

Конспекты
по
электродинамике

20156

ФТШ – 2014

Содержание

1	Список опытных фактов	1
2	Электрическое поле. Напряженность электрического поля.	3
3	Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности	4
3.1	Связь поля с потенциалом	5
3.2	Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей	6
4	Уравнения электростатики	9
5	Применение уравнений электростатики	11

1 Список опытных фактов

1. Существует электрическое взаимодействие, обусловленное зарядами между телами.
2. Заряды существуют двух знаков: положительные и отрицательные. Заряды одного знака отталкиваются, разных – притягиваются.
3. Сила взаимодействия между точечными зарядами (электрическая сила) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2 :

$$F \sim q_1, \quad F \sim q_2, \quad F \sim \frac{1}{r^2}$$

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

4. **[Закон Кулона]** В системе СИ сила F равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1}$$

где $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, а $[q] = \text{Кл}$ (кулон).

Два единичных заряда на расстоянии 1 м будут взаимодействовать с силой $F = 9 \times 10^9 \text{ Н}$. Для измерения заряда те должны в первую очередь сохраняться.

5. **[Закон сохранения электрического заряда]** В замкнутой системе суммарный заряд сохраняется:

$$q_{\Sigma} = \sum_i q_i = \text{const.}$$

6. **[Принцип суперпозиции]** Сила, действующая на данный электрический заряд q , равна векторной сумме всех сил, действующих в системе:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i k \frac{q q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{2}$$

7. **[Дискретность электрического заряда]** Существует элементарный заряд $\bar{e} = 1,6 \times 10^{-19}$ Кл. Заряд любой частицы является кратным элементарному:

$$q = n\bar{e}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заряд электрона равен $q_{\text{эл}} = -\bar{e}$, протона $q_{\text{пр}} = +\bar{e}$.

2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Сила \mathbf{F} , действующая на заряд q , всегда пропорциональна его величине, поэтому (2) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (3)$$

где вектор \mathbf{E} называют *вектором напряженности электрического поля*. Это аналог формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. \mathbf{E} и \mathbf{g} являются характеристиками данной точки пространства.

$$[E] = \frac{H}{K_{\text{л}}},$$

$$\mathbf{F} = q \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = q \sum_i \mathbf{E}_i = q\mathbf{E}.$$

Поле в данной точке есть суперпозиция полей, порождаемых всеми зарядами в системе.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{E}_i = k \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad E_i = k \frac{q_i}{r_i^2}.$$

Электрическое поле создается зарядами и действует на заряды. Заряды не действуют друг на друга и взаимодействуют посредством полей, которые создают.

3 Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Покажем, что электрическая сила консервативна . В силу принципа суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

откуда

$$A = \sum_i A_i.$$

Поле электрического заряда центрально симметричное , следовательно работа электрических сил по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Если есть консервативная сила, то есть и потенциальная энергия . Например, силе $\mathbf{F}_{\text{грав}} = G \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$ соответствует потенциальная энергия $E = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. Рассуждая аналогично, определим *потенциальную энергию электрического поля, порождаемого зарядом*:

$$E_{\text{п}} = +k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$E_{\text{п}} = \sum_i E_i = \sum_i k \frac{q q_i}{r_i} = q \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Скалярную величину $\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{q}$ назовем *электрическим потенциалом точки* .

$$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В (вольт)}.$$

Для потенциала также выполняется принцип суперпозиции :

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал действует на заряды и создается зарядами. Знак потенциала соответствует знаку зарада, его породившего.

Пусть заряд q передвигается в электрическом поле из точки 1 в 2. Тогда работа электрической силы запишется как

$$A = E_{\pi_1} - E_{\pi_2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Назовем величину $U = \varphi_1 - \varphi_2$ *напряжением* и запишем работу A в виде

$$A = qU. \quad (5)$$

Заряд q называется *пробным*, если он достаточно мал, чтобы в условии данной задачи не менять распределение и картину поля от всех остальных зарядов.

Для визуального представления полей используются силовые линии — воображаемые линии, в каждой своей точке сонаправленные с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Густота — величина $\Gamma = \frac{N}{S}$ — это отношение числа N силовых линий, проходящих через единицу площади S , к S ; иначе говоря, густота — это «плотность» силовых линий.

Эквипотенциальная поверхность — это множество точек пространства, имеющих одинаковый потенциал.

3.1 Связь поля с потенциалом

Мы показали, что работа по перемещению заряда q в электрическом поле равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны,

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

тогда

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E \cos \alpha dl = \int_1^2 E_l dl.$$

При малых l верно, что

$$-d\varphi = E_l dl,$$

откуда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (6)$$

В пространстве соответственно имеем

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz},$$

что также можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Все эти соображения наводят на новую размерность напряженности E :

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3.2 Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

1. Силовые линии не пересекаются .
2. Электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности. Возьмем пробный заряд и перенесем его вдоль эквипотенциальной поверхности. Запишем работу, совершенную полем:

$$A = qE dl \cos \alpha = -q d\varphi = 0, \quad E \cos \alpha = 0,$$

следовательно, вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, а при перемещении заряда вдоль нее поле не совершает работу.

3. Силовое поле направлено в сторону уменьшения потенциала.
4. Силовая линия не пересекает эквипотенциальную поверхность дважды.
5. В точках пересечения эквипотенциальных поверхностей поле равно нулю; иначе говоря, поле равно нулю там, куда нельзя провести перпендикуляр.

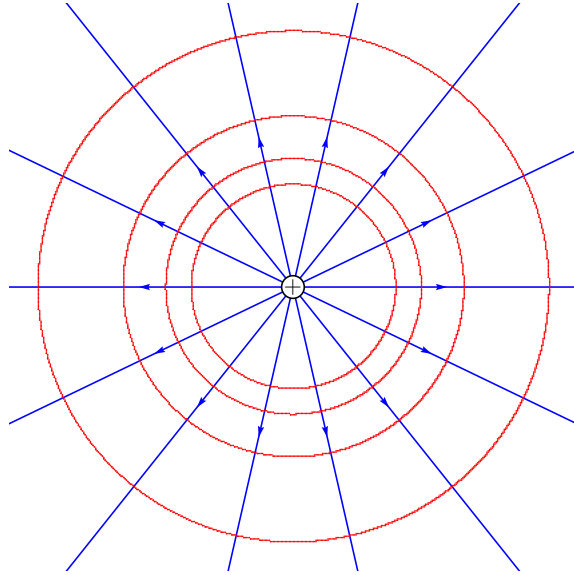


Рис. 1: Положительный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

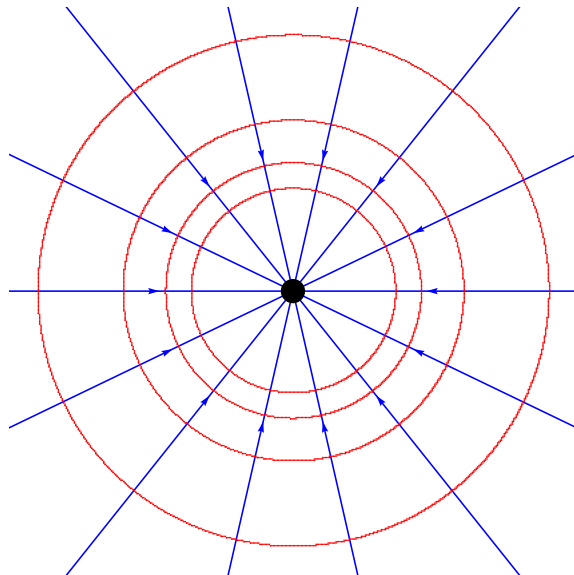


Рис. 2: Отрицательный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

6. В силу центральной симметрии поля , порождаемого точечным зарядом , эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы.
7. Силовые линии не могут начинаться в пространстве нигде, кроме как в точках положительных зарядов, и заканчиваться нигде,

кроме как в точках отрицательных.

4 Уравнения электростатики

Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяет подсчитать поле и силу в любой точке пространства. Альтернативный способ сделать это — уравнения Максвелла .

Вспомним, что электрическое поле центрально симметрично и консервативно :

$$A = \oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \oint E_l dl = 0,$$

тогда запишем равенство, называемое *вторым уравнением Максвелла*:

$$\oint E_l dl = 0. \quad (7)$$

Циркуляция электростатического поля равна нулю, что отражает консервативность этого поля. Это значит, что замкнутых силовых линий нет.

Докажем формулу Гаусса-Остроградского (первое уравнение Максвелла) .

Из каждой замкнутой поверхности выходит число силовых линий, пропорциональное суммарному заряду:

$$N \sim q_{\Sigma}.$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{dN}{dS} \sim E, \quad E dS \sim dN.$$

Величину

$$d\Phi_E = \mathbf{E} dS$$

назовем потоком электрического поля. Для произвольной поверхности поток электрического поля сквозь нее равен

$$\Phi_E = \int_S E_n dS. \quad (8)$$

Таким образом мы определили понятие, аналогичное интуитивному понятию плотности. Теперь

$$N \sim \oint E dS \sim q_{\Sigma}. \quad (9)$$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду внутри поверхности.

Поток считается положительным, если поле идет наружу.

Запишем (9) с коэффициентом пропорциональности:

$$\oint E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (10)$$

где ε_0 – величина, называемая диэлектрической проницаемостью вакуума. Пропорцию (9) можно записать в таком виде, поскольку $E \sim \frac{1}{R^2}$, $S \sim R^2$, а тогда $ES = \text{const} \sim q$.

Рассмотрим теперь простую сферическую поверхность с зарядом внутри. Тогда

$$\Phi_E = 4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Но $E = k \frac{q}{R^2}$, значит,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (11)$$

Отсюда $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}.$

5 Применение уравнений электростатики

Мы записали два уравнения:

$$\oint E_n dS = \frac{q\Sigma}{\varepsilon_0}, \quad (12)$$

$$\oint E_l dl = 0. \quad (13)$$

Сформулируем *принцип симметрии*: если некоторая система зарядов переходит сама в себя при некотором преобразовании симметрии (поворот, сдвиг, отражение), то картина создаваемого поля переходит сам а в себя при этом преобразовании.

Рассмотрим равномерно заряженную сферу радиуса R . При повороте вокруг прямой r вектор \mathbf{E} переходит сам в себя. В каждой точке сферы радиуса r поле нормально и равно E , а

$$\oint E_n dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, \quad (14)$$

где $q(r)$ – заряд внутри сферы радиуса r с центром в той же точке. Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q(r)}{\varepsilon_0}. \quad (15)$$

Если $r < R$, то поле E равно нулю, так как $q(r) = 0$. При $r \geq R$ $q(r) = q$. Окончательно

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (16)$$

Для поля однородного шара запишем снова: $E(r) = k \frac{q(r)}{r^2}$. Поскольку шар заряжен равномерно, то

$$\frac{q(r)}{q} = \frac{V(r)}{V} = \frac{r^3}{R^3},$$

откуда

$$q(r) = q \frac{r^3}{R^3},$$

а

$$E(r) = \begin{cases} kq \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (17)$$

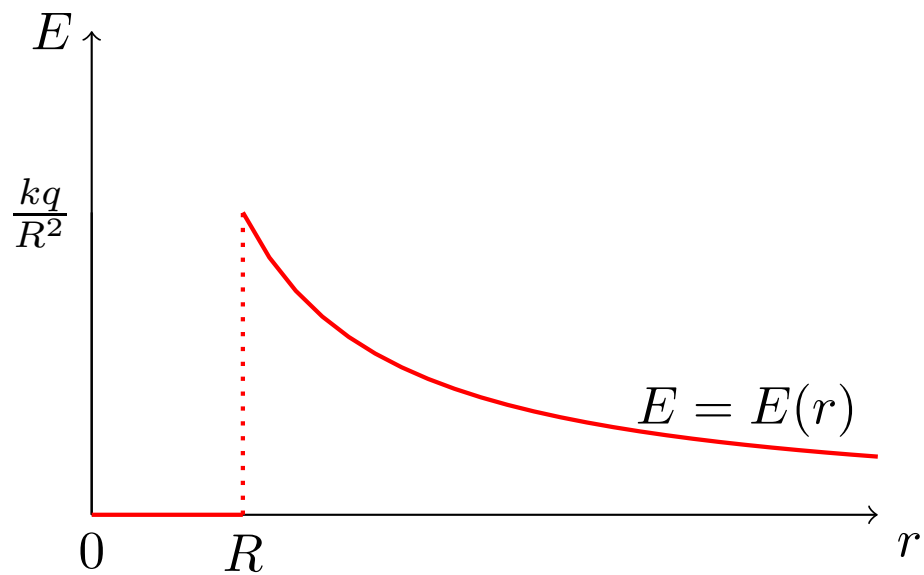


Рис. 3: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженной сферы

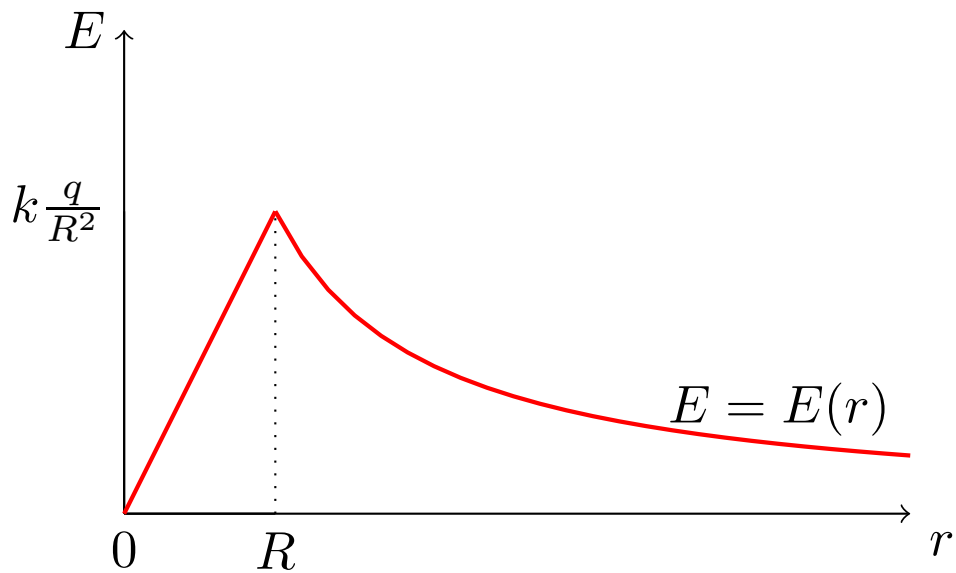


Рис. 4: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженного шара

Список иллюстраций

1	Положительный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности	7
2	Отрицательный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности	7
3	График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженной сферы	12
4	График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженного шара	12

Предметный указатель

Предметный указатель

- Циркуляция, 9
- Диэлектрическая проницаемость
 - вакуума, 10
- Дискретность, 2
- Эквипотенциал, 5
- Энергия
 - потенциальная, 4
- Формула
 - Гаусса-Остроградского, 9
- Градиент, 6
- Густота, 5, 9
- Линия
 - силовая, 5–7, 9
- Напряжение, 5
- Поле, 9, 11
 - центрально симметричное, 4, 9
 - электрическое, 3, 5, 6, 9
 - консервативное, 9
- Потенциал, 4
- Поток
 - электрического поля, 9, 10
- Поверхность
 - эквипотенциальная, 5, 6
 - сферическая, 10
 - замкнутая, 9, 10
- Принцип
 - симметрии, 11
 - суперпозиции, 1, 3, 4, 9
- Работа, 4–6
- Размерность, 6
- Сфера
 - заряженная, 11
- Сила
 - электрическая, 4
 - взаимодействия
 - между точечными зарядами, 1
- Симметрия
 - центральная, 7
- Система
 - замкнутая, 1
- Уравнение
 - Максвелла, 9
 - первое, 9
 - второе, 9
- Вектор
 - напряженности электрического поля, 3, 5, 6
- Закон
 - Кулона, 1, 9
- Заряд, 1, 4, 9
 - пробный, 5, 6
 - точечный, 7