Mandelbrot aux pays des fractals

Yann-Arby Bebba

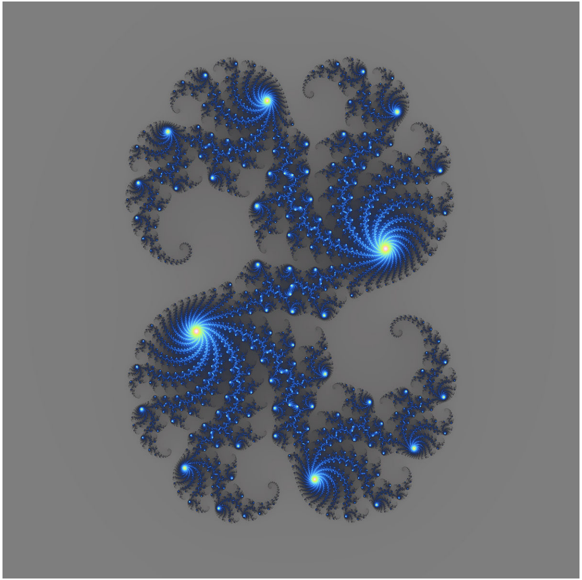
Université Picardie Jules Verne

yann-arby.bebba@etud.u-picardie.fr

16 juin 2022

Bênoit Mandelbrot en 2007

Table des matières

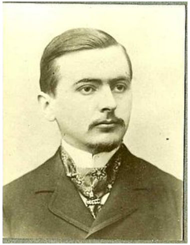


Ensemble de Julia pour $c = 0,285 + 0,013i$.

Les pères fondateurs

- Euclide d'Alexandrie (vers 300 avant J.-C.) :
  il définit la géométrie qui va prévaloir durant les deux millénaires à venir.
- Gaston Julia (1893-1929) étudiant de Poincaré et
  Pierre Fatou (1878-1929) :
  Vers 1914, les deux mathématiciens s'intéressent aux images répétées (itérations).Travaux méconnus car les résultats ne sont apparents que par le grand nombre de points et le grand nombre d'itérations, impossible à révéler sans l'aide d'ordinateurs. Gaston Julia publie ses travaux en 1918, il y met en évidence ce qui est connu aujourd'hui sous le nom d'ensemble de Julia : des bassins d'attraction aux frontières très tourmentées. Il les imagine mais ne les verra jamais faute de disposer de moyens de calcul comme les ordinateurs. Ses travaux attendront cinquante ans avant d'être exploités.

Euclide Alexandrie



Pierre Fatou

- Benoît Mandelbrot (1924-2010) Mathématicien polonais franco-américain :
  En 1975, il invente le fractal. Il est considéré comme le père de la géométrie fractale.
  A l'époque il travaille chez IBM et résout un problème de bruit aléatoire dans les transmissions entre ordinateurs. Il avait constaté que les erreurs étaient de type fractal.
  Il prend connaissance des oeuvres de Julia et Fatou et les exploite à l'aide d'ordinateurs. Il s'intéresse à une itération particulièrement simple : en partant d'un point complexe du plan, un nouveau point pour z du plan est calculé en prenant le carré du précédent ajouté d'une constante. Ainsi naquît la célèbre formule $z \to z^2 + c$, qui donna naissance au monde merveilleux des fractales.

Gaston Julia

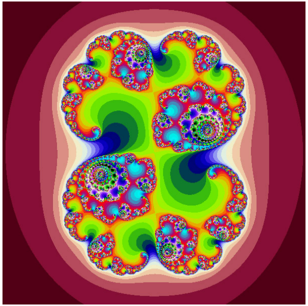
Définition d'un fractal

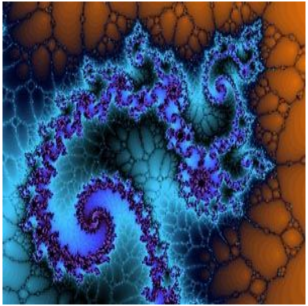
Comme point de départ, nous prendrons la définition suivante d'un fractal.

Définition

Un fractal est un objet qui a les trois propriétés suivantes :

- irrégulier à toutes les échelles ;
- auto-similaire ;
- de dimension non-entière.

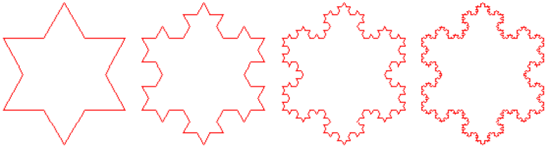




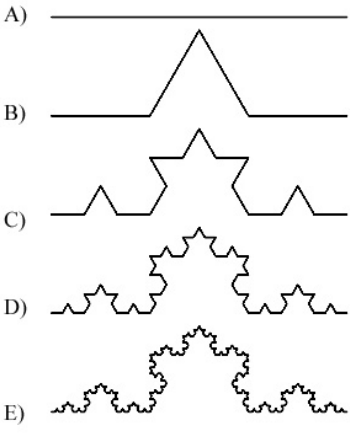
Irrégulier à toutes les échelles

Définition

Un objet est irrégulier à toutes les échelles si, même en le regardant de plus en plus près, il apparaît toujours irrégulier.



Exemple du flocon de neige de von Koch



Exemple de la courbe de von Koch

Auto-similitude

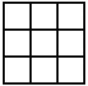
Définition

Un objet F est auto-similaire s'il se décompose en un nombre fini de parties $F_1, \dots, F_N$ qui sont toutes similaires à l'objet entier F. Une partie F_i est similaire à F s'il existe un facteur de dilatation s tel que si l'on dilate F_i d'un facteur s, on retrouve F au complet.

a) **Segment**

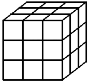
$$\begin{aligned} N &= 3 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

b) **Carré**



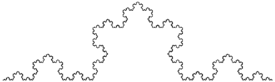
$$\begin{aligned} N &= 9 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

c) **Cube**



$$\begin{aligned} N &= 27 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

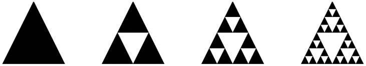
d) **Courbe de von Koch**



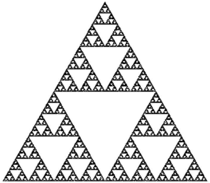
$$\begin{aligned} N &= 4 \\ s &= 3 \end{aligned}$$

e) Triangle de Sierpinski

Voici les premières étapes de construction



en itérant à l'infini ce processus



$$\begin{aligned} N &= 3 \\ s &= 2 \\ &\text{ou} \\ N &= 9 \\ s &= 4 \\ &\text{ou} \\ N &= 27 \\ s &= 8 \\ &\vdots \\ N &= 3^k \\ s &= 2^k \end{aligned}$$

On peut préciser et généraliser la définition d'auto-similitude

Définition

Une similitude du plan est une application $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\|w(P) - w(Q)\| = k\|P - Q\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $Q \in \mathbb{R}^2$ où k est une constante appelée le rapport de la similitude w.

Définition

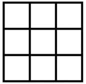
Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est auto-similaire s'il existe des similitudes $w_1, \ldots, w_N$ telles que $F = w_1(F) \cup \ldots \cup w_N(F)$

Dimension de similitude

Dimension 1

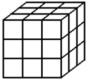
$$\begin{aligned} N &= 3 \\ s &= 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{N = s^1}$$

Dimension 2



$$\begin{aligned} N &= 9 \\ s &= 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{N = s^2}$$

Dimension 3



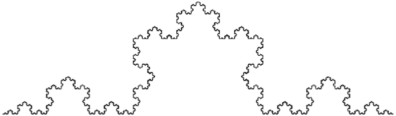
$$\begin{aligned} N &= 27 \\ s &= 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{N = s^3}$$

Peu importe le facteur de dilatation s, on aura toujours $N = s^d$, où d est la dimension.

Définition

La dimension de similitude d'un objet auto-similaire se décomposant en N parties similaires à l'objet par un facteur de dilatation s est $d = \frac{\log N}{\log s}$.

Dimension de la courbe de von Koch :



On a $N = 4$ et $s = 3$. Ainsi
$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859\ldots$
On a $N = 16$ lorsque $s = 9$ et donc
$d = \frac{\log 16}{\log 9} = \frac{\log 4}{\log 3}$.
Plus généralement,
$d = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{\log 4}{\log 3}$

Systèmes dynamiques discrets

Définition

Un système dynamique discret est un couple (X, ϕ), où X est un ensemble et ϕ une application

$$\begin{aligned} \phi : X \times \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ (x, n) &\longmapsto \phi_n(x) \end{aligned}$$

vérifiant :

(i) $\phi_0(x) = x, \ \forall x \in X$

(ii) $\phi_n \circ \phi_m(x) = \phi_{n+m}(x), \ \forall x \in X$ et $\forall n, m \in \mathbb{N}$

X est appelée l'espace de phases et ϕ est le flot.
Pour $x_0 \in X$, l'ensemble $\{\phi_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_0, \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ est l'orbite de x_0.

Définition

Soit $x_0 \in X$. L'orbite de x_0 s'obtient en itérant F à partir de x_0, c'est-à-dire l'orbite $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ est donnée par $x_{k+1} = F(x_k) \ (k \geq 0)$.

Itérations de fonction

L'ensemble de Mandelbrot, noté $\mathcal{M}$, est généré grâce à un processus d'itération de fonctions dans le plan complexe.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on considère le système dynamique discret :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{k+1} = f(z_k), \text{pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

c'est-à-dire pour un point de départ z_0 fixé, on engendre la suite $z_0, z_1, z_2, \ldots$ comme suit :

$$\begin{aligned} z_1 &= f(z_0) \\ z_2 &= f(z_1) = f \circ f(z_0) = f^2(z_0) \\ &\vdots \\ z_n &= f(z_{n-1}) = f^n(z_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

où on rappelle la notation $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}} = f^n$.

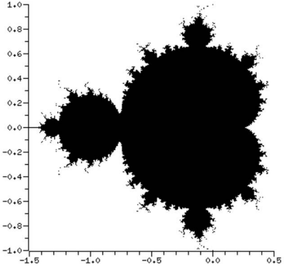
L'ensemble de Mandelbrot

Pour faire l'étude de l'ensemble de Mandelbrot, on s'intéresse à la famille des polynômes de degré 2 de la forme $Q_c(z) = z^2 + c$, où $c \in \mathbb{C}$.

Définition

L'ensemble de Mandelbrot pour la famille quadratique est l'ensemble des paramètres c pour lesquels l'orbite de 0 sous Q_c est bornée.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \ |Q_c^n(0)| \nrightarrow \infty, \ n \to \infty\}$$
$$\mathcal{M} = \left\{c \in \mathbb{C} : \ c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \ldots \nrightarrow \infty\right\}.$$



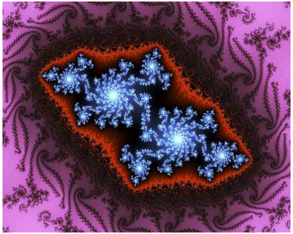
L'ensemble de Julia

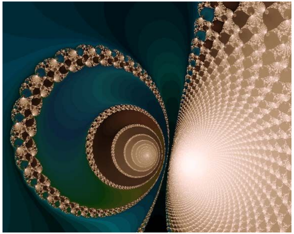
En Fixant maintenant une valeur de c et en étudiant le comportement dynamique de chaque valeur de départ possible $z_0 \in \mathbb{C}$. L'ensemble des valeurs de départ dont l'orbite est bornée sous itération de Q_c forme l'ensemble rempli de Julia de Q_c que l'on note $K(Q_c)$.

Définition

Soit $c \in \mathbb{C}$. L'ensemble rempli de Julia de Q_c est $K(Q_c) = \{z : |Q_c^n(z)| \nrightarrow \infty,\ n \to \infty\}$. L'ensemble de Julia de Q_c noté $J(Q_c)$, est la frontière de cet ensemble. Le complément de l'ensemble de Julia est l'ensemble de Fatou $F(Q_c)$.

Remarque : A l'exception des cas où $c = -2$ et $c = 0$, l'ensemble de Julia de Q_c pour un c donné est un fractal.





Citations

- « L'ensemble de Mandelbrot n'est pas une invention. C'est une découverte. Un peu comme le mont Everest est juste là. » Roger Penrose
- « Demain, quelqu'un qui n'est pas familiarisé avec les fractales ne pourra pas être considéré comme scientifiquement instruit. »John Archibald Wheeler (1911-2008) - Physicien expert en cosmologie et en physique quantique ; proche de Niels Bohr et Albert Einstein.
- « Les fractales sont importantes car elles ont permis de révéler un tout nouveau domaine des mathématiques, pertinent directement pour l'étude de la nature. » Ian Stewart, professeur de mathématiques de l'université de Warwick en Angleterre.
- « Lorsque les dessins de ces ensembles de Julia et Fatou sont apparus pour la première fois sur mon écran d'ordinateur, j'ai été frappé, non seulement par leur insondable complexité, mais aussi par leur extraordinaire beauté. Ils me semblaient à la fois totalement étranges et familiers comme si je les avais toujours connus. » Benoît Mandelbrot

Références

- Sources :
  http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Suite/Fractal.htm
  http://charles.vassallo.pagesperso-orange.fr/fr/art/sommaire.html

  Présentation de Jean-Pierre Demailly le 19 novembre 2012, lors de la conférence au Lycée Champollion, Grenoble

  Cours de Jean-Jacques Gervais : « Introduction aux fractals et aux systèmes dynamiques » Août 2009.

- Images :
  Wikipédia : Ensemble de Mandelbrot et Ensemble de Julia
  http://charles.vassallo.pagesperso-orange.fr/fr/art/art_2.html
  https://duckduckgo.com/?q=fractal&iax=images&ia=images
- Vidéo :
  Vulgarisation de l'ensemble de Mandelbrot réalisé par El Jj.