Конспекты

по

электродинамике

2015б

ФТШ – 2014

Содержание

1 Список опытных фактов

1. Существует электрическое взаимодействие, обусловленное зарядами между телами.

2. Заряды существуют двух знаков: положительные и отрицательные. Заряды одного знака отталкиваются, разных – притягиваются.

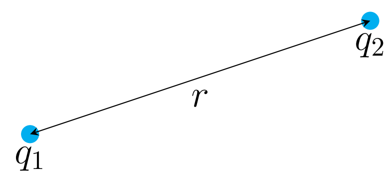
3. Сила взаимодействия между точечными зарядами (электрическая сила) обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.
   Рассмотрим два точечных заряда q_1 и q_2. Тогда:
   $$F \sim q_1, \quad F \sim q_2, \quad F \sim \frac{1}{r^2}, \text{ откуда } F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$
   

   Рис. 1: Два точечных заряда, q_1 и q_2

4. **[Закон Кулона]** В системе СИ сила F равна
   $$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1}$$
   где $k = 9 \times 10^9 \, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, а $[q] = \text{Кл}$ (кулон).
   Два единичных заряда на расстоянии 1 м будут взаимодействовать с силой $F = 9 \times 10^9\,\text{Н}$. Для измерения заряда те должны в первую очередь сохраняться.

5. **[Закон сохранения электрического заряда]** В замкнутой системе суммарный заряд сохраняется:
   $$q_\Sigma = \sum_i q_i = \text{const}.$$

6. **[Принцип суперпозиции]** Сила, действующая на данный электрический заряд q, равна векторной сумме всех сил, действующих в системе:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i k\frac{qq_i\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{2}$$

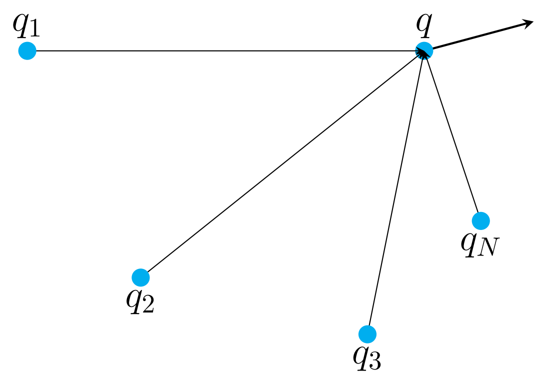


Рис. 2: Система зарядов

7. **[Дискретность электрического заряда]** Существует элементарный заряд $\bar{e} = 1,6 \times 10^{-19}$ Кл. Заряд любой частицы является кратным элементарному:

$$q = n\bar{e}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заряд электрона равен $q_{\text{эл}} = -\bar{e}$, протона $q_{\text{пр}} = +\bar{e}$.

2 Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд q, всегда пропорциональна его величине, поэтому (2) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \tag{3}$$

где вектор $\mathbf{E}$ называют *вектором напряженности электрического поля* . Это аналог формулы $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{g}$ являются характеристиками данной точки пространства.

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}},$$

$$\mathbf{F} = q\sum_i \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3} = q\sum_i \mathbf{E}_i = q\mathbf{E}.$$

Поле в данной точке есть суперпозиция полей, порождаемых всеми зарядами в системе.

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

$$\mathbf{E}_i = k\frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad E_i = k\frac{q_i}{r_i^2}.$$

Электрическое поле создается зарядами и действует на заряды. Заряды не действуют друг на друга и взаимодействуют посредством полей, которые создают.

3 Потенциалы. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Покажем, что электрическая сила консервативна . В силу принципа суперпозиции

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i,$$

откуда

$$A = \sum_i A_i.$$

Поле электрического заряда центрально симметричное , следовательно работа электрических сил по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = q \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0.$$

Если есть консервативная сила, то есть и потенциальная энергия . Например, силе $\mathbf{F}_{\text{грав}} = G\frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$ соответствует потенциальная энергия $E = -G\frac{m_1 m_2}{r}$. Рассуждая аналогично, определим *потенциальную энергию электрического поля, порождаемого зарядом*:

$$E_{\text{п}} = +k\frac{q_1 q_2}{r}. \tag{4}$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$E_{\text{п}} = \sum_i E_i = \sum_i k\frac{q q_i}{r_i} = q\sum_i k\frac{q_i}{r_i}.$$

Скалярную величину $\varphi = \dfrac{E_{\text{п}}}{q}$ назовем *электрическим потенциалом точки* .

$$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В (вольт)}.$$

Для потенциала также выполняется принцип суперпозиции :

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i k\frac{q_i}{r_i}.$$

Потенциал действует на заряды и создается зарядами. Знак потенциала соответствует знаку зарада, его породившего.

Пусть заряд q передвигается в электрическом поле из точки 1 в 2. Тогда работа электрической силы запишется как

$$A = E_{\text{п}_1} - E_{\text{п}_2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Назовем величину $U = \varphi_1 - \varphi_2$ *напряжением* и запишем работу A в виде

$$A = qU. \tag{5}$$

Заряд q называется *пробным* , если он достаточно мал, чтобы в условии данной задачи не менять распределение и картину поля от всех остальных зарядов.

Для визуального представления полей используется силовые линии — воображаемые линии, в каждой своей точке сонаправленные с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Густота — величина $\Gamma = \dfrac{N}{S}$ — это отношение числа N силовых линий, проходящих через единицу площади S, к S; иначе говоря, густота — это «плотность» силовых линий.

Эквипотенциальная поверхность — это множество точек пространства, имеющих одинаковый потенциал.

3.1 Связь поля с потенциалом

Мы показали, что работа по перемещению заряда q в электрическом поле равна

$$A = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right).$$

С другой стороны,

$$A = \int\limits_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = q \int\limits_1^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl},$$

тогда

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \int\limits_1^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int\limits_1^2 E \cos\alpha \, dl = \int\limits_1^2 E_l \, dl.$$

При малых l верно, что

$$-d\varphi = E_l \, dl,$$

откуда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \tag{6}$$

В пространстве соответственно имеем

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz},$$

что также можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi.$$

Все эти соображения наводят на новую размерность напряженности E:

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

3.2 Свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

1. Силовые линии не пересекаются.

2. Электрическое поле перпендикулярно эквипотенциальной поверхности. Возьмем пробный заряд и перенесем его вдоль эквипотенциальной поверхности. Запишем работу, совершенную полем:

   $$A = qE\,dl\cos\alpha = -q\,d\varphi = 0, \quad E\cos\alpha = 0,$$

   следовательно, вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, а при перемещении заряда вдоль нее поле не совершает работу.

3. Силовое поле направлено в сторону уменьшения потенциала.

4. Силовая линия не пересекает эквипотенциальную поверхность дважды.

5. В точках пересечения эквипотенциальных поверхностей поле равно нулю; иначе говоря, поле равно нулю там, куда нельзя провести перпендикуляр.

6. В силу центральной симметрии поля , порождаемого точечным зарядом , эквипотенциальные поверхности имеют форму сферы.

7. Силовые линии не могут начинаться в пространстве нигде, кроме как в точках положительных зарядов, и заканчиваться нигде, кроме как в точках отрицательных.

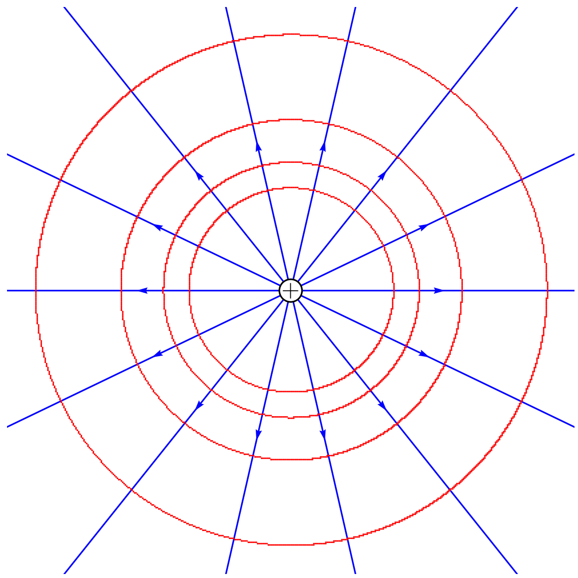


Рис. 3: Положительный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

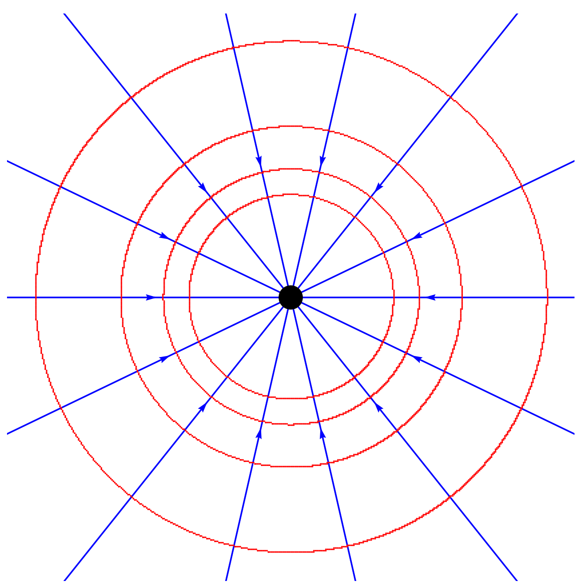


Рис. 4: Отрицательный заряд, его поле и эквипотенциальные поверхности

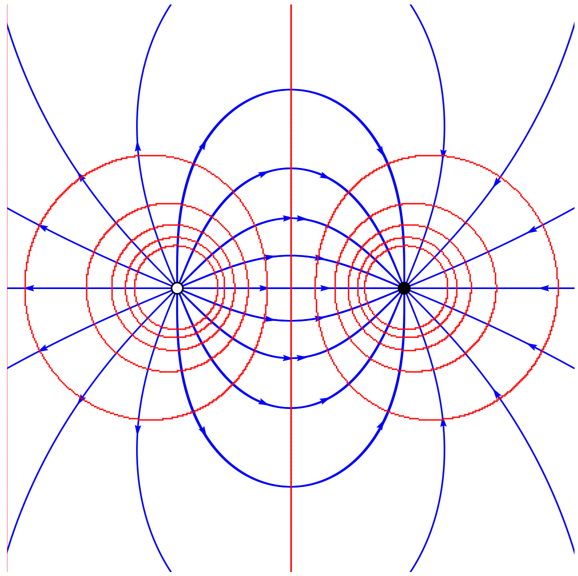


Рис. 5: Система из двух равных по модулю противоположных зарядов, картина поля и эквипотенциальные поверхности

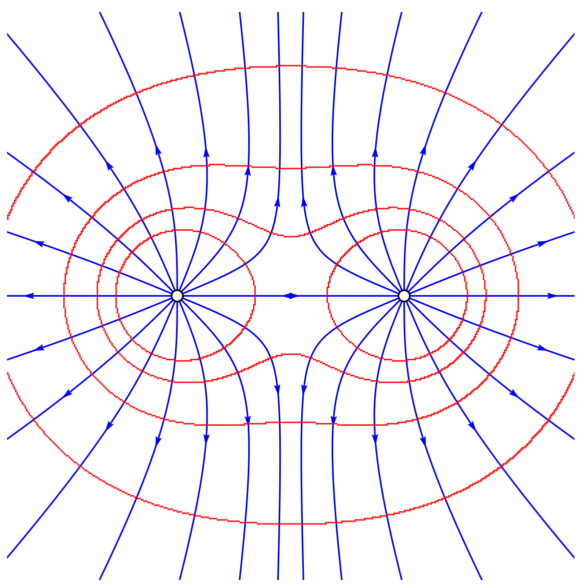


Рис. 6: Система из двух одинаковых зарядов, картина поля и эквипотенциальные поверхности

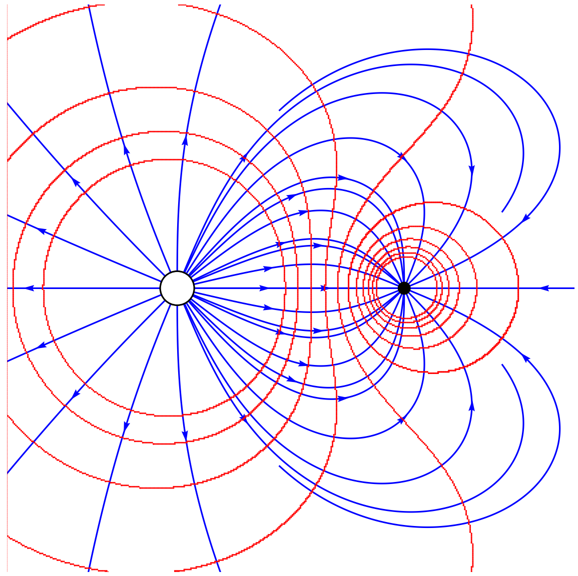


Рис. 7: Система из двух противоположных зарядов, картина поля и эквипотенциальные поверхности

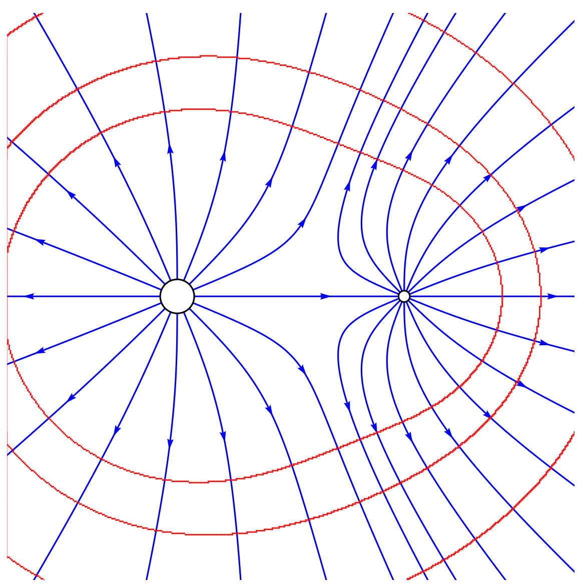


Рис. 8: Система из двух зарядов одного знака, картина поля и эквипотенциальные поверхности

4 Уравнения электростатики

Закон Кулона и принцип суперпозиции позволяет подсчитать поле и силу в любой точке пространства. Альтернативный способ сделать это — уравнения Максвелла .

Вспомним, что электрическое поле центрально симметрично и консервативно :

$$A = \oint \mathbf{F}\mathbf{dl} = q \oint E_l \, dl = 0,$$

тогда запишем равенство, называемое *вторым уравнением Максвелла*:

$$\oint E_l \, dl = 0. \tag{7}$$

Циркуляция электростатического поля равна нулю, что отражает консервативность этого поля. Это значит, что замкнутых силовых линий нет.

Докажем формулу Гаусса-Остроградского (первое уравнение Максвелла) .

Из каждой замкнутой поверхности выходит число силовых линий, пропорциональное суммарному заряду:

$$N \sim q_\Sigma.$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{dN}{dS} \sim E, \quad E \, dS \sim dN.$$

Величину

$$\mathbf{d}\Phi_E = \mathbf{E} \, dS$$

назовем потоком электрического поля. Для произвольной поверхности поток электрического поля сквозь нее равен

$$\Phi_E = \int\limits_S E_n \, dS. \tag{8}$$

Таким образом мы определили понятие, аналогичное интуитивному понятию густоты. Теперь

$$N \sim \oint E \, dS \sim q_\Sigma. \tag{9}$$

Поток электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду внутри поверхности. Поток считается положительным, если поле идет наружу.

Запишем (9) с коэффициентом пропорциональности:

$$\oint E_n\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{10}$$

где ε_0 – величина, называемая диэлектрической проницаемостию вакуума . Пропорцию (9) можно записать в таком виде, поскольку $E \sim \dfrac{1}{R^2}$, $S \sim R^2$, а тогда $ES = \text{const} \sim q$.

Рассмотрим теперь простую сферическую поверхность с зарядом внутри. Тогда

$$\Phi_E = 4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

Но $E = k\dfrac{q}{R^2}$, значит,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{11}$$

Отсюда $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}}$.

5 Применение уравнений электростатики

Мы записали два уравнения:

$$\oint E_n\,dS = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}, \tag{12}$$

$$\oint E_l\,dl = 0. \tag{13}$$

Сформулируем *принцип симметрии*: если некоторая система зарядов переходит сама в себя при некотором преобразовании симметрии (поворот, сдвиг, отражение), то картина создаваемого поля переходит сам а в себя при этом преобразовании.

Рассмотрим равномерно заряженную сферу радиуса R. При повороте вокруг прямой r вектор $\mathbf{E}$ переходит сам в себя. В каждой точке сферы радиуса r поле нормально и равно E, а

$$\oint E_n\,dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, \tag{14}$$

где $q(r)$ – заряд внутри сферы радиуса r с центром в той же точке. Отсюда

$$E = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q(r)}{\varepsilon_0}. \tag{15}$$

Если $r < R$, то поле E равно нулю, так как $q(r) = 0$. При $r \geqslant R$ $q(r) = q$. Окончательно

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r^2}, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{16}$$

Для поля однородно заряженного шара запишем снова: $E(r) = k\dfrac{q(r)}{r^2}$. В силу распределения заряда запишем

$$\frac{q(r)}{q} = \frac{V(r)}{V} = \frac{r^3}{R^3},$$

откуда

$$q(r) = q\frac{r^3}{R^3},$$

а

$$E(r) = \begin{cases} kq\dfrac{r}{R^3}, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r^2}, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{17}$$

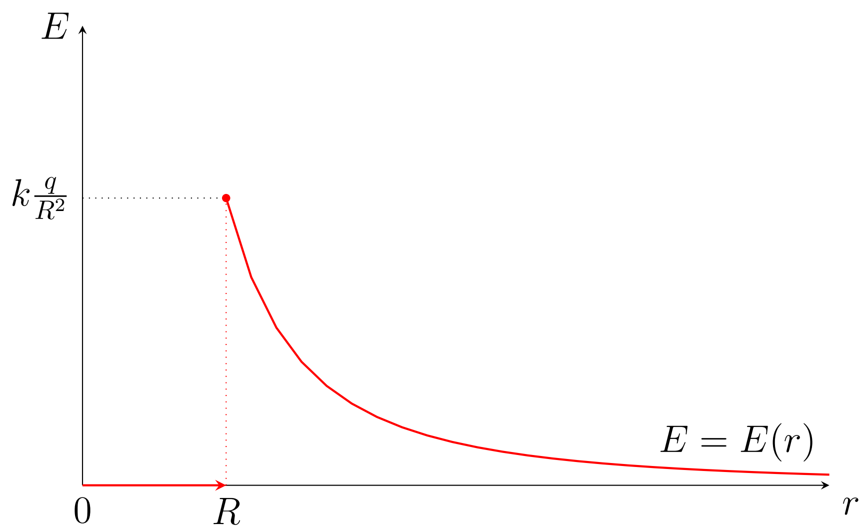


Рис. 9: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженной сферы

Найдем зависимость потенциала от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для обоих случаев. Перепишем (6) как $d\varphi = -E\,dr$, откуда

$$\varphi(r) = -\int E\,dr. \tag{18}$$

Проинтегрируем функцию $E = E(r)$ для сферы, получим

$$\varphi(r) = \begin{cases} C_1, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r} + C_2, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{19}$$

Выясним характер констант интегрирования C_1 и C_2. Положим C_2 равной нулю и сформулируем принцип: если в любой точке простарнства поле конечно, то потенциал непрерывен в этой точке. В самом деле, если потенциал в этой точке непрерывен, то за конечное время поле может совершить бесконечную работу при переносе заряда через эту точку, что обязательно чему-то там противоречит. Тогда,

$$\varphi(R) = \lim_{r\to R^-} \varphi(r) = C_1.$$

Окончательно

$$\varphi(r) = \begin{cases} k\dfrac{q}{R}, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r}, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{20}$$

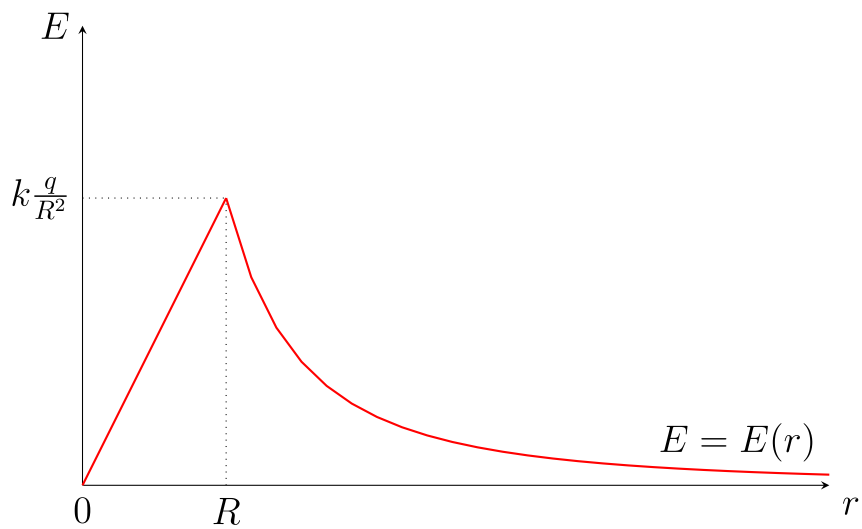


Рис. 10: График поля в зависимости от расстояния $E = E(r)$ для однородно заряженного шара

Проделаем то же для шара:

$$\varphi(r) = \begin{cases} -kq\dfrac{r^2}{2R^3} + C_1, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r} + C_2, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{21}$$

$C_2 = 0$. В силу непрерывности

$$\varphi(R) = k\frac{q}{R} = C_1 - kq\frac{R^2}{2R^3}, \quad C_1 = \frac{3}{2}k\frac{q}{R}.$$

Окончательно

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}kq\dfrac{r^2}{R^3} + \dfrac{3}{2}k\dfrac{q}{R}, & 0 \leqslant r < R, \\ k\dfrac{q}{r}, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что график этой функции гладок в точке R в силу её дифференцируемости в этой точке.

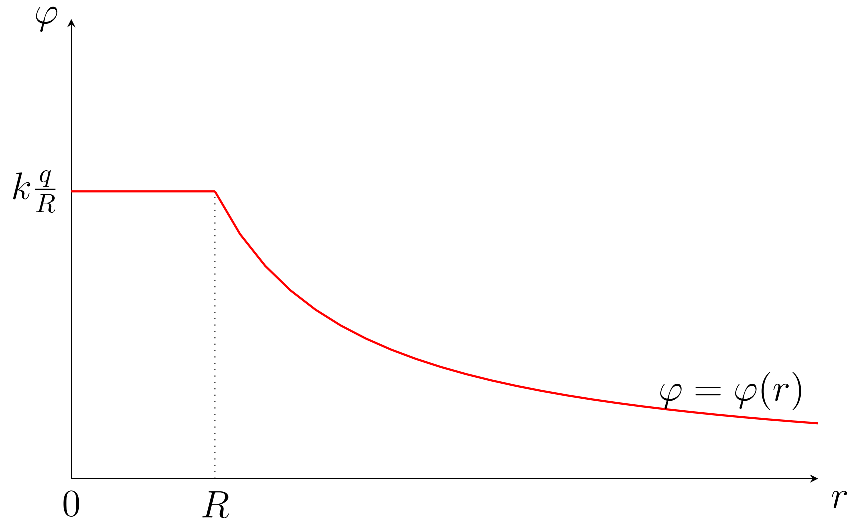


Рис. 11: График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для однородно заряженной сферы

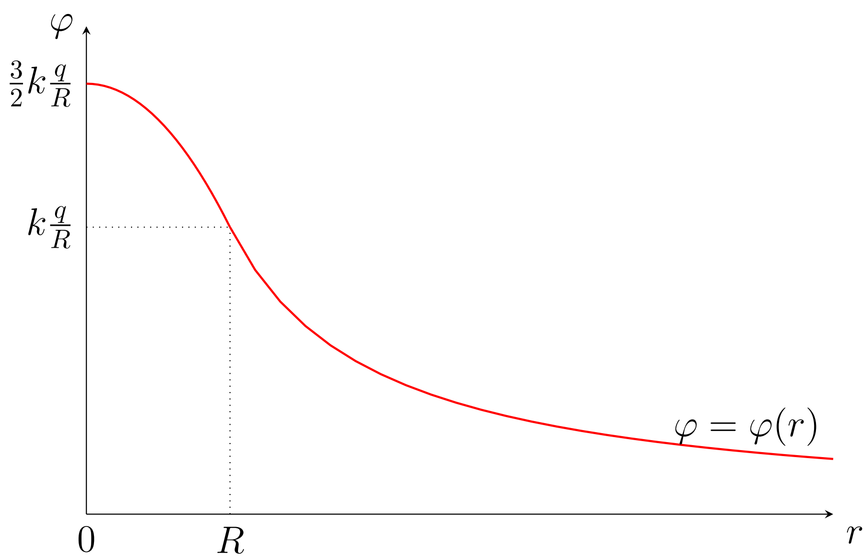


Рис. 12: График потенциала в зависимости от расстояния $\varphi = \varphi(r)$ для однородно заряженного шара

6 Электрический диполь

Пусть сумма всех зарядов в системе равна нулю:

$$\sum q_i = 0.$$

Тогда сумма всех положительных зарядов по модулю равна сумме всех отрицательных зарядов:

$$\sum_{(+)} q_i = +q, \quad \sum_{(-)} q_i = -q.$$

Рассмотрим центр заряда (аналог центра масс) (рис. 6):

$$\mathbf{R}_{(+)} = \frac{\sum_{(+)} q_i \mathbf{r}_i}{\sum_{(+)} q_i}, \quad \mathbf{R}_{(-)} = \frac{\sum_{(-)} q_i \mathbf{r}_i}{\sum_{(-)} q_i}.$$

Полезная характеристика диполя – дипольный момент:

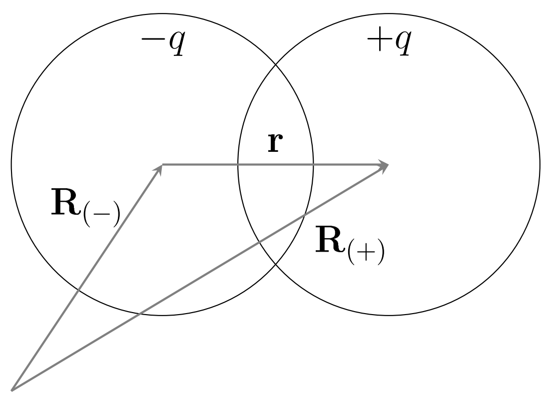


Рис. 13: Электрический диполь

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r}. \tag{23}$$

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{R}_{(+)} - \mathbf{R}_{(-)}) = \sum_{(+)} q_i \mathbf{r}_i + \sum_{(-)} q_k \mathbf{r}_k = \sum_{\text{по всем}} q_i \mathbf{r}_i. \tag{24}$$

Рассмотрим диполь во внешнем постоянном электрическом поле. Запишем момент сил, действующий на диполь (рис. 6):

$$M = 2F \cdot \frac{l}{2} \sin\alpha = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha = dE\sin\alpha,$$

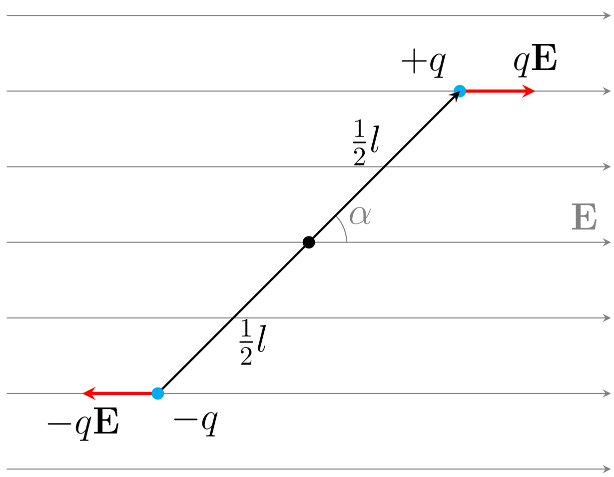


Рис. 14: Электрический диполь во внешнем постоянном электрическом поле

откуда

$$\mathbf{M} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \tag{25}$$

На каждый диполь в электрическом поле действует момент сил, который ориентирует диполь сонаправленно с полем.

6.1 Энергия диполя во внешнем поле

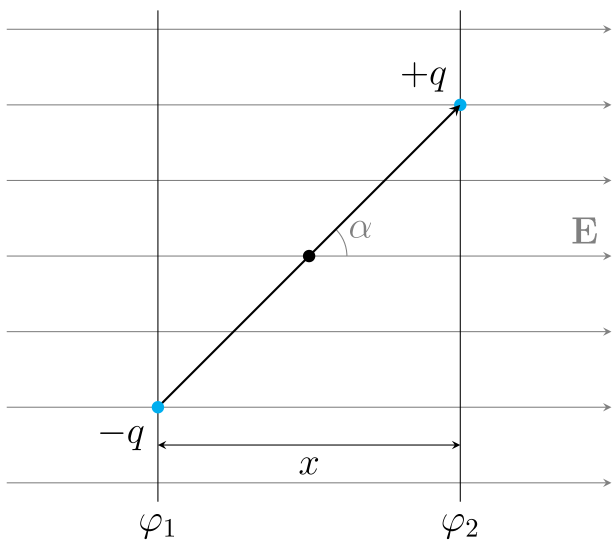


Рис. 15: Электрический диполь во внешнем постоянном электрическом поле

Полная потенциальная энергия диполя во внешнем поле (рис. 6.1):

$$E_{\text{п}} = +q\varphi_2 + (-q)\varphi_1 = q(\varphi_2 - \varphi_1) = -qEx = -qEl\cos\alpha = -Ed\cos\alpha.$$

$$E_{\text{п}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}. \tag{26}$$

Если диполь сонаправлен с полем, то он обладает наименьшей энергией:

$$\mathbf{d} \uparrow\uparrow \mathbf{E}, \quad E_{\text{п}} = -Ed.$$

Таким образом, сонаправленное положение диполя с внешним полем – наиболее выгодное.

6.2 Электрическое поле диполя

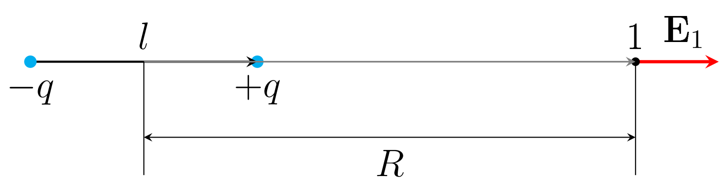


Рис. 16: Точка 1 на расстоянии R от центра диполя

Найдем поле, создаваемое диполем в точках 1 и 2 на расстоянии R от центра диполя, если $l \ll R$, где l – длина диполя (рис. 6.2). Тогда

$$E_1 = k\frac{q}{(R-l/2)^2} - k\frac{q}{(R+l/2)^2} = \frac{kq\left[(R+l/2)^2 - (R-l/2)^2\right]}{(R+l/2)^2(R-l/2)^2} =$$

$$= \frac{2kqRl}{\left(R^2 - (l/2)^2\right)^2}.$$

Пренебрегая длиной диполя по сравнению с R, напишем

$$E_1 \simeq \frac{2kqRl}{R^4} = \frac{2kql}{R^3},$$

$$E_1 \simeq \frac{2kd}{R^3} \tag{27}$$

Поступим аналогично для точки 2:

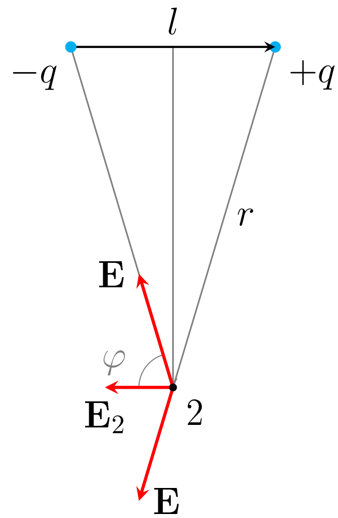


Рис. 17: Точка 2 на расстоянии R от центра диполя

$$E_2 = 2E\cos\varphi = -2k\frac{q}{r^2}\cdot\frac{l/2}{r} = -\frac{kd}{r^3} = -\frac{kd}{\left(R^2+(l/2)^2\right)^{3/2}},$$

$$E_2 \simeq -\frac{kd}{R^3}. \tag{28}$$

Без доказательства приведем общую формулу:

$$\mathbf{E} = k\frac{3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{d}}{R^3} \quad \text{(верно при } l \ll R). \tag{29}$$

Этой формулой описывается вся картина поля, создаваемого дипо-

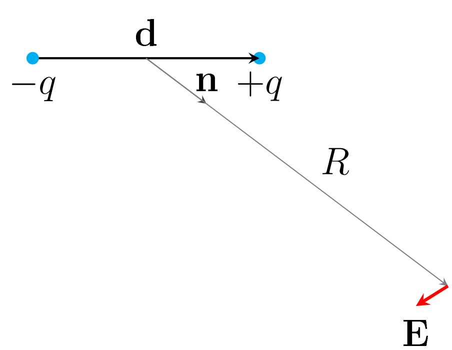


Рис. 18: Поле диполя в точке на расстоянии R

лем. Заметим, что оно спадает как $\dfrac{1}{R^3}$.

7 Изолированный проводник. Поле внутри и вне его

Проводник – вещество, в котором есть достаточно свободных зарядов.

Возьмем изолированный проводник (в том смысле, что электроны его не покидают) и поместим его во внешнее поле. Поскольку заряды свободны, то они начнут перемещаться по проводнику. Проводник в результате поляризуется и сам создает поле. Поток зарядов в нем прекратится, когда внутреннее поле скомпенсирует внешнее. Таким образом, проводником будем называть вещество, в котором всегда достаточно заряда, чтобы скомпенсировать внутри себя любое внешнее поле:

$$\mathbf{E}_{\text{внутр}} = \mathbf{E}_{\text{внешн}} + \mathbf{E}_{\text{комп}} = 0, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{внут}} = 0.$$

По крайней мере один электрон оторвется от каждого атома. Между тем, телефон А. М. несет заряд в 100000 кулон.

В проводнике происходит поляризация, и, спустя малое время релаксации, любое поле внутри проводника оказывается скомпенсированным. Итак, основное свойство проводника –

$$\mathbf{E}_{\text{внутр}} = 0. \tag{30}$$

Следствия:

1. Проводник – эквипотенциальный объем. Для любых двух точек 1 и 2 в проводнике имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l \, dl = 0, \quad \text{откуда} \varphi_1 = \varphi_2.$$

2. Поле вне проводника перпендикулярно его поверхности (потому что он – эквипотенциальный объем).

3. Заряд в веществе проводника находится только на его поверхности, а внутри проводника заряда нет. Действительно, рассмотрим объем внутри проводника и запишем для него первое уравнение Максвелла:

$$0 = \oint E_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда $q = 0$.

4. Если внутри проводника есть полость, то поле этой полости никак не зависит от внешних зарядов и полей. Если в самой полости нет заряда, то поле в ней равно нулю.

Список иллюстраций

Предметный указатель