

Конспекты
по
электродинамике

20156

ФТШ – 2014

Содержание

1	Список опытных фактов	1
2	Электрическое поле. Напряженность электрического поля.	3
3	Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности	4
3.1	Связь поля с потенциалом	5
3.2	Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей	6
4	Уравнения электростатики	8

1 Список опытных фактов

1. Существует электрическое взаимодействие, обусловленное зарядами между телами.
2. Заряды существуют двух знаков: положительные и отрицательные. Заряды одного знака отталкиваются, разных – притягиваются.
3. Сила взаимодействия между точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.
Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2 :

$$F \sim q_1, \quad F \sim q_2, \quad F \sim \frac{1}{r^2}$$

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

4. **[Закон Кулона]** В системе СИ сила F равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где $k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, а $[q] = \text{Кл}$ (кулон).

Два единичных заряда на расстоянии 1 м будут взаимодействовать с силой $F = 9 \times 10^9 \text{ Н}$. Для измерения заряда те должны в первую очередь сохраняться.

5. **[Закон сохранения электрического заряда]** В замкнутой системе суммарный заряд сохраняется:

$$q_\Sigma = \sum_i q_i = \text{const.}$$

6. **[Принцип суперпозиции]** Сила, действующая на данный электрический заряд q , равна векторной сумме всех сил, действующих в системе:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i k \frac{q q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (2)$$

7. **[Дискретность электрического заряда]** Существует элементарный заряд $\bar{e} = 1,6 \times 10^{-19}$ Кл. Заряд любой частицы является кратным элементарному:

$$q = n\bar{e}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заряд электрона равен $q_{\text{эл}} = -\bar{e}$, протона $q_{\text{пр}} = +\bar{e}$.

2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Сила \mathbf{F} , действующая на заряд q , всегда пропорциональна его величине, поэтому (2) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (3)$$

где вектор \mathbf{E} называют *вектором напряженности электрического поля*. Это аналог формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. \mathbf{E} и \mathbf{g} являются характеристиками данной точки пространства.

$$[E] = \frac{H}{K_{\text{л}}},$$

$$\mathbf{F} = q \sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = q \sum_i \mathbf{E}_i = q\mathbf{E}.$$

Поле в данной точке есть суперпозиция полей, порождаемых всеми зарядами в системе.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{E}_i = k \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad E_i = k \frac{q_i}{r_i^2}.$$

Электрическое поле создается зарядами и действует на заряды. Заряды не действуют друг на друга и взаимодействуют посредством полей, которые создают.

3 Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Покажем, что электрическая сила консервативна. В силу принципа суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

откуда

$$A = \sum_i A_i.$$

Поле электрического заряда центрально симметричное, следовательно работа электрических сил по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Если есть консервативная сила, то есть и потенциальная энергия. Например, силе $\mathbf{F}_{\text{грав}} = G \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$ соответствует потенциальная энергия $E = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. Рассуждая аналогично, определим *потенциальную энергию электрического поля, порождаемого зарядом*:

$$E_{\text{п}} = +k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$E_{\text{п}} = \sum_i E_i = \sum_i k \frac{q q_i}{r_i} = q \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Скалярную величину $\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{q}$ назовем *электрическим потенциалом точки*.

$$[\varphi] = \frac{ДЖ}{Кл} = В \text{ (вольт)}.$$

Для потенциала также выполняется принцип суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал действует на заряды и создается зарядами. Знак потенциала соответствует знаку заряда, его породившего.

Пусть заряд q передвигается в электрическом поле из точки 1 в 2. Тогда работа электрической силы запишется как

$$A = E_{\pi_1} - E_{\pi_2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Назовем величину $U = \varphi_1 - \varphi_2$ *напряжением* и запишем работу A в виде

$$A = qU. \quad (5)$$

Заряд q называется *пробным*, если он достаточно мал, чтобы в условии данной задачи не менять распределение и картину поля от всех остальных зарядов.

Для визуального представления полей используются силовые линии — воображаемые линии, в каждой точке сонаправленные с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Густота — величина $\Gamma = \frac{N}{S}$ — это отношение числа N силовых линий, проходящих через единицу площади S , к S ; иначе говоря, густота — это «плотность» силовых линий.

Эквипотенциальная поверхность — это множество точек пространства, имеющих одинаковый потенциал.

3.1 Связь поля с потенциалом

Мы показали, что по перемещению заряда q в электрическом поле равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны,

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

тогда

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E \cos \alpha dl = \int_1^2 E_l dl.$$

При малых l верно, что

$$-d\varphi = E_l dl,$$

откуда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (6)$$

В пространстве соответственно имеем

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz},$$

что также можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Все эти соображения наводят на новую размерность напряженности E :

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3.2 Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

1. Силовые линии не пересекаются.
2. Электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности. Возьмем пробный заряд и перенесем его вдоль эквипотенциальной поверхности. Запишем работу, совершенную полем:

$$A = qE dl \cos \alpha = -q d\varphi = 0, \quad E \cos \alpha = 0,$$

следовательно, вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, а при перемещении заряда вдоль нее поле не совершает работу.

3. Силовое поле направлено в сторону уменьшения потенциала.
4. Силовая линия не пересекает эквипотенциальную поверхность дважды.
5. В точках пересечения эквипотенциальных поверхностей поле равно нулю; иначе говоря, поле равно нулю там, куда нельзя провести перпендикуляр.
6. В силу центральной симметрии поля, порождаемого точечным зарядом, эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы.

7. Силовые линии не могут начинаться в пространстве нигде, кроме как в точках положительных зарядов, и заканчиваться нигде, кроме как в точках отрицательных.

4 Уравнения электростатики

Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяет подсчитать поле и силу в любой точке пространства. Альтернативный способ сделать это — уравнения Максвелла.

Вспомним, что электрическое поле центрально симметрично и консервативно:

$$A = \oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \oint E_l dl = 0,$$

тогда запишем равенство, называемое *вторым уравнением Максвелла*:

$$\oint E_l dl = 0. \quad (7)$$

Циркуляция электростатического поля равна нулю, что отражает консервативность этого поля. Это значит, что замкнутых силовых линий нет.

Докажем формулу Гаусса-Остроградского.

Из каждой замкнутой поверхности выходит число силовых линий, пропорциональное суммарному заряду:

$$N \sim q_\Sigma.$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{dN}{dS} \sim E, \quad E dS \sim dN.$$

Величину

$$d\Phi_E = \mathbf{E} dS$$

назовем потоком электрического поля. Для произвольной поверхности поток электрического поля сквозь нее равен

$$\Phi_E = \int_S E_n dS. \quad (8)$$

Таким образом мы определили понятие, аналогичное интуитивному понятию густоты. Теперь

$$N \sim \oint E dS \sim q_\Sigma. \quad (9)$$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду внутри поверхности.

Поток считается положительным, если поле идет наружу.

Запишем (9) с коэффициентом пропорциональности:

$$\oint E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (10)$$

где ε_0 – величина, называемая диэлектрической проницаемостью вакуума. Пропорцию (9) можно записать в таком виде, поскольку $E \sim \frac{1}{R^2}$, $S \sim R^2$, а тогда $ES = \text{const} \sim q$.

Рассмотрим теперь простую сферическую поверхность с зарядом внутри. Тогда

$$\Phi_E = 4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Но $E = k \frac{q}{R^2}$, значит,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (11)$$

Имеем $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}$.