

Конспекты
по
электродинамике

20156

ФТШ – 2014

Содержание

1	Список опытных фактов	1
2	Электрическое поле. Напряженность электрического поля.	3
3	Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности	4
3.1	Связь поля с потенциалом	5
3.2	Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей	6
4	Уравнения электростатики	8
5	Применение уравнений электростатики	10
6	Электрический диполь	14
6.1	Энергия диполя во внешнем поле	15
6.2	Электрическое поле диполя	16
7	Изолированный проводник. Поле внутри и вне его	19
	Список иллюстраций	20
	Предметный указатель	21

1 Список опытных фактов

1. Существует электрическое взаимодействие, обусловленное зарядами между телами.
2. Заряды существуют двух знаков: положительные и отрицательные. Заряды одного знака отталкиваются, разных – притягиваются.
3. Сила взаимодействия между точечными зарядами (электрическая сила) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2 . Тогда:

$$F \sim q_1, \quad F \sim q_2, \quad F \sim \frac{1}{r^2}, \quad \text{откуда } F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

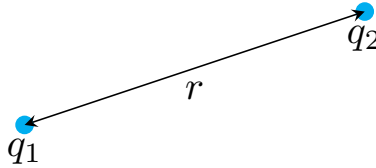


Рис. 1: Два точечных заряда, q_1 и q_2

4. **[Закон Кулона]** В системе СИ сила F равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1}$$

где $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, а $[q] = \text{Кл}$ (кулон).

Два единичных заряда на расстоянии 1 м будут взаимодействовать с силой $F = 9 \times 10^9 \text{ Н}$. Для измерения заряда те должны в первую очередь сохраняться.

5. **[Закон сохранения электрического заряда]** В замкнутой системе суммарный заряд сохраняется:

$$q_\Sigma = \sum_i q_i = \text{const.}$$

6. **[Принцип суперпозиции]** Сила, действующая на данный электрический заряд q , равна векторной сумме всех сил, действующих в системе:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i k \frac{qq_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2)$$

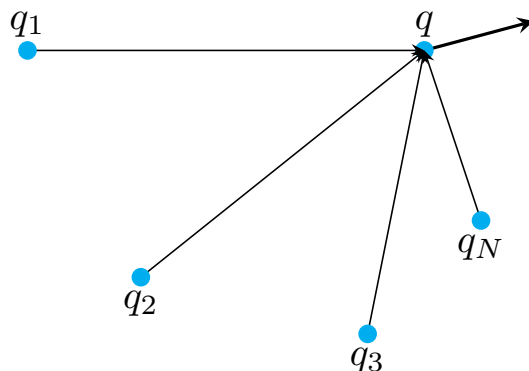


Рис. 2: Система зарядов

7. **[Дискретность электрического заряда]** Существует элементарный заряд $\bar{e} = 1,6 \times 10^{-19}$ Кл. Заряд любой частицы является кратным элементарному:

$$q = n\bar{e}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заряд электрона равен $q_{\text{эл}} = -\bar{e}$, протона $q_{\text{пр}} = +\bar{e}$.

2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Сила \mathbf{F} , действующая на заряд q , всегда пропорциональна его величине, поэтому (2) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (3)$$

где вектор \mathbf{E} называют *вектором напряженности электрического поля*. Это аналог формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. \mathbf{E} и \mathbf{g} являются характеристиками данной точки пространства.

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}},$$

$$\mathbf{F} = q \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = q \sum_i \mathbf{E}_i = q\mathbf{E}.$$

Поле в данной точке есть суперпозиция полей, порождаемых всеми зарядами в системе.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{E}_i = k \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad E_i = k \frac{q_i}{r_i^2}.$$

Электрическое поле создается зарядами и действует на заряды. Заряды не действуют друг на друга и взаимодействуют посредством полей, которые создают.

3 Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Покажем, что электрическая сила консервативна . В силу принципа суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

откуда

$$A = \sum_i A_i.$$

Поле электрического заряда центрально симметричное , следовательно работа электрических сил по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Если есть консервативная сила, то есть и потенциальная энергия . Например, силе $\mathbf{F}_{\text{грав}} = G \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$ соответствует потенциальная энергия $E = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. Рассуждая аналогично, определим *потенциальную энергию электрического поля, порождаемого зарядом*:

$$E_{\text{п}} = +k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$E_{\text{п}} = \sum_i E_i = \sum_i k \frac{q q_i}{r_i} = q \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Скалярную величину $\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{q}$ назовем *электрическим потенциалом точки* .

$$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В (вольт)}.$$

Для потенциала также выполняется принцип суперпозиции :

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал действует на заряды и создается зарядами. Знак потенциала соответствует знаку зарада, его породившего.

Пусть заряд q передвигается в электрическом поле из точки 1 в 2. Тогда работа электрической силы запишется как

$$A = E_{\pi_1} - E_{\pi_2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Назовем величину $U = \varphi_1 - \varphi_2$ *напряжением* и запишем работу A в виде

$$A = qU. \quad (5)$$

Заряд q называется *пробным*, если он достаточно мал, чтобы в условии данной задачи не менять распределение и картину поля от всех остальных зарядов.

Для визуального представления полей используются силовые линии — воображаемые линии, в каждой своей точке сонаправленные с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Густота — величина $\Gamma = \frac{N}{S}$ — это отношение числа N силовых линий, проходящих через единицу площади S , к S ; иначе говоря, густота — это «плотность» силовых линий.

Эквипотенциальная поверхность — это множество точек пространства, имеющих одинаковый потенциал.

3.1 Связь поля с потенциалом

Мы показали, что работа по перемещению заряда q в электрическом поле равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны,

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

тогда

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E \cos \alpha dl = \int_1^2 E_l dl.$$

При малых l верно, что

$$-d\varphi = E_l dl,$$

откуда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (6)$$

В пространстве соответственно имеем

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz},$$

что также можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Все эти соображения наводят на новую размерность напряженности E :

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3.2 Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

1. Силовые линии не пересекаются .
2. Электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности. Возьмем пробный заряд и перенесем его вдоль эквипотенциальной поверхности. Запишем работу, совершенную полем:

$$A = qE dl \cos \alpha = -q d\varphi = 0, \quad E \cos \alpha = 0,$$

следовательно, вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, а при перемещении заряда вдоль нее поле не совершает работу.

3. Силовое поле направлено в сторону уменьшения потенциала.
4. Силовая линия не пересекает эквипотенциальную поверхность дважды.
5. В точках пересечения эквипотенциальных поверхностей поле равно нулю; иначе говоря, поле равно нулю там, куда нельзя провести перпендикуляр.

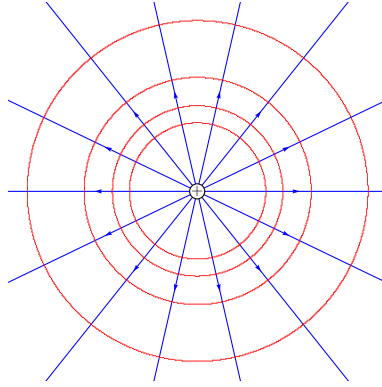


Рис. 3: Положительный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

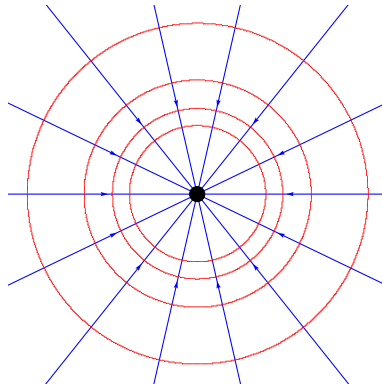


Рис. 4: Отрицательный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

6. В силу центральной симметрии поля , порождаемого точечным зарядом , эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы.
7. Силовые линии не могут начинаться в пространстве нигде, кроме как в точках положительных зарядов, и заканчиваться нигде, кроме как в точках отрицательных.

4 Уравнения электростатики

Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяет подсчитать поле и силу в любой точке пространства. Альтернативный способ сделать это — уравнения Максвелла .

Вспомним, что электрическое поле центрально симметрично и консервативно :

$$A = \oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \oint E_l dl = 0,$$

тогда запишем равенство, называемое *вторым уравнением Максвелла*:

$$\oint E_l dl = 0. \quad (7)$$

Циркуляция электростатического поля равна нулю, что отражает консервативность этого поля. Это значит, что замкнутых силовых линий нет.

Докажем формулу Гаусса-Остроградского (первое уравнение Максвелла) .

Из каждой замкнутой поверхности выходит число силовых линий, пропорциональное суммарному заряду:

$$N \sim q_{\Sigma}.$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{dN}{dS} \sim E, \quad E dS \sim dN.$$

Величину

$$d\Phi_E = \mathbf{E} dS$$

назовем потоком электрического поля. Для произвольной поверхности поток электрического поля сквозь нее равен

$$\Phi_E = \int_S E_n dS. \quad (8)$$

Таким образом мы определили понятие, аналогичное интуитивному понятию густоты. Теперь

$$N \sim \oint E dS \sim q_{\Sigma}. \quad (9)$$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду внутри поверхности.

Поток считается положительным, если поле идет наружу.

Запишем (9) с коэффициентом пропорциональности:

$$\oint E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (10)$$

где ε_0 – величина, называемая диэлектрической проницаемостью вакуума. Пропорцию (9) можно записать в таком виде, поскольку $E \sim \frac{1}{R^2}$, $S \sim R^2$, а тогда $ES = \text{const} \sim q$.

Рассмотрим теперь простую сферическую поверхность с зарядом внутри. Тогда

$$\Phi_E = 4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Но $E = k \frac{q}{R^2}$, значит,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (11)$$

Отсюда $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}.$

5 Применение уравнений электростатики

Мы записали два уравнения:

$$\oint E_n dS = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}, \quad (12)$$

$$\oint E_l dl = 0. \quad (13)$$

Сформулируем *принцип симметрии*: если некоторая система зарядов переходит сама в себя при некотором преобразовании симметрии (поворот, сдвиг, отражение), то картина создаваемого поля переходит сам а в себя при этом преобразовании.

Рассмотрим равномерно заряженную сферу радиуса R . При повороте вокруг прямой r вектор \mathbf{E} переходит сам в себя. В каждой точке сферы радиуса r поле нормально и равно E , а

$$\oint E_n dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, \quad (14)$$

где $q(r)$ – заряд внутри сферы радиуса r с центром в той же точке. Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q(r)}{\varepsilon_0}. \quad (15)$$

Если $r < R$, то поле E равно нулю, так как $q(r) = 0$. При $r \geq R$ $q(r) = q$. Окончательно

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (16)$$

Для поля однородно заряженного шара запишем снова: $E(r) = k \frac{q(r)}{r^2}$.

В силу распределения заряда запишем

$$\frac{q(r)}{q} = \frac{V(r)}{V} = \frac{r^3}{R^3},$$

откуда

$$q(r) = q \frac{r^3}{R^3},$$

а

$$E(r) = \begin{cases} kq \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (17)$$

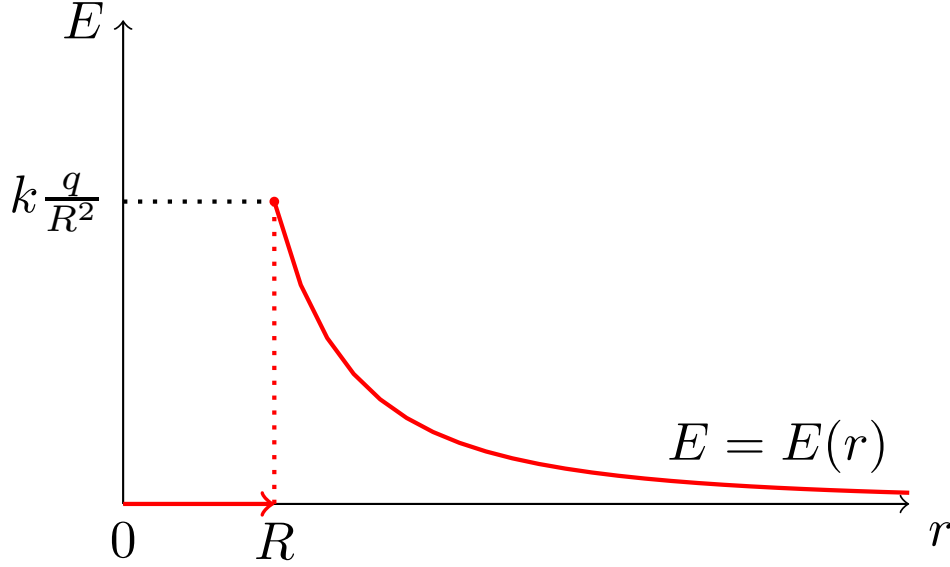


Рис. 5: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженной сферы

Найдем зависимость потенциала от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для обоих случаев. Перепишем (6) как $d\varphi = -E dr$, откуда

$$\varphi(r) = - \int E dr. \quad (18)$$

Проинтегрируем функцию $E = E(r)$ для сферы, получим

$$\varphi(r) = \begin{cases} C_1, & 0 \leq r < R, \\ k\frac{q}{r} + C_2, & r \geq R. \end{cases} \quad (19)$$

Выясним характер констант интегрирования C_1 и C_2 . Положим C_2 равной нулю и сформулируем принцип: если в любой точке пространства поле конечно, то потенциал непрерывен в этой точке. В самом деле, если потенциал в этой точке непрерывен, то за конечное время поле может совершить бесконечную работу при переносе заряда через эту точку, что обязательно чему-то там противоречит. Тогда,

$$\varphi(R) = \lim_{r \rightarrow R^-} \varphi(r) = C_1.$$

Окончательно

$$\varphi(r) = \begin{cases} k\frac{q}{R}, & 0 \leq r < R, \\ k\frac{q}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (20)$$

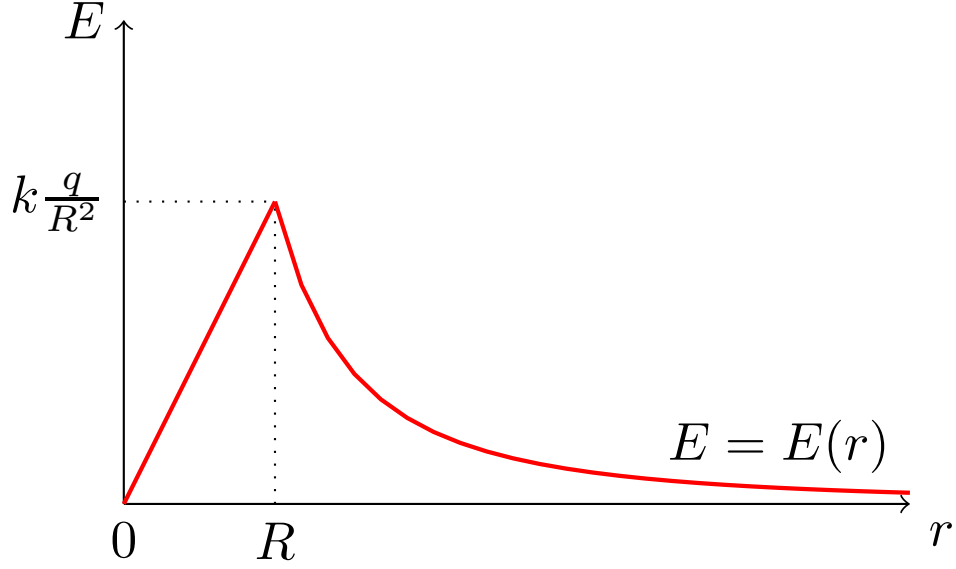


Рис. 6: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженного шара

Проделаем то же для шара:

$$\varphi(r) = \begin{cases} -kq \frac{r^2}{2R^3} + C_1, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r} + C_2, & r \geq R. \end{cases} \quad (21)$$

$C_2 = 0$. В силу непрерывности

$$\varphi(R) = k \frac{q}{R} = C_1 - kq \frac{R^2}{2R^3}, \quad C_1 = \frac{3}{2} k \frac{q}{R}.$$

Окончательно

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} kq \frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{2} k \frac{q}{R}, & 0 \leq r < R, \\ k \frac{q}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что график этой функции гладок в точке R в силу её дифференцируемости в этой точке.

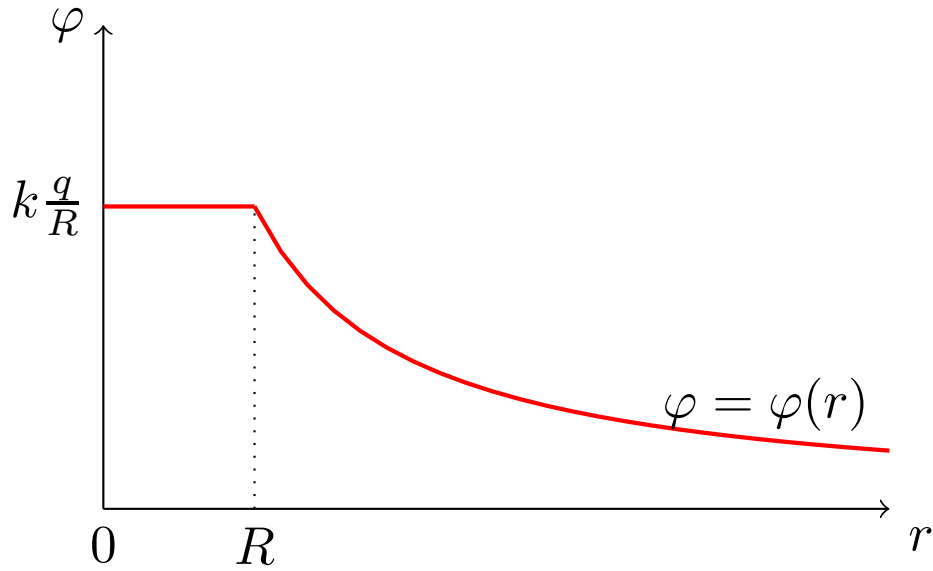


Рис. 7: График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для однородно заряженной сферы

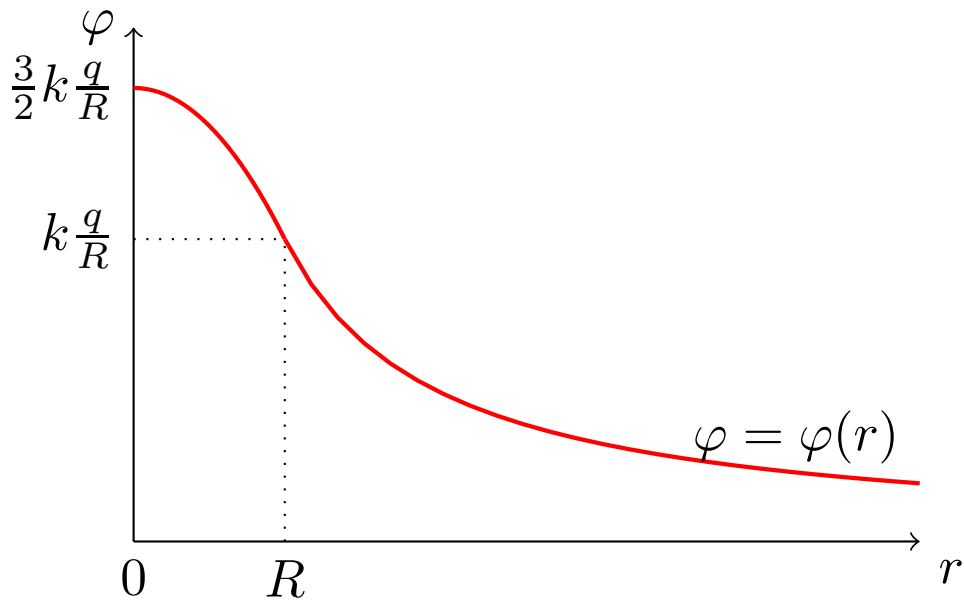


Рис. 8: График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для однородно заряженного шара

6 Электрический диполь

Пусть сумма всех зарядов в системе равна нулю:

$$\sum q_i = 0.$$

Тогда сумма всех положительных зарядов по модулю равна сумме всех отрицательных зарядов:

$$\sum_{(+)} q_i = +q, \quad \sum_{(-)} q_i = -q.$$

Рассмотрим центр заряда (аналог центра масс) (рис. 6):

$$\mathbf{R}_{(+)} = \frac{\sum_{(+)} q_i \mathbf{r}_i}{\sum_{(+)} q_i}, \quad \mathbf{R}_{(-)} = \frac{\sum_{(-)} q_i \mathbf{r}_i}{\sum_{(-)} q_i}.$$

Полезная характеристика диполя – дипольный момент:

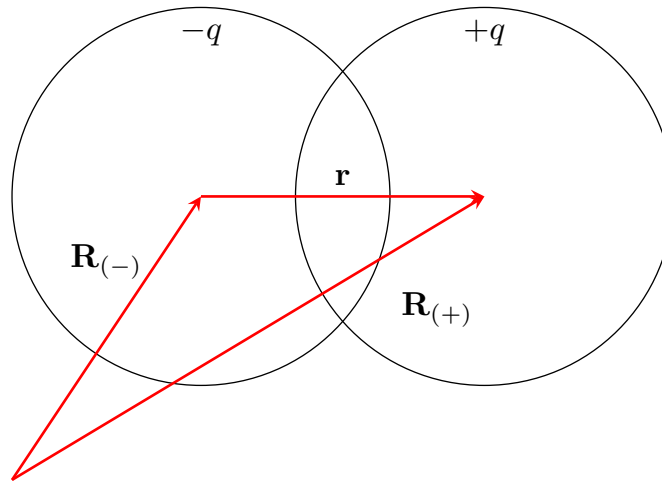


Рис. 9: Электрический диполь

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r}. \quad (23)$$

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{R}_{(+)} - \mathbf{R}_{(-)}) = \sum_{(+)} q_i \mathbf{r}_i + \sum_{(-)} q_k \mathbf{r}_k = \sum_{\text{по всем}} q_i \mathbf{r}_i. \quad (24)$$

Рассмотрим диполь во внешнем постоянном электрическом поле. Запишем

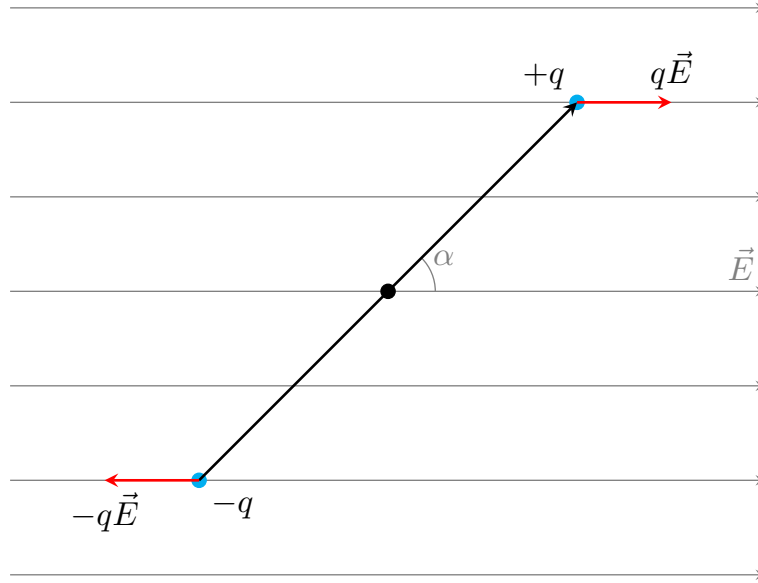


Рис. 10: Электрический диполь во внешнем постоянном электрическом поле

момент сил, действующий на диполь (рис. 6):

$$M = 2F \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = dE \sin \alpha,$$

откуда

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \quad (25)$$

На каждый диполь в электрическом поле действует момент сил, который ориентирует диполь сонаправленно с полем.

6.1 Энергия диполя во внешнем поле

Полная потенциальная энергия диполя во внешнем поле (рис. 6.1):

$$E_{\text{п}} = +q\varphi_2 + (-q)\varphi_1 = q(\varphi_2 - \varphi_1) = -qEx = -qEl \cos \alpha = -Ed \cos \alpha.$$

$$E_{\text{п}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}. \quad (26)$$

Если диполь сонаправлен с полем, то его энергия наименьшая:

$$\mathbf{d} \uparrow\uparrow \mathbf{E}, \quad E_{\text{п}} = -Ed.$$

Таким образом, сонаправленное положение диполя с внешним полем – наиболее выгодное.

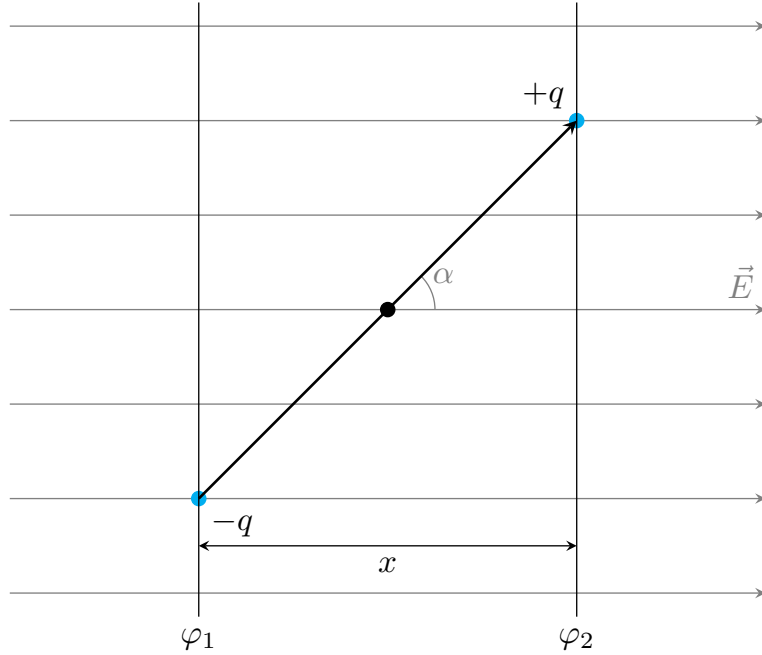


Рис. 11: Электрический диполь во внешнем постоянном электрическом поле

6.2 Электрическое поле диполя

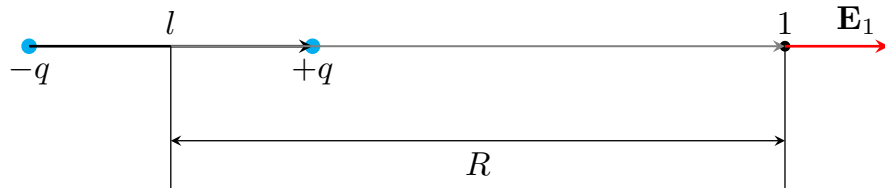


Рис. 12: Точка 1 на расстоянии R от центра диполя

Найдем поле, создаваемое диполем в точках 1 и 2 на расстоянии R от центра диполя, если $l \ll R$, где l – длина диполя (рис. 6.2). Тогда

$$\begin{aligned}
 E_1 &= k \frac{q}{(R - l/2)^2} - k \frac{q}{(R + l/2)^2} = \frac{kq [(R + l/2)^2 - (R - l/2)^2]}{(R + l/2)^2 (R - l/2)^2} = \\
 &= \frac{2kqRl}{\left(R^2 - \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^2}.
 \end{aligned}$$

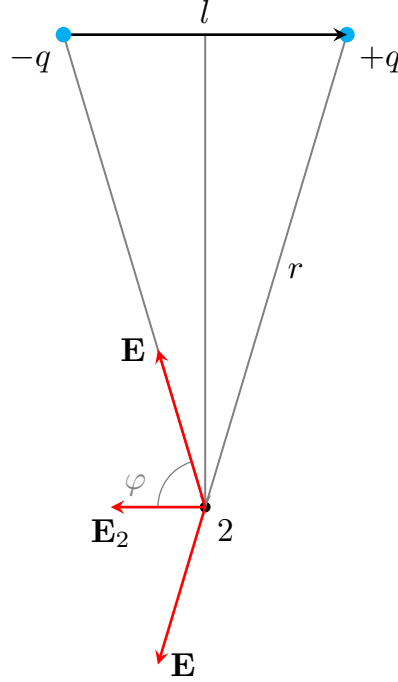


Рис. 13: Точка 2 на расстоянии R от центра диполя

Пренебрегая длиной диполя по сравнению с R , напомним

$$E_1 \simeq \frac{2kqRl}{R^4} = \frac{2kql}{R^3},$$

$$E_1 \simeq \frac{2kd}{R^3} \quad (27)$$

Поступим аналогично для точки 2:

$$E_2 = 2E \cos \varphi = -2k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{l/2}{r} = -\frac{kd}{r^3} = -\frac{kd}{\left(R^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}},$$

$$E_2 \simeq -\frac{kd}{R^3}. \quad (28)$$

Без доказательства приведем общую формулу:

$$\mathbf{E} = k \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3} \quad (\text{верно при } l \ll R). \quad (29)$$

Этой формулой описывается вся картина поля, создаваемого диполем. Заметим, что оно спадает как $\frac{1}{R^3}$.

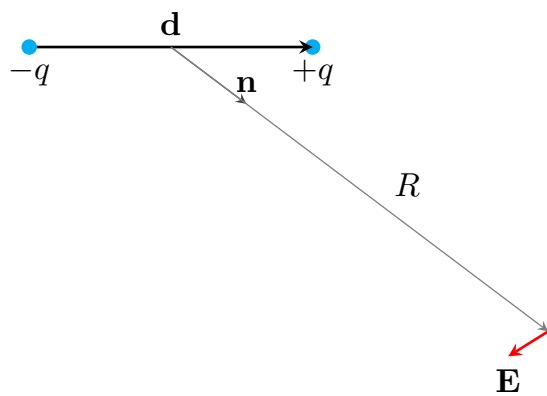


Рис. 14: Поле диполя в точке на расстоянии R

7 Изолированный проводник. Поле внутри и вне его

Проводник – вещество, в котором есть достаточно свободных зарядов. Возьмем изолированный проводник (в том смысле, что электроны его не покидают) и поместим его во внешнее поле. Поскольку заряды свободны, то они начнут перемещаться по проводнику. Проводник в результате поляризуется и сам создает поле. Поток зарядов в нем прекратится, когда внутреннее поле скомпенсирует внешнее. Таким образом, проводником будем называть вещество, в котором всегда достаточно заряда, чтобы скомпенсировать внутри себя любое внешнее поле.

Список иллюстраций

1	Два точечных заряда, q_1 и q_2	1
2	Система зарядов	2
3	Положительный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности	7
4	Отрицательный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности	7
5	График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженной сферы	11
6	График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженного шара	12
7	График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi =$ $= \varphi(r)$ для однородно заряженной сферы	13
8	График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi =$ $= \varphi(r)$ для однородно заряженного шара	13
9	Электрический диполь	14
10	Электрический диполь во внешнем постоянном элек- трическом поле	15
11	Электрический диполь во внешнем постоянном элек- трическом поле	16
12	Точка 1 на расстоянии R от центра диполя	16
13	Точка 2 на расстоянии R от центра диполя	17
14	Поле диполя в точке на расстоянии R	18

Предметный указатель

Центр

- масс, 14
- заряда, 14

Циркуляция, 8

Диэлектрическая проницаемость

- вакуума, 9

Диполь, 15

- электрический, 15

Дискретность, 2

Эквипотенциал, 5

Электрон, 19

Энергия

- диполя, 15
- потенциальная, 4

Формула

- Гаусса-Остроградского, 8

Градиент, 6

Густота, 5, 8

Линия

- силовая, 5–8

Момент

- дипольный, 14
- сил, 15

Напряжение, 5

Поле, 8, 10, 19

- центрально симметричное, 4, 8
- электрическое, 3, 5, 6, 8, 14, 15
- консервативное, 8
- постоянное, 14
- внешнее, 19
- внутреннее, 19

Поляризация, 19

Потенциал, 4

Поток

- электрического поля, 8, 9

Поверхность

- эквипотенциальная, 5, 6
- сферическая, 9
- замкнутая, 8, 9

Принцип

- непрерывности потенциала, 11
- симметрии, 10
- суперпозиции, 2–4, 8

Проводник, 19

- изолированный, 19

Работа, 4–6

Размерность, 6

Сфера

- заряженная, 10

Сила

- электрическая, 4
- взаимодействия
- между точечными зарядами, 1

Симметрия

- центральная, 7

Система, 14

- замкнутая, 1

Уравнение

- Максвелла, 8
- первое, 8
- второе, 8

Вектор

- напряженности электрического поля, 3, 5, 6

Закон

- Кулона, 1, 8

Заряд, 1, 4, 8, 11, 14

- пробный, 5, 6
- свободный, 19

точечный, 7