidienne. Pour rappel, réaliser la division euclidienne de x par d revient à trouver **l'unique** couple (q,r) tel que : $x = q * d + r$. où $0 \leq r < d$ Dans les faits, cela revient à la division vue en primaire.

x est appelé « dividende », d est le « diviseur », q est le « quotient » et r le « reste ».

Exemple : La division euclidienne de 7 par 3 est : $7 = 3 * 2 + 1$

En effet $3*2 + 1 = 7$ et $0 \leq 1 < 3$. Par unicité de la division euclidienne, 2 est le quotient de la division euclidienne et 1 le reste.

Exercice : Réaliser les divisions euclidiennes suivantes :

Division euclidienne de 8 par 3 ? 8 = 3 * __ + __ ; q = __ ; r = __

Division euclidienne de 18 par 4 ? 18 = 4 * __ + __ ; q = __ ; r = __

Division euclidienne de 102 par 5 ? 102 = 5 * __ + __ ; q = __ ; r = __

Division euclidienne de 972 par 7 ? q = __ ; r = __

Division euclidienne de 8 par 2 ? q = __ ; r = __

A partir de là on peut aisément introduire la notion de diviseur. d divise x si le reste de la division euclidienne de x par d vaut 0. On dit aussi que x est divisible par d ou encore que x est un multiple de d.

La dernière division euclidienne de l'exercice ci-dessus est un bon exemple : $8 = 2 * 4$, $r = 0$ donc 2 divise 8. Mais on peut noter que ce n'est pas le seul diviseur de 8. En effet 8 est aussi un multiple de 1, 4 et 8. {1, 2, 4, 8} est l'ensemble des diviseurs de 8.

Exercice :

Établissez la liste des diviseurs de 6 : {__, __, __, __}

Établissez la liste des diviseurs de 15 : {   }

Dans la suite de l'exercice, x désigne un entier naturel non nul.

Montrez que x est un diviseur de x :

Montrez que 1 est un diviseur de x :

Montrez que 0 est divisible par x :

Un nombre est premier s'il est divisible par exactement deux nombres, 1 et lui-même.

Exercice : Dressez la liste des nombres premiers plus petits que 15.

Comme on l'a vu plus haut, il est aisé de déterminer l'ensemble des diviseurs d'un nombre. Si on dresse la liste des diviseurs de deux nombres, on peut regarder quels diviseurs ils ont en commun. Par exemple 9 et 6 sont tous les deux des multiples de 3 donc 3 est un diviseur commun de 6 et de 9.

On définit le PGCD (plus grand commun diviseur) de deux nombres comme étant le plus grand diviseur commun de deux nombres.

Exemple : Les diviseurs de 8 sont (1, 2, 4,8), ceux de 12 sont (1, 2, 3, 4, 6, 12}
Les diviseurs communs de 8 et de 12 sont donc {1,2,4} et le plus grand de ces diviseurs est 4. Donc 4 est le PGCD de 8 et de 12

Exercice

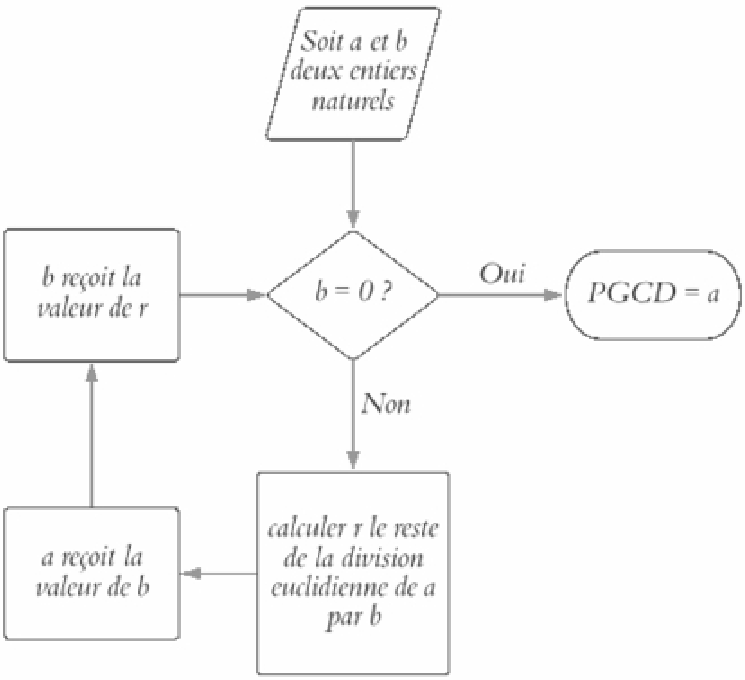
Pourquoi y a t il toujours au moins un diviseur commun entre deux nombres ?

Déterminer le PGCD de 6 et de 15 :

Déterminer le PGCD de 36 et de 8 :

Devoir dresser la liste de tous les diviseurs peut être embêtant lorsque l'on nous demande de calculer le PGCD de très grand nombre, cette méthode devient très longue. Heureusement des mathématiciens ont réfléchi à cette question pour nous et Euclide a imaginé une méthode permettant de calculer rapidement le PGCD. Cette méthode, c'est l'algorithme d'Euclide.

Supposons que l'on veuille calculer le PGCD de a et de b avec a ≤ b.
Si b est égal à 0 alors le PGCD de a et b est a.
Sinon on fait la division euclidienne de a par b et on note r le reste de cette division.
Euclide nous dit que le PGCD de a et de b est égal au PGCD de b et de r.
On peut alors recommencer la méthode jusqu'à trouver un reste nul et donc le PGCD.



Exemple : On veut calculer le PGCD de 1578 et 534.
534 est différent de 0 donc on fait la division euclidienne de 1578 par 534 :
1578 = 534 * 2 + 510.
Donc le PGCD de 1578 et de 534 est égal au PGCD de 534 et 510
On veut donc calculer le PGCD de 534 et 510.
510 est différent de 0 donc on fait la division euclidienne de 534 par 510 :
534 = 510 * 1 + 24
Donc le PGCD de 534 et de 510 est égal au PGCD de 510 et 24.
On veut donc calculer le PGCD de 510 et de 24.
24 est différent de 0 donc on fait la division euclidienne de 510 par 24 :
510 = 24 * 21 + 6
Donc le PGCD de 510 et de 24 est égal au PGCD de 24 et de 6
On veut donc calculer le PGCD de 24 et de 6 :
6 est différent de 0 donc on fait la division euclidienne de 24 par 6
24 = 6 * 4 + 0
Donc le PGCD de 24 et de 6 est égal au PGCD de 6 et de 0.
On veut donc calculer le PGCD de 6 et de 0 :
0 est nul donc le PGCD de 6 et de 0 est 6.
Or PGCD(6,0)=PGCD(24,6)=PGCD(510,24)=PGCD(534,510)=PGCD(1578,534)
Donc le PGCD de 1578 et 534 est 6 !
On y est arrivé en seulement 4 divisions euclidiennes !

Exercice : Grâce à l'algorithme d'Euclide, calculez les PGCD suivants :

PGCD de 210 et 112 : ____

PGCD de 369 et 58 : ____

PGCD de 315 et 307 : ____

PGCD de 1015 et 717 : ____

PGCD de 1015 et 716 : ____

Bonus : Prouvez la terminaison de l'algorithme d'Euclide (Pourquoi arrive-t-on toujours à un résultat si on fait suffisamment de divisions euclidiennes?)

On dit que deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exercice : Les nombres suivants sont ils premiers entre eux ?

6 et 35

78 et 9

21 et 73

30 et 90

41 et 88

54 et 42